Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Matheus Aguiar Melo

Criação de um e-book para trabalhar Programação Linear na Educação Básica: Uma abordagem utilizando Modelagem Matemática e a Teoria da Carga Cognitiva

Belo Horizonte
2026

Matheus Aguiar Melo

CRIAÇÃO DE UM E-BOOK PARA TRABALHAR PROGRAMAÇÃO LINEAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO MODELAGEM MATEMÁTICA E A TEORIA DA CARGA COGNITIVA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Jônathas Douglas Santos de Oliveira

Coorientador
Dênis Emanuel da Costa Vargas

Banca Examinadora
Carlos Magno Martins Cosme
Danielle Franco Nicolau
Petra Maria Bartmeyer

Belo Horizonte
2026

Melo, Matheus Aguiar
M528c Criação de um e-book para trabalhar programação linear na Educação Básica: uma abordagem utilizando modelagem matemática e a teoria da carga cognitiva / Matheus Aguiar Melo. – 2026.
68 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Jônathas Douglas Santos de Oliveira.
Coorientador: Dênis Emanuel da Costa Vargas.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática – Livros didáticos – Teses. 2. Modelagem Matemática – Teses. 3. Programação Linear – Teses. 4. Otimização – Teses. 5. Aprendizagem cognitiva – Teses. 6. Educação infantil – Teses. 7. Ensino fundamental – Teses. 8. Ensino médio – Teses. I. Oliveira, Jônathas Douglas Santos de. II. Vargas, Dênis Emanuel da Costa. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 510

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MATHEUS AGUIAR MELO

CRIAÇÃO DE UM E-BOOK PARA TRABALHAR PROGRAMAÇÃO LINEAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO MODELAGEM MATEMÁTICA E A TEORIA DA CARGA COGNITIVA

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado Profissional em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Data da defesa: 28/08/2026
Data de aprovação: 28/08/2026

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
JONATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA
Data: 01/09/2026 08:26:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jônathas Douglas Santos de Oliveira
Presidente da banca examinadora - CEFET-MG

Documento assinado digitalmente
DENIS EMANUEL DA COSTA VARGAS
Data: 31/08/2026 13:39:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Dênis Emanuel da Costa Vargas
Vice-presidente da banca examinadora - CEFET-MG

Documento assinado digitalmente
CARLOS MAGNO MARTINS COSME
Data: 31/08/2026 13:30:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Carlos Magno Martins Cosme
Membro da banca examinadora - CEFET-MG

Documento assinado digitalmente
DANIELLE FRANCO NICOLAU
Data: 28/08/2026 20:32:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Danielle Franco Nicolau
Membro da banca examinadora - UFV – Campus Florestal

Documento assinado digitalmente
PETRA MARIA BARTMEYER
Data: 28/08/2026 19:16:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Petra Maria Bartmeyer
Membro da banca examinadora - IMECC – Unicamp

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela vida, pela força e pela sustentação ao longo desta jornada.

Aos meus pais e à minha irmã Milla, expresso meu mais profundo agradecimento pelo amor incondicional, pelo incentivo constante e por estarem sempre ao meu lado, especialmente nos momentos em que o caminho se tornou mais difícil.

Ao meu orientador, Jônathas, agradeço pela paciência, pelo incentivo, pela disponibilidade e pelos aprendizados compartilhados durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da vida: Brendo, Eduardo, Gabriel, Gabriela, Renan e Vanessa, agradeço por acreditarem em mim, mesmo nos momentos em que eu próprio tive dificuldade de acreditar.

Aos professores e amigos do PROFMAT, em especial: Daniel, Júnior e Valéria, agradeço pela parceria, pelos momentos de risadas e também pelos desafios compartilhados. Vocês foram suporte e refúgio ao longo desta trajetória, e esta conquista também carrega um pouco de cada um de vocês.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo minha eterna gratidão.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo desenvolver um e-book prático e acessível para o ensino de um método de otimização particularmente útil e adequado a estudantes da Educação Básica: a Programação Linear. Inicialmente, são discutidos os principais fundamentos da Modelagem Matemática, bem como seu potencial para desenvolver competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), evidenciando como a otimização se mostra um tema pertinente nesse contexto. Em seguida, com o intuito de subsidiar a elaboração do e-book, foi realizada uma análise de dissertações do PROFMAT, examinando como o tema tem sido abordado na Educação Básica. A Programação Linear é explorada ao longo do trabalho, com a apresentação de seus principais conceitos e fundamentos essenciais para a produção do produto educacional. Por fim, o e-book foi desenvolvido com base na Teoria da Carga Cognitiva, que estabelece princípios para a elaboração de materiais didáticos com o objetivo de reduzir esforços cognitivos desnecessários e potencializar a aprendizagem. Assim, espera-se que o material produzido constitua um recurso de apoio consistente para professores interessados em introduzir a Programação Linear no contexto da Educação Básica.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Otimização; Programação Linear; Educação Básica; Teoria da Carga Cognitiva.

Abstract

This work aims to develop a practical and accessible e-book for teaching an optimization method that is particularly useful and suitable for students in Basic Education: Linear Programming. Initially, the main foundations of Mathematical Modeling are discussed, as well as its potential to develop competencies outlined in the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC), demonstrating how optimization proves to be a relevant topic in this context. Subsequently, to support the development of the e-book, an analysis of PROFMAT dissertations was conducted, examining how the topic has been approached in Basic Education. Linear Programming is explored throughout the work, with the presentation of its main concepts and essential foundations for the production of the educational product. Finally, the e-book was developed based on Cognitive Load Theory, which establishes principles for creating instructional materials aimed at reducing unnecessary cognitive effort and enhancing learning. Thus, it is expected that the produced material will serve as a consistent support resource for teachers interested in introducing Linear Programming in the context of Basic Education.

Keywords: Mathematical Modeling; Optimization; Linear Programming; Basic Education; Cognitive Load Theory;

Lista de Figuras

2.1 O aluno e o professor nos casos de Modelagem Matemática 14

3.1 Dissertações localizadas por palavra-chave no repositório PROFMAT (2018–2025) 23

4.1 Semiplano correspondente à restrição $4x_1 + 2x_2 \leq 40$. 43
4.2 Semiplano correspondente à restrição $2x_1 + 3x_2 \leq 32$. 44
4.3 Região Viável do Exemplo 4.3.1 44
4.4 Curvas de nível de $f(x_1,x_2)$ para $k = 200,400,600,800,1000$ 45
4.5 Curva de nível $f(x_1,x_2) = 1060$, correspondente ao valor máximo que intersecta a região viável no ponto (7,6). 46
4.6 Polígono que representa a região viável do problema e os seus vértices. . . 48

5.1 Representação simplificada da Arquitetura Cognitiva Humana Fonte: Adaptada de [31] 57
5.2 Balanceamento cognitivo para uma aprendizagem eficiente. Fonte: Adaptada de [32] 59

Sumário

1 Introdução **8**

2 Modelagem Matemática **10**
2.1 A Modelagem Matemática como metodologia de ensino 10
2.2 Modelagem Matemática e a BNCC 15
2.3 Otimização na Educação Básica 19

3 Estado da Arte: A Otimização no PROFMAT **22**
3.1 Análise qualitativa das dissertações 23
3.2 Análise comparativa das dissertações 28
3.2.1 Quanto aos métodos de otimização abordados 29
3.2.2 Quanto às ferramentas de apoio utilizadas 30
3.2.3 Quanto aos materiais educacionais desenvolvidos 32
3.2.4 Quanto às etapas de ensino trabalhadas 33
3.3 Observações Finais 35

4 Programação Linear **37**
4.1 Conceitos Fundamentais da Programação Linear 37
4.2 Problemas Unidimensionais 40
4.3 Problemas Bidimensionais 42
4.4 Problemas de Dimensões Superiores e a Biblioteca PuLP 49

5 O Produto Educacional: Teoria da Carga Cognitiva no Ensino de Programação Linear **55**
5.1 A Teoria da Carga Cognitiva 55
5.2 O produto educacional desenvolvido 59

6 Considerações Finais **63**

Referências **65**

1 Introdução

A busca por sentido e utilidade nos conteúdos estudados é uma peça fundamental para que ocorra um aprendizado eficiente dos estudantes. Nesse contexto, a Modelagem Matemática surge como uma metodologia de ensino que tem como pilar aproximar a Matemática da realidade dos alunos, mostrando a sua aplicação em situações cotidianas [1].

Aliada a essa abordagem metodológica, a otimização, definida como o processo de encontrar a melhor solução possível para um problema, apresenta grande potencial pedagógico, visto que está presente em diversas situações concretas, desde a maximização do lucro de uma empresa até a minimização de custos na produção de uma fábrica. Entre as formas de se otimizar, a Programação Linear se destaca devido a sua acessibilidade, uma vez que seus fundamentos e princípios podem ser estudados por meio de conteúdos já presentes no currículo escolar.

Embora relevante, o ensino da otimização na Educação Básica é pouco explorado, sendo, na maioria das vezes, restrito ao Ensino Superior nas disciplinas de Cálculo. Além disso, a partir de uma análise documental realizada nesta pesquisa, quando abordado em um contexto escolar, há uma carência de variedade de materiais concretos que possam ser utilizados para apoiar o professor na abordagem desse assunto em sala de aula.

Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo desenvolver um e-book acessível para o ensino da Programação Linear na Educação Básica, que integra a teoria e a prática, fazendo uso de recursos tecnológicos para potencializar o ensino. Alinhado com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o material foi desenvolvido de acordo com os princípios da Modelagem Matemática e fundamentado na Teoria da Carga Cognitiva, que estabelece princípios para o design de materiais didáticos que priorizam a redução de esforços cognitivos desnecessários.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta a Modelagem Matemática, abordando seus principais fundamentos a partir das perspectivas de autores relevantes da área e discutindo seu papel como metodologia de ensino. Em seguida, são discutidas as relações entre a Modelagem Matemática e a Base Nacional

Comum Curricular (BNCC), destacando suas contribuições para o desenvolvimento das competências ali previstas .

No Capítulo 3 é apresentado um levantamento de dissertações desenvolvidas no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT. Essa análise permitiu compreender como o tema desta pesquisa vem sendo abordado, identificar lacunas existentes e subsidiar o desenvolvimento do produto educacional proposto neste trabalho.

Já no Capítulo 4, são aprofundados os fundamentos teóricos da Programação Linear, método de otimização escolhido como foco do produto educacional desenvolvido. Nesse capítulo, são apresentados os principais conceitos, bem como diferentes métodos de resolução para problemas em diferentes dimensões.

O Capítulo 5 tem como principal objetivo apresentar o produto educacional desenvolvido, um e-book intitulado "Programação Linear na Educação Básica". O material foi elaborado à luz da Teoria da Carga Cognitiva, teoria que busca orientar a construção de materiais didáticos capazes de otimizar o uso dos recursos cognitivos dos estudantes, a fim de potencializar a aprendizagem. Além disso, são discutidos aspectos relacionados à estrutura e organização do material desenvolvido.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais, retomando os objetivos da pesquisa, sintetizando suas principais contribuições, refletindo sobre as limitações e apontando direções para pesquisas futuras.

Declaração de uso de Inteligência Artificial Generativa: A elaboração deste trabalho contou com o auxílio de ferramentas de Inteligência Artificial Generativa em diferentes etapas e para distintas finalidades. As plataformas ChatGPT, Gemini e DeepSeek foram empregadas principalmente para revisão ortográfica e aprimoramento da fluidez textual, bem como para auxiliar na elaboração de tabelas e gráficos por meio de códigos LaTeX e na geração de algumas imagens utilizadas neste trabalho.

O uso dessas ferramentas ocorreu durante as fases de redação, formatação e elaboração do material didático, em conformidade com a Portaria CNPq n.º 2.664, de 6 de março de 2026. A responsabilidade pelo conteúdo deste trabalho, incluindo as escolhas teóricas e metodológicas, a verificação das referências bibliográficas e a revisão crítica de todas as informações apresentadas, é exclusivamente do autor.

2 Modelagem Matemática

Este capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos que embasam esta pesquisa. Inicialmente, é discutida a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, abordando seus principais fundamentos, potencialidades e sua efetividade em desenvolver competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em seguida, discute-se a otimização como um tema de grande potencial pedagógico na Educação Básica, destacando a Programação Linear como um método acessível e alinhado ao currículo escolar.

2.1 A Modelagem Matemática como metodologia de ensino

Uma das perguntas mais recorrentes feitas a um professor de Matemática é: "onde vou usar isso na minha vida?". Essa questão, apesar de simples, revela uma necessidade fundamental dos estudantes: atribuir sentido e utilidade prática aos conteúdos estudados. Quando esse significado não é percebido, é comum que ocorra desmotivação, resultando em um aprendizado mecânico e pouco significativo.

Nesse contexto, destaca-se uma metodologia de ensino que busca aproximar a Matemática da realidade dos alunos, evidenciando sua aplicabilidade em situações concretas: a Modelagem Matemática.

Segundo Bassanezi [1], o interesse pela Matemática é despertado de forma mais fácil quando está associado a estímulos vindos do mundo real. Nesse sentido, o autor define a Modelagem Matemática como "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

Ampliando essa compreensão, Burak [2] define a Modelagem Matemática como "um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões". Em uma perspectiva complementar, Barbosa [3] concebe a Modelagem como "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da

realidade". Em conjunto, essas definições evidenciam diferentes dimensões da Modelagem Matemática. Enquanto Bassanezi enfatiza seu caráter de tradução da realidade para a linguagem matemática, Burak e Barbosa complementam essa perspectiva ao destacarem, respectivamente, seu potencial prático/preditivo e sua natureza investigativa, na qual o estudante assume um papel ativo na construção do conhecimento.

Considerando que, por muitos anos, o ensino de Matemática esteve centrado na memorização de procedimentos e na ênfase em algoritmos, a Modelagem Matemática surge como alternativa a esse modelo tradicional, propondo uma abordagem mais investigativa e contextualizada. De acordo com Burak [4], a introdução da Modelagem Matemática no Brasil deve-se a um grupo de professores, dentre os quais se destacam Ubiratan D'Ambrosio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos vinculados ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que contribuíram para a difusão dessa abordagem por meio de publicações, cursos de formação e orientação de pesquisas no país.

Um marco importante para a consolidação da Modelagem Matemática como metodologia de ensino na Educação Básica foi a dissertação de mestrado de Dionísio Burak, defendida em 1987 na Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro. A partir desse momento, a Modelagem passou a ser compreendida não apenas como uma ferramenta da Matemática Aplicada, mas também como uma perspectiva pedagógica voltada ao ensino e à aprendizagem. Assim, consolida-se como uma abordagem que valoriza o interesse do aluno, a contextualização dos conteúdos e a construção ativa do conhecimento, contribuindo para um processo de aprendizagem mais eficiente.

Segundo Burak [5], a utilização eficiente dessa metodologia no Ensino Básico deve considerar, primeiramente, o interesse dos alunos em determinado tema, seguido pela coleta de dados e informações no ambiente onde esse interesse se manifesta. Nesse processo, o professor assume o papel de "ponte" entre o tema escolhido e os conteúdos matemáticos a serem trabalhados. O autor ainda sugere que a metodologia siga cinco etapas principais:

1. **Escolha do tema**: nessa etapa, é fundamental considerar um assunto de interesse dos alunos, como esportes, política ou saúde, seja ele proposto pelo professor ou sugerido pela própria turma.
2. **Pesquisa exploratória**: essa etapa tem como objetivo principal a compreensão do tema, coletando informações e dados em sites e na literatura. Esse processo permite aos alunos identificarem variáveis relevantes, compreender melhor o modelo e levantar informações para construí-lo.
3. **Levantamento do(s) problema(s)**: a partir dos dados coletados, nessa etapa, os alunos

têm a missão levantar questionamentos a respeito do tema. Essa etapa contribui para o desenvolvimento da capacidade de questionamento, análise crítica e formulação de hipóteses, tornando o estudante protagonista no processo de aprendizagem, permitindo-lhe questionar diferentes perspectivas de um mesmo problema.

4. **Resolução do(s) problema(s) e o trabalho com conteúdos relativos ao tema**: aesse momento, o professor introduz os conceitos matemáticos que podem ser utilizados para solucionar as questões levantadas na etapa anterior. Nessa etapa, os conceitos que usualmente são apresentados de forma isolada ganham um significado por meio da situação levantada.
5. **Análise crítica da(s) solução(ões)**: por fim, essa etapa se caracteriza pela reflexão sobre os resultados obtidos no processo, o que proporciona um momento ideal para discussões e argumentações, contribuindo para o desenvolvimento de alunos autônomos com bom senso crítico.

Essa metodologia de ensino se mostra eficaz em diversos aspectos. Klüber [6] destaca em seu trabalho que, além de construir e desenvolver conceitos e conteúdos matemáticos, visto que os conceitos matemáticos surgem à medida que é necessário resolver um problema real, a Modelagem favorece também a contextualização, pois atribui significado e sentido à Matemática, fazendo com que ela deixe de ser vista como um conjunto abstrato de regras e passe a assumir um papel social e funcional.

Outro aspecto importante levantado pelo autor é a possibilidade de integração com outras áreas do conhecimento. Ao trabalhar com situações cotidianas, a Modelagem dialoga naturalmente com diferentes campos do saber, como Geografia, Economia, Ciências, entre outros. Essa interdisciplinaridade favorece uma formação mais completa dos estudantes, rompendo com a tradicional fragmentação dos conteúdos comumente vistos no ambiente escolar.

Além disso, a socialização entre os alunos é favorecida pela metodologia, incentivando a troca de ideias e desenvolvendo habilidades como argumentação e construção coletiva do conhecimento. Nesse processo, os alunos têm a oportunidade de expressar suas opiniões e se deparar com diferentes pontos de vista, tornando-se pessoas mais cooperativas e comunicativas.

Por fim, destaca-se a ruptura com o currículo linear, possibilitando maior flexibilidade no ensino, de forma que não é o conteúdo que determina o problema, mas o contrário. Isso foge do sistema de ensino tradicional, no qual o conteúdo é sequencial e engessado.

Para além da busca de sentido e utilidade para os conteúdos, Barbosa [3] amplia essa compreensão ao enxergar a Modelagem Matemática sob uma visão sócio-crítica. Para o

autor, a Modelagem deve ser compreendida não apenas como um meio de resolver problemas, mas como uma oportunidade para analisar, questionar e interpretar criticamente a realidade por meio da Matemática. Essa ideia é denominada pelo autor como conhecimento reflexivo, no qual os estudantes não apenas usam a matemática para resolver problemas, mas também questionam a validade dos resultados, os limites do modelo e seus impactos na sociedade.

Nesse contexto, o autor compreende a Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem, de modo que ela não se caracteriza apenas pela criação de modelos matemáticos, mas também como um espaço em que os alunos têm liberdade para levantar, investigar e questionar problemas da realidade. Inspirado em Skovsmose, Barbosa destaca ainda que o papel do professor é organizar condições que favoreçam a investigação e a problematização nesse ambiente. Nesse sentido, o envolvimento efetivo dos estudantes ocorre quando seus interesses vão ao encontro da proposta desenvolvida, tornando a participação ativa do aluno um elemento central no processo de aprendizagem.

Além disso, destaca-se que as atividades de Modelagem possuem natureza aberta, uma vez que não existem procedimentos previamente definidos nem um único caminho para a resolução das situações investigadas, permitindo que diferentes estratégias e conceitos matemáticos emerjam ao longo do processo. Para ilustrar como a Modelagem Matemática pode ser incluída no currículo, o autor aborda três casos que apresentam diferentes possibilidades.

- **Caso 1**: o professor possui um papel mais ativo no processo de Modelagem. Cabe a ele propor o tema, formular a situação-problema e fornecer as informações necessárias para sua resolução. Assim, os alunos concentram-se principalmente na análise e resolução do problema, sem a necessidade de realizar pesquisas ou coletar dados fora da sala de aula.
- **Caso 2**: os alunos possuem maior participação no processo de Modelagem. O professor apresenta um tema ou uma situação oriunda da realidade, porém, os estudantes tornam-se responsáveis pela busca, coleta e organização das informações necessárias para a resolução do problema proposto.
- **Caso 3**: os alunos assumem maior protagonismo no processo. São eles que definem os temas a serem investigados, formulam os problemas, realizam a coleta de dados e conduzem a investigação. Ao professor cabe o papel de mediador, orientando e acompanhando o desenvolvimento das atividades.

A Figura 2.1 apresenta os três casos de implementação da Modelagem Matemática propostos por Barbosa, evidenciando os diferentes níveis de participação do professor e dos alunos ao longo do processo.

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Figura 2.1: O aluno e o professor nos casos de Modelagem Matemática.
Fonte: Barbosa [3].

Observa-se que, à medida que se avança do Caso 1 para o Caso 3, ocorre um aumento do protagonismo do aluno e da abertura investigativa das atividades. Enquanto no Caso 1 o professor assume maior responsabilidade pela elaboração da situação-problema, simplificação e pela disponibilização dos dados, no Caso 3, essas etapas passam a ser compartilhadas e conduzidas pelos próprios alunos, cabendo ao professor um papel mais voltado à mediação e à orientação do processo.

Para exemplificar os casos propostos por Barbosa, podemos considerar uma situação relacionada às despesas em uma conta de energia elétrica. A partir desse mesmo contexto, é possível desenvolver atividades de Modelagem com diferentes níveis de abertura investigativa e participação discente, caracterizando os três casos apresentados pelo autor.

No Caso 1, o professor poderia apresentar aos alunos uma conta de energia contendo informações como consumo mensal, tarifa cobrada e valor total da conta, além de formular um problema específico, como calcular o impacto de um aumento no consumo ou analisar a variação do gasto ao longo dos meses. Nesse caso, os alunos concentram-se principalmente na interpretação dos dados fornecidos e na resolução matemática da situação proposta.

Já no Caso 2, o professor poderia propor uma discussão sobre o consumo de energia elétrica em residências, cabendo aos alunos coletar contas de energia, pesquisar tarifas e organizar os dados necessários para investigar o problema apresentado. Assim, além da resolução matemática, os estudantes passam a participar ativamente da coleta e análise das informações utilizadas na investigação.

Por fim, no Caso 3, os próprios alunos podem escolher investigar questões relacionadas ao consumo de energia, como o impacto do uso excessivo de aparelhos eletrônicos, estratégias para economizar energia ou a comparação entre diferentes formas de consumo. Nessa situação, os estudantes tornam-se responsáveis pela formulação dos problemas, coleta de dados, investigação e análise dos resultados, enquanto o professor atua como mediador do processo.

O exemplo apresentado evidencia que uma mesma situação pode ser abordada de diferentes maneiras dentro da Modelagem Matemática, variando conforme o nível de participação dos alunos e do professor no processo investigativo. Isso reforça a ideia defendida por Barbosa de que a Modelagem não deve ser compreendida como uma metodologia rígida ou engessada, mas como uma abordagem flexível, capaz de se adaptar às diferentes realidades escolares, objetivos pedagógicos e níveis de autonomia do aluno.

Embora a Modelagem Matemática apresente diferentes fundamentos teóricos e diversas possibilidades de aplicação, é necessário compreender como essa abordagem se relaciona com as atuais diretrizes curriculares oficiais. Na próxima sessão, será apresentado como a Modelagem se relaciona com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.2 Modelagem Matemática e a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [7], é um documento de caráter normativo, cujo principal objetivo é definir um conjunto de aprendizagens, habilidades e competências que todo estudante do país deve desenvolver ao longo de todas as etapas da Educação Básica, da Educação Infantil ao Ensino Médio. Antes da homologação da BNCC (ocorrida em 2017 para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, e em 2018 para o Ensino Médio), o sistema educacional brasileiro sofria com a forte heterogeneidade entre os estados e municípios, fazendo com que houvesse grande desigualdade no acesso ao conhecimento escolar. Nesse contexto, a BNCC propõe o estabelecimento de referenciais curriculares comuns para todo o território nacional.

Um dos principais objetivos da BNCC é garantir a qualidade educacional. Para isso, estabeleceram-se 10 competências gerais que precisam ser asseguradas a todos os estudantes ao longo da Educação Básica. Segundo o documento, competência é definida como a "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". Dessa forma, as competências gerais articulam-se aos componentes curriculares, orientando a formulação de habilidades que devem ser desenvolvidas progressivamente ao longo da Educação Básica.

A BNCC, inicialmente, é organizada por etapas da Educação Básica, estabelecendo objetivos de aprendizagem e desenvolvimento específicos para cada etapa educacional. Nos Ensinos Fundamental e Médio, os conhecimentos são divididos em áreas, como Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas, buscando promover uma formação integrada dos estudantes.

Além das competências gerais, a BNCC apresenta competências específicas para cada área do conhecimento e para os diferentes componentes curriculares. Essas competências desdobram-se em habilidades que devem ser desenvolvidas progressivamente ao longo da trajetória escolar, orientando a elaboração dos currículos, práticas pedagógicas e processos avaliativos.

Nesse contexto, ao analisar as competências gerais e específicas propostas pela BNCC, observa-se que a Modelagem Matemática, enquanto metodologia de ensino, pode contribuir significativamente para o desenvolvimento dessas aprendizagens. Dentre as competências gerais, destacam-se duas que apresentam forte relação com os princípios da Modelagem Matemática:

> **2.** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL [7] p. 9)

Essa competência dialoga diretamente com os princípios centrais da Modelagem Matemática. Bassanezi, ao definir a Modelagem como a "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" [8], evidencia o processo de formulação e resolução de problemas presente na competência apresentada pela BNCC.

Da mesma forma, essa competência manifesta-se no próprio processo de Modelagem descrito por Burak, cuja metodologia envolve etapas como escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento de problemas, resolução e análise crítica das soluções encontradas. Nesse contexto, investigação, reflexão e formulação de hipóteses tornam-se elementos presentes em todo o processo investigativo.

> **7.** Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. (BRASIL [7] p. 9)

Ao analisarmos as etapas da Modelagem propostas por Burak, observa-se que a quinta etapa refere-se à análise crítica das soluções encontradas, um processo que envolve ações diretamente relacionadas à competência em questão. Nesse momento, os alunos são incentivados a interpretar dados, defender pontos de vista e refletir sobre os impactos das soluções construídas, desenvolvendo um posicionamento crítico e capacidade argumentativa.

Barbosa amplia essa compreensão ao defender que a análise crítica deve ultrapassar a simples validação matemática dos resultados, alcançando também a problematização da realidade, seus impactos sociais e suas implicações éticas. Essa perspectiva relaciona-se ao conhecimento reflexivo defendido pelo autor, no qual os estudantes desenvolvem a capacidade de argumentar, negociar e defender decisões de forma crítica e consciente, alinhando-se aos princípios presentes na Competência 7 da BNCC.

Embora as competências gerais da BNCC evidenciem aproximações importantes com os princípios da Modelagem Matemática, essa relação torna-se ainda mais evidente ao analisarmos as competências específicas da área de Matemática. Na etapa do Ensino Fundamental, destacam-se as competências:

> **2.** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> **4.** Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> **5.** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> **7.** Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. ([7, p. 267])

A análise dessas competências evidencia que a Modelagem Matemática, no contexto do Ensino Fundamental, apresenta-se como uma abordagem metodológica especialmente adequada para o desenvolvimento das aprendizagens previstas pela BNCC. As competências 2 e 5 destacam a importância de o estudante superar uma visão da Matemática restrita à aplicação de algoritmos, valorizando o raciocínio lógico, o espírito investigativo, a resolução de problemas e o uso de ferramentas matemáticas para compreender o mundo. Tais aspectos dialogam diretamente com os fundamentos da Modelagem Matemática, uma vez que essa metodologia parte da investigação de situações reais, da formulação de problemas e da construção de representações matemáticas capazes de auxiliar na interpretação e na

solução dessas situações.

Além disso, as competências 4 e 7 aproximam-se da perspectiva socio-crítica da Modelagem Matemática, que é discutida por Barbosa. A "observação sistemática de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais", bem como a "discussão de projetos relacionados a questões de urgência social", exigem que o estudante mobilize conhecimentos matemáticos não apenas para resolver problemas, mas também para interpretar, argumentar e problematizar a realidade em que está inserido de forma 'ética, democrática, sustentável e solidária". Dessa forma, a Modelagem contribui para que a Matemática seja compreendida como uma ferramenta de leitura crítica do mundo, favorecendo a formação de sujeitos mais autônomos, participativos e capazes de tomar decisões fundamentadas.

As aproximações entre a Modelagem Matemática e a BNCC não se restringem ao Ensino Fundamental. Na etapa do Ensino Médio, são descritas 5 competências:

> **1.** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> **2.** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> **3.** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> **4.** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> **5.** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. ([7, p. 531])

Diferentemente do que ocorre nas competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, em que algumas competências apresentam relação mais direta com os princípios da Modelagem Matemática, no Ensino Médio observa-se uma aproximação mais abrangente, uma vez que as cinco competências específicas podem ser mobilizadas por meio dessa abordagem. Isso evidencia que, nessa etapa da Educação Básica, a Modelagem

Matemática apresenta um maior potencial para o desenvolvimento das aprendizagens previstas pela BNCC.

As competências 1 e 3 estão fortemente alinhadas aos princípios da Modelagem Matemática, ao propor a interpretação de situações cotidianas, a utilização da Matemática para construir modelos e resolver problemas em diferentes contextos, bem como a análise das soluções, incentivando a investigação e a argumentação. A visão sociocrítica descrita por Barbosa também pode ser identificada na competência 2, que enfatiza a tomada de decisões éticas e socialmente responsáveis a partir de problemas contextualizados.

Ao modelar um problema, é possível e fundamental representá-lo matematicamente de forma a facilitar a busca pelas soluções, habilidade que a competência 4 tem o intuito de desenvolver. Por fim, a competência 5 é desenvolvida desde as etapas iniciais da Modelagem, como a pesquisa exploratória e o levantamento de problemas, até a validação e a análise crítica dos resultados obtidos, formulando hipóteses e validando resultados.

Em suma, a análise das competências da BNCC evidencia que a Modelagem Matemática oferece um caminho privilegiado para o desenvolvimento das aprendizagens previstas no documento. Dentre os diversos contextos que podem ser explorados por essa metodologia, destacam-se os problemas de otimização, presentes em inúmeras situações do cotidiano, os quais serão explorados na próxima seção.

2.3 Otimização na Educação Básica

Conforme discutido anteriormente, a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos. Dentre os inúmeros tipos de problemas que podem ser abordados por meio dessa metodologia, destacam-se aqueles que envolvem a busca pela melhor solução possível diante de determinadas condições, os chamados problemas de otimização.

A otimização, conforme definida por Gomes [9, p. 9], pode ser entendida como "o processo de encontrar a melhor solução, por meio da maximização ou minimização de uma função que modela a situação investigada (problema real) sujeita (possivelmente) a certos critérios ou restrições". Desse modo, busca-se determinar os pontos em que a função assume seus valores ótimos, sejam eles máximos ou mínimos.

A otimização está presente em diversas áreas do conhecimento e também em situações cotidianas, sendo aplicada tanto em problemas simples, como o cálculo do lucro de uma empresa, quanto em questões mais complexas, como a determinação da melhor forma de produzir a maior quantidade possível de itens utilizando recursos limitados.

> "A otimização de processos é de extrema importância nas mais diversas áreas do conhecimento humano: seja na física, onde pode ser usada para determinar a configuração mais estável ou conveniente de uma molécula; na química, onde procuram-se as condições ideais para a realização de um experimento (quimiometria); na engenharia, onde se deseja relacionar elementos externos como o fluxo de produção, o gasto de energia; na economia, onde se procura o lucro máximo ou o custo mínimo; na geologia, para estudar-se a prospecção do solo, e, em muitas outras áreas como a estatística, psicologia e biologia. Consciente ou inconscientemente, e independente da classe social e cultural, uma parte considerável da nossa vida é usada na busca da melhor escolha e tomada de decisão, na minimização dos custos de um dado produto, no menor gasto de energia e a realização de atividades no menor tempo." ([10, p. 10])

Embora a otimização possua grande relevância devido à busca por soluções ótimas, esse tema é frequentemente abordado apenas no ensino superior, especialmente em disciplinas relacionadas ao Cálculo. Isso ocorre porque muitos problemas de otimização são tradicionalmente resolvidos por meio de ferramentas matemáticas que exigem conhecimentos mais avançados, como o uso de derivadas, ultrapassando, em geral, as habilidades desenvolvidas pelos estudantes da Educação Básica.

Em um contexto da Educação Básica, os problemas de otimização, quando abordados, costumam estar associados principalmente ao estudo das funções quadráticas, por meio da análise do vértice da parábola, responsável por representar os pontos de máximo ou mínimo da função [11, p. 11]. Embora essa abordagem seja relevante, ela limita o estudo da otimização a situações específicas, deixando pouco exploradas outras possibilidades de modelagem e resolução de problemas. Em contextos reais, é comum que as situações envolvam múltiplas variáveis e diversas restrições, exigindo métodos mais amplos para sua análise e solução.

Apesar da forte associação entre otimização e o estudo de derivadas, existem diferentes métodos que possibilitam a resolução de problemas de máximo e mínimo utilizando conhecimentos acessíveis aos estudantes da Educação Básica. Entre essas abordagens, destacam-se a análise gráfica de funções, potencializada pelo uso de softwares matemáticos, a Desigualdade das Médias, que permite estabelecer limites superiores ou inferiores para determinadas expressões algébricas e identificar condições em que esses valores são atingidos, e a Programação Linear, amplamente utilizada em problemas envolvendo restrições e tomadas de decisão. Dessa forma, torna-se possível explorar conceitos de otimização sem a necessidade de recorrer à ferramentas do Cálculo, ampliando as possibilidades de abordagem desse tema na Educação Básica.

Com isso, a otimização revela-se um tema de grande potencial pedagógico para a

Educação Básica, pois possibilita aos estudantes compreender como ferramentas matemáticas podem ser utilizadas em processos de tomada de decisão e na busca por soluções eficientes para situações reais. Além disso, favorece o desenvolvimento de competências relacionadas à investigação, à formulação de hipóteses, à análise de restrições e à interpretação crítica dos resultados obtidos, aspectos alinhados às competências previstas pela BNCC e aos princípios da Modelagem Matemática. Dentre os diferentes métodos de otimização acessíveis ao contexto escolar, destaca-se a Programação Linear, tanto por sua ampla aplicabilidade quanto pelo potencial de articulação com conteúdos presentes no currículo da Educação Básica. Entretanto, antes de se aprofundar nesse método, é fundamental investigar como a otimização tem sido abordada em pesquisas recentes voltadas ao ensino de Matemática. Nesse sentido, o próximo capítulo apresenta um estado da arte das dissertações desenvolvidas no âmbito do PROFMAT, buscando identificar tendências, abordagens e contribuições para o ensino da otimização na Educação Básica.

3 Estado da Arte: A Otimização no PROFMAT

Este capítulo apresenta um estudo de natureza qualitativa e exploratória, estruturado por meio de uma análise documental de dissertações desenvolvidas no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). As dissertações analisadas estão disponíveis no repositório do programa, disponibilizado pela Sociedade Brasileira de Matemática [12]. Visando filtrar os resultados, foram utilizadas palavras-chave como "otimização", "máximos e mínimos" e "programação linear", considerando dissertações que apresentavam esses termos em seus títulos. Como resultado, foram localizadas 75, 19 e 50 dissertações, respectivamente. Vale ressaltar que uma mesma dissertação pode aparecer em mais de uma categoria, uma vez que os termos "otimização", "máximos e mínimos" e "programação linear" não são mutuamente excludentes.

A fim de refinar os resultados, priorizaram-se estudos mais recentes, publicados entre 2018 e 2025, pois, além de oferecerem um panorama atualizado sobre como o conteúdo vem sendo trabalhado, esse intervalo contempla o período de implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o que pode favorecer a identificação de produções mais alinhadas às suas diretrizes. A Figura 3.1 a seguir apresenta a distribuição das dissertações localizadas nesse intervalo, segundo os termos pesquisados, permitindo visualizar a evolução da produção acadêmica sobre o tema.

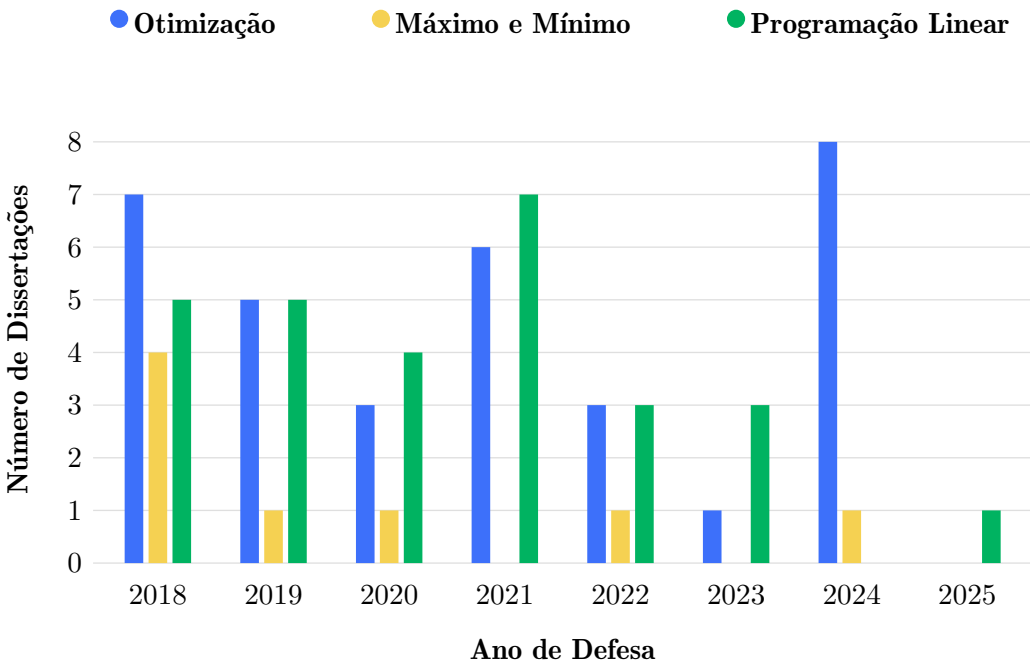


Figura 3.1: Dissertações localizadas por palavra-chave no repositório PROFMAT (2018–2025).

Fonte: Próprio autor.

Com base nessas informações, realizou-se um recorte mais preciso, no qual foram selecionados 12 trabalhos para análise aprofundada. Nesse processo, priorizaram-se dissertações que contemplassem a diversidade de métodos de otimização e que incluíssem materiais concretos voltados à aplicação em sala de aula. Esse recorte permitiu contemplar distintas abordagens metodológicas, bem como destacar sua aplicabilidade por meio dos materiais desenvolvidos, oferecendo um panorama das contribuições dos trabalhos do programa para o ensino de otimização na educação básica.

Para coletar informações e analisar o conteúdo de cada dissertação, assim como para sistematizar e facilitar o processo de leitura, foi elaborada uma planilha de análise contemplando tópicos relevantes: objetivo de cada trabalho, metodologias utilizadas, resultados obtidos e contribuições relevantes. Essa estrutura permitiu organizar as informações de maneira comparativa, identificando semelhanças entre os trabalhos e particularidades de cada um. No tópico a seguir, será realizada uma análise qualitativa das dissertações.

3.1 Análise qualitativa das dissertações

Gonçalves [13] aborda a otimização por meio da Programação Linear, definida pelo autor como o estudo de problemas cujas condições podem ser expressas por funções, equações e inequações lineares. Seu trabalho busca inserir esse conteúdo, tradicionalmente

tratado apenas no ensino superior, no contexto do Ensino Médio, utilizando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. A fundamentação teórica inclui tópicos de Álgebra Linear e Cálculo, além de uma discussão detalhada sobre o Método Simplex e sua implementação em Python.

Como produto educacional, o autor propõe dois problemas contextualizados, articulando teoria e prática. Para resolvê-los, sugere diferentes abordagens, como o uso do Python, do GeoGebra e do método da exaustão, evidenciando o potencial da programação e dos softwares matemáticos como ferramentas didáticas.

O trabalho realizado por Daum [14] apresenta um amplo estudo teórico e didático sobre a otimização, abordando as condições de Karush-Kuhn-Tucker, que fornecem critérios necessários para a existência de soluções ótimas em problemas de programação não linear. Além disso, discute o método Simplex e o método de pontos interiores, ambos voltados à resolução de problemas de programação linear. Daum adota uma abordagem conceitual, explorando problemas de otimização e destacando métodos de resolução por meio de visualizações algébricas e geométricas.

A partir desse referencial, a autora propõe duas sequências didáticas voltadas para o 8º ano do Ensino Fundamental, com possibilidade de adaptação para outras séries. Ambas abordam problemas de programação linear envolvendo a maximização de lucro e são indicadas para aplicação em quatro a seis aulas. A primeira utiliza o software GeoGebra e a segunda emprega o Geoplano, material manipulativo que representa pontos, formas, retas e relações geométricas. As propostas trabalham a otimização de forma visual e interativa, favorecendo a construção concreta do conhecimento matemático.

Campos [15] propôs uma abordagem para o ensino de funções polinomiais no Ensino Médio, integrando o conceito de otimização ao uso de jogos digitais como recurso pedagógico. A autora utilizou o jogo online e gratuito Bridge Constructor, que simula a construção de pontes com o menor uso de materiais, como ponto de partida para uma sequência didática. A proposta busca introduzir, de forma prática e intuitiva, os conceitos de maximização e minimização, tornando a aprendizagem mais significativa ao articular teoria e prática em um contexto lúdico e próximo da realidade dos estudantes.

Como produto educacional, foi elaborada uma sequência didática destinada à 1ª ano do Ensino Médio, dividida em quatro momentos: na Aula 1, o jogo é usado como situação-problema inicial; na Aula 2, quizzes auxiliam na fixação dos conteúdos; na Aula 3, o GeoGebra é explorado para a visualização gráfica das funções; e, na Aula 4, atividades interdisciplinares ampliam a compreensão do tema. Todas as atividades são voltadas para a otimização de funções de segundo e terceiro grau.

Já Oliveira [16] utiliza a Modelagem Matemática como estratégia de ensino com alunos do Ensino Médio, tendo como foco principal a Otimização Linear por meio da resolução de problemas clássicos. Seu objetivo é promover uma aprendizagem que estimule o pensamento crítico, a criatividade e o raciocínio lógico dos estudantes. A dissertação apresenta um sólido embasamento teórico sobre modelagem e otimização, abordando tópicos como otimização linear contínua (problemas da mistura, do transporte e da mochila), solução gráfica e o problema de corte de estoque unidimensional, considerando diferentes contextos e restrições.

Como produto educacional, a autora propôs e aplicou um conjunto de atividades práticas em duas escolas públicas de Bauru-SP, com dois formatos distintos: atividades extracurriculares presenciais e parte de um componente curricular. No primeiro formato, desenvolvido com alunos da 2ª série do curso Técnico em Desenvolvimento de Sistemas, foram realizadas quatro aulas ao longo de um mês, aproveitando conhecimentos prévios de programação para resolver problemas de otimização com Python, como os da dieta e da mochila booleana. No segundo formato, aplicado nas turmas regulares do Ensino Médio, foram utilizados Excel e GeoGebra para trabalhar problemas como mistura, mochila inteira e corte de estoque, com alunos da 2ª e 3ª séries. As atividades foram alinhadas à BNCC, favorecendo uma abordagem interdisciplinar e contínua, e a dissertação detalha o processo de aplicação, os desafios enfrentados e as devolutivas dos estudantes.

Floriano [17] investiga o uso do GeoGebra como alternativa às técnicas tradicionais de derivação na resolução de problemas de otimização no ensino básico. O autor apresenta uma fundamentação teórica consistente, abordando conceitos de funções, derivação e otimização, além de explorar problemas encontrados em livros didáticos do Ensino Médio.

Em seu trabalho, o autor desenvolveu uma sequência didática destinada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio de escolas públicas do Rio de Janeiro. A proposta é composta por cinco aulas, cada uma acompanhada de um plano detalhado e de uma resolução comentada. Entre os problemas trabalhados, destacam-se a maximização da arrecadação de uma agência de viagens pela ocupação de assentos em um ônibus e a minimização de custos na construção de um oleoduto ou cerca para um terreno retangular. O material elaborado, aliado ao uso do GeoGebra, demonstra o potencial das tecnologias digitais no ensino de otimização e pode ser aplicado diretamente por outros professores.

Outras formas de abordar a otimização no ensino básico são exploradas por Modesti [18], que propõe o uso de dois métodos: baseado no Simplex e busca direta direcional. Ambos se mostram adequados ao contexto da Educação Básica por não exigirem o uso de

derivadas, o que os torna mais acessíveis aos estudantes do Ensino Médio. O autor realiza um estudo aprofundado desses métodos, ilustrando-os com exemplos e comparando suas aplicações e resultados.

Para a aplicação prática, Modesti desenvolveu uma sequência didática com 14 aulas destinadas ao 1º ano do Ensino Médio, etapa em que normalmente se aprofunda o estudo de funções. As seis primeiras aulas tratam de conceitos fundamentais, como definição de função, gráficos, função inversa, injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Na sétima aula, o autor apresenta formalmente o conceito de otimização, explorado nas três aulas seguintes com foco nas técnicas estudadas. A aula 11 é dedicada a exercícios práticos, enquanto a aula 12 introduz a programação como recurso complementar. As duas últimas aulas destinam-se à revisão e avaliação dos conteúdos.

Com foco no Novo Ensino Médio, Silva [19] propõe a introdução da Programação Linear e Inteira (PLI) como tema para disciplinas eletivas voltadas ao aprofundamento em Matemática e suas Tecnologias. O autor defende que a PLI contribui para o desenvolvimento de competências previstas na BNCC, especialmente aquelas relacionadas à construção de modelos e à resolução de problemas cotidianos. A dissertação apresenta um sólido referencial teórico sobre modelagem matemática, alinhando-a às diretrizes da BNCC, e aborda conceitos fundamentais de Programação Linear e Inteira.

A principal proposta consiste na criação de três disciplinas eletivas para as turmas de 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio, independentes da disciplina regular de Matemática. A primeira, com 40 horas, introduz os conceitos de linearidade e otimização por meio da Programação Linear, utilizando o GeoGebra e o método gráfico. A segunda, com 80 horas, aprofunda a formulação e interpretação de modelos matemáticos. Por fim, a terceira, também com 80 horas, apresenta o método Simplex para a resolução algébrica de problemas. Todas as propostas incluem planos descritivos detalhados alinhados ao Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB), fornecendo subsídios para futuras aplicações em sala de aula.

Camargo [20] desenvolve seu trabalho com foco no estudo das funções como ponto de partida para a abordagem da otimização no Ensino Médio. O autor realiza um levantamento teórico consistente e utiliza o software GeoGebra como ferramenta de apoio, permitindo a visualização gráfica e a exploração interativa dos conceitos. Um dos objetivos centrais do estudo é promover a interdisciplinaridade, conectando os conteúdos de funções com situações-problema reais e contextualizadas.

O autor descreve em seu trabalho uma sequência didática composta por seis encontros presenciais, aplicada a uma turma do 3º ano do Ensino Médio em uma escola

estadual no interior do Paraná. No primeiro encontro, foi aplicado um questionário diagnóstico para avaliar a familiaridade dos alunos com o tema; no segundo, foram retomados conceitos básicos de funções, como domínio, imagem e tipos principais. Os três encontros seguintes foram dedicados à resolução de problemas envolvendo área e volume, alinhados ao estudo da otimização. No sexto encontro, um questionário final avaliou os avanços na aprendizagem. O autor disponibiliza os questionários utilizados, descreve os problemas propostos e analisa detalhadamente os resultados obtidos.

Gaby [21] desenvolveu um trabalho que utiliza desigualdades matemáticas como ferramenta central para o ensino de otimização sem recorrer ao uso de derivadas. O autor explora especialmente a desigualdade das médias e a de Cauchy-Schwarz, mas também aborda outras igualmente relevantes, como as desigualdades de Jensen, Young, Hölder e Minkowski.

O trabalho apresenta um capítulo dedicado à resolução de 17 problemas de otimização utilizando a desigualdade das médias, reunindo um amplo conjunto de situações-problema com suas respectivas soluções. Essa lista pode ser utilizada por professores em diferentes contextos, servindo tanto como material de apoio para as aulas quanto como recurso para olimpíadas de matemática ou atividades de aprofundamento destinadas a alunos interessados em desafios relacionados ao tema.

Carvalho [22] aborda a otimização por meio da Programação Linear com o auxílio do GeoGebraBook, recurso on-line e gratuito que permite ao estudante explorar diferentes representações matemáticas de forma interativa, favorecendo a compreensão dos conceitos. A autora integra conteúdos como funções, equações e inequações lineares a problemas de otimização baseados na modelagem matemática, destacando a importância da construção de modelos e do uso da visualização gráfica na obtenção de soluções ótimas.

Ao fim de seu trabalho, a autora apresenta uma sequência com quatro problemas de Programação Linear aplicáveis ao Ensino Médio, todos elaborados no GeoGebraBook e com link de acesso para professores. O primeiro problema familiariza os alunos com a ferramenta, propondo a escolha do melhor local para construir uma escola de modo a minimizar distâncias. O segundo envolve a maximização do lucro na produção de minicarrinhos de rolimã; o terceiro explora a otimização no jogo Minecraft, um jogo que é bastante popular entre os alunos, tornando o conteúdo mais atrativo; e o último aborda a produção de mesas e cadeiras, ampliando os contextos de aplicação. A sequência evidencia diferentes estratégias para explorar a otimização como ferramenta de resolução de problemas.

Ramos [11] centra sua pesquisa nas funções cúbicas, explorando métodos para

identificar seus pontos de máximo e mínimo sem o uso de derivadas. Para isso, a autora recorre a conceitos como transformações de funções, realizando translações que permitem estabelecer uma relação entre as abscissas desses pontos e a estrutura da função original.

A autora propõe uma sequência didática voltada a alunos do 3º ano do Ensino Médio, composta por cinco aulas. As três primeiras têm como foco a introdução das funções cúbicas, explorando o comportamento de seus gráficos e apresentando os conceitos de máximo e mínimo. Nas duas aulas seguintes, os alunos resolvem, em duplas, cinco problemas que os incentivam a aplicar os conhecimentos construídos nas etapas anteriores, favorecendo a aprendizagem da otimização com base em conteúdos que já integram o currículo do Ensino Médio.

Por fim, Ferreira [23] analisa diferentes possibilidades para trabalhar a otimização no Ensino Médio, destacando métodos que não exigem conhecimentos de nível superior, tornando o tema mais acessível. O trabalho explora problemas envolvendo funções quadráticas e a identificação de seus valores máximos e mínimos, além de abordar outros métodos, como a desigualdade das médias e a solução gráfica via Programação Linear. Embora apresente brevemente o uso do Cálculo na resolução de problemas, esse conteúdo é sugerido apenas como aprofundamento opcional.

Como produto educacional, o autor propõe uma sequência didática de dez aulas para o 1º ano do Ensino Médio. As quatro primeiras são dedicadas às funções quadráticas, com construção e análise de gráficos e aplicação em situações-problema. Na quinta aula, o GeoGebra é utilizado para explorar visualmente os conceitos, seguido, na sexta, por uma sistematização algébrica dos procedimentos. As aulas 7 e 8 introduzem a Programação Linear por meio de problemas contextualizados. Por fim, nas duas últimas aulas, os alunos resolvem exercícios com o apoio do GeoGebra e consolidam os métodos por meio da sistematização algébrica. O trabalho ainda oferece dois problemas resolvidos passo a passo, permitindo que os professores adaptem facilmente as atividades em sala de aula.

3.2 Análise comparativa das dissertações

A partir da análise descritiva realizada anteriormente, foi possível identificar tendências e padrões nos trabalhos, o que permitiu uma comparação entre eles. Para isso, a análise comparativa foi organizada em quatro eixos principais, que são apresentados a seguir.

3.2.1 Quanto aos métodos de otimização abordados

Nas dissertações analisadas, foram observadas quatro abordagens diferentes para a resolução de problemas envolvendo a otimização. Os autores trabalham a otimização através dos seguintes métodos: a programação linear, que aborda problemas em que tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares; a programação não linear, que, diferente da linear, trata de situações em que tanto as funções quanto as restrições são não lineares; a desigualdade das médias, que se baseia na propriedade entre diferentes tipos de médias (como a média aritmética e a média geométrica) para estabelecer limites máximos ou mínimos em certas expressões; e o estudo de funções, em especial as funções quadráticas e cúbicas, que, através de suas propriedades, torna possível determinar seus pontos de máximo e/ou mínimo sem o uso de derivadas. A Tabela 3.1 a seguir mostra como essas quatro abordagens se distribuem entre os trabalhos analisados.

Tabela 3.1: Métodos de otimização abordados nas dissertações analisadas

Autor	**Programação Linear**	**Programação Não Linear**	**Desigualdade das Médias**	**Estudo de Funções**
Gonçalves (2025)	✓			
Daum (2024)	✓	✓		
Campos (2024)				✓
Oliveira (2024)	✓			
Floriano (2024)				✓
Modesti (2023)	✓			✓
Silva (2022)	✓			
Camargo (2022)				✓
Gaby (2021)			✓	
Carvalho (2021)	✓			
Ramos (2019)				✓
Ferreira (2018)	✓		✓	✓

Fonte: Próprio autor.

É possível observar que o método de programação linear predomina entre as

dissertações analisadas, visto que os problemas de otimização que utilizam dessa abordagem abrangem conteúdos, amplamente vistos no Ensino Fundamental e Médio envolvendo temas como equações lineares com duas incógnitas, desigualdades e funções, além de possibilitar uma visualização gráfica facilitada das situações, tornando seu uso bastante acessível em sala de aula.

O mesmo ocorre com o método baseado no estudo de funções, que também se destaca por sua simplicidade e por utilizar conteúdos presentes nos currículos escolares, como o vértice da parábola, simetrias e transformações no plano cartesiano, tornando essa abordagem especialmente adequada para ser explorada com alunos do Ensino Médio, sem a necessidade de ferramentas avançadas como o cálculo diferencial.

Em contrapartida, foi observado que os métodos baseados na desigualdade das médias e na programação não linear são bem menos explorados nas dissertações analisadas. Isso pode ser explicado pelo maior nível de complexidade dos conteúdos envolvidos, o que acaba dificultando sua aplicação em contextos da Educação Básica e reduzindo sua acessibilidade aos alunos.

Com isso, fica evidente que existem diferentes caminhos possíveis para o ensino de otimização na Educação Básica, mas também se destaca a preferência por métodos mais acessíveis aos alunos, pois apresentam maior aderência aos conteúdos já presentes no currículo escolar.

3.2.2 Quanto às ferramentas de apoio utilizadas

Analisando as dissertações por outra perspectiva, foi possível observar a presença de diferentes ferramentas que auxiliaram os autores no processo de ensino da otimização. Entre elas, destacam-se o GeoGebra, recursos relacionados à programação (como o Python), o Geoplano, jogos digitais e o uso de Excel. Algumas dissertações, no entanto, não utilizaram nenhum tipo de recurso de apoio; esses casos estão indicados na coluna “Ausente” da Tabela 3.2, a qual apresenta, a seguir, em quais dissertações essas ferramentas foram utilizadas

Tabela 3.2: Ferramentas e tecnologias utilizadas nas propostas didáticas

Autor	**GeoGebra**	**Linguagem de Programação**	**Geoplano**	**Jogo**	**Excel**	**Ausente**
Gonçalves (2025)	✓	✓				
Daum (2024)	✓		✓			
Campos (2024)	✓			✓		
Oliveira (2024)	✓	✓			✓	
Floriano (2024)	✓					
Modesti (2023)		✓				
Silva (2022)						✓
Camargo (2022)	✓				✓	
Gaby (2021)						✓
Carvalho (2021)	✓					
Ramos (2019)						✓
Ferreira (2018)	✓			✓		

Fonte: Próprio autor.

O GeoGebra se destaca entre os trabalhos, mostrando-se um excelente aliado no ensino da otimização. Ele está presente em 75% das dissertações analisadas, o que reforça seu papel como ferramenta pedagógica relevante. Ao resolver problemas de otimização, a visualização gráfica do problema é de grande valia, pois além de permitir que o aluno compreenda melhor a situação proposta, torna o processo de aprendizagem mais interativo e interessante.

Outras ferramentas também foram utilizadas, embora com menor frequência. O uso de programação foi visto nos trabalhos de Gonçalves, Oliveira e Modesti mostrando ser uma alternativa mais técnica, integrando a otimização com possíveis conhecimentos digitais dos estudantes. A utilização de jogos digitais apareceu nas dissertações de Campos e Carvalho, demonstrando um esforço em aproximar os conceitos matemáticos da realidade dos alunos, tornando a aprendizagem mais envolvente. O uso do Excel também foi observado pontualmente em Oliveira, evidenciando como uma ferramenta tecnológica tão

conhecida pode ser utilizada além da simples organização de dados em tabelas.

Por fim, Daum apresenta uma proposta pensada para escolas que não dispõem de computadores ou outros recursos digitais, utilizando o Geoplano, uma ferramenta concreta e manipulativa, ideal para ser trabalhada no Ensino Fundamental. Três dissertações não fazem uso de recursos tecnológicos, apresentando maior ênfase na fundamentação teórica e sugerindo abordagens mais tradicionais.

De maneira geral, foi possível observar uma tendência crescente no uso de ferramentas que se aliam aos conteúdos matemáticos, evidenciando sua importância não apenas no auxílio ao professor em seu processo de ensino, mas também no apoio ao aluno em seu processo de aprendizagem.

3.2.3 Quanto aos materiais educacionais desenvolvidos

Nesse processo de análise, também foi possível observar quais materiais voltados ao Ensino Básico foram produzidos. Neste recorte de dissertações, foram identificados dois tipos de materiais recorrentes: sequências didáticas completas, compostas por vários momentos e atividades estruturadas, e problemas ou atividades sugeridos ao professor para serem trabalhados com os alunos. Além disso, um dos trabalhos apresentou uma proposta diferente das demais: a criação de disciplinas eletivas a serem oferecidas no contexto do Novo Ensino Médio. A distribuição desses materiais entre as dissertações pode ser observada na Tabela 3.3 a seguir.

Tabela 3.3: Tipo de material educacional desenvolvido

Autor	**Sequência Didática**	**Atividades/ Problemas**	**Proposta de Disc. Eletivas**
Gonçalves (2025)		✓	
Daum (2024)	✓		
Campos (2024)	✓		
Oliveira (2024)		✓	
Floriano (2024)	✓		
Modesti (2023)	✓		
Silva (2022)			✓
Camargo (2022)	✓		
Gaby (2021)		✓	
Carvalho (2021)		✓	
Ramos (2019)	✓		
Ferreira (2018)	✓		

Fonte: Próprio autor.

Neste sentido, percebe-se uma certa limitação na diversidade de recursos pedagógicos propostos, uma vez que apenas um dos trabalhos analisados apresenta outros tipos de material. Embora tanto as sequências quanto as atividades sejam valiosas, a pouca recorrência de outras possibilidades pode indicar uma oportunidade de ampliação na produção de materiais que dialoguem com diferentes estilos de aprendizagem e contextos escolares.

3.2.4 Quanto às etapas de ensino trabalhadas

Por fim, foi observado em qual etapa de ensino foram aplicados os materiais educacionais abordados na subseção anterior. A Tabela 3.4, a seguir, apresenta quais etapas foram contempladas em cada dissertação.

Tabela 3.4: Etapa de ensino onde o material educacional foi trabalhado

Autor	**Ensino Médio**	**Ensino Fundamental**
Gonçalves (2025)	✓	
Daum (2024)		✓
Campos (2024)	✓	
Oliveira (2024)	✓	
Floriano (2024)	✓	✓
Modesti (2023)	✓	
Silva (2022)	✓	
Camargo (2022)	✓	
Gaby (2021)	✓	
Carvalho (2021)	✓	
Ramos (2019)	✓	
Ferreira (2018)	✓	

Fonte: Próprio autor.

Analisando a Tabela 3.4, é possível verificar um grande foco das dissertações em trabalhar com o Ensino Médio, representando mais de 80% dos trabalhos analisados. Apenas dois trabalhos desenvolveram materiais que pudessem ser aplicados no Ensino Fundamental. Esse cenário aponta para uma escassez de propostas voltadas a essa etapa e para a pouca exploração do conceito de otimização nos anos finais do Ensino Fundamental, apesar de seu potencial. Como demonstrado por Daum e Floriano, é possível trabalhar a otimização com alunos do Ensino Fundamental, utilizando especialmente a programação linear, que exige conhecimentos já presentes no currículo dessa etapa, como sistemas lineares, inequações e gráficos de equações lineares.

Com base na análise comparativa entre as dissertações, foi possível observar uma preferência dos autores por trabalhar métodos de otimização mais acessíveis aos estudantes, como a programação linear e o estudo de funções. Também se destaca a utilização de materiais de apoio, principalmente o GeoGebra, como forma de tornar o ensino mais interessante e interativo. Por fim, observou-se uma baixa variedade de materiais educacio-

nais desenvolvidos, bem como um foco predominante no Ensino Médio, o que evidencia a necessidade de criação de novas propostas voltadas ao Ensino Fundamental, ampliando as possibilidades de aplicação da otimização nessa etapa.

3.3 Observações Finais

Este capítulo teve como principal objetivo analisar de que maneira o ensino de otimização tem sido abordado nas dissertações desenvolvidas no PROFMAT. A partir de uma análise de 12 dissertações, foi possível identificar quais métodos os autores utilizaram para trabalhar o tema, suas estratégias, os recursos empregados e como essas propostas podem ser aplicadas nas escolas.

A análise permitiu perceber uma forte preferência por métodos de otimização mais acessíveis, que dialogam com conteúdos presentes nos currículos escolares, frequentemente apoiados no uso de recursos visuais, tecnológicos e concretos para facilitar o processo de ensino. Também foi possível identificar algumas lacunas relevantes que merecem atenção. A predominância de propostas voltadas ao Ensino Médio reforça a necessidade de ampliar as pesquisas que explorem a otimização no Ensino Fundamental, etapa que já contempla em seu currículo conteúdos diretamente relacionados ao tema, como equações, gráficos e funções. Da mesma forma, a pouca diversidade de materiais pedagógicos produzidos, com grande parte centrada em sequências didáticas, aponta para uma oportunidade de criação de novos recursos capazes de atender a diferentes estilos de aprendizagem e ampliar as possibilidades do professor ao trabalhar o tema em sala de aula.

Diante dessas lacunas, é importante pensar e propor caminhos para futuras pesquisas e para o desenvolvimento de materiais relevantes sobre o tema. No que se refere ao Ensino Fundamental, além da Programação Linear, como trabalhado por Daum (2024) no 8º ano, a otimização pode ser explorada por meio de outros conteúdos presentes no currículo dessa etapa, como a desigualdade das médias e o estudo de funções. Esses temas, por serem intrínsecos ao currículo do Ensino Fundamental, oferecem boas oportunidades para abordar a otimização de forma acessível, especialmente quando trabalhados por meio de problemas contextualizados.

Além disso, há um campo promissor a ser explorado no que diz respeito à criação de produtos educacionais. Foi observado que grande parte dos trabalhos desenvolvidos no PROFMAT tem se apoiado na elaboração de sequências didáticas, uma estratégia que possui méritos importantes, como a organização progressiva dos conteúdos e a orientação detalhada para o professor em sala de aula. Contudo, tais propostas acabam restringindo-se a um roteiro fechado, o que pode limitar a autonomia docente, a adaptação a diferentes

contextos escolares e a exploração de recursos mais interativos. Nesse sentido, é relevante ampliar as possibilidades de produtos, incorporando alternativas como e-books, jogos digitais, aplicativos e materiais manipuláveis, que podem dialogar com diferentes estilos de aprendizagem, diversificar as estratégias de ensino e tornar o estudo do tema mais atrativo e dinâmico para os estudantes.

Este levantamento sistematizou o que já foi desenvolvido no âmbito do PROFMAT e apontou caminhos ainda não explorados, contribuindo para a construção de propostas pedagógicas que desenvolvam no aluno o pensamento crítico e a capacidade de tomar decisões por meio da otimização. Com base nessa fundamentação e nas lacunas identificadas, o próximo capítulo dedica-se ao estudo técnico da Programação Linear, fornecendo os subsídios teóricos necessários para o desenvolvimento do produto educacional que esta dissertação propõe.

4 Programação Linear

A Programação Linear (PL) é um método de otimização que busca encontrar soluções ótimas para problemas modelados por meio de uma função objetivo e restrições lineares. Embora existissem precursores isolados, como Fourier em 1823 e de la Vallée Poussin em 1911, tais trabalhos exerceram pouca influência no desenvolvimento da área. Da mesma forma, um trabalho de Kantorovich, em 1939, acabou sendo negligenciado por questões ideológicas na União Soviética. O marco inicial da programação linear ocorre em 1947, com George Dantzig, motivado pela necessidade do pós-guerra em "mecanizar"o planejamento de mobilização, treinamento e logística da Força Aérea dos EUA. A teoria, originalmente intitulada "Programação em uma Estrutura Linear", foi posteriormente abreviada para "Programação Linear" por sugestão de Tjalling Koopmans em 1948 [24].

Embora a Programação Linear tenha sido desenvolvida para tratar problemas complexos e de grande escala, cuja resolução pode demandar considerável esforço computacional, é fundamental a compreensão de seus fundamentos em um universo simplificado de uma e duas dimensões. Essa abordagem permite que os conceitos sejam consolidados antes de serem ampliados para situações com múltiplas variáveis. Assim, as próximas seções detalharão a formalização matemática e geométrica da Programação Linear, bem como a sua implementação computacional por meio da biblioteca PuLP do Python.

4.1 Conceitos Fundamentais da Programação Linear

Como dito anteriormente, um problema de programação linear consiste em encontrar soluções ótimas para um modelo matemático. Portanto, o primeiro passo é modelar um problema, que consiste em traduzir uma situação real para uma linguagem matemática, identificando seus elementos fundamentais:

- **Variáveis:** São os elementos do problema cujos valores se deseja determinar, ou seja, são as incógnitas do modelo matemático e seus valores serão a solução do problema de PL.
- **Função Objetivo:** É a função linear que descreve o modelo, a qual se deseja maximizar ou minimizar. Ela é expressa em função das variáveis.

- **Restrições:** São inequações ou equações lineares que limitam os valores que as variáveis podem assumir. Geralmente, dentre essas restrições, estão as restrições de não-negatividade, que impõem que as variáveis de decisão sejam maiores ou iguais a zero, uma vez que, em contextos práticos, não faz sentido que as variáveis sejam negativas.

  O exemplo a seguir ilustra esse processo de identificação desses elementos.

Exemplo 4.1.1: Uma pequena fábrica produz dois tipos de suco: de laranja e de uva. Cada garrafa de suco de laranja gera um lucro de R$ 5,00 e consome 2 laranjas. Cada garrafa de suco de uva gera um lucro de R$ 4,00 e consome 3 cachos de uva. A fábrica dispõe diariamente de 100 laranjas e 120 cachos de uva. Deseja-se determinar quantas garrafas de cada suco devem ser produzidas por dia para maximizar o lucro.

Para esse exemplo, podemos considerar como variáveis x o número de garrafas de suco de laranja produzidas e y o número de garrafas de suco de uva produzidas. O lucro diário da fábrica é dado pela função objetivo:

$$f(x,y) = 5x + 4y$$

Observe que x e y não podem assumir quaisquer valores, pois a fábrica possui limitação de insumos. Como a fábrica dispõe de apenas 100 laranjas por dia, e cada garrafa de suco de laranja consome 2 laranjas, obtém-se a restrição:

$$2x \leq 100$$

De maneira análoga, a fábrica dispõe de 120 uvas por dia, e cada garrafa de suco de uva consome 3 uvas, resultando na restrição:

$$3y \leq 120$$

Além disso, existem as restrições de não negatividade, pois não faz sentido produzir quantidades negativas:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Assim, o problema de Programação Linear pode ser modelado e expresso da seguinte forma:

$$\text{Maximizar} \quad f(x,y) = 5x + 4y$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \begin{cases} 2x \leq 100 \\ 3y \leq 120 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Segundo Hillier e Lieberman[25], um problema de Programação Linear pode ser generalizado da seguinte forma: dados n variáveis de decisão $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uma função objetivo linear e m restrições lineares, o problema consiste em:

$$\text{Maximizar / Minimizar} \quad f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \end{cases}$$

onde c_j são os coeficientes da função objetivo, a_{ij} são os recursos necessários por unidade de produto, e b_i são as disponibilidades dos recursos.

Em problemas de Programação Linear, as variáveis de decisão são geralmente consideradas contínuas, podendo assumir valores reais dentro da região viável. Entretanto, em determinadas situações, as variáveis representam quantidades indivisíveis, como o número de pessoas, veículos ou produtos fabricados. Nesses casos, é necessário impor que seus valores sejam inteiros, caracterizando um problema de *Programação Linear Inteira*.

É importante observar que nem sempre as restrições são expressas por desigualdades do tipo $\leq$. Dependendo do problema, as restrições podem ser desigualdades que contém os símbolos $\geq$, $>$ ou $<$, ou até mesmo serem expressas por uma igualdade.

Como o objetivo de um problema de programação linear é encontrar soluções ótimas, faz sentido restringir uma região onde essas soluções podem ser encontradas; dessa forma, definimos o conjunto de todos os pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições como *Região Viável* do problema. A solução ótima, quando existe, está contida nessa região, que pode ser determinada através da interseção de todas as restrições do problema.

Antes de aprofundar em problemas com múltiplas variáveis, é útil considerar os casos mais simples, que envolvem apenas uma ou duas variáveis. Os problemas unidimensionais e bidimensionais, apresentados a seguir, permitem consolidar os conceitos fundamentais da Programação Linear.

4.2 Problemas Unidimensionais

Embora os casos unidimensionais sejam mais simples e menos frequentes em aplicações reais, eles permitem compreender de forma clara os conceitos de função objetivo, restrições, região viável e solução ótima.

Um problema de Programação Linear é dito unidimensional quando possui apenas uma variável, geralmente denotada por x. A função objetivo é uma função afim da forma $f(x) = ax + b$, onde a,b são coeficientes reais com $a \neq 0$, e as restrições são intervalos na reta real, resultando em uma região viável que é um intervalo $[a, b]$, com a, b sendo números reais.

Em um problema unidimensional, a região viável é sempre um intervalo da forma $[a$,$b]$. A solução ótima é o ponto dessa região onde a função objetivo atinge o maior valor possível (em problemas de maximização) ou o menor valor possível (em problemas de minimização). Como a função objetivo é linear, ela é sempre crescente ou decrescente, portanto, a solução ótima ocorre em um dos extremos do intervalo. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 4.2.1: Uma pequena fábrica produz camisetas personalizadas. Cada camiseta gera um lucro de R$ 8,00 e requer 2 horas de trabalho. A fábrica dispõe de no máximo 18 horas de trabalho por dia. Determine o lucro máximo diário.

Seja x o número de camisetas produzidas por dia. A função objetivo é:

$$f(x) = 8x$$

A restrição de horas de trabalho é:

$$2x \leq 18 \Rightarrow x \leq 9$$

Além disso, não é possível produzir uma quantidade negativa:

$$x \geq 0$$

A região viável é o intervalo $[0, 9]$. Observe que, como a função objetivo é crescente, o lucro máximo ocorre no extremo superior do intervalo:

$$f(9) = 8 \cdot 9 = 72$$

Portanto, o lucro máximo diário é de R$ 72,00.

Dessa forma, nos problemas unidimensionais, podemos estabelecer a seguinte relação: Seja a região viável de um problema de Programação Linear unidimensional o intervalo $[a, b]$, com $a \leq b$. Então

- Se o objetivo é maximizar e a função é crescente, a solução ótima é $x = b$.
- Se o objetivo é maximizar e a função é decrescente, a solução ótima é $x = a$.
- Se o objetivo é minimizar e a função é crescente, a solução ótima é $x = a$.
- Se o objetivo é minimizar e a função é decrescente, a solução ótima é $x = b$.

Exemplo 4.2.2: Um atleta deseja preparar um shake proteico. Cada grama do suplemento custa R$ 0,50 e fornece 2g de proteína. O atleta precisa de no mínimo 30g de proteína e não pode consumir mais de 50g do suplemento por questões digestivas. Vamos determinar a quantidade ideal que minimiza o custo.

Considerando como x a quantidade de gramas do suplemento consumido, a função objetivo que determina o custo é:

$$f(x) = 0{,}50x$$

Neste problema, três restrições devem ser consideradas: a necessidade de consumir um mínimo de proteína, o limite máximo diário de consumo, além das restrições de não negatividade. Tais restrições podem ser escritas como:

$$2x \geq 30 \Rightarrow x \geq 15$$

$$x \leq 50$$

$$x \geq 0$$

Observe que, a região viável pode ser determinada pela interseção dessas restrições, que é o intervalo $[15, 50]$. Como a função é crescente e queremos minimizar, a solução ótima é o extremo inferior $x = 15$:

$$f(15) = 0{,}50 \cdot 15 = 7{,}50$$

Portanto, o atleta deve consumir 15g do suplemento, com custo de R$ 7,50.

Os problemas unidimensionais, embora simples, ilustram um princípio fundamental da Programação Linear: a solução ótima ocorre nos limites da região viável — no caso unidimensional, nos extremos do intervalo. No entanto, a maioria das situações práticas envolve mais de uma variável de decisão, o que torna os problemas bidimensionais mais próximos da realidade. A seguir, abordaremos os problemas com duas variáveis, cuja resolução gráfica no plano cartesiano permite visualizar geometricamente a região viável e a busca pela solução ótima.

4.3 Problemas Bidimensionais

Um problema de Programação Linear é dito bidimensional quando possui duas variáveis, geralmente denotadas por x_1 e x_2. Conforme discutido por Bregalda [26], a função objetivo, neste caso, é representada por uma função afim de duas variáveis da forma $f(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2 + c$, com a,b,c sendo números reais e a,$b \neq 0$. Para compreender melhor, vamos modelar o exemplo a seguir:

Exemplo 4.3.1: Uma marcenaria produz dois tipos de móveis: mesas e cadeiras. Cada mesa gera um lucro de R$ 100,00 e cada cadeira gera um lucro de R$ 60,00. Para produzir uma mesa, são necessárias 4 horas de trabalho e $2m^2$ de madeira. Para produzir uma cadeira, são necessárias 2 horas de trabalho e $3m^2$ de madeira. A marcenaria dispõe diariamente de 40 horas de trabalho e 32 m^2 de madeira. Determine quantas mesas e cadeiras devem ser produzidas por dia para maximizar o lucro.

Esse é um exemplo de programação linear que envolve duas variáveis. Seja x_1 o número de mesas produzidas por dia e x_2 o número de cadeiras. Podemos determinar uma função objetivo que expressa o lucro diário da marcenaria e deverá ser maximizada:

$$f(x_1,x_2) = 100x_1 + 60x_2$$

Podemos determinar ainda as restrições do problema. Como para produzir uma mesa são necessárias 4 horas de trabalho e para produzir uma cadeira são necessárias 2 horas de trabalho, e a marcenaria dispõe diariamente de 40 horas de trabalho, determinamos a restrição:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 40 \tag{4.1}$$

Podemos determinar ainda uma segunda restrição, referente à quantidade de madeira disponível. Para produzir cada mesa é necessário $2m^2$ de madeira e para produzir cada cadeira $3m^2$ de madeira, e a marcenaria dispõe de $32m^2$ de madeira por dia. Logo, a restrição pode ser escrita como:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 32 \tag{4.2}$$

E ainda podemos considerar as restrições de não negatividade:

$$x_1,x_2 \geq 0$$

Assim podemos escrever o problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && f(x_1,x_2) = 100x_1 + 60x_2 \\ &\text{Sujeito a:} && \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 32 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para resolver problemas bidimensionais, precisamos primeiro determinar a região viável. Diferentemente dos problemas unidimensionais, nos quais a região viável é um intervalo na reta real, nos problemas bidimensionais, a região viável é um conjunto de pontos no plano cartesiano, geralmente um polígono.

Essa região é determinada através da interseção das restrições. Observe que as restrições bidimensionais geralmente são expressas por inequações de duas variáveis, que podem ser representadas graficamente por semiplanos no plano cartesiano ou por igualdades envolvendo duas variáveis, representadas por retas no plano.

Para representar as restrições do exemplo anterior no plano cartesiano, considere a restrição (4.1), que é representada pelo semiplano abaixo da reta associada $4x_1 + 2x_2 = 40$. Para confirmar qual semiplano satisfaz a inequação, podemos testar qualquer ponto, como a origem (0,0), e verificar se a desigualdade é satisfeita. A Figura 4.1 mostra a região que representa a desigualdade (4.1).

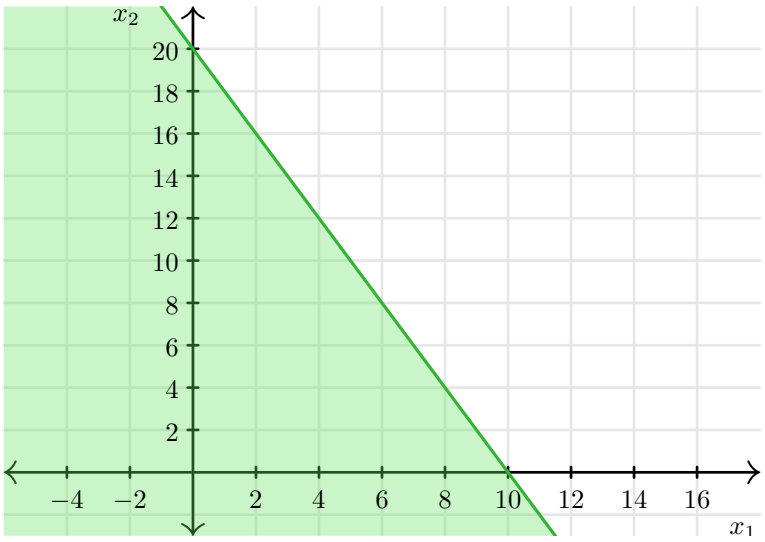


Figura 4.1: Semiplano correspondente à restrição $4x_1 + 2x_2 \leq 40$.
Fonte: Próprio autor.

Analogamente, a restrição (4.2) representada no plano cartesiano corresponde ao semiplano abaixo da reta $2x_1 + 3x_2 = 32$, como ilustra a Figura 4.2.

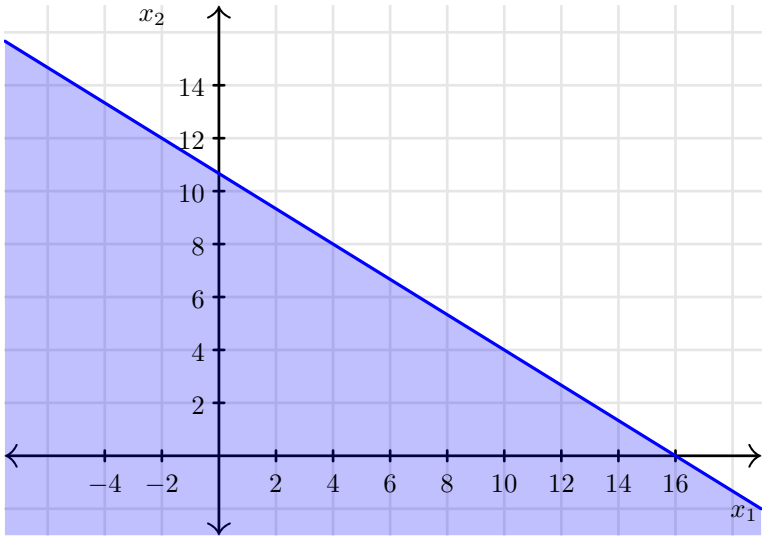


Figura 4.2: Semiplano correspondente à restrição $2x_1 + 3x_2 \leq 32$.

Fonte: Próprio autor.

As restrições de não negatividade garantem que a região viável está restrita ao primeiro quadrante. Logo, a interseção de todas as restrições gera um polígono, ilustrado na Figura 4.3 a seguir.

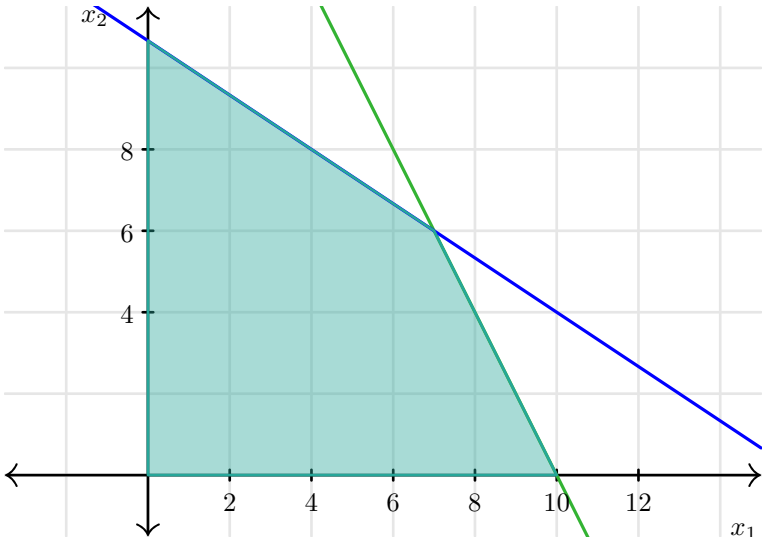


Figura 4.3: Região Viável do Exemplo 4.3.1

Fonte: Próprio autor.

Uma vez determinada a região viável, precisamos encontrar qual ponto dessa região é a solução ótima do problema. Para isso, devemos encontrar os valores de x_1 e x_2 que maximizam a função objetivo. Nesse contexto, é necessário compreender o conceito de curva de nível.

Segundo [27, p. 798], as curvas de nível de uma função são dadas por $f(x_1, x_2) = k$, onde k é um número real qualquer. No caso do Exemplo 4.3.1, as curvas de nível da função

objetivo são todas as retas da forma $100x_1 + 60x_2 = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Se considerarmos as curvas de nível para $k = 200{,}400{,}600{,}800{,}1000$ na Figura 4.4, podemos observar que as retas se deslocam paralelamente a medida que k aumenta.

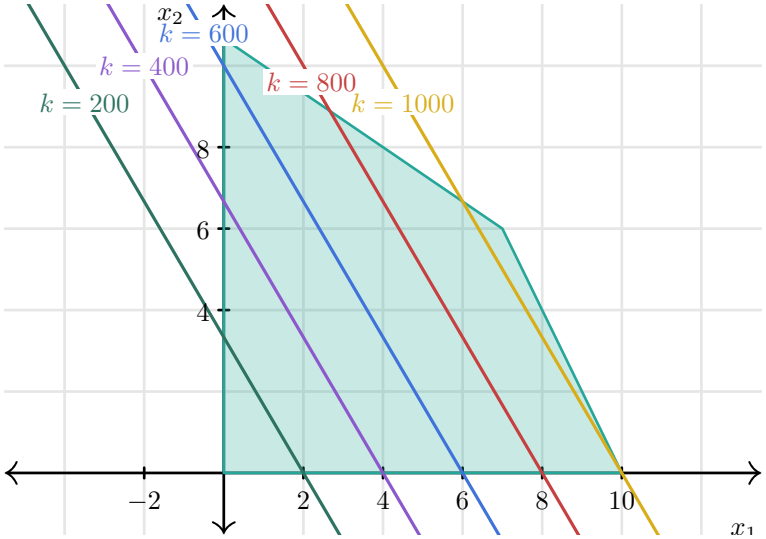


Figura 4.4: Curvas de nível de $f(x_1{,}x_2)$ para $k = 200{,}400{,}600{,}800{,}1000$
Fonte: Próprio autor.

Observe que todas as curvas de nível são retas paralelas entre si. À medida que o valor de k aumenta, as retas se deslocam em uma direção específica. Essa direção é determinada pelo vetor gradiente da função objetivo. Uma propriedade fundamental do vetor gradiente é que ele é perpendicular às curvas de nível da função objetivo, apontando na direção de maior crescimento da função [27, p. 846]. No contexto da programação linear, isso significa que, ao maximizar a função objetivo, o deslocamento ocorre na direção do gradiente, enquanto, ao minimizar, ocorre na direção oposta.

O vetor gradiente (geralmente denotado por ∇f), da função objetivo, é determinado pelo cálculo de suas derivadas parciais em relação a cada variável. Para a função $f(x_1, x_2) = 100x_1 + 60x_2$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 100, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 60,$$

de modo que o gradiente é dado por $\nabla f(x_1, x_2) = \langle 100, 60 \rangle$. Esse vetor aponta na direção de maior crescimento da função e é perpendicular às curvas de nível [27].

Observe que, por se tratar de uma função linear, o vetor gradiente é constante e e determinado pelos coeficientes da função objetivo. Dessa forma, o gradiente indica a direção em que os valores da função aumentam mais rapidamente.

No exemplo considerado, o vetor gradiente $\nabla f = (100{,}60)$ aponta para a direção de crescimento da função objetivo. Assim, para maximizar $f(x_1{,}x_2)$, podemos imaginar as

curvas de nível deslocando-se paralelamente na direção indicada pelo gradiente. À medida que isso ocorre, os valores de k aumentam.

Entretanto, as possíveis soluções do problema estão restritas à região viável. Portanto, a solução ótima será obtida ao identificar a curva de nível de maior valor que ainda possui pelo menos um ponto em comum com a região viável. Geometricamente, isso corresponde ao último ponto de contato entre uma curva de nível e a região viável na direção de crescimento da função.

A Figura 4.5 ilustra uma curva de nível da função objetivo que passa pelo ponto (7,6), pertencente à região viável. Observe que qualquer deslocamento adicional da curva de nível na direção do gradiente faria com que ela deixasse de intersectar a região viável.

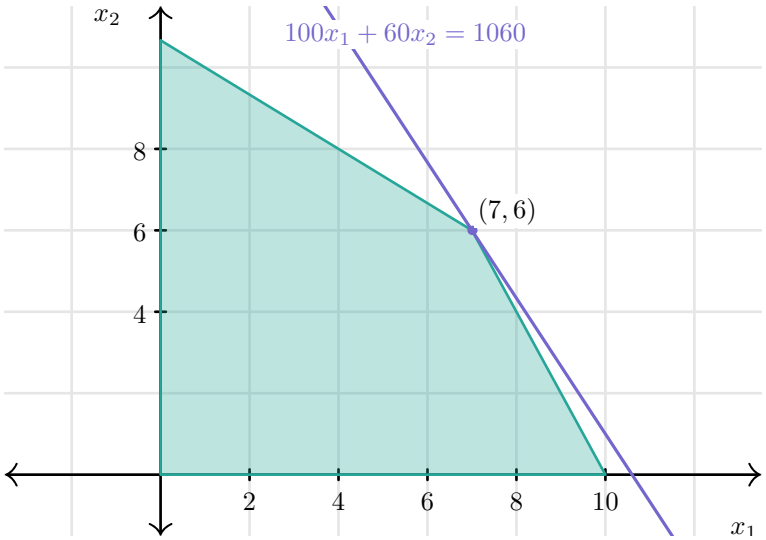


Figura 4.5: Curva de nível $f(x_1,x_2) = 1060$, correspondente ao valor máximo que intersecta a região viável no ponto (7,6).

Fonte: Próprio autor.

Observa-se que a reta $100x_1 + 60x_2 = 1060$ corresponde à curva de nível de maior valor que ainda possui interseção com a região viável. Como essa curva toca a região viável no ponto (7,6), conclui-se que esse ponto é uma solução ótima do problema. Assim, conclui-se que o lucro máximo da marcenaria é de R$1060,00, obtido ao produzir 7 mesas e 6 cadeiras.

O exemplo anterior mostra uma característica importante dos problemas de Programação Linear. Observe que a solução ótima do problema se encontra em um dos vértices do polígono que representa a região viável. Embora esse resultado tenha sido observado em um caso particular, ele não é uma coincidência, trata-se de uma propriedade geral dos problemas de Programação Linear, garantida pelo Teorema 4.1 a seguir.

Teorema 4.1 (Adaptado de [26]): Seja um problema de Programação Linear cujo conjunto de soluções viáveis M é não vazio. Se a função objetivo possui uma solução ótima em M, então existe pelo menos um vértice de M no qual a função objetivo assume seu valor ótimo.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [26, p. 111].

A relevância desse teorema faz com que ele seja frequentemente referido na literatura como Teorema Fundamental da Programação Linear. A importância desse resultado está no fato de que ele permite restringir a busca pela solução ótima aos vértices da região viável. Dessa forma, em vez de analisar todos os pontos pertencentes à região viável ou recorrer ao deslocamento das curvas de nível, basta avaliar a função objetivo nos vértices da região, tornando a resolução do problema mais simples e eficiente.

Para ilustrar a aplicação desse resultado, consideremos Exemplo 4.3.2 a seguir.

Exemplo 4.3.2: Vamos resolver o problema de Programação Linear a seguir:

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} 1 \leq x_1 \leq 8, \\ 1 \leq x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Inicialmente é necessário representar cada uma das restrições no plano cartesiano, para determinar a região viável do problema. As restrições $1 \leq x_1 \leq 8$ e $1 \leq x_2 \leq 6$ limitam a região viável a uma faixa retangular do plano, compreendida entre as retas $x_1 = 1$, $x_1 = 8$, $x_2 = 1$ e $x_2 = 6$.

Além dessas restrições, a inequação $x_1 + x_2 \geq 5$ determina o semiplano localizado acima da reta $x_1 + x_2 = 5$. Já as inequações $x_1 + 2x_2 \leq 14$ e $2x_1 + x_2 \leq 13$ determinam, respectivamente, os semiplanos abaixo das retas $x_1 + 2x_2 = 14$ e $2x_1 + x_2 = 13$.

A interseção de todos esses semiplanos determina a região viável do problema, que é um polígono, ilustrado pela Figura 4.6 a seguir.

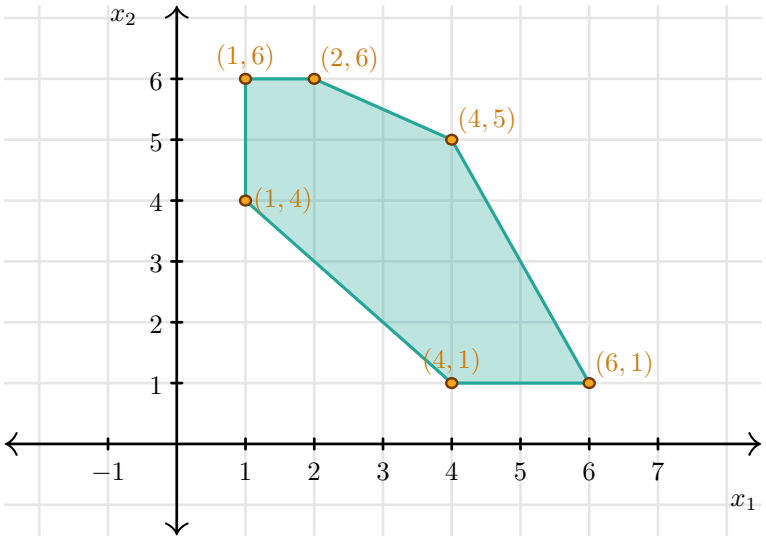


Figura 4.6: Polígono que representa a região viável do problema e os seus vértices.

Fonte: Próprio autor.

Segundo o Teorema 4.1, quando existe solução ótima, ela ocorre em pelo menos um vértice da região viável. Assim, é suficiente analisar os vértices da região viável, obtidos pelas interseções das retas que delimitam a região. Na Figura 4.6 é possível observar que os vértices são os seguintes pontos:

$$(4,1), \quad (6,1), \quad (2,6), \quad (4,5), \quad (1,6), \quad (1,4).$$

Agora, avaliamos a função objetivo $f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$ em cada um desses vértices:

$$f(4,1) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14,$$

$$f(6,1) = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 20,$$

$$f(2,6) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18,$$

$$f(4,5) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 22,$$

$$f(1,6) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 15,$$

$$f(1,4) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11.$$

Como o objetivo do problema é minimizar a função objetivo, a solução ótima corresponde ao vértice da região viável em que essa função assume seu menor valor. Como $f(1,4) = 11$, conclui-se que a solução ótima é dada por $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$. Geometricamente, isso significa que, entre todos os pontos da região viável, o ponto $(1,4)$ é aquele em que a função objetivo atinge seu valor mínimo, igual a 11.

4.4 Problemas de Dimensões Superiores e a Biblioteca PuLP

Vimos anteriormente que os problemas de Programação Linear com uma ou duas variáveis de decisão podem ser resolvidos por meio de métodos gráficos relativamente simples. Entretanto, à medida que o número de variáveis aumenta, a determinação da solução ótima torna-se uma tarefa cada vez mais complexa.

Nos problemas tridimensionais, isto é, aqueles que envolvem três variáveis de decisão, ainda é possível utilizar uma interpretação geométrica para a resolução do problema. Nesse caso, de forma análoga ao que ocorre em duas dimensões, a região viável é representada por um poliedro no espaço tridimensional, obtido pela interseção de semiespaços determinados pelas restrições do problema.

Além disso, o resultado apresentado no Teorema 4.1 permanece válido nesse contexto. Assim, caso exista uma solução ótima, ela será atingida em pelo menos um dos vértices do poliedro que representa a região viável. Dessa forma, a busca pela solução ótima pode ser restringida à análise desses vértices.

Problemas reais geralmente envolvem um número de variáveis muito maior do que três. Nesses casos, a representação geométrica da região viável torna-se inviável, impossibilitando a utilização do método gráfico como ferramenta de resolução [26, p. 89]. Dessa forma, torna-se necessária a utilização de métodos computacionais e algoritmos capazes de determinar a solução ótima do problema.

Neste contexto, George Dantzig desenvolveu, em 1947, o Método Simplex, um algoritmo capaz de resolver problemas de Programação Linear envolvendo um grande número de variáveis. O algoritmo percorre sucessivamente vértices adjacentes da região viável até determinar uma solução ótima. Sua introdução representou um marco para o planejamento e a otimização, tornando viável a resolução de problemas de larga escala em áreas como logística, economia e planejamento militar [24].

Atualmente, diversas linguagens de programação fornecem ferramentas capazes de resolver problemas que envolvem otimização e Programação Linear. Entre elas, destaca-se a linguagem de programação Python, amplamente conhecida por ser uma linguagem versátil, intuitiva e simples. No Python, existem as chamadas bibliotecas, que consistem em coleções de módulos que reúnem funções, classes e objetos previamente definidos e que fornecem funcionalidades específicas ao usuário [28]. Dessa forma, a linguagem disponibiliza uma ampla variedade de recursos para o desenvolvimento de aplicações em diferentes áreas do

conhecimento.

Atualmente, os avanços computacionais permitem que algoritmos como o Método Simplex sejam implementados por meio de softwares especializados, possibilitando a resolução automática de problemas de Programação Linear de grande porte. Dentre as diversas bibliotecas disponíveis para Python, destaca-se o PuLP, uma ferramenta desenvolvida para modelagem de problemas de Programação Linear. Beneficiando-se da simplicidade e versatilidade da linguagem Python, essa biblioteca permite que funções objetivo, variáveis de decisão e restrições sejam expressas por meio de uma sintaxe muito próxima da formulação matemática do problema, tornando o processo de modelagem intuitivo e acessível [29]. Após a modelagem, o problema é encaminhado a um solver de otimização, responsável por determinar a solução ótima.

Para resolver um problema de Programação Linear utilizando o PuLP, é necessário dispor de um ambiente capaz de executar códigos em Python. Existem diversas alternativas para isso, incluindo a instalação local da linguagem em um computador ou a utilização de plataformas online que permitem a execução de programas diretamente no navegador, como o Google Colaboratory (Google Colab) [30].

De modo geral, esse processo de resolução de um problema de Programação Linear pode ser realizado por meio das etapas.

1. **Importar a biblioteca PuLP.**

   ```
   import pulp as plp
   ```

   Nessa etapa, importamos a biblioteca PuLP atribuindo-lhe o alias `plp`, permitindo que suas funções e classes sejam acessadas utilizando esse prefixo.

2. **Definição do Problema.**

   ```
   modelo = plp.LpProblem("Um_Nome_Para_o_Problema", plp.LpMaximize)
   ```

   O comando `LpProblem()` é utilizado para criar um modelo de Programação Linear. O primeiro argumento corresponde ao nome atribuído ao problema, utilizado para identificação, enquanto o segundo argumento define o tipo de otimização a ser realizada, podendo ser uma maximização utilizando `LpMaximize`, ou uma minimização utilizando `LpMinimize`. O objeto é retornado e armazenado em uma variável, denominada no código acima como `modelo`, que passará a representar o problema ao longo do código.

3. **Definição das variáveis.**

   ```
   x1 = plp.LpVariable('x1', lowBound=0, cat="Continuous")
   x2 = plp.LpVariable('x2', lowBound=0, cat="Continuous")
   ```

```
#...
xn = plp.LpVariable('xn', lowBound=0, cat="Continuous")
```

A criação das variáveis de decisão é realizada por meio do comando `LpVariable()`, conforme mostrado no código acima. O primeiro argumento corresponde ao nome da variável, enquanto o parâmetro `lowBound=0` estabelece que ela não pode assumir valores negativos. Dessa forma, as restrições de não negatividade do modelo já são incorporadas durante a definição das variáveis. Por fim, o parâmetro `cat="Continuous"` indica que a variável pode assumir quaisquer valores reais dentro dos limites estabelecidos. Assim, as variáveis `x1`, `x2`, ..., `xn` representam as variáveis de decisão do problema de Programação Linear.

4. **Estabelecer a função objetivo e suas restrições**

```
modelo += c1*x1 + c2*x2 + ... + cn*xn
modelo += a11*x1 + a12*x2 + ... + a1n*xn <= b1
modelo += a21*x1 + a22*x2 + ... + a2n*xn <= b2
#...
modelo += am1*x1 + am2*x2 + ... + amn*xn <= bm
```

No PuLP, essa etapa é realizada por meio do operador `+=`, que adiciona expressões matemáticas ao problema. A função objetivo e as restrições são inseridas de forma bastante semelhante à sua representação algébrica. Essa característica faz com que a modelagem computacional seja intuitiva, uma vez que a sintaxe utilizada pelo PuLP se aproxima da notação matemática tradicional.

5. **Resolução do problema.**

```
modelo.solve()
```

A obtenção da solução ótima é realizada por meio do comando `solve()`, responsável por enviar o modelo para um solver de otimização. O solver aplica algoritmos específicos para determinar os valores das variáveis de decisão que otimizam a função objetivo e satisfazem todas as restrições impostas ao problema.

6. **Exibir a solução.**

```
print(x1.varValue)
print(x2.varValue)
#...
print(xn.varValue)

plp.value(modelo.objective)
```

Por fim, os valores das variáveis de decisão podem ser exibidos utilizando o atributo `varValue`, associado a cada variável do modelo. O valor ótimo da função objetivo pode ser obtido por meio do comando `plp.value(modelo.objective)`. Dessa

forma, o usuário tem acesso tanto à solução ótima encontrada quanto ao valor correspondente da função objetivo.

Para ilustrar a utilização da biblioteca PuLP, observe os Exemplos 4.4.1 e 4.4.2 a seguir.

Exemplo 4.4.1: O código a seguir mostra a resolução do Exemplo 4.3.2, utilizando a biblioteca PuLP do Python.

```
import pulp as plp
min_z = plp.LpProblem("Exemplo_3_3_2", plp.LpMinimize)

x1 = plp.LpVariable('x1', lowBound=1, cat='Continuous')
x2 = plp.LpVariable('x2', lowBound=1, cat='Continuous')

min_z += 3*x1+2*x2
min_z += x1 <= 8
min_z += x2 <=6
min_z += x1+x2 >= 5
min_z += x1+2*x2 <= 14
min_z += 2*x1+x2 <= 13

min_z.solve()

print(x1.varValue)
print(x2.varValue)
plp.value(min_z.objective)
```

Ao executar o código, obtêm-se as seguintes saídas:

```
1.0
4.0
11.0
```

Os valores apresentados correspondem, respectivamente, aos valores ótimos das variáveis de decisão `x1` e `x2`, bem como ao valor ótimo da função objetivo. Observe que a solução obtida computacionalmente coincide com aquela encontrada anteriormente por meio do método gráfico.

Exemplo 4.4.2: Uma empresa produz cinco produtos distintos, pelas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. Por exigências contratuais de fornecimento, a empresa deve produzir pelo menos uma unidade de cada produto. Cada um consome horas de mão de obra, matéria-prima e capacidade de armazenamento, conforme indicado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Consumo de recursos e lucro unitário dos produtos.

Recurso	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Disponível
Mão de obra (h)	1	1	1	1	1	50
Matéria-prima (kg)	2	1	3	2	1	120
Armazenamento (m^3)	1	2	1	2	3	100
Lucro (R$)	50	40	60	45	30	–

Fonte: Próprio autor.

Deseja-se determinar a quantidade de cada produto que deve ser fabricada para maximizar o lucro da empresa.

A partir dos dados da tabela, o problema pode ser modelado da seguinte forma:

$$\text{Maximizar} \quad z = 50x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 45x_4 + 30x_5$$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 50, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 120, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1. \end{cases}$$

Como o problema possui cinco variáveis de decisão, não é possível utilizar o método gráfico para determinar sua solução ótima. Dessa forma, utilizaremos a biblioteca PuLP para resolver o problema. O código a seguir apresenta a implementação do modelo.

```
import pulp as plp

max_z = plp.LpProblem("Lucro_Empresa", plp.LpMaximize)

x1 = plp.LpVariable('x1', lowBound=1, cat='Continuous')
x2 = plp.LpVariable('x2', lowBound=1, cat='Continuous')
x3 = plp.LpVariable('x3', lowBound=1, cat='Continuous')
x4 = plp.LpVariable('x4', lowBound=1, cat='Continuous')
x5 = plp.LpVariable('x5', lowBound=1, cat='Continuous')

max_z += 50*x1 + 40*x2 + 60*x3 + 45*x4 + 30*x5

max_z += x1 + x2 + x3 + x4 + x5 <= 50
max_z += 2*x1 + x2 + 3*x3 + 2*x4 + x5 <= 120
max_z += x1 + 2*x2 + x3 + 2*x4 + 3*x5 <= 100

max_z.solve()
```

```
print(x1.varValue)
print(x2.varValue)
print(x3.varValue)
print(x4.varValue)
print(x5.varValue)
print(plp.value(max_z.objective))
```

Ao executar o código, obtêm-se as seguintes saídas:

```
1.0
13.0
34.0
1.0
1.0
2685.0
```

Os valores apresentados correspondem, respectivamente, às quantidades dos produtos x_1,x_2,x_3,x_4 e x_5 que maximizam o lucro da indústria, bem como ao valor máximo da função objetivo. Portanto, a solução ótima do problema é (1,13,34,1,1), e o lucro máximo obtido é

$$z_{\max} = 50 \cdot (1) + 40 \cdot (13) + 60 \cdot (34) + 45 \cdot (1) + 30 \cdot (1) = R\$2685{,}00.$$

Este capítulo apresentou os fundamentos da Programação Linear, desde problemas unidimensionais até a resolução computacional com a biblioteca PuLP. Os conceitos discutidos aqui, constituem a base teórica necessária para a compreensão do produto educacional desenvolvido, que será apresentado no capítulo a seguir.

5 O Produto Educacional: Teoria da Carga Cognitiva no Ensino de Programação Linear

No capítulo anterior, foram apresentados os fundamentos teóricos da Programação Linear, desde problemas unidimensionais até a resolução computacional com a biblioteca PuLP. Esse embasamento teórico, aliado às lacunas identificadas no Capítulo 3 e aos princípios da Modelagem Matemática abordados no Capítulo 2, orientou o desenvolvimento do produto educacional desta pesquisa. Neste capítulo, descreve-se o produto educacional desenvolvido, bem como a fundamentação teórica que norteou sua elaboração: a Teoria da Carga Cognitiva.

5.1 A Teoria da Carga Cognitiva

A capacidade de compreensão do ser humano é objeto de estudo de diversos pesquisadores há muitos anos, assim como o processamento de informações e a estrutura do pensamento. Até o século XIX, as investigações sobre o funcionamento da mente humana eram um campo exclusivo da filosofia, no entanto, em meados do século XX, surgiu um ramo que tem como principal objeto de análise a cognição humana: a Ciência Cognitiva [31].

Dentre os diversos autores que marcam o desenvolvimento dessa ciência, destaca-se George Miller que, em 1956, desenvolveu um importante trabalho denominado *"The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information"*. Este estudo tornou-se um marco no que diz respeito ao entendimento de como o cérebro processa e armazena informações. Segundo Miller, a memória de trabalho possui capacidade limitada, sendo frequentemente representada pelo número mágico 7 ± 2, correspondente à quantidade aproximada de unidades de informação que podem ser processadas simultaneamente [32].

A fim de refinar essa ideia e aprimorar as investigações a respeito de como a mente

armazena as informações da melhor maneira possível, uma abordagem denominada Teoria da Carga Cognitiva (TCC) ganhou espaço no final do século XX. Desenvolvida pelo psicólogo australiano John Sweller, a TCC é definida por Santos e Tarouco [33, p. 3] como "um conjunto universal de princípios que resulta em um ambiente de aprendizagem eficiente e que, consequentemente, promove um aumento na capacidade do processo de cognição humana". Dessa forma, a teoria estabelece princípios que, levando em conta a limitação do cérebro humano em reter novas informações, orientam a elaboração de materiais didáticos que diminuem esforços mentais desnecessários e potencializam a aprendizagem.

Para desenvolver os princípios da TCC, é fundamental compreender a Arquitetura Cognitiva Humana (ACH), que descreve como a mente é estruturada e como processa informações. Conforme discutido por Andrade-Lotero [31], a ACH é composta por três estruturas de memória que trabalham em conjunto no processamento da informação: a memória sensorial, a memória de trabalho e a memória de longo prazo.

A *memória sensorial* é responsável por receber estímulos através dos sentidos (paladar, olfato, visão, audição e tato) e converter esses estímulos em informação. A informação é retida por um período muito curto, que varia de 1 a 3 segundos, tempo essencial para que seja transferida para a memória de trabalho.

A *memória de trabalho* é responsável por armazenar e manipular a informação adquirida pela memória sensorial. É a parte intelectual consciente da mente, que permite realizar tarefas como ler um texto ou resolver problemas. Essa memória possui uma capacidade bem limitada, tanto em volume (que, segundo Miller, é estimada em aproximadamente 7 ± 2 elementos de informação), quanto em tempo de processamento, que varia em torno de 30 segundos. Durante o tempo de processamento, as informações tendem a ser esquecidas caso não sejam repetidas, organizadas ou relacionadas a conhecimentos prévios já adquiridos. Quando esses processos ocorrem de maneira adequada, a informação é transferida para a memória de longo prazo.

A *memória de longo prazo*, diferentemente da memória de trabalho, possui capacidade praticamente ilimitada e é responsável pelo armazenamento dos conhecimentos adquiridos. Nela, as informações são organizadas em estruturas denominadas esquemas, que podem ser mantidas por longos períodos ou até ao longo de toda a vida. Quando necessário, esses esquemas podem ser recuperados pela memória de trabalho e utilizados como uma única unidade de informação. Dessa forma, conhecimentos previamente armazenados na memória de longo prazo reduzem o esforço sobre a memória de trabalho, tornando o processamento de novas informações mais eficiente [31].

A Figura 5.1 ilustra o funcionamento da Arquitetura Cognitiva Humana descrito

por Sweller.

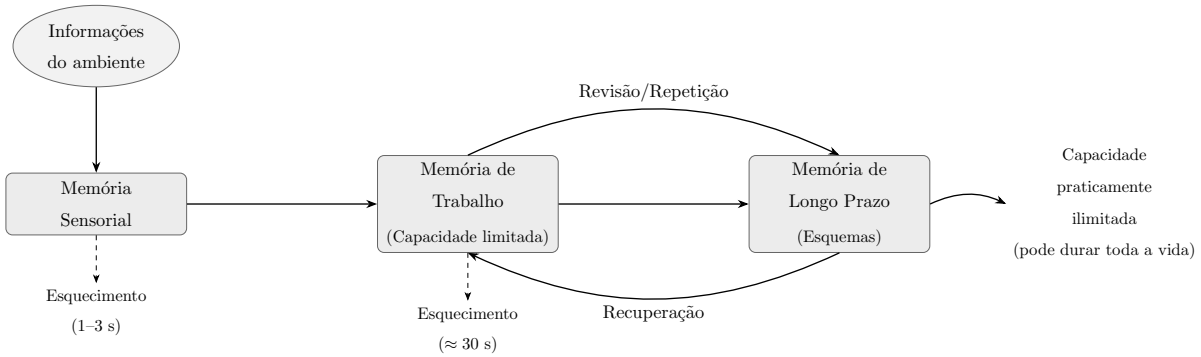


Figura 5.1: Representação simplificada da Arquitetura Cognitiva Humana
Fonte: Adaptada de [31]

Nesse sentido, observa-se que toda nova informação passa pela memória de trabalho antes de ser armazenada na memória de longo prazo. Entretanto, devido à sua capacidade limitada, a memória de trabalho pode ser considerada o principal gargalo do processo de aprendizagem. Assim, a Teoria da Carga Cognitiva dedica-se ao estudo desse processo, propondo princípios e estratégias que favoreçam a construção de esquemas de maneira mais eficiente, por meio do gerenciamento adequado da carga imposta à memória de trabalho, de modo a possibilitar sua consolidação na memória de longo prazo.

Para que esse gerenciamento de carga ocorra de maneira eficiente, a TCC define três diferentes tipos de cargas que são impostas sobre a memória de trabalho: A carga intrínseca, extrínseca e relevante.

A *carga intrínseca* é a carga que já vem com o conteúdo a ser aprendido. Ela possui relação com a própria dificuldade natural do conteúdo e com a expertise do aluno, de forma que um aluno que já possua esquemas bem desenvolvidos na memória de longo prazo sobre o tema, terá menos esforços mentais no processo de aprendizagem [34].

É importante notar que essa carga é predefinida pela natureza do assunto. Por exemplo, a soma de frações com denominadores diferentes exige, naturalmente, o domínio de certos passos lógicos. Assim, um aluno que ainda não consolidou conceitos como o MMC precisará de um esforço mental maior para compreender o assunto, pois, para ele, cada etapa é um elemento novo, o que gera uma sobrecarga sobre a memória de trabalho. Em contrapartida, para o aluno que já domina o conceito de MMC, o processo gera muito menos esforço, devido ao esquema já armazenado na memória de longo prazo, permitindo que a memória de trabalho seja menos sobrecarregada.

É uma carga que, a princípio, não pode ser alterada, pois é inerente à natureza do

material. Caso se tente reduzi-la demais, pode haver prejuízo no processo de compreensão do conteúdo. Apesar disso, é fundamental o seu gerenciamento, utilizando estratégias como a segmentação do conteúdo, a apresentação gradual da complexidade ou a redução temporária da interatividade entre os elementos. Essas estratégias são particularmente úteis para alunos iniciantes, que ainda não possuem esquemas consolidados sobre o assunto [32].

Já a *carga extrínseca*, conhecida também como *carga supérflua ou irrelevante*, tem relação com a forma como o conteúdo é exposto ao aluno. Se um conteúdo é apresentado ao estudante com uma formatação inadequada, com excesso de informações desnecessárias, a memória de trabalho é sobrecarregada com informações que não contribuem para a aprendizagem. Portanto, diminuir a carga extrínseca é fundamental, pois melhora o desempenho do aluno em relação ao conteúdo apresentado, diminuindo os esforços cognitivos [34].

É importante observar que as cargas cognitivas intrínseca e extrínseca são aditivas, de forma que se houver sobrecarga cognitiva sobre a memória de trabalho, a informação tende a ser perdida devido a não consolidação na memória a longo prazo [35]. Um conteúdo é efetivamente aprendido quando o balanceamento dessas cargas acontece, de forma que, caso um conteúdo apresente uma grande carga intrínseca, a carga extrínseca deverá ser minimizada. Em contrapartida, se o conteúdo apresenta uma carga intrínseca baixa, a carga extrínseca pode ser utilizada com maior liberdade, pois ainda haverá recursos disponíveis na memória de trabalho para processar tais conteúdos considerados irrelevantes.

Por fim, a *carga relevante*, muitas vezes conhecida também como *carga pertinente ou germânica*, segundo Andrade-Lotero [31], é responsável por contribuir diretamente para os objetivos da aprendizagem. Essa carga é fundamental para que a aprendizagem ocorra de maneira mais fácil e ajude na elaboração dos esquemas que serão consolidados na memória de longo prazo. A carga relevante pode ser estimulada para tornar o processo de aprendizagem mais envolvente. Por exemplo, no ensino de matemática, a utilização de múltiplos exemplos, o uso de gráficos e imagens, a decomposição de problemas em partes menores e a aplicação de metodologias ativas, como a Modelagem Matemática, são estratégias que contribuem para o fomento da carga relevante.

Neste sentido, para que uma aprendizagem seja eficiente, deve ocorrer um balanceamento das três cargas cognitivas. É fundamental que haja redução da carga extrínseca, uma vez que designs confusos ou layouts mal elaborados não contribuem para os objetivos instrucionais. Em contrapartida, a carga relevante deve ser estimulada, visto que favorece a elaboração e a consolidação de esquemas mentais. Por fim, embora a carga intrínseca seja

inerente à complexidade do conteúdo, ela deve ser devidamente gerenciada para assegurar que o estudante possua capacidade cognitiva suficiente, evitando a sobrecarga do sistema [36, p. 81]. A Figura 5.2 ilustra essa relação.

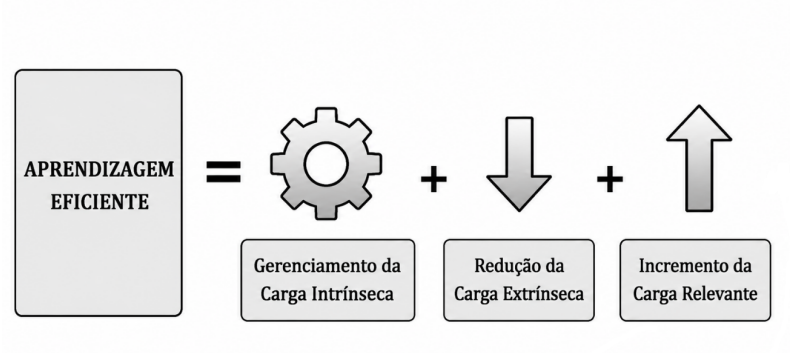


Figura 5.2: Balanceamento cognitivo para uma aprendizagem eficiente.
Fonte: Adaptada de [32]

Em síntese, a Teoria da Carga Cognitiva oferece um referencial teórico consistente para o planejamento e elaboração de materiais que diminuam esforços cognitivos desnecessários, com o intuito de favorecer a aprendizagem. Nesse contexto, a teoria serviu como base para a elaboração de um produto educacional desenvolvido nesta pesquisa, detalhado na próxima seção.

5.2 O produto educacional desenvolvido

O produto educacional desenvolvido nesta pesquisa é um e-book intitulado "Programação Linear na Educação Básica" e tem como principal objetivo introduzir os conceitos de otimização por meio da Programação Linear. O material é direcionado primordialmente a estudantes do ensino médio, bem como a professores que buscam um recurso didático para abordar o tema em suas aulas.

A criação deste material foi motivada, primeiramente, pelas lacunas levantadas no Capítulo 3 deste trabalho. Embora a análise das dissertações aponte para a escassez de propostas voltadas para o ensino fundamental, o que indica um campo de investigação futura, uma forte lacuna observada foi a carência de materiais diversificados que abordem o tema, com uma predominância significativa de sequencias didáticas. Nesse sentido, um e-book surge como uma ferramenta interessante e acessível para ser utilizada tanto em sala de aula quanto de forma autônoma pelos estudantes. A escolha pelo publico-alvo do ensino médio se justifica devido a programação linear se mostrar como um conteúdo pertinente e alinhado ao currículo dessa etapa, como funções, inequações e sistemas.

Além disso, conforme foi apontado, ferramentas tecnológicas mostraram-se importantes para o processo de ensino-aprendizagem, tornando os conceitos mais visíveis, interativos e próximos da realidade dos estudantes. Dessa forma, o desenvolvimento deste e-book priorizou a integração de recursos como o software GeoGebra, para a resolução gráfica de problemas bidimensionais, e a linguagem de programação Python, por meio da biblioteca PuLP, para a resolução computacional de problemas com múltiplas variáveis.

O e-book é estruturado em 6 capítulos, organizados da seguinte forma:

- **Capítulo 1: Introdução** Neste capítulo, é feita uma introdução ao material produzido, nele são detalhados seus objetivos e a estrutura do e-book.
- **Capítulo 2: Revisão Conceitual** O foco deste capítulo é revisar conceitos fundamentais para o estudo da Programação Linear. Tópicos como Funções Afins, Inequações e Região Viável são revisitados.
- **Capítulo 3: Programação Linear**. Neste capítulo, são introduzidos os conceitos fundamentais da Programação Linear, como função objetivo, restrições e região viável. Em seguida, são abordados problemas unidimensionais, enfatizando a modelagem e a resolução de situações práticas.
- **Capítulo 4: Problemas Bidimensionais** Este é o núcleo do estudo da Programação Linear. O aluno é orientado a modelar problemas com duas variáveis e resolvê-los graficamente.
- **Capítulo 5: GeoGebra e Programação Linear** Este capítulo introduz o uso do software GeoGebra como uma ferramenta de apoio à aprendizagem. Ele se baseia em um applet desenvolvido por Carvalho [22], cujo link e QR Code são fornecidos.
- **Capítulo 6: Problemas Multidimensionais** Este capítulo final expande o estudo para problemas com mais de duas variáveis, que não podem ser resolvidos graficamente. Para isso, é introduzida a linguagem de programação Python e a biblioteca PuLP.

A elaboração deste material foi orientada com base nos princípios da Teoria da Carga Cognitiva abordados na seção anterior. Conforme visto, para uma abordagem eficiente, é necessário balancear as cargas cognitivas impostas sobre a memória de trabalho, dada a sua limitação. Desta forma, diferentes escolhas foram tomadas com o intuito de gerenciar a Carga Intrínseca, reduzir a Carga Extrínseca e aumentar a Carga Relevante.

O gerenciamento da carga intrínseca ocorre ao longo de toda a estrutura do material. Embora a Programação Linear apresente uma complexidade inerente, necessitando a utilização de diversos conceitos matemáticos, essa carga é administrada por meio da organização progressiva dos conteúdos. Assim, optou-se por não apresentar de imediato os conceitos e fundamentos da Programação Linear, mas por construir uma progressão

didática na qual os conhecimentos são introduzidos gradualmente à medida que o e-book avança.

Essa progressão pode ser observada no Capítulo 2, no qual são retomados conceitos como funções, inequações e sistemas, que serão utilizados ao longo do estudo da Programação Linear. Essa revisão é fundamental, pois permite ativar e consolidar esquemas prévios na memória de longo prazo, reduzindo o esforço cognitivo exigido quando novos conceitos forem apresentados. Por exemplo, neste capítulo, o estudante aprende a representar graficamente uma inequação por meio de um semiplano. Posteriormente, esse conhecimento é necessário na determinação da região viável de problemas bidimensionais. Dessa forma, o que inicialmente constituía um novo elemento de informação passa a integrar um esquema já consolidado, permitindo que a memória de trabalho concentre seus recursos em outros aspectos importantes.

Com o mesmo intuito, no Capítulo 3, os conceitos fundamentais para a compreensão da Programação Linear, como função objetivo, restrições e região viável, são apresentados e explorados em um contexto mais simples, por meio de problemas unidimensionais resolvidos passo a passo. Esse conhecimento serve de base para o estudo de problemas mais complexos, que exigirão uma carga cognitiva maior, como os problemas bidimensionais e multidimensionais abordados nos capítulos 4 e 6, respectivamente.

Por outro lado, com o intuito de reduzir a Carga Extrínseca, além da própria progressão do conteúdo ter um papel relevante nesse aspecto, o modo como a informação é exibida ao leitor desempenha um papel fundamental. Nesse sentido, na elaboração do material, optou-se por destacar as definições com cores diferenciadas, de forma a facilitar a localização e a compreensão desses conceitos essenciais. Além disso, os exemplos foram resolvidos passo a passo, estratégia que, segundo Van Merriënboer e Sweller [35], reduz a carga extrínseca ao concentrar a atenção do aluno nos estados do problema e nas etapas úteis da solução, em vez de sobrecarregá-lo com informações irrelevantes ou com a necessidade de descobrir o caminho da resolução por conta própria.

Outra estratégia fundamental para reduzir a carga extrínseca foi a escolha de ferramentas tecnológicas de fácil acesso e compreensão. Por exemplo, no Capítulo 5, a utilização dos applets do GeoGebra, desenvolvidos por Carvalho [22], oferece ao estudante uma ferramenta pronta para uso, que não exige conhecimento prévio do software. De forma similar, no Capítulo 6, optou-se pelo Google Colab, uma plataforma online que dispensa a instalação de softwares ou a configuração de ambientes de programação. Além disso, a biblioteca PuLP é reconhecida por sua sintaxe simples e intuitiva, bem próxima da linguagem matemática abordada ao longo do e-book. Essas escolhas permitem que o

estudante concentre sua atenção no processo de modelagem matemática, evitando o desvio de foco para tarefas técnicas que, embora importantes, não são o objetivo principal de aprendizagem neste contexto.

Van Merriënboer e Sweller ainda discutem a importância de evitar o chamado "Efeito da Atenção Dividida", que ocorre quando o leitor precisa dividir sua atenção entre diferentes fontes de informação. Para evitar esse problema, gráficos, imagens e suas respectivas explicações textuais foram inseridos no material de forma integrada, preferencialmente na mesma página ou logo em seguida. Essa estratégia pode ser observada, por exemplo, ao exibir os gráficos que representam a região viável dos problemas, que são apresentados acompanhados de explicações textuais que remetem diretamente aos elementos visuais disponibilizados nas imagens. O mesmo ocorre ao exibir um código Python logo após a modelagem do problema, permitindo ao leitor associar os elementos do código ao problema sem a necessidade de alternar entre diferentes páginas, seções ou capítulos.

Por fim, com o intuito de aumentar a Carga Relevante do material, o e-book foi desenvolvido de modo a estimular o engajamento do estudante com os conceitos apresentados. Nesse sentido, optou-se por problemas contextualizados, estimulando o estudante a estabelecer conexões entre a teoria matemática e suas aplicações. Além desse fato ser um principio fundamental da Modelagem Matemática, a própria metodologia contribui para a redução dessa carga, fazendo com que o aluno tenha um papel central no processo de aprendizagem [32].

A progressão didática adotada não apenas gerencia a carga intrínseca e diminui a carga extrínseca, como também possui um papel importante no estímulo da carga relevante, ao permitir que o estudante possa reutilizar os esquemas construídos em etapas anteriores.

Outro aspecto que contribui para o aumento da carga relevante é a utilização do GeoGebra e do Python com a biblioteca PuLP, que permitem ao estudante explorar, experimentar e validar suas hipóteses de forma interativa. Além disso, a inclusão de exercícios ao final de cada capítulo oferece ao estudante a oportunidade de praticar e consolidar os conhecimentos adquiridos, a partir de novas situações.

Dessa forma, o e-book constitui um recurso didático consistente, que integra os princípios da Teoria da Carga Cognitiva com uma progressão pedagógica cuidadosamente estruturada, visando proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa e duradoura sobre a Programação Linear.

6 Considerações Finais

Este trabalho teve como principal objetivo desenvolver um e-book acessível para o ensino da Programação Linear na Educação Básica. Este material visa integrar a teoria e prática com auxílio de recursos tecnológicos que esteja alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), bem como aos princípios da Modelagem Matemática e da Teoria da Carga Cognitiva.

Para que esse objetivo fosse atingido, foram discutidas as potencialidades da Modelagem Matemática como metodologia de ensino, bem como sua relevância no desenvolvimento de competências previstas na BNCC. Além disso, foi realizada uma análise documental de trabalhos da área, que permitiu identificar que a abordagem do tema no contexto escolar apresenta limitações no que diz respeito à variedade dos materiais desenvolvidos. Assim, surge uma oportunidade de diversificar os materiais didáticos disponíveis, de forma que, além da fundamentação teórica, explore métodos computacionais que possibilitem ao estudante lidar com problemas de maior complexidade e mais próximos da realidade.

Nesse sentido, desenvolveu-se o e-book intitulado *"Programação Linear na Educação Básica"*, fundamentado na Teoria da Carga Cognitiva. Com o intuito de balancear as cargas cognitivas, o material foi pensadamente estruturado, de modo a possibilitar ao aluno uma aprendizagem mais efetiva.

Ao analisar as contribuições do trabalho, foi possível ampliar o repertório didático sobre a otimização, fornecendo um panorama atualizado das pesquisas recentes sobre o tema e identificando lacunas que possam orientar futuras práticas docentes. Por outro lado, ao introduzir a biblioteca PuLP, o e-book oferece uma ferramenta poderosa que supera as limitações da resolução gráfica frequentemente vistas em trabalhos sobre o tema, permitindo ao aluno desenvolver habilidades computacionais. Por fim, a fundamentação teórica baseada na Teoria da Carga Cognitiva confere ao material um respaldo consistente para professores interessados em introduzir a Programação Linear em suas aulas.

No que diz respeito às possibilidades futuras de pesquisa sobre o tema, naturalmente surgem limitações que apontam para novos caminhos e lacunas a serem preenchidas.

Uma das principais sugestões é a aplicação prática do e-book em sala de aula.

Apesar de se apresentar como um material de fácil acesso e desenvolvido a partir de uma teoria que busca garantir uma aprendizagem mais eficiente, a sua eficácia como ferramenta didática ainda não foi testada em um contexto real de ensino. Assim, como trabalho futuro, propõe-se a implementação do material em turmas do Ensino Médio e a elaboração de um relato de experiência que documente os desafios enfrentados, os resultados obtidos e possíveis sugestões de melhoria para o material, contribuindo para que outros professores possam utilizá-lo em seus contextos escolares.

Por outro lado, devido à relevância da otimização e às lacunas levantadas no Capítulo 3 deste trabalho, fica em aberto o desenvolvimento de materiais sobre o tema destinados ao Ensino Fundamental. Embora isso se configure como um desafio, em razão da bagagem matemática dos alunos dessa etapa, é perfeitamente possível, conforme evidenciado por alguns trabalhos analisados. Nesse sentido, uma adaptação do e-book para o Ensino Fundamental poderia explorar a Programação Linear por meio de uma abordagem mais simples e visual, focando em representações gráficas e problemas mais elementares.

Por fim, o formato do e-book abre espaço para a exploração de novos métodos de otimização que não utilizem derivadas, como a Desigualdade das Médias, e para a elaboração de materiais que integrem esses métodos, ampliando o repertório de abordagens disponíveis para o desenvolvimento matemático dos estudantes na Educação Básica.

Referências

1 BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002. ISBN 8572442106.

2 BURAK, D. *Modelagem Matemática: Ações e Interações no Processo de Ensino-Aprendizagem*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

3 BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. *In:* ANAIS da 24ª Reunião Anual da ANPED. Caxambu: ANPED, 2001. p. 1–15.

4 BURAK, D. Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. *In: Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. Edição: Celia Finck Brandt, Dionísio Burak e Tiago Emanuel Klüber. 2. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. cap. 1, p. 17–40. ISBN 978-85-7798-203-5.

5 BURAK, D. A Modelagem na concepção de Educação Matemática de Higginson: relações e implicações envolvidas no processo de ensino e a aprendizagem da Matemática. *Educação Por Escrito*, v. 14, n. 1, e45047, dez. 2023. DOI: 10.15448/2179-8435.2023.1.45047. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/porescrito/article/view/45047.

6 KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. *In: Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações*. Edição: Celia Finck Brandt, Dionísio Burak e Tiago Emanuel Klüber. 2. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. cap. 2, p. 41–58.

7 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

8 BASSANEZI, R. *Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática*. Ago. 2002. p. 16. ISBN 85-7244-207-3.

9 GOMES, F. N. S. *Modelagem da função de mínima variância da teoria de Markowitz e resolução através de técnicas de otimização contínua*. 2024. f. 80. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Setor de Ciências Exatas.

10 MUNDIM, K. C.; DELAVY, V. C. T. Otimização Global de Processos usando o Método Generalized Simulated Annealing. *Revista Processos Químicos*, Goiânia, v. 2, n. 4, p. 9–23, 2008. ISSN 1981-8521.

11 RAMOS, S. R. D. S. *Máximos e mínimos: uma proposta para o cálculo em funções cúbicas sem o uso de derivadas*. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

12 SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Repositório de Dissertações PROFMAT*. 2026. Acesso em: 15 jun. 2026. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc.php.

13 GONÇALVES, BRUNO. *Estudo teórico da programação linear e modelagem matemática como estratégia de ensino*. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Cascavel, PR.

14 DAUM, RENEE BAMPI. *Caminhos para a otimização contínua no ensino básico*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC.

15 CAMPOS, FABÍOLA CORREIA. *Otimização conceituada com o auxílio de games e aplicada a problemas de máximos e mínimos de funções: uma proposta de sequência didática*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, BA.

16 OLIVEIRA, THAIS HERMOSO DE. *Modelagem matemática, otimização linear e o problema de corte unidimensional: abordagens para o ensino médio*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, SP.

17 FLORIANO, MARCUS VINICIUS CARVALHO. *GeoGebra na educação básica: uma abordagem para o ensino de problemas de otimização*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, RJ.

18 MODESTI, MATHEUS DOS SANTOS. *Otimização sem derivadas: discussão e aplicabilidade no ensino básico*. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC.

19 SILVA, LUCIANO FRANCO DA. *Programação linear e inteira no novo ensino médio: Uma proposta de disciplinas eletivas*. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA.

20 CAMARGO, JORGE MATHEUS FERNANDES DE. *O uso dos recursos digitais e dos problemas de otimização como uma abordagem interdisciplinar no ensino médio*. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR.

21 GABY, MICHEL FERREIRA. *O uso das desigualdades elementares na resolução de problemas de otimização*. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, PA.

22 CARVALHO, ELSIVANIA SANTANA. *Problemas de otimização linear no ensino médio: uma proposta de abordagem com o uso da ferramenta GeoGebraBook*. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, MG.

23 FERREIRA, EVERSON DE MOURA. *Possibilidades para o estudo de otimização no ensino médio*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP.

24 DANTZIG, G. B. Linear Programming. *Operations Research*, INFORMS, v. 50, n. 1, p. 42–47, 2002. DOI: 10.1287/opre.50.1.42.17798.

25 HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introduction to Operations Research*. 7th. New York: McGraw-Hill, 2001. ISBN 0072321695.

26 BREGALDA, P. F.; OLIVEIRA, A. A. F. DE; BORNSTEIN, C. T. *Introdução à Programação Linear*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1988. ISBN 85-7001-324-6.

27 STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2. Tradução da 7ª edição norte-americana. ISBN 978-85-221-1463-4.

28 CRUZ, W. S. F. *Uma proposta sobre o uso do Python para resolução de exercícios no ensino fundamental anos finais*. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Rondonópolis, Rondonópolis.

29 MITCHELL, S.; O'SULLIVAN, M.; DUNNING, I. *PuLP: A Linear Programming Toolkit for Python*. 2011.

30 GOOGLE RESEARCH. *Google Colaboratory*. 2025. https://colab.research.google.com. Acesso em: 06 jun. 2026.

31 ANDRADE-LOTERO, L. A. Teoría de la carga cognitiva, diseño multimedia y aprendizaje: un estado del arte. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, v. 5, n. 10, p. 75–92, 2012. ISSN 2027-1174. Disponível em: http://magisinvestigacioneducacion.javeriana.edu.co/.

32 PASSOS, E. R. W. *Princípios da Teoria da Carga Cognitiva Voltados à Educação Corporativa*. Campo Grande, MS, nov. 2020. Projeto de Pesquisa do Curso de Especialização em Inovação e Tecnologias na Educação.

33 SANTOS, L. M. A.; TAROUCO, L. M. R. A Importância do Estudo da Teoria da Carga Cognitiva em uma Educação Tecnológica. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, CINTED/UFRGS, Porto Alegre, v. 5, n. 1, jul. 2007.

34 ALVES, M. V. C. *et al.* As dimensões da Carga Cognitiva e o Esforço Mental. *Revista Brasileira de Psicologia*, Salvador, Bahia, v. 4, n. 1, p. 2–16, 2017.

35 MERRIËNBOER, J. J. G. VAN; SWELLER, J. Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directions. *Educational Psychology Review*, Springer, v. 17, n. 2, p. 147–177, jun. 2005. DOI: 10.1007/s10648-005-3951-0.

36 MAYER, R. E. *Multimedia Learning*. 2nd. New York: Cambridge University Press, 2009.