



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**CARACTERIZAÇÃO DE SÉRIES FINANCEIRAS:
UM MODELO BASEADO EM OSCILADORES HARMÔNICOS
ACOPLADOS**

MONIQUE RAFAELLA ANUNCIÇÃO DE OLIVEIRA

Orientador: Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientadora: Profa. Dra. Lucélia Viviane Vaz Raad
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
SETEMBRO DE 2025

MONIQUE RAFAELLA ANUNCIÇÃO DE OLIVEIRA

**CARACTERIZAÇÃO DE SÉRIES FINANCEIRAS:
UM MODELO BASEADO EM OSCILADORES HARMÔNICOS
ACOPLADOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional.

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados.

Orientador: Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientadora: Profa. Dra. Lucélia Viviane Vaz Raad
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
SETEMBRO DE 2025

O48c Oliveira, Monique Rafaella Anunciação de
Caracterização de séries financeiras: um modelo baseado em osciladores harmônicos acoplados / Monique Rafaella Anunciação de Oliveira. – 2025. 97 f.

Tese (doutorado) apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães.
Coorientadora: Lucélia Viviane Vaz Raad.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Osciladores harmônicos – Teses. 2. Autoregressão (Estatística) – Modelo – Teses. 3. Análise vetorial – Teses. 4. Mercado financeiro – Teses. 5. Econofísica – Teses. 6. Previsão econômica – Teses. I. Magalhães, Arthur Rodrigo Bosco de. II. Raad, Lucélia Viviane Vaz. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 515.785



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

“Caracterização de séries financeiras: um modelo baseado em osciladores harmônicos acoplados”.

Tese de Doutorado apresentada por **Monique Rafaella Anunciação de Oliveira**, em 18 de setembro de 2025, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente



ARTHUR RODRIGO BOSCO DE MAGALHAES
Data: 18/09/2025 16:58:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente



LUCELIA VIVIANE VAZ RAAD
Data: 18/09/2025 17:10:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Drª. Lucélia Viviane Vaz Raad (Coorientadora)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente



ADELICIO CARLOS DE OLIVEIRA
Data: 20/09/2025 20:56:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Adécio Carlos de Oliveira
Universidade Federal de São João del-Rei

Documento assinado digitalmente



CHARLENE CASSIA DE RESENDE
Data: 22/09/2025 10:40:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Drª. Charlene Cássia de Resende
Faculdade Anhanguera

Documento assinado digitalmente



ALLBENS ATMAN PICARDI FARIA
Data: 22/09/2025 14:30:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Allbens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente



JOSE LUIZ ACEBAL FERNANDES
Data: 24/09/2025 11:05:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Luiz Acebal Fernandes
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida à impressão,

Prof. Dr. Alisson Marques da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em
Modelagem Matemática e Computacional

Dedico este trabalho à minha mãe, que sempre torceu por mim em todos os momentos da minha vida.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, por todas as bênçãos recebidas e todas as conquistas alcançadas durante todo esse processo.

Aos meu pais, por sempre me apoiarem, torcerem e vibrarem com cada conquista. À minha mãe, minha melhor amiga, que não pôde acompanhar a conclusão dessa etapa, mas que com toda certeza torceu muito por mim lá do céu. Sua ausência é sentida todos os dias, mas a gratidão por ter tido você ao meu lado pelo tempo definido por Deus é enorme.

Ao meu marido Edney, por sempre me apoiar, incentivar, ajudar, principalmente após o nascimento da nossa filha Letícia. Agradeço à ela por trazer mais alegria às nossas vidas, principalmente nos momentos em que enfrentamos perdas irreparáveis.

Aos meus irmãos, por todo amor, carinho e vibração.

Ao professor Arthur, por ter aceitado me orientar, por todos os ensinamentos, motivação e incentivo. À professora Lucélia, por ter aceitado fazer parte deste trabalho, pelas valiosas contribuições e ensinamentos.

Aos professores do PPGMMC, em particular ao professor Allbens, por todo apoio e incentivo em um momento que eu estava pensando em desistir.

Ao DEMAT e à UFOP por me concederem o afastamento para capacitação.

Aos grandes amigos Ana Paula, Antônio, Juliano, Stefani e Vitor, e meu primo Diogo, por todo apoio, carinho e torcida.

Resumo

Séries temporais financeiras ajudam a entender o comportamento do mercado, e despertam o interesse de áreas como economia, matemática e física. Apresentamos, neste trabalho, um modelo para caracterização de séries de preços inspirado nas equações diferenciais que descrevem a dinâmica de um sistema físico composto por osciladores harmônicos linearmente acoplados. Após a discretização das equações, um modelo autorregressivo vetorial (VAR) foi encontrado. O modelo foi avaliado utilizando-se preços de fechamento diário de 65 ações que compuseram o índice Ibovespa em algum momento no período de 17/12/2004 a 29/05/2020. Verificamos a estacionariedade de tais séries utilizando o teste de Dickey-Fuller. Os resíduos resultantes da aplicação das séries no modelo mostraram-se não autocorrelacionados pelo teste de Breusch-Godfrey. Os parâmetros dos osciladores acoplados foram determinados a partir dos coeficientes do modelo VAR, e com isso definimos quantidades análogas às energias do sistema. Os gráficos das séries temporais das energias apresentaram grandes picos que foram relacionados a eventos que produziram choques nos mercados financeiros. Avaliamos a distribuição empírica de alguns parâmetros do modelo, que em sua grande maioria apresentaram caudas que se afastam da distribuição normal. Investigamos a existência de correlação linear entre os parâmetros dos osciladores acoplados, a liquidez e a média dos volumes das ações. Calculamos o expoente de Hurst para quantidades análogas às energias cinética e potencial, que apresentaram um grande nível de anti-persistência. A análise da largura do espectro de singularidade indicou a presença de correlações não-lineares nas séries de tais quantidades. Aplicamos o modelo proposto na previsão de tendência de preços de ativos financeiros, utilizando os preços de fechamento em candles de 1 minuto das ações que compuseram o índice Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024. Rejeitamos a hipótese nula de que as acurácias das previsões são estatisticamente iguais à de um preditor aleatório relacionado ao lançamento de uma moeda justa. Ainda, utilizamos o modelo para prever o módulo do retorno dos preços dos ativos. Por meio da comparação com os resultados de um modelo baseado em médias móveis, definimos a acurácia do modelo baseado em osciladores. Desta forma, rejeitamos a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5. Fazendo uso de uma distância euclidiana, verificamos que os preços previstos pelo modelo baseado no oscilador harmônico ficaram mais próximos dos preços reais do que os previstos pelo modelo baseado na janela móvel de tempo.

Palavras-chave: Osciladores harmônicos acoplados. Modelo VAR. Mercado financeiro. Econofísica. Modelo de previsão.

Abstract

Financial time series help to understand market behavior and attract interest from fields such as economics, mathematics, and physics. In this work, we present a model for the characterization of price series inspired by differential equations that describe the dynamics of a physical system composed of linearly coupled harmonic oscillators. After discretizing the equations, a vector autoregressive (VAR) model was obtained. The model was evaluated using daily closing prices of 65 stocks that were part of the Ibovespa index at some point during the period from 12/17/2004 to 05/29/2020. We verified the stationarity of these series using the Dickey-Fuller test. The residuals resulting from applying the series to the model were found to be uncorrelated according to the Breusch-Godfrey test. The parameters of the coupled oscillators were determined from the VAR model coefficients, and from this, we defined quantities analogous to the energies of the system. The graphs of the energy time series showed large peaks that were associated with events that caused shocks in financial markets. We evaluated the empirical distribution of some model parameters, which mostly exhibited heavy tails that deviate from the normal distribution. We investigated the existence of linear correlation between the oscillator parameters, liquidity, and the average trading volume of the stocks. We calculated the Hurst exponent for quantities analogous to kinetic and potential energy, which showed a high level of anti-persistence. The analysis of the singularity spectrum width indicated the presence of nonlinear correlations in the series of such quantities. We applied the proposed model to forecast the price trend of financial assets, using 1-minute candle closing prices of stocks that composed the Ibovespa index in the first quarter of 2024. We rejected the null hypothesis that the forecast accuracies are statistically equal to those of a random predictor equivalent to a fair coin toss. Furthermore, we used the model to forecast the absolute return of asset prices. By comparing the results with those of a moving average-based model, we defined the accuracy of the oscillator-based model. In this way, we rejected the null hypothesis that the accuracies are equal to 0.5. Using a Euclidean distance metric, we found that the prices predicted by the harmonic oscillator-based model were closer to the actual prices than those predicted by the moving window model.

Keywords: Coupled harmonic oscillators. VAR model. Financial market. Econophysics. Forecasting model.

Lista de Figuras

Figura 1 – Dois osciladores acoplados, com amortecimento.	21
Figura 2 – Exemplo de cauda pesada.	35
Figura 3 – Constantes elásticas da mola $k_{i,j}$	57
Figura 4 – Valor absoluto da diferença entre as constantes elásticas da mola $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$	58
Figura 5 – Constantes elásticas da mola k_i	58
Figura 6 – Coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$	59
Figura 7 – Valor absoluto da diferença entre os coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$ e $\gamma_{j,i}$	60
Figura 8 – Constantes elásticas da mola γ_i	60
Figura 9 – Distribuição inversa acumulada das constantes elásticas k_i	61
Figura 10 – Distribuição inversa acumulada das constantes elásticas $k_{i,j}$	62
Figura 11 – Distribuição inversa acumulada dos coeficientes de atrito γ_i	62
Figura 12 – Distribuição inversa acumulada dos coeficientes de atrito $\gamma_{i,j}$	63
Figura 13 – Correlação entre a liquidez e as constantes elásticas da mola k_i	64
Figura 14 – Correlação entre a liquidez e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i	64
Figura 15 – Correlação entre a média dos volumes das ações e as constantes elásticas da mola k_i	65
Figura 16 – Correlação entre a média dos volumes das ações e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i	66
Figura 17 – Correlação entre as constantes elásticas da mola k_i e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i	67
Figura 18 – Correlação entre as constantes elásticas da mola $k_{i,j}$ e os coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$	67
Figura 19 – Quantidade análoga à energia cinética do sistema.	68
Figura 20 – Quantidade análoga à energia potencial do sistema.	69
Figura 21 – Quantidade análoga à energia total do sistema.	69
Figura 22 – Distribuição inversa acumulada das quantidades análogas às energias cinéticas do sistema.	70
Figura 23 – Distribuição inversa acumulada das quantidades análogas às energias potenciais do sistema.	71
Figura 24 – Distribuição inversa acumulada das quantidades análogas às energias totais do sistema.	72
Figura 25 – Espectro de singularidade e comportamento associado às funções de flutuação de ordem q para a quantidade análoga à energia cinética.	73
Figura 26 – Espectro de singularidade e comportamento associado às funções de flutuação de ordem q para a quantidade análoga à energia potencial.	73

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Acurácia de cada ativo no modelo de previsão.	74
Tabela 2 – P-valor de cada ativo no teste de hipóteses.	76
Tabela 3 – Quantidade n de p-valores maiores que 0,05 no teste de hipóteses.	77
Tabela 4 – Número de dias sem preço de fechamento para cada ação.	86
Tabela 5 – Média dos volumes de cada ação.	87
Tabela 6 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 1$	89
Tabela 7 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 2$	90
Tabela 8 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 3$	91
Tabela 9 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 4$	92
Tabela 10 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 5$	93
Tabela 11 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 6$	94
Tabela 12 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 7$	95
Tabela 13 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 8$	96
Tabela 14 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 9$	97
Tabela 15 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 10$	98

Lista de Quadros

Quadro 1 – Ações do Ibovespa consideradas na aplicação do modelo.	54
Quadro 2 – Ações do Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024, consideradas na aplicação do modelo de previsão.	88

Lista de Abreviaturas e Siglas

Modelo VAR Modelo Autorregressivo Vetorial

Modelo AR(p) Modelo Autorregressivo de ordem p

Método DFA *Detrended fluctuation analysis* (análise de flutuação sem tendência)

MF-DFA DFA multifractal

Lista de Símbolos

E_c	Energia cinética
E_p	Energia potencial
E_t	Energia total
M_i	Massa do corpo i
k_i	Constante elástica da mola entre o corpo de massa M_i e uma posição fixa
$k_{i,j}$	Constante elástica da mola entre os corpos de massas M_i e M_j
γ_i	Coefficiente de atrito do amortecedor entre o corpo de massa M_i e uma posição fixa
$\gamma_{i,j}$	Coefficiente de atrito do amortecedor entre os corpos de massas M_i e M_j
$E(x)$	Valor esperado de x
$var(x)$	Variância de x
$cov(x,y)$	Covariância entre x e y
ε_t	Vetor de resíduos
δ	Expoente ou parâmetro de escala da distribuição de lei de potência
x_{min}	Valor mínimo de uma quantidade x
H	Expoente de Hurst
$H(q)$	Expoente de Hurst generalizado
$\Delta\alpha$	Largura indicadora de multifractalidade
$x_k(t)$	Preço do ativo k no tempo t
$\bar{x}(t)$	Preço de referência do ativo k no tempo t
S	Parâmetro da média móvel
$X_k(t)$	Desvio do preço, ou preço tratado do ativo k no tempo t
$\varepsilon_{x\tau}$	Resíduo relacionado à estimativa do parâmetro x no tempo τ .
$\hat{X}(t+1)$	Desvio do preço previsto no tempo $t+1$
$\hat{x}_k(t+1)$	Preço previsto do ativo k no tempo $t+1$
a_k	Acurácia do modelo de previsão para o ativo k
r	Coefficiente de correlação linear
R^2	Coefficiente de determinação do ajuste linear

Sumário

1 – Introdução	15
2 – Fundamentação Teórica	19
2.1 Oscilações harmônicas	19
2.2 Econometria de séries temporais	21
2.2.1 Equações em diferenças	21
2.2.2 Séries temporais	24
2.2.3 Modelo VAR	28
2.3 Distribuições de Lei de Potência	34
2.4 Expoente de Hurst	37
2.4.1 Expoente de Hurst Generalizado	37
2.5 Mercados Financeiros	41
3 – Modelo	43
3.1 Dois osciladores	43
3.2 Caso geral	45
3.3 Modelo de previsão	49
4 – Metodologia	53
4.1 Preço de referência	53
4.2 Modelo VAR	53
4.3 Distribuição empírica	54
4.4 Correlação linear	55
4.5 Expoente de Hurst	55
5 – Resultados	56
5.1 Caracterização das séries por meio de um modelo autorregressivo vetorial	56
5.1.1 Estatísticas dos parâmetros do modelo	56
5.1.2 Quantidades análogas às energias	66
5.2 Modelo de previsão	72
5.2.1 Previsão da tendência	72
5.2.2 Previsão do módulo do retorno	75
6 – Considerações Finais	78
Referências	80

Apêndices	85
APÊNDICE A – Número de dias sem preço de fechamento	86
APÊNDICE B – Média dos volumes das ações	87
APÊNDICE C – Ações utilizadas no modelo de previsão	88
APÊNDICE D – Acurácias da previsão do módulo do retorno	89

1 Introdução

Diversas transformações importantes ocorreram no mundo das finanças desde a década de 1970 (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Exemplos de pesquisas relacionadas a Economia realizadas nesse período são o estudo sobre a hipótese de mercado eficiente feito por Fama (1970) e o trabalho de Black e Scholes (1973) para a precificação de opções. Por outro lado, o grande volume de dados financeiros disponíveis em meio eletrônico tem despertado, nas últimas décadas, o interesse de estudiosos de áreas diversas, como Economia e Finanças, Estatística, Matemática, além de Ciência da Computação e Física. Porém, esse interesse já ocorre há muitos anos, como por Bachelier, que em sua tese de doutorado de 1900, modelou os preços das ações com um processo estocástico (BACHELIER, 1900). Em 1923, Norbert Wiener definiu o processo de Wiener ao apresentar uma formulação matemática rigorosa para o movimento Browniano (WIENER, 1923). A aplicação do processo de Wiener em economia surge do fato de que ele pode ser usado como base ao modelar, em tempo contínuo, a incerteza econômica (MALLIARIS, 1990). O cálculo de Itô foi apresentado por Kiyosi Itô em 1944, para estudar processos estocásticos (ITÔ, 1944), e tem aplicações importantes em finanças.

Mais recentemente, Bonanno, Lillo e Mantegna (2001) discutiram trabalhos teóricos e empíricos mostrando que as propriedades estatísticas de séries temporais financeiras apresentam diferentes níveis de complexidade. Uma revisão de vários modelos de mercados financeiros baseados em agentes, estudados por físicos e economistas, foi feita por Samanidou et al. (2007). Alfi et al. (2009b) estudaram as propriedades estatísticas do modelo baseado em agentes para mercados financeiros apresentado pelos mesmos autores em Alfi et al. (2009a), que tinha o objetivo de entender a natureza e a auto-organização de fatos estilizados. A ligação direta entre a alta volatilidade dos mercados e as correlações fortes entre eles foi mostrada por Sandoval e Franca (2012), utilizando os autovalores e autovetores das matrizes de correlação de alguns dos principais índices do mercado financeiro mundial.

Os valores futuros de séries temporais financeiras são essencialmente impossíveis de prever (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Contudo, as séries temporais de preços de ativos financeiros apresentam informações econômicas valiosas e importantes. Lendasse et al. (2000) apresentaram um método para prever séries temporais financeiras utilizando técnicas estatísticas não lineares, que é capaz de encontrar relações não lineares em séries financeiras reais e genéricas. Mondal, Shit e Goswami (2014) analisaram a acurácia do modelo ARIMA na previsão do preço de ações de diferentes setores do mercado de ações da Índia. Tal acurácia ficou acima de 85% para todos os setores, indicando que o modelo ARIMA fornece uma boa acurácia de previsão. Visando encontrar um único método adequado para prever o retorno de ações de mercados desenvolvidos, emergentes e de fronteira, Mallikarjuna e Rao (2019) examinaram o desempenho preditivo de diferentes técnicas de previsão. Os

resultados mostraram que nenhum dos cinco modelos forneceu uma previsão que poderia ser aplicada uniformemente a todos os mercados. Para prever preço de ações, [Azizan, Rahim e Zulpakar \(2025\)](#) utilizaram um modelo de Rede Neural Artificial como um algoritmo de machine learning, cujos resultados mostraram que o modelo pode prever tais preços com precisão e confiabilidade.

Osciladores harmônicos são utilizados para modelar vários sistemas físicos. Um sistema físico composto por n osciladores harmônicos acoplados descreve o movimento oscilatório de n partículas interligadas entre si, em que cada partícula também está interligada a uma posição fixa, como um parede, por exemplo. Esse sistema caracteriza-se pela existência de inércia e de forças que atuam contribuindo para o retorno das partículas à sua posição de equilíbrio. Além disso, consideramos amortecedores entre as partículas e entre a partícula e a posição fixa. Tais propriedades podem ser relacionadas a algumas de séries temporais, como oscilações de preços, estacionariedade e reversão à média ([ENDERS, 2015](#)). Em séries de preços, com o passar do tempo, existe uma diminuição das oscilações de preços que aparecem com o surgimento de novas informações. Tal diminuição, que ocorre apenas em séries temporais estacionárias, está associada ao amortecimento ([CAMPBELL; LO; MACKINLAY, 1997](#)). Uma série temporal é estacionária se seu valor esperado, variância e covariância mantêm-se constantes com o passar do tempo. A inércia está relacionada à formação de bolhas e seu rompimento, que estão ligados à estacionariedade ([GRANGER; NEWBOLD, 1974](#)). Por fim, a restauração à posição de equilíbrio vincula-se à reversão à média, que é a tendência do preço de um ativo a não afastar-se muito do valor baseado em seus fundamentos ([TSAY, 2010](#)).

Algumas pesquisas relacionam osciladores harmônicos e séries temporais financeiras. [Frisch \(1933\)](#) apresentou um modelo para dinâmica de preços baseado em um oscilador amortecido, considerando que, pelos custos de transação, oscilações geradas por grandes movimentos da economia são amortecidas. O retorno centrado no Índice FTSE All Share da Bolsa de Valores de Londres foi modelado por [Ataullah e Tippett \(2007\)](#), avaliando se a evolução dos preços das ações é compatível com a de um oscilador harmônico simples com ruído gaussiano. Foi verificado que, após atingir o mínimo em seu ciclo oscilatório, o retorno centrado continuará aumentando em média por cerca de um ano, e continuará, em média, a declinar por cerca de um ano após atingir um máximo. [Kulesza e Belej \(2015\)](#) usaram o sistema físico de osciladores harmônicos criticamente amortecidos para modelar as séries temporais de preços de imóveis nos mercados imobiliários locais em três cidades da Polônia. Os resultados apresentaram uma correspondência razoável entre o modelo e os preços de imóveis de duas destas cidades, e se mostraram com muito mais inércia do que outros sistemas econômicos.

Um modelo baseado em agentes para o mercado financeiro é proposto por [Xavier, Atman e Magalhães \(2017\)](#), que, sobre determinadas condições, produz dinâmicas semelhantes às de um oscilador harmônico subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido.

Os movimentos associados aos preços de contratos futuros nos mercados financeiros foram investigados por [Mushunje \(2019\)](#), usando movimentos de projéteis e implicações de arrasto variável. Os efeitos dos preços de equilíbrio foram modelados usando os modelos oscilatórios harmônicos. Os resultados mostraram que os preços futuros dependem, em grande parte, das forças de mercado de demanda e oferta e do comportamento dos preços dos ativos subjacentes. Ao analisar o preço de equilíbrio, o modelo harmônico simples mostrou-se eficiente nessa modelagem. [Garcia et al. \(2020\)](#) apresentaram um modelo para previsão de tendência de preços de ativos financeiros baseado em oscilador harmônico com amortecimento. Tal modelo supera um totalmente aleatório em quatro casos estudados.

Inspirados no sistema físico de osciladores harmônicos acoplados, propomos, neste trabalho, um modelo para caracterização de séries de preços de ativos financeiros. Tal modelo é representado por um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem que descreve a dinâmica de n osciladores acoplados, com amortecimento. Após a discretização de tais equações diferenciais, obtivemos um modelo autorregressivo vetorial (VAR) de segunda ordem. Esta classe de modelos é descrita por séries temporais estacionárias, em que cada variável depende de suas próprias defasagens e das defasagens das demais variáveis ([ENDERS, 2015](#)). Os resíduos provenientes do modelo VAR devem ser sequências que são ruídos brancos, que não apresentem autocorrelação.

O modelo foi aplicado em séries de fechamentos diários de algumas ações que compõem o Ibovespa, no período compreendido entre 17/12/2004 e 29/05/2020, extraídas da plataforma Economatica. Verificamos que as séries de desvios de preços são estacionárias, e os resíduos obtidos a partir da aplicação do modelo mostraram-se ruídos brancos não correlacionados. A partir dos coeficientes do modelo VAR, determinamos os coeficientes do oscilador harmônico acoplado, para, assim, calcular quantidades análogas às energias cinética, potencial e total do sistema. Avaliamos, também, a distribuição empírica de alguns parâmetros estimados, e calculamos o coeficiente de correlação de Pearson entre algumas variáveis econômicas e coeficientes do oscilador harmônico acoplado. Por fim, calculamos o expoente de Hurst das quantidades análogas às energias cinética e potencial, assim como o expoente de Hurst generalizado de tais quantidades.

O modelo proposto foi utilizado para a previsão de tendência de preços de ativos financeiros. Em cada passo, uma previsão do preço futuro dos ativos foi realizada, e nosso interesse estava em verificar se, para cada ativo, o preço previsto aumentou ou diminuiu em relação ao preço real do tempo anterior, comparando com o que ocorreu com o preço real. O modelo de previsão foi aplicado em séries de fechamentos, em candles de 1 minuto, das ações que compuseram o índice Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024, extraídas da plataforma LSEG. Calculamos uma acurácia para cada ativo, e, para 85 das 87 ações consideradas, rejeitamos a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5, com nível de significância de 5%.

O modelo baseado em osciladores também foi utilizado para a previsão do módulo

do retorno, e definimos acurácias para estas previsões comparando-as a outras obtidas a partir de um modelo baseado em médias móveis. Variando o tamanho do intervalo da janela móvel, o teste de hipóteses rejeitou a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5, com nível de significância de 5%. Calculamos, também, para cada ação, a distância euclidiana entre os módulos dos retornos dos preços reais e os previstos pelos dois modelos. O modelo baseado em osciladores apresentou uma capacidade maior de previsão, pois para a grande maioria dos ativos, os módulos dos retornos previstos obtidos por este modelo estão mais próximos dos módulos dos retornos reais do que os módulos dos retornos previstos pelo modelo baseado em médias móveis.

O texto é constituído por seis capítulos, sendo este o primeiro, que trata da introdução do trabalho. O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica, abordando temas relacionados a oscilações harmônicas, conceitos de econometria de séries temporais para tratarmos de um modelo VAR, distribuições de lei de potência, expoente de Hurst, mercados financeiros e hipótese de mercado eficiente. O modelo proposto é descrito no terceiro capítulo, começando com dois osciladores e depois apresentamos o caso geral. O modelo de previsão também é descrito neste capítulo. No capítulo 4 apresentamos uma descrição dos métodos utilizados ao longo do trabalho, para a determinação de alguns parâmetros e para as análises estatísticas efetuadas. Os resultados da aplicação do modelo são encontrados no capítulo 5. Por fim, o sexto capítulo descreve as considerações finais do trabalho.

2 Fundamentação Teórica

No presente capítulo apresentaremos alguns conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Iniciaremos com conceitos relacionados às oscilações harmônicas, passando por alguns tópicos de econometria de séries temporais, abordaremos as distribuições de lei de potência, o expoente de Hurst e finalizaremos o capítulo tratando de mercados financeiros e da hipótese de mercado eficiente.

2.1 Oscilações harmônicas

A primeira aproximação para um modelo de interação de partículas é o modelo de osciladores harmônicos, sendo o mais simples e com menos parâmetros arbitrários. Considerando o movimento oscilatório de uma partícula, se esta é deslocada a partir da origem, tende a retornar à sua posição inicial devido a uma força de restauração (THORNTON; MARION, 2014). Pela Lei de Hooke, sendo q a posição da partícula, a força restauradora é dada por

$$F(q) = -kq, \quad (1)$$

em que k é uma constante positiva. A partir da segunda Lei de Newton e da Lei de Hooke, a equação de movimento do oscilador harmônico simples é

$$-kq = Mq'', \quad (2)$$

em que M é a massa da partícula. Definindo $\omega_0^2 = k/M$, a equação anterior reescreve-se como $q'' + \omega_0^2 q = 0$, cuja solução geral é dada por

$$q(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \quad (3)$$

em que c_1 e c_2 são duas constantes arbitrárias.

A energia cinética do oscilador é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} M (q')^2 \quad (4)$$

e a energia potencial é

$$E_p = \frac{1}{2} k q^2. \quad (5)$$

Definimos a energia total E_t do oscilador como a soma da energia cinética com a energia potencial.

Para o caso de oscilações amortecidas, devemos incluir na equação diferencial um termo que represente a força de amortecimento, sendo esta proporcional à velocidade da partícula. Desse modo, a equação do oscilador harmônico amortecido é

$$Mq'' = -\gamma q' - kq, \quad (6)$$

em que γ é uma constante positiva. Definindo $\beta = \gamma/2m$, podemos reescrever a equação anterior como

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \quad (7)$$

A equação característica correspondente a tal equação é dada por $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ e $r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Para determinar a solução geral da [Equação \(7\)](#), precisamos considerar três casos:

1. $\beta^2 > \omega_0^2$, caso em que o movimento é dito superamortecido. Definindo $\omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, a solução geral é dada por

$$q(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}).$$

2. $\beta^2 = \omega_0^2$, caso em que o movimento é criticamente amortecido. A solução geral é dada por

$$q(t) = e^{-\beta t} (c_1 + c_2 t).$$

3. $\beta^2 < \omega_0^2$, em que temos o movimento subamortecido. Ao definir $\omega_2^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, obtemos a solução geral

$$q(t) = e^{-\beta t} [c_1 \cos(\omega_2 t) + c_2 \sin(\omega_2 t)].$$

Consideremos agora dois corpos de massas M_1 e M_2 interligados entre si por uma mola e a posições fixas, também por uma mola. Consideremos, ainda, um amortecedor entre os corpos, e entre cada corpo e uma posição fixa. A dinâmica de dois osciladores acoplados, conforme a [Figura 1](#), é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} M_1 q_1'' = -k_1 q_1 - \gamma_1 q_1' + k_{1,2} (q_2 - q_1) + \gamma_{1,2} (q_2' - q_1') \\ M_2 q_2'' = -k_2 q_2 - \gamma_2 q_2' + k_{2,1} (q_1 - q_2) + \gamma_{2,1} (q_1' - q_2') \end{cases} \quad (8)$$

Os corpos de massas M_1 e M_2 têm suas posições dadas por q_1 e q_2 , respectivamente, medidas a partir das posições de equilíbrio. Os parâmetros k_1 , k_2 , $k_{1,2}$ e $k_{2,1}$ representam as constantes elásticas das molas, e γ_1 , γ_2 , $\gamma_{1,2}$ e $\gamma_{2,1}$, os coeficientes de atrito dos amortecedores.

A energia cinética do sistema é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 (q_1')^2 + \frac{1}{2} M_2 (q_2')^2 \quad (9)$$

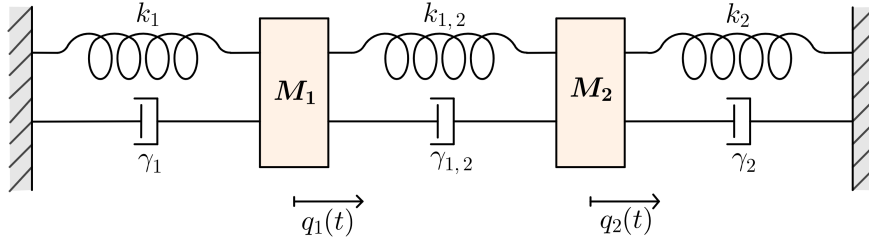


Figura 1 – Dois osciladores acoplados, com amortecimento.

Fonte: De autoria própria.

e a energia potencial é

$$E_p = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 + \frac{1}{2}k_{1,2}(q_1 - q_2)^2. \quad (10)$$

Em geral, a dinâmica de n osciladores acoplados será dada pelo sistema de n equações diferenciais de segunda ordem

$$\begin{cases} M_1q_1'' = -k_1q_1 - \gamma_1q_1' + k_{1,2}(q_2 - q_1) + k_{1,3}(q_3 - q_1) + \cdots + k_{1,n}(q_n - q_1) + \\ \quad \gamma_{1,2}(q_2' - q_1') + \gamma_{1,3}(q_3' - q_1') + \cdots + \gamma_{1,n}(q_n' - q_1') \\ M_2q_2'' = -k_2q_2 - \gamma_2q_2' + k_{2,1}(q_1 - q_2) + k_{2,3}(q_3 - q_2) + \cdots + k_{2,n}(q_n - q_2) + \\ \quad \gamma_{2,1}(q_1' - q_2') + \gamma_{2,3}(q_3' - q_2') + \cdots + \gamma_{2,n}(q_n' - q_2') \\ \vdots \\ M_nq_n'' = -k_nq_n - \gamma_nq_n' + k_{n,1}(q_1 - q_n) + k_{n,2}(q_2 - q_n) + \cdots + k_{n,n-1}(q_{n-1} - q_n) + \\ \quad \gamma_{n,1}(q_1' - q_n') + \gamma_{n,2}(q_2' - q_n') + \cdots + \gamma_{n,n-1}(q_{n-1}' - q_n'), \end{cases} \quad (11)$$

em que, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, a variável q_i corresponde à posição do corpo de massa M_i , as constantes k_i e $k_{i,j}$ representam as constantes elásticas das molas, e, por fim, γ_i e $\gamma_{i,j}$ são os coeficientes de atrito dos amortecedores. A energia cinética do sistema é definida pela equação

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i (q_i')^2, \quad (12)$$

e a energia potencial,

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n k_{ij} (q_i - q_j)^2. \quad (13)$$

2.2 Econometria de séries temporais

2.2.1 Equações em diferenças

Apresentaremos, nesta subseção, conceitos relacionados a equações em diferenças, sendo [Enders \(2015\)](#) a principal referência utilizada. Uma *equação em diferença linear de*

ordem n com coeficientes constantes é dada por

$$x_t = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (14)$$

em que a_i , $i = 0, \dots, n$, são constantes e ε_t é uma função de t . Sua equação homogênea é dada por

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_n x_{t-n}. \quad (15)$$

Considerando a equação em diferença linear de primeira ordem

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (16)$$

sua equação homogênea é dada por $x_t = a_1 x_{t-1}$. Observe que a solução para essa equação, chamada *solução homogênea*, é $x_t = A a_1^t$, em que A é uma constante qualquer. Se $|a_1| < 1$, a expressão a_1^t converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$; se $|a_1| > 1$, a expressão diverge quando $t \rightarrow \infty$; se $a_1 = 1$, qualquer constante A é solução da equação homogênea $x_t = x_{t-1}$; se $a_1 = -1$, a expressão a_1^t oscila entre os valores -1 e 1 .

A *solução geral* de uma equação em diferença é definida como a soma da solução homogênea com uma solução chamada *particular*. Suponha que a solução particular da Equação (16) dependa de um termo constante, do tempo t e dos elementos da sequência $\{\varepsilon_t\}$,

$$x_t = b_0 + b_1 t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}, \quad (17)$$

em que b_0 , b_1 e α_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, são os coeficientes a serem determinados. Substituindo na Equação (16), obtemos

$$b_0 + b_1 t + a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_2 \varepsilon_{t-2} + a_3 \varepsilon_{t-3} + \dots = a_0 + a_1 [b_0 + b_1 (t-1) + a_0 \varepsilon_{t-1} + a_1 \varepsilon_{t-2} + a_2 \varepsilon_{t-3} + \dots] + \varepsilon_t, \quad (18)$$

que é equivalente a

$$(b_0 - a_0 - a_1 b_0 + a_1 b_1) + (b_1 - a_1 b_1) t + (\alpha_0 - 1) \varepsilon_t + (\alpha_1 - a_1 \alpha_0) \varepsilon_{t-1} + (\alpha_2 - a_1 \alpha_1) \varepsilon_{t-2} + (\alpha_3 - a_1 \alpha_2) \varepsilon_{t-3} + \dots = 0. \quad (19)$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \\ \alpha_1 &= a_1, \\ \alpha_2 &= a_1^2, \\ \alpha_3 &= a_1^3, \\ &\vdots \\ \alpha_i &= a_1^i, \\ (1 - a_1) b_0 &= a_0 - a_1 b_1, \\ (1 - a_1) b_1 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Se $a_1 \neq 1$, então $b_1 = 0$ e $b_0 = a_0 / (1 - a_1)$, e a solução particular é dada por

$$x_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i}. \quad (21)$$

Se $a_1 = 1$, então $b_1 = a_0$ e b_0 pode assumir qualquer valor real, logo, a solução particular será

$$x_t = b_0 + a_0 t + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i}. \quad (22)$$

Desse modo, se $a_1 \neq 1$, a solução geral é dada por

$$x_t = A a_1^t + \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i}, \quad (23)$$

e se $a_1 = 1$,

$$x_t = A + a_0 t + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i}. \quad (24)$$

Para o caso geral, buscamos uma solução homogênea da forma $x_t = A \alpha^t$, em que A é uma constante qualquer. Substituindo na [Equação \(15\)](#), obtemos

$$A \alpha^t = a_1 A \alpha^{t-1} + a_2 A \alpha^{t-2} + \cdots + a_{n-1} A \alpha^{t-n+1} + a_n A \alpha^{t-n}. \quad (25)$$

Dividindo a equação anterior por $A \alpha^{t-n}$, obtemos a *equação característica*

$$\alpha^n - a_1 \alpha^{n-1} - a_2 \alpha^{n-2} - \cdots - a_{n-1} \alpha - a_n = 0. \quad (26)$$

As n raízes de tal equação, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, são chamadas de *raízes características*. Desse modo, temos n soluções para a [Equação \(15\)](#), dadas por $x_t = A \alpha_i^t$, $i = 1, \dots, n$. Observe que, dadas n constantes arbitrárias $A_1, A_2, \dots, A_n$, a combinação linear destas n soluções também é uma solução, isto é,

$$x_t = A_1 \alpha_1^t + A_2 \alpha_2^t + \cdots + A_n \alpha_n^t. \quad (27)$$

Se $|\alpha_i| < 1$, $\forall i$, então a solução converge para 0; caso algum $|\alpha_i| > 1$, a solução diverge.

Para a solução particular, suponha uma solução da forma

$$x_t = b_0 + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}, \quad (28)$$

em que b_0 e c_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, são constantes a serem determinadas. Substituindo na [Equação \(14\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} & b_0 + c_0 \varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1} + c_2 \varepsilon_{t-2} + c_3 \varepsilon_{t-3} + \cdots + c_n \varepsilon_{t-n} + \cdots = \\ & a_0 + a_1 (b_0 + c_0 \varepsilon_{t-1} + c_1 \varepsilon_{t-2} + c_2 \varepsilon_{t-3} + \cdots + c_{n-1} \varepsilon_{t-n} + \cdots) \\ & + a_2 (b_0 + c_0 \varepsilon_{t-2} + c_1 \varepsilon_{t-3} + \cdots + c_{n-2} \varepsilon_{t-n} + \cdots) \\ & + a_3 (b_0 + c_0 \varepsilon_{t-3} + \cdots + c_{n-3} \varepsilon_{t-n} + \cdots) + \cdots + a_n (b_0 + c_0 \varepsilon_{t-n} + c_1 \varepsilon_{t-n-1} + \cdots) + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (29)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & (b_0 - a_0 - a_1 b_0 - a_2 b_0 - a_3 b_0 - \cdots - a_n b_0) + (c_0 - 1) \varepsilon_t + (c_1 - a_1 c_0) \varepsilon_{t-1} \\ & + (c_2 - a_1 c_1 - a_2 c_0) \varepsilon_{t-2} + (c_3 - a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0) \varepsilon_{t-3} + \cdots \\ & + (c_n - a_1 c_{n-1} - a_2 c_{n-2} - \cdots - a_n c_0) \varepsilon_{t-n} + \cdots = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Para que a igualdade seja verdadeira, devemos ter

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 / (1 - a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_n), \\ c_0 &= 1, \\ c_1 &= a_1, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2, \\ c_3 &= a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3, \\ c_4 &= a_1^4 + 3a_1^2 a_2 + 2a_1 a_3 + a_2^2 + a_4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (31)$$

Desse modo, a solução particular é

$$x_t = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^n a_i} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}, \quad (32)$$

se $\sum_{i=1}^n a_i \neq 1$ e os c_i são dados pelas equações anteriores. Portanto, a solução geral da [Equação \(14\)](#) é dada por

$$x_t = \sum_{i=1}^n A_i \alpha_i^t + \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^n a_i} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}, \quad (33)$$

se $\sum_{i=1}^n a_i \neq 1$.

“Na literatura de séries temporais, afirma-se simplesmente que a *estabilidade requer que todas as raízes características estejam dentro do círculo unitário*.” (ENDERS, 2015, p. 30). Uma condição necessária para que todas as raízes características estejam dentro do círculo unitário é que $\sum_{i=1}^n a_i < 1$, e uma condição suficiente é que $\sum_{i=1}^n |a_i| < 1$. Se $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, pelo menos uma raiz característica será igual a 1. Um processo de *raiz unitária* é uma sequência tal que pelo menos uma raiz característica seja igual a um.

2.2.2 Séries temporais

Uma *série temporal* é um conjunto de valores observados que são indexados pelo tempo t de cada observação (HAMILTON, 1994), denotada pela sequência de valores observados $\{x_t\}$. Cada elemento x_t da sequência representa o valor observado no instante de tempo t .

De acordo com [Enders \(2015\)](#), a série temporal $\{x_t\}$ é dita *covariância estacionária*, *fracamente estacionária*, ou simplesmente *estacionária* se seu valor esperado (ou média), variância e covariância não alterarem ao longo do tempo. Ou seja, se $E(x)$ denota o valor esperado de x , então para todo t e $t-s$,

$$(i) \ E(x_t) = E(x_{t-s}) = \mu,$$

$$(ii) \ \text{var}(x_t) = \text{var}(x_{t-s}) = \sigma_x^2,$$

$$(iii) \ \text{cov}(x_t, x_{t-s}) = \text{cov}(x_{t-i}, x_{t-i-s}) = \gamma_s, \forall i.$$

Os itens (ii) e (iii) podem ser calculados como $E[(x_t - \mu)^2] = E[(x_{t-s} - \mu)^2] = \sigma_x^2$ e $E[(x_t - \mu)(x_{t-s} - \mu)] = E[(x_{t-i} - \mu)(x_{t-i-s} - \mu)] = \gamma_s$, respectivamente.

Uma sequência $\{x_t\}$ é um *ruído branco* se seus elementos não forem correlacionados e cada um tiver média zero e variância constante ([BROCKWELL; DAVIS, 2002](#)). Ou seja, se

$$(i) \ E(x_t) = 0, \forall t,$$

$$(ii) \ E(x_t^2) = \sigma^2, \forall t,$$

$$(iii) \ E(x_t x_{t-s}) = 0, \forall t \neq t-s.$$

A equação de diferença

$$x_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (34)$$

em que $\{\varepsilon_t\}$ é um ruído branco, é chamada de *modelo autorregressivo de ordem p* para x_t , ou modelo AR(p) ([ENDERS, 2015](#)). Vamos determinar quais são as condições de estacionariedade para um processo AR(1)

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (35)$$

Para isso, nos baseamos nos procedimentos apresentados por [Enders \(2015\)](#). Se $a_1 \neq 1$, vimos que a solução da [Equação \(35\)](#) é $x_t = Aa_1^t + \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i}$. Tomando o valor esperado, como $\{\varepsilon_t\}$ é um ruído branco, obtemos

$$E(x_t) = Aa_1^t + \frac{a_0}{1-a_1}. \quad (36)$$

Desse modo, o valor esperado de x_{t-s} é dado por

$$E(x_{t-s}) = Aa_1^{t-s} + \frac{a_0}{1-a_1}. \quad (37)$$

Como as Equações (36) e (37) dependem de t , podemos concluir que $E(x_t) \neq E(x_{t-s})$, logo, a série temporal não pode ser estacionária.

Para que os valores esperados sejam iguais, ou a constante A deve ser igual a 0, ou devemos ter $a_1^t = 0$. Vamos verificar o que acontece para valores grandes de t , calculando o limite de x_t quando $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} + A \lim_{t \rightarrow \infty} a_1^t. \quad (38)$$

Observe que, se $|a_1| < 1$, $a_1^t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e se $|a_1| > 1$, o limite é divergente. Desse modo, se $|a_1| < 1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i}. \quad (39)$$

Tomando o valor esperado nos dois lados da equação anterior, obtemos que, para t suficientemente grande, $E(x_t) = a_0/(1 - a_1)$. Logo, o valor esperado de x_t é finito e independente do tempo, de modo que $E(x_t) = E(x_{t-s}) = a_0/(1 - a_1) \equiv \mu$ para todo t .

Fazendo a mesma análise para a variância, temos que, se $|a_1| < 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (x_t - \mu)^2 &= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} (x_t - \mu) \right]^2 \\ &= \left[\frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} - \mu \right]^2 \\ &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} \right]^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Tomando o valor esperado nos dois lados da equação, lembrando que $E(\varepsilon_\tau^2) = \sigma^2$ e $E(\varepsilon_\tau \varepsilon_{\tau-s}) = 0$, obtemos, para t suficientemente grande,

$$\begin{aligned} E[(x_t - \mu)^2] &= E[(\varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots)^2] \\ &= E(\varepsilon_t^2 + a_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + a_1^4 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + 2a_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + 2a_1^2 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \dots + 2a_1^3 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \dots) \\ &= \sigma^2 + a_1^2 \sigma^2 + a_1^4 \sigma^2 + \dots + 0 \\ &= \sigma^2 (1 + a_1^2 + a_1^4 + \dots) \\ &= \sigma^2 \frac{1}{1 - a_1^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Desse modo, a variância de x_t é finita e não depende do tempo, logo, $\text{var}(x_t) = \text{var}(x_{t-s})$.

Por fim, para a covariância, se $|a_1| < 1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_t - \mu)(x_{t-s} - \mu) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i \varepsilon_{t-s-i} \right), \quad (42)$$

e tomando o valor esperado na equação anterior, para t suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned}
 E[(x_t - \mu)(x_{t-s} - \mu)] &= E\left[(\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + a_1^s\varepsilon_{t-s} + a_1^{s+1}\varepsilon_{t-s-1} + a_1^{s+2}\varepsilon_{t-s-2} + \cdots) \right. \\
 &\quad \left. (\varepsilon_{t-s} + a_1\varepsilon_{t-s-1} + a_1^2\varepsilon_{t-s-2} + \cdots)\right] \\
 &= a_1^s\sigma^2 + a_1^{s+2}\sigma^2 + a_1^{s+4}\sigma^2 + \cdots \\
 &= \sigma^2 a_1^s (1 + a_1^2 + a_1^4 + \cdots) \\
 &= \sigma^2 a_1^s \frac{1}{1 - a_1^2}.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Assim, a covariância também é finita e independente do tempo, para todo t .

Portanto, para que a série temporal $\{x_t\}$ seja estacionária, devemos ter a solução homogênea nula, ou seja, ou a constante deve ser igual a 0, ou a sequência deve ter iniciado infinitamente no passado, com $|a_1| < 1$.

Se $a_1 = 1$, a solução da [Equação \(35\)](#) é $x_t = A + a_0 t + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i}$. Tomando o valor esperado de x_t , obtemos $E(x_t) = A + a_0 t$, e o valor esperado de x_{t-s} é dado por $E(x_{t-s}) = A + a_0(t-s)$. Daí, observamos que só é possível obter a igualdade entre $E(x_t)$ e $E(x_{t-s})$ se $a_0 = 0$.

Vamos analisar agora o modelo $AR(p)$ dado pela [Equação \(34\)](#). A solução particular de tal equação pode ser escrita como

$$x_t = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^p a_i} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}, \tag{44}$$

se as raízes características da equação homogênea estiverem todas dentro do círculo unitário; as constantes c_i são os coeficientes a serem determinados. Calculando o valor esperado, obtemos

$$E(x_t) = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^p a_i} = E(x_{t-s}). \tag{45}$$

Lembrando que uma condição necessária para que as raízes características estejam dentro do círculo unitário é que $\sum_{i=1}^p a_i < 1$, podemos concluir que o valor esperado independe do tempo.

Calculando a variância de x_t , obtemos

$$\begin{aligned}
 var(x_t) &= E\{[x_t - E(x_t)]^2\} \\
 &= E[(c_0\varepsilon_t + c_1\varepsilon_{t-1} + c_2\varepsilon_{t-2} + \cdots)^2] \\
 &= \sigma^2(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots) \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2,
 \end{aligned} \tag{46}$$

que independe do tempo t . Logo, $\text{var}(x_t) = \text{var}(x_{t-s})$. Por fim, analisando a covariância,

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_t, x_{t-s}) &= E \{ [x_t - E(x_t)] [x_{t-s} - E(x_{t-s})] \} \\ &= E [(c_0 \varepsilon_t + c_1 \varepsilon_{t-1} + c_2 \varepsilon_{t-2} + \dots) (c_0 \varepsilon_{t-s} + c_1 \varepsilon_{t-s-1} + c_2 \varepsilon_{t-s-2} + \dots)] \\ &= \sigma^2 (c_s c_0 + c_{s+1} c_1 + c_{s+2} c_2 + \dots). \end{aligned} \quad (47)$$

Como a covariância não depende do tempo, temos que $\text{cov}(x_t, x_{t-s}) = \text{cov}(x_{t-j}, x_{t-j-s})$. Portanto, é necessário e suficiente que $\sum_{i=1}^p |a_i| < 1$ para que um processo $\text{AR}(p)$ seja estacionário.

Dickey e Fuller desenvolveram um procedimento para verificar a presença de uma raiz unitária (DICKEY; FULLER, 1979), conhecido como *teste de Dickey-Fuller*. Definindo $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ e $\gamma = a_1 - 1$, o teste de Dickey-Fuller testa a hipótese nula $a_1 = 1$, ou seja, $\gamma = 0$, em alguma das seguintes equações regressivas

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \gamma x_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \Delta x_t &= a_0 + \gamma x_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \Delta x_t &= a_0 + \gamma x_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (48)$$

Se $a_1 = 1$, a sequência $\{x_t\}$ contém uma raiz unitária.

Testes para equações de ordem superior são chamados *testes de Dickey-Fuller aumentados*. Dado o processo $\text{AR}(p)$

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_{p-2} x_{t-p+2} + a_{p-1} x_{t-p+1} + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (49)$$

somando e subtraindo $a_p x_{t-p+1}$, podemos reescrevê-lo como

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_{p-2} x_{t-p+2} + (a_{p-1} + a_p) x_{t-p+1} - a_p \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t. \quad (50)$$

Agora, somando e subtraindo $(a_{p-1} + a_p) x_{t-p+2}$, obtemos

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + (a_{p-2} + a_{p-1} + a_p) x_{t-p+2} - (a_{p-1} + a_p) \Delta x_{t-p+2} - a_p \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t. \quad (51)$$

Seguindo esse caminho, obtemos

$$\Delta x_t = a_0 + \gamma x_{t-1} + \sum_{i=2}^p \left(- \sum_{j=i}^p a_j \right) \Delta x_{t-i+1} + \varepsilon_t, \quad (52)$$

em que $\gamma = \sum_{i=1}^p a_i - 1$. Se $\gamma = 0$, ou $\sum_{i=1}^p a_i = 1$, a sequência $\{x_t\}$ tem uma raiz unitária.

2.2.3 Modelo VAR

Nesta subseção apresentaremos alguns conceitos de séries temporais vetoriais, começando com a definição de um modelo VAR. De acordo com Enders (2015), dadas n séries

temporais estacionárias $\{y_{it}\}$ e n sequências $\{\varepsilon_{it}\}$ que são ruídos brancos não-correlacionados, $i = 1, \dots, n$, um *modelo autorregressivo vetorial (VAR) de primeira ordem* é dado pelo sistema

$$\begin{aligned} y_{1t} &= b_{10} - b_{12}y_{2t} - \dots - b_{1n}y_{nt} + \gamma_{11}y_{1(t-1)} + \dots + \gamma_{1n}y_{n(t-1)} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= b_{20} - b_{21}y_{1t} - \dots - b_{2n}y_{nt} + \gamma_{21}y_{1(t-1)} + \dots + \gamma_{2n}y_{n(t-1)} + \varepsilon_{2t}, \\ &\vdots \\ y_{nt} &= b_{n0} - b_{n1}y_{1t} - \dots - b_{n(n-1)}y_{(n-1)t} + \gamma_{n1}y_{1(t-1)} + \dots + \gamma_{nn}y_{n(t-1)} + \varepsilon_{nt}, \end{aligned} \quad (53)$$

em que os b_{ij} e γ_{ij} são constantes. A equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \vdots \\ b_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \\ \vdots \\ y_{n(t-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

ou seja,

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_t = \mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{x}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (55)$$

em que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ \vdots \\ b_{n0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}.$$

Considerando que exista a inversa da matriz $\mathbf{B}$, multiplicando a esquerda por $\mathbf{B}^{-1}$, obtemos o *modelo VAR na forma padrão*

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \quad (56)$$

em que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_0$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_1$ e $\mathbf{e}_t = \mathbf{B}^{-1}\varepsilon_t$.

Vamos procurar a condição de estabilidade de um modelo VAR de primeira ordem. Para isso, vejamos, primeiro, algumas definições. O escalar λ é uma *raiz característica* da matriz $\mathbf{A}$ de ordem n se for um de seus autovalores. Desse modo, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n , é a *equação característica* de $\mathbf{A}$.

Para verificar a estabilidade do sistema, precisamos analisar apenas a equação homogênea

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1}, \quad (57)$$

procurando uma solução não-nula da forma

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{c}\lambda^t, \quad (58)$$

em que $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ é um vetor de constantes arbitrárias, e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Substituindo na [Equação \(57\)](#), obtemos

$$\mathbf{c}\lambda^t = \mathbf{A}_1\mathbf{c}\lambda^{t-1}. \quad (59)$$

Dividindo por λ^{t-1} , podemos reescrevê-la como

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (60)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Para que o sistema tenha solução não-nula, o determinante da matriz de coeficientes deve ser igual a 0, ou seja, $\det(\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I}) = 0$, que é a equação característica de $\mathbf{A}_1$. Dadas as n raízes características de $\mathbf{A}_1$, cada λ_i^t será uma solução homogênea, então a combinação linear destas também será uma solução homogênea:

$$x_{it} = d_{i1}\lambda_1^t + d_{i2}\lambda_2^t + \cdots + d_{in}\lambda_n^t. \quad (62)$$

Para que a solução homogênea seja estável, a condição necessária e suficiente é que $|\lambda_i| < 1$ e $\lambda_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Observe que, da [Equação \(56\)](#), obtemos

$$\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{e}_{t-1}, \quad (63)$$

então podemos reescrever o VAR na forma padrão como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{e}_{t-1}) + \mathbf{e}_t \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}_1)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^2\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t, \end{aligned} \quad (64)$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 2. Iterando novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}_1)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^2(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-3} + \mathbf{e}_{t-2}) + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^3\mathbf{x}_{t-3} + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2} + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{e}_t. \end{aligned} \quad (65)$$

Após n iterações, obtemos

$$\mathbf{x}_t = \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{A}_1^i \right) \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^{n+1}\mathbf{x}_{t-n-1} + \sum_{i=0}^n \mathbf{A}_1^i \mathbf{e}_{t-i}, \quad (66)$$

em que $\mathbf{A}_1^0 = \mathbf{I}$.

Observe que, para a convergência da solução, precisamos que a expressão $\mathbf{A}_1^{n+1} \rightarrow \mathbf{0}$ quando $n \rightarrow \infty$. Busquemos agora uma solução particular da forma $\mathbf{x}_t = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{e}_{t-i}$.

Substituindo na [Equação \(56\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0 \mathbf{e}_t + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_{t-2} + \mathbf{C}_3 \mathbf{e}_{t-3} + \cdots = \\ \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 (\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0 \mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_{t-2} + \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_{t-3} + \cdots) + \mathbf{e}_t, \end{aligned} \quad (67)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0) + (\mathbf{C}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{e}_t + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_0) \mathbf{e}_{t-1} + (\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1) \mathbf{e}_{t-2} \\ + (\mathbf{C}_3 - \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2) \mathbf{e}_{t-3} + \cdots = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (68)$$

Temos, então, as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_0, \\ \mathbf{C}_0 &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{C}_1 &= \mathbf{A}_1, \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{A}_1^2, \\ \mathbf{C}_3 &= \mathbf{A}_1^3, \\ &\vdots \\ \mathbf{C}_i &= \mathbf{A}_1^i. \end{aligned} \quad (69)$$

Assim, a solução particular é dada por $\mathbf{x}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^i \mathbf{e}_{t-i}$.

Para verificar a estacionariedade de $\mathbf{x}_t$, calculemos o valor esperado da solução particular:

$$E(\mathbf{x}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^i E(\mathbf{e}_{t-i}). \quad (70)$$

Vamos determinar $E(\mathbf{e}_\tau)$ para o caso $n = 2$. Da [Equação \(56\)](#), temos que $\mathbf{e}_\tau = \mathbf{B}^{-1} \varepsilon_\tau$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} e_{1\tau} \\ e_{2\tau} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1\tau} \\ \varepsilon_{2\tau} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

isto é,

$$\begin{aligned} e_{1\tau} &= \frac{\varepsilon_{1\tau} - b_{12}\varepsilon_{2\tau}}{1 - b_{12}b_{21}}, \\ e_{2\tau} &= \frac{\varepsilon_{2\tau} - b_{21}\varepsilon_{1\tau}}{1 - b_{12}b_{21}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Como $\{\varepsilon_{1\tau}\}$ e $\{\varepsilon_{2\tau}\}$ são ruídos brancos, segue que $E(e_{1\tau}) = E(e_{2\tau}) = 0$. Calculando a variância, temos

$$\text{var}(e_{1\tau}) = E \left[\left(\frac{\varepsilon_{1\tau} - b_{12}\varepsilon_{2\tau}}{1 - b_{12}b_{21}} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_1^2 + b_{12}^2 \sigma_2^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2}, \quad (73)$$

em que $\sigma_i^2 = E(\varepsilon_{i\tau}^2)$, $i = 1, 2$. Logo, $\text{var}(e_{1\tau})$ é constante. Analogamente, $\text{var}(e_{2\tau})$ não depende do tempo. Por fim,

$$\text{cov}(e_{1\tau}, e_{1(\tau-s)}) = E\left(\frac{\varepsilon_{1\tau} - b_{12}\varepsilon_{2\tau}}{1 - b_{12}b_{21}} \cdot \frac{\varepsilon_{1(\tau-s)} - b_{12}\varepsilon_{2(\tau-s)}}{1 - b_{12}b_{21}}\right) = 0. \quad (74)$$

Analogamente, $\text{cov}(e_{2\tau}, e_{2(\tau-s)}) = 0$. Portanto, concluímos que $\{e_{1\tau}\}$ e $\{e_{2\tau}\}$ são ruídos brancos. Mas $e_{1\tau}$ e $e_{2\tau}$ são correlacionados, pois

$$\text{cov}(e_{1\tau}, e_{2\tau}) = E\left(\frac{\varepsilon_{1\tau} - b_{12}\varepsilon_{2\tau}}{1 - b_{12}b_{21}} \cdot \frac{\varepsilon_{2\tau} - b_{21}\varepsilon_{1\tau}}{1 - b_{12}b_{21}}\right) = -\frac{b_{21}\sigma_1^2 + b_{12}\sigma_2^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2}. \quad (75)$$

Com isso, na [Equação \(70\)](#), obtemos que $E(\mathbf{x}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_0 \equiv \mu$, logo, não depende do tempo t . Agora,

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{x}_t) &= E[(\mathbf{x}_t - \mu)^2] \\ &= E[(\mathbf{e}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2} + \dots)^2] \\ &= E[(\mathbf{e}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2} + \dots)(\mathbf{e}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2} + \dots)^T] \\ &= E[\mathbf{e}_t\mathbf{e}_t^T + \mathbf{e}_t(\mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1})^T + \mathbf{e}_t(\mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2})^T + \dots + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1}\mathbf{e}_t^T + \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1})^T + \\ &\quad \mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1}(\mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2})^T + \dots + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2}\mathbf{e}_t^T + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2}(\mathbf{A}_1\mathbf{e}_{t-1})^T + \mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2}(\mathbf{A}_1^2\mathbf{e}_{t-2})^T + \dots]. \end{aligned} \quad (76)$$

Observe que

$$\begin{aligned} E(\mathbf{e}_\tau\mathbf{e}_\tau^T) &= E\left(\begin{bmatrix} e_{1\tau} \\ e_{2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1\tau} & e_{2\tau} \end{bmatrix}\right) \\ &= E\left(\begin{bmatrix} e_{1\tau}^2 & e_{1\tau}e_{2\tau} \\ e_{1\tau}e_{2\tau} & e_{2\tau}^2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} E(e_{1\tau}^2) & E(e_{1\tau}e_{2\tau}) \\ E(e_{1\tau}e_{2\tau}) & E(e_{2\tau}^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{var}(e_{1\tau}) & \text{cov}(e_{1\tau}, e_{2\tau}) \\ \text{cov}(e_{1\tau}, e_{2\tau}) & \text{var}(e_{2\tau}) \end{bmatrix} \\ &\equiv \Sigma, \end{aligned} \quad (77)$$

e

$$\begin{aligned} E(\mathbf{e}_\tau\mathbf{e}_{\tau-i}^T) &= E\left(\begin{bmatrix} e_{1\tau} \\ e_{2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1(\tau-i)} & e_{2(\tau-i)} \end{bmatrix}\right) \\ &= E\left(\begin{bmatrix} e_{1\tau}e_{1(\tau-i)} & e_{1\tau}e_{2(\tau-i)} \\ e_{1(\tau-i)}e_{2\tau} & e_{2\tau}e_{2(\tau-i)} \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (78)$$

Desse modo, $\text{var}(\mathbf{x}_t) = \Sigma + \mathbf{A}_1 \Sigma \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1^2 \Sigma (\mathbf{A}_1^2)^T + \mathbf{A}_1^3 \Sigma (\mathbf{A}_1^3)^T + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^i \Sigma (\mathbf{A}_1^i)^T$, que independe do tempo t , e converge se $\mathbf{A}_1^n \rightarrow \mathbf{0}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por fim,

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-s}) &= E[(\mathbf{x}_t - \mu)(\mathbf{x}_{t-s} - \mu)] \\ &= E[(\mathbf{e}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{e}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_1^s \mathbf{e}_{t-s} + \mathbf{A}_1^{s+1} \mathbf{e}_{t-s-1} + \mathbf{A}_1^{s+2} \mathbf{e}_{t-s-2} + \dots) \\ &\quad (\mathbf{e}_{t-s} + \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_{t-s-1} + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{e}_{t-s-2} + \dots)^T] \\ &= \mathbf{A}_1^s \Sigma + \mathbf{A}_1^{s+1} \Sigma \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1^{s+2} \Sigma (\mathbf{A}_1^2)^T + \dots \end{aligned} \quad (79)$$

não depende do tempo t e converge se $\mathbf{A}_1^n \rightarrow \mathbf{0}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para o caso geral, dadas as séries temporais $\{y_{it}\}$, $i = 1, \dots, n$, um *modelo VAR de ordem p* é dado por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (80)$$

em que $\mathbf{y}_t$ é um vetor de ordem $n \times 1$ contendo as n séries temporais estacionárias, $\mathbf{A}_0$ é um vetor $n \times 1$ de constantes, $\mathbf{A}_i$, $i = 1, \dots, p$, são matrizes $n \times n$ de coeficientes, e ε_t é um vetor $n \times 1$ de resíduos que são ruídos brancos não-correlacionados.

Para verificar a estabilidade de um modelo VAR de ordem p , precisamos analisar apenas a equação homogênea

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}_{t-p}, \quad (81)$$

procurando uma solução não-nula da forma

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} \lambda^t, \quad (82)$$

em que $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ é um vetor de constantes arbitrárias, e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Substituindo na [Equação \(81\)](#), obtemos

$$\mathbf{c} \lambda^t = \mathbf{A}_1 \mathbf{c} \lambda^{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{c} \lambda^{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{c} \lambda^{t-p}. \quad (83)$$

Dividindo por λ^{t-p} , podemos reescrevê-la como

$$(\mathbf{I} \lambda^p - \mathbf{A}_1 \lambda^{p-1} - \mathbf{A}_2 \lambda^{p-2} - \dots - \mathbf{A}_p) \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (84)$$

Para que o sistema tenha solução não-nula, o determinante da matriz de coeficientes deve ser igual a 0, ou seja,

$$\det(\mathbf{I} \lambda^p - \mathbf{A}_1 \lambda^{p-1} - \mathbf{A}_2 \lambda^{p-2} - \dots - \mathbf{A}_p) = 0. \quad (85)$$

Logo, a solução homogênea $\mathbf{y}_t = \mathbf{c} \lambda_i^t$ será estável se $|\lambda_i| < 1$ e $\lambda_i \neq 0$, para todo λ_i que satisfaz a [Equação \(85\)](#).

2.3 Distribuições de Lei de Potência

Uma quantidade x obedece uma lei de potência se ela satisfaz uma distribuição de probabilidade do tipo

$$p(x) \propto x^{-\delta}, \quad (86)$$

em que δ é um parâmetro constante da distribuição, chamado de *expoente* ou *parâmetro de escala* (CLAUSET; SHALIZI; NEWMAN, 2009). Na prática, a lei de potência não se aplica para todos os valores de x , mas para valores maiores que um valor mínimo x_{min} . Nesses casos, dizemos que a cauda da distribuição segue uma lei de potência.

Uma cauda é dita pesada se existe uma probabilidade maior de ocorrer valores extremos nos dados da distribuição do que em dados com distribuição normal (SUN; FREES; ROSENBERG, 2008), ou seja, o decaimento da cauda da distribuição é mais lento do que o decaimento de uma gaussiana. A lei de potência é uma distribuição que exibe cauda pesada, que é identificada por uma reta com inclinação δ plotada em escala log-log (CLAUSET; YOUNG; GLEDITSCH, 2007). A Figura 2 apresenta, em escala log-log, a função distribuição inversa acumulada da população das seiscentas maiores cidades dos Estados Unidos, baseado no Censo do ano 2000. A reta representa um ajuste linear da cauda da distribuição que segue uma lei de potência, com expoente $\delta = 2,36$, e a curva tracejada corresponde à distribuição normal truncada com a mesma média amostral que a distribuição anterior. Em comparação com a distribuição normal, observamos uma cauda pesada para a distribuição inversa acumulada.

A função densidade de probabilidade de uma distribuição de lei de potência contínua, sendo X o valor observado e C uma constante de normalização, é dada por

$$p(x)dx = Pr(x \leq X < x + dx) = Cx^{-\delta}dx, \quad (87)$$

ou

$$p(x) = \frac{\delta - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\delta}. \quad (88)$$

A função de distribuição acumulada complementar de uma variável distribuída por lei de potência, no caso contínuo, é dada por

$$P(x) = Pr(X \geq x) = \int_x^{\infty} p(x')dx' = \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\delta+1}. \quad (89)$$

Para verificar se os dados seguem uma distribuição de lei de potência, Clauset, Shalizi e Newman (2009) propõem que sejam estimados os parâmetros δ e x_{min} , e depois realizado o teste de adequação de ajuste entre os dados e uma lei de potência. Em tal teste, um p-valor é gerado, e a lei de potência é uma hipótese plausível para os dados se o p-valor for maior do que 0,1.

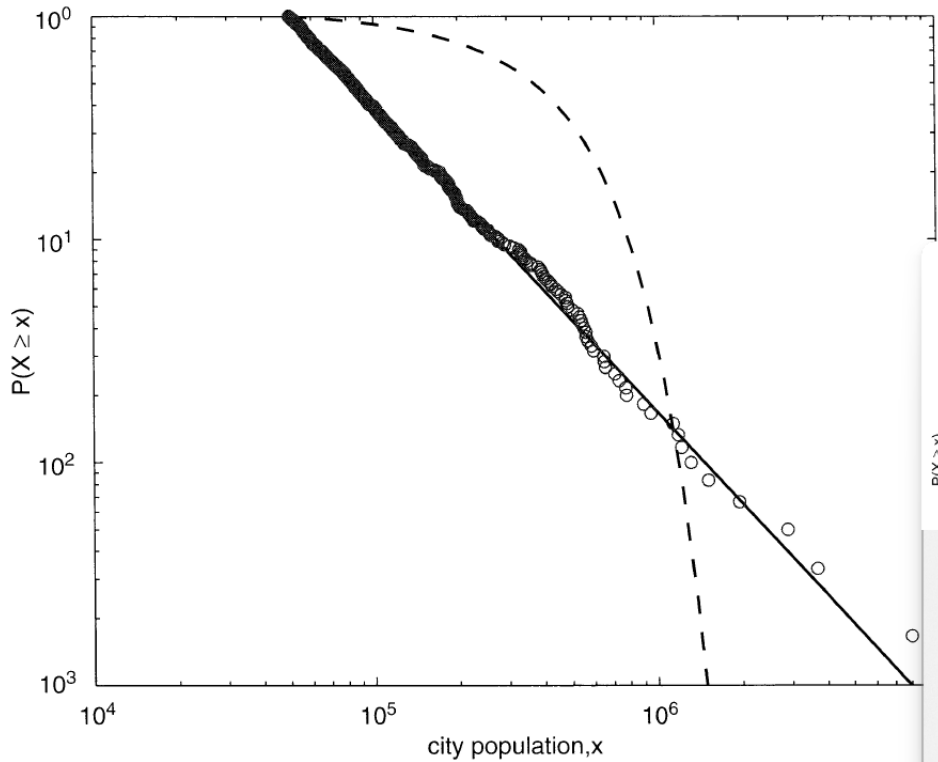


Figura 2 – Função distribuição inversa acumulada, em escala log-log, da população das seiscentas maiores cidades dos Estados Unidos, baseado no Censo do ano 2000. A reta representa um ajuste linear da cauda da distribuição que segue uma lei de potência, e a curva tracejada corresponde à distribuição normal truncada com a mesma média amostral.

Fonte: (CLAUSET; YOUNG; GLEDITSCH, 2007).

O parâmetro δ é estimado pelo método de máxima verossimilhança. Supondo que os dados seguem uma lei de potência para $x > x_{min}$, é possível gerar estimadores de máxima verossimilhança do parâmetro de escala. Dado um conjunto com n observações $x_i \geq x_{min}$, procuramos o valor de δ para o modelo de lei de potência que é mais provável de ter gerado os dados. Tal probabilidade é dada por

$$p(x|\delta) = \prod_{i=1}^n \frac{\delta - 1}{x_{min}} \left(\frac{x_i}{x_{min}} \right)^{-\delta}, \quad (90)$$

chamada de *verossimilhança* dos dados fornecidos pelo modelo. Vamos procurar o valor de δ que maximiza essa função, analisando o logaritmo da verossimilhança:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \ln p(x|\delta) = \ln \prod_{i=1}^n \frac{\delta - 1}{x_{min}} \left(\frac{x_i}{x_{min}} \right)^{-\delta} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\ln(\delta - 1) - \ln x_{min} - \delta \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right] \\ &= n \ln(\delta - 1) - n \ln x_{min} - \delta \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{min}}. \end{aligned} \quad (91)$$

Daí,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta - 1} - \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min}}, \quad (92)$$

que é igual a zero para

$$\hat{\delta} = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min}} \right]^{-1}, \quad (93)$$

o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro de escala. O erro padrão, derivado da largura da máxima verossimilhança, é dado por

$$\sigma = \frac{\hat{\delta} - 1}{\sqrt{n}} + O(1/n), \quad (94)$$

em que $O(1/n)$ é positiva.

A estimativa do parâmetro $x_{\min}$ é feita a partir de um método numérico que escolhe o valor $\hat{x}_{\min}$ que produz o melhor modelo de lei de potência para os dados (CLAUSET; YOUNG; GLEDITSCH, 2007). Tal método minimiza a distância entre o modelo de lei de potência e os dados empíricos, que é calculada usando a estatística KS (Kolmogorov-Smirnov) (CLAUSET; SHALIZI; NEWMAN, 2009).

O valor de $\hat{x}_{\min}$ é escolhido de modo a tornar as distribuições de probabilidade dos dados medidos e o modelo de lei de potência melhor ajustado, tão semelhantes quanto possível. Se o valor de $\hat{x}_{\min}$ escolhido for maior que o verdadeiro valor $x_{\min}$, o tamanho do conjunto de dados será reduzido e as distribuições de probabilidade serão menos compatíveis devido à flutuação estatística. Caso $\hat{x}_{\min}$ escolhido seja menor que $x_{\min}$, as distribuições serão diferentes devido à diferença fundamental entre os dados e o modelo pelo qual estão sendo descritos. A melhor estimativa para $\hat{x}_{\min}$ encontra-se no meio.

Uma medida para quantificar a distância entre duas distribuições de probabilidade é a estatística KS, que é a distância máxima entre a função distribuição acumulada dos dados e do modelo ajustado,

$$D = \max_{x \geq x_{\min}} |S(x) - P(x)|, \quad (95)$$

em que $S(x)$ é a função distribuição acumulada dos dados para as observações com valor no mínimo $x_{\min}$, e $P(x)$ é a função distribuição acumulada para o modelo de lei de potência que melhor ajusta os dados para $x \geq x_{\min}$. Assim, a estimativa $\hat{x}_{\min}$ é o valor de $x_{\min}$ que minimiza D .

Considerando um conjunto de dados observados e uma distribuição de lei de potência hipotética da qual os dados são extraídos, o teste de adequação para verificar se a hipótese de lei de potência é plausível, é baseado na medida da distância entre a distribuição dos dados empíricos e o modelo hipotético. Tal distância é comparada com medidas de distância para conjuntos de dados sintéticos (artificiais) comparáveis, extraídos do mesmo modelo. O

p-valor é definido como a fração das distâncias sintéticas que são maiores que a distância empírica. Se p for pequeno, o modelo não é um ajuste plausível para os dados.

Em mais detalhes, os dados empíricos são ajustados ao modelo de lei de potência usando as estimativas $\hat{x}_{min}$ e $\hat{\delta}$, e a estatística KS é calculada para este ajuste. Um número grande de conjuntos de dados sintéticos distribuídos por lei de potência são gerados com x_{min} e δ iguais aos da distribuição que melhor ajusta os dados observados, que são ajustados individualmente a seu próprio modelo de lei de potência. A estatística KS é calculada para cada conjunto relativa a seu próprio modelo. O p-valor é a fração em que a estatística é maior que o valor para o dado empírico. Se $p \leq 0,1$, a hipótese de lei de potência não é plausível para os dados considerados.

2.4 Expoente de Hurst

O expoente de Hurst é uma métrica utilizada para quantificar correlações de longo prazo em séries temporais (HURST, 1951). Foi introduzido, em 1951, pelo hidrólogo inglês Harold Edwin Hurst, para lidar com o problema de controle de reservatórios perto da represa do rio Nilo (RAMOS-REQUENA; TRINIDAD-SEGOVIA; SÁNCHEZ-GRANERO, 2017). Uma das metodologias mais utilizadas para estimar o expoente de Hurst é o método DFA (detrended fluctuation analysis) (PENG et al., 1994), determinado por dois passos.

Seja $y(n)$ uma sequência de tamanho N dada por um passeio aleatório. Tal sequência é dividida em N/ℓ caixas não sobrepostas, cada uma com ℓ elementos. Em cada caixa, a “tendência local” é definida como a ordenada de um ajuste linear de mínimos quadrados para o deslocamento do caminhante em cada caixa.

Para o segundo passo, a “caminhada sem tendência” (*detrended walk*) $y_\ell(n)$, é definida como a diferença entre a caminhada original $y(n)$ e a tendência local. São calculadas a variância da caminhada sem tendência para cada caixa, e a média de tais variâncias em todas as caixas de tamanho ℓ , $F_d^2(\ell)$. Caso haja apenas correlações de curto alcance (ou nenhuma correlação) na sequência, então a caminhada sem tendência deve ter as propriedades estatísticas de uma caminhada aleatória (imparcial ou tendenciosa), logo $F_d(\ell) \sim \ell^{1/2}$. Se houver correlação de lei de potência de longo alcance, então $F_d(\ell) \sim \ell^H$, para $H \neq 1/2$.

Quando o expoente H é igual a 0,5, a série temporal não possui uma tendência. Se o expoente de Hurst apresenta valores menores do que 0,5, a série possui um comportamento anti-persistente, e para valores maiores do que 0,5, a série apresenta comportamento persistente, indicando memória de longo prazo.

2.4.1 Expoente de Hurst Generalizado

Uma generalização do método DFA foi proposta por Kantelhardt et al. (2002), o DFA multifractal (MF-DFA), que apresentaram cinco passos para o cálculo do expoente de Hurst

generalizado $H(q)$. A grande variação de H com q indica diferentes comportamentos fractais dentro de uma série, o que chamamos de *multifractalidade*.

Vejamos os cinco passos para o cálculo de $H(q)$. Seja x_k uma série de comprimento N de suporte compacto¹. O primeiro passo consiste em determinar o “perfil”

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \dots, N, \quad (96)$$

em que $\langle x \rangle$ é a média da série. No passo dois, o perfil é dividido em $N_s \equiv \text{int}(N/s)$ segmentos de comprimento s não sobrepostos. Caso N não seja um múltiplo de s , pode restar uma pequena parte no fim do perfil, então, o mesmo procedimento é repetido começando da extremidade oposta, para não desconsiderar essa parte da série.

A tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos é calculada por um ajuste de mínimos quadrados da série no passo 3. Para cada segmento v , $v = 1, \dots, N_s$, determina-se a variância

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2, \quad (97)$$

e para $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$, calculamos

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2, \quad (98)$$

em que $y_v(i)$ é o polinômio de ajuste no segmento v .

No passo 4, calcula-se a média de todos os segmentos para obter a função de flutuação de ordem q ,

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (99)$$

em que q pode assumir qualquer valor real. Para $q = 2$, temos o procedimento DFA padrão. Os passos 2 a 4 são repetidos para vários valores de s . Por construção, $F_q(s)$ só está definida para $s \geq m + 2$.

O quinto e último passo determina o comportamento de escala das funções de flutuação, ao analisar os gráficos, em escala log-log, de $F_q(s)$ por s , para cada valor de q . Caso as séries x_i sejam correlacionadas por lei de potência de longo alcance, $F_q(s)$ aumenta, para valores grandes de s , como uma lei de potência,

$$F_q(s) \sim s^{H(q)}. \quad (100)$$

¹ O suporte de uma série x_k é o conjunto dos índices k cujos valores x_k são diferentes de zero. O suporte é compacto se x_k for igual a 0 para uma pequena quantidade de elementos da série. Quando $x_k = 0$, interpretamos que não há valor neste k .

Para valores muito grandes $s > N/4$, $F_q(s)$ torna-se estatisticamente não confiável, pois o número de segmentos N_s para o cálculo da média no passo 4 torna-se muito pequeno. Logo, geralmente excluimos escalas $s > N/4$ do procedimento de ajuste para determinar $H(q)$. Para séries temporais estacionárias, o expoente de Hurst canônico corresponde a $H(2)$. Desse modo, $H(q)$ é chamado de *expoente de Hurst generalizado*. Para encontrar o valor de $H(0)$, utilizamos

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln [F^2(v,s)] \right\} \sim s^{H(0)}. \quad (101)$$

O método MF-DFA determina apenas valores de $H(q)$ positivos, e quando $H(q)$ está próximo de zero, torna-se impreciso para sinais fortemente anticorrelacionados. Uma técnica (MF)-DFA modificada deve ser usada, integrando a série temporal antes do procedimento MF-DFA. O somatório único da [Equação \(96\)](#) que descreve o perfil dos dados originais x_k , é substituído por um somatório duplo

$$\tilde{Y}(i) = \sum_{k=1}^i [Y(k) - \langle Y \rangle]. \quad (102)$$

Seguindo o procedimento MF-DFA, são obtidas funções de flutuação generalizadas $\tilde{F}_q(s)$ descritas por uma lei de escala como na [Equação \(100\)](#), com expoentes maiores, $\tilde{H}(q) = H(q) + 1$,

$$\tilde{F}_q(s) \sim s^{\tilde{H}(q)} = s^{H(q)+1}. \quad (103)$$

Desse modo, para valores de $H(q)$ menores do que zero e maiores do que -1 , o comportamento de escala pode ser precisamente determinado para alguns valores de q .

Se a série x_k de comprimento N for uma sequência estacionária, positiva e normalizada ($x_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^N x_k = 1$), não há tendência a ser eliminada, logo, o procedimento de remoção de tendência apresentado no passo 3 do método MF-DFA não se faz necessário ([KANTELHARDT et al., 2002](#)). Desse modo, o DFA pode ser substituído pela análise de flutuação padrão (FA), que difere do DFA na [Equação \(97\)](#) do passo 3,

$$F_{FA}^2(v,s) = [Y(vs) - Y((v-1)s)]^2. \quad (104)$$

Substituindo na [Equação \(99\)](#), e usando a [Equação \(100\)](#), obtemos,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [(Y(vs) - Y((v-1)s))^2]^{q/2} \right\}^{1/q} = \\ & \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \right\}^{1/q} \sim s^{H(q)}. \end{aligned} \quad (105)$$

Para simplificar, supõe-se que N é um múltiplo de s , logo $N_s = N/s$, e assim,

$$\frac{1}{2N/s} \sum_{v=1}^{2N/s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \sim s^{qH(q)}, \quad (106)$$

ou seja,

$$\sum_{v=1}^{N/s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \sim s^{qH(q)-1}. \quad (107)$$

A caixa de probabilidade (p-box)² $p_s(v)$ no formalismo multifractal padrão para séries normalizadas x_k é dada por

$$p_s(v) = \sum_{k=(v-1)s+1}^{vs} x_k = Y(vs) - Y((v-1)s). \quad (108)$$

A partir da função de partição $Z_q(s)$, define-se o expoente de escala $\tau(q)$,

$$Z_q(s) = \sum_{v=1}^{N/s} |p_s(v)|^q \sim s^{\tau(q)}. \quad (109)$$

Tal equação é igual a [Equação \(107\)](#), logo, os dois conjuntos de expoentes de escala multifractais se relacionam como

$$\tau(q) = qH(q) - 1. \quad (110)$$

O espectro de singularidade $f(\alpha)$ é uma maneira de caracterizar uma série multifractal, sendo relacionado a $\tau(q)$ através de uma transformada de Legendre,

$$\alpha = \tau'(q) \quad \text{e} \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q), \quad (111)$$

em que α é a força da singularidade ou expoente de Hölder, e $f(\alpha)$ é a dimensão do subconjunto da série que é caracterizada por α . Desse modo, obtemos

$$\alpha = H(q) + qH'(q) \quad \text{e} \quad f(\alpha) = q[\alpha - H(q)] + 1. \quad (112)$$

A grande variação de H com q reflete no espectro de singularidade, em que um indicador de multifractalidade é a largura $\Delta\alpha$ ([KANTELHARDT et al., 2002](#)). Tal largura é influenciada por três aspectos: por correlações lineares, pela distribuição da série e por sua natureza finita. Ao embaralhar uma série, removemos os efeitos das correlações, logo, após o embaralhamento, a redução observada na largura do espectro de singularidade fornece evidências de correlações não lineares na série original.

² Método numérico para calcular as convoluções adequadas de algumas distribuições de probabilidade ([WILLIAMSON; DOWNS, 1990](#)).

2.5 Mercados Financeiros

Economicamente, um mercado é um conjunto de arranjos, podendo incluir instituições como mercados de câmbio e mercados futuros, que permite que seus participantes atinjam seus acordos voluntários, sendo contratos formais ou não que, apesar de voluntários, podem invocar a lei para garantir que os acordos sejam executados (BAILEY, 2005). Algumas funções que um mercado deve exercer são divulgar os preços pelos quais os negócios podem ser acordados, providenciar um mecanismo de comunicação entre quem deseja vender e quem deseja comprar, e garantir que os acordos sejam executados.

Os mercados financeiros envolvem dois participantes, os empreendedores, que podem ser pessoas físicas, empresas ou estados, e os investidores (BOUCHAUD; POTTERS, 2003). Os empreendedores possuem alguns projetos e precisam do financiamento dos investidores, que possuem dinheiro para investir e compartilhar os lucros e o risco de tais projetos. Os ativos de investimento do mercado de ações podem ser ações ou títulos.

Os mercados financeiros contêm vários mecanismos de negociação, que basicamente dividem-se em dois grupos, os mercados orientados por cotações e os mercados orientados por ordens (BAILEY, 2005). Os primeiros são caracterizados por negociadores que definem preços de compra e venda (ou ofertas), indicando os valores pelos quais estão dispostos a adquirir ou vender determinadas quantidades de um ativo. Nos mercados orientados por ordens, os participantes emitem ordens de compra ou venda a um determinado preço, dão instruções de ações que devem ser tomadas em resposta às informações que chegam, como uma observação de preço. O preço é ajustado por um negociador, para que o total de ordens de compra seja igual ao de venda.

No mercado financeiro brasileiro temos a bolsa de valores B3, uma empresa de infraestrutura de mercado financeiro que atua em ambiente de bolsa e de balcão (B3, 2022). O Ibovespa, criado em 1968, é o índice que indica o desempenho das ações negociadas na B3. Em sua composição, estão ações de companhias especificadas na B3 que seguem alguns critérios de inclusão³.

As mudanças de preço no tempo são naturalmente imprevisíveis, e resultam das ações dos investidores, que avaliam as informações disponíveis para decidir seus investimentos (SORNETTE, 2003). Qualquer assimetria de informação que possa levar a possibilidade de arbitragem é eliminada de maneira rápida por uma mudança nos preços dos ativos. Formulada originalmente na década de 1960, a hipótese do mercado eficiente afirma que um mercado é eficiente se toda informação disponível, quando chega no mercado, é rapidamente processada, o que leva a alteração imediata do valor dos preços dos ativos negociados (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Quanto mais eficiente e ativo é o mercado, mais aleatórias são as variações de preços originadas por ele (SORNETTE, 2003). O mercado em que as alterações de preços são totalmente aleatórias e imprevisíveis é o mais eficiente de todos.

³ Disponível em: <http://www.b3.com.br/data/files/9C/15/76/F6/3F6947102255C247AC094EA8/IBOV-Metodologia-pt-br_Novo_.pdf>, acesso em 28/09/2022.

Na hipótese de mercado eficiente, os preços refletem totalmente três subconjuntos de informações disponíveis (FAMA, 1970). Na forma fraca, o conjunto de informações é o histórico de preços (ou retornos). A forma semiforte, além do histórico de preços, acrescenta em seu conjunto de informações a eficiência de ajuste dos preços a outras informações disponíveis publicamente. E as informações da forma forte incluem as anteriores e o acesso exclusivo a qualquer informação relevante para a formação de preços por parte de alguns investidores ou grupos de investidores.

3 Modelo

Neste capítulo, apresentaremos o modelo inspirado no sistema físico composto por n osciladores harmônicos acoplados. Para isso, iniciaremos com algumas definições. Sendo $x_k(t)$ o preço do ativo k no tempo t , para $k = 1, 2, \dots, n$ e $t \in \mathbb{Z}$, definimos o preço de referência $\bar{x}_k(t)$ como

$$\bar{x}_k(t) = \frac{1}{S} \sum_{\tau=t-S}^{t-1} x_k(\tau), \quad (113)$$

uma média móvel no parâmetro S . O *desvio do preço*, ou *preço tratado*, é definido por [Resende et al. \(2017\)](#) como a diferença logarítmica entre o preço do ativo e o preço de referência,

$$X_k(t) = \ln x_k(t) - \ln \bar{x}_k(t). \quad (114)$$

3.1 Dois osciladores

O sistema físico dado pela [Equação \(8\)](#)

$$\begin{cases} M_1 q_1'' = -k_1 q_1 - \gamma_1 q_1' + k_{1,2} (q_2 - q_1) + \gamma_{1,2} (q_2' - q_1') \\ M_2 q_2'' = -k_2 q_2 - \gamma_2 q_2' + k_{2,1} (q_1 - q_2) + \gamma_{2,1} (q_1' - q_2') \end{cases}$$

apresenta comportamentos como existência de inércia, de forças que contribuem para a restauração à posição de equilíbrio, e amortecimento, que são semelhantes a propriedades de séries temporais, sendo elas estacionariedade e reversão à média. A inércia está associada à não estacionariedade em séries de preços. Em séries temporais, reversão à média é a tendência que o preço de um ativo financeiro tem de não afastar-se muito do valor baseado em seus princípios, que está relacionada ao retorno à posição de equilíbrio. Por fim, o amortecimento vincula-se à redução, com o passar do tempo, das oscilações de preços que ocorrem com o aparecimento de novas informações. Em séries temporais, o amortecimento verifica-se apenas em séries estacionárias.

Baseado no sistema dado pela [Equação \(8\)](#) e pelas relações apresentadas anteriormente, definimos o seguinte modelo de equações diferenciais lineares de segunda ordem:

$$\begin{cases} X_1'' = b_{11}X_1' + b_{12}X_2' + c_{11}X_1 + c_{12}X_2 \\ X_2'' = b_{21}X_1' + b_{22}X_2' + c_{21}X_1 + c_{22}X_2. \end{cases} \quad (115)$$

Os coeficientes de tal modelo podem ser relacionados aos coeficientes da [Equação \(8\)](#). Reescrevendo tal sistema, obtemos

$$\begin{cases} q_1'' = -\frac{\gamma_1 + \gamma_{1,2}}{M_1} q_1' + \frac{\gamma_{1,2}}{M_1} q_2' - \frac{k_1 + k_{1,2}}{M_1} q_1 + \frac{k_{1,2}}{M_1} q_2 \\ q_2'' = \frac{\gamma_{2,1}}{M_2} q_1' - \frac{\gamma_2 + \gamma_{2,1}}{M_2} q_2' + \frac{k_{2,1}}{M_2} q_1 - \frac{k_2 + k_{2,1}}{M_2} q_2. \end{cases} \quad (116)$$

Comparando com a [Equação \(115\)](#), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{1,2} = M_1 b_{12} \\ \gamma_{2,1} = M_2 b_{21} \\ k_{1,2} = M_1 c_{12} \\ k_{2,1} = M_2 c_{21} \\ \gamma_1 = -M_1 (b_{11} + b_{12}) \\ \gamma_2 = -M_2 (b_{21} + b_{22}) \\ k_1 = -M_1 (c_{11} + c_{12}) \\ k_2 = -M_2 (c_{21} + c_{22}). \end{array} \right. \quad (117)$$

Na forma matricial, a [Equação \(115\)](#) reescreve-se como

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2}(t) = \mathbf{B} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) + \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \quad (118)$$

em que

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Baseado em [Cunha \(2000\)](#), definimos a discretização da [Equação \(118\)](#) como

$$\frac{\mathbf{X}(t + \Delta t) - 2\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t - \Delta t))}{(\Delta t)^2} = \mathbf{B} \frac{\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t - \Delta t))}{2\Delta t} + \mathbf{C}\mathbf{X}(t). \quad (120)$$

Tomando $\Delta t = 1$, obtemos

$$\mathbf{X}(t + 1) - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{X}(t + 1) = 2\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - 1) - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{X}(t - 1). \quad (121)$$

Considerando $\tau = t + 1$, a equação anterior reescreve-se como

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)\mathbf{X}(\tau) = (2\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{X}(\tau - 1) - \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)\mathbf{X}(\tau - 2), \quad (122)$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 2. A equação anterior ainda pode ser reescrita como

$$\mathbf{X}(\tau) = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} (2\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{X}(\tau - 1) - \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)\mathbf{X}(\tau - 2), \quad (123)$$

isto é,

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{P}\mathbf{X}(\tau - 1) + \mathbf{Q}\mathbf{X}(\tau - 2), \quad (124)$$

em que

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} (2\mathbf{I} + \mathbf{C}) \text{ e } \mathbf{Q} = -\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\right). \quad (125)$$

Reescrevendo a [Equação \(124\)](#) na forma expandida, obtemos

$$\begin{bmatrix} X_1(\tau) \\ X_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\tau-1) \\ X_2(\tau-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\tau-2) \\ X_2(\tau-2) \end{bmatrix}, \quad (126)$$

em que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}. \quad (127)$$

A [Equação \(126\)](#) é equivalente a

$$\begin{cases} X_1(\tau) = p_{11}X_1(\tau-1) + p_{12}X_2(\tau-1) + q_{11}X_1(\tau-2) + q_{12}X_2(\tau-2) \\ X_2(\tau) = p_{21}X_1(\tau-1) + p_{22}X_2(\tau-1) + q_{21}X_1(\tau-2) + q_{22}X_2(\tau-2). \end{cases} \quad (128)$$

Sendo $y_k = X_1(k)$ e $z_k = X_2(k)$, o sistema anterior pode ser relacionado a um modelo VAR de segunda ordem

$$\begin{cases} y_\tau = p_{11}y_{\tau-1} + p_{12}z_{\tau-1} + q_{11}y_{\tau-2} + q_{12}z_{\tau-2} + \varepsilon_{y\tau} \\ z_\tau = p_{21}y_{\tau-1} + p_{22}z_{\tau-1} + q_{21}y_{\tau-2} + q_{22}z_{\tau-2} + \varepsilon_{z\tau}, \end{cases} \quad (129)$$

em que $\varepsilon_{y\tau}$ e $\varepsilon_{z\tau}$ são os resíduos relacionados à estimativa dos parâmetros. Em [Oliveira, Magalhães e Raad \(2024\)](#), avaliamos o modelo nas séries de fechamento diários de duas ações do índice Ibovespa (PETR3 e VALE3), cujas séries de desvio do preço mostraram-se estacionárias.

3.2 Caso geral

Ao considerarmos n osciladores acoplados, sua dinâmica é dada pelo sistema de n equações diferenciais de segunda ordem [\(11\)](#)

$$\begin{cases} M_1 q_1'' = -k_1 q_1 - \gamma_1 q_1' + k_{1,2}(q_2 - q_1) + k_{1,3}(q_3 - q_1) + \cdots + k_{1,n}(q_n - q_1) + \\ \quad \gamma_{1,2}(q_2' - q_1') + \gamma_{1,3}(q_3' - q_1') + \cdots + \gamma_{1,n}(q_n' - q_1') \\ M_2 q_2'' = -k_2 q_2 - \gamma_2 q_2' + k_{2,1}(q_1 - q_2) + k_{2,3}(q_3 - q_2) + \cdots + k_{2,n}(q_n - q_2) + \\ \quad \gamma_{2,1}(q_1' - q_2') + \gamma_{2,3}(q_3' - q_2') + \cdots + \gamma_{2,n}(q_n' - q_2') \\ \vdots \\ M_n q_n'' = -k_n q_n - \gamma_n q_n' + k_{n,1}(q_1 - q_n) + k_{n,2}(q_2 - q_n) + \cdots + k_{n,n-1}(q_{n-1} - q_n) + \\ \quad \gamma_{n,1}(q_1' - q_n') + \gamma_{n,2}(q_2' - q_n') + \cdots + \gamma_{n,n-1}(q_{n-1}' - q_n'). \end{cases}$$

Baseado nesse sistema, definimos um modelo composto por n equações diferenciais de segunda ordem,

$$\begin{cases} X_1'' = b_{11}X_1' + b_{12}X_2' + \cdots + b_{1n}X_n' + c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \cdots + c_{1n}X_n \\ X_2'' = b_{21}X_1' + b_{22}X_2' + \cdots + b_{2n}X_n' + c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \cdots + c_{2n}X_n \\ \vdots \\ X_n'' = b_{n1}X_1' + b_{n2}X_2' + \cdots + b_{nn}X_n' + c_{n1}X_1 + c_{n2}X_2 + \cdots + c_{nn}X_n. \end{cases} \quad (130)$$

Como o modelo (130) é inspirado na dinâmica de n osciladores acoplados (11), podemos relacionar os coeficientes de tais sistemas.

A Equação (11) pode ser reescrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1'' = -\frac{\gamma_1 + \gamma_{1,2} + \gamma_{1,3} + \dots + \gamma_{1,n}}{M_1} q_1' + \frac{\gamma_{1,2}}{M_1} q_2' + \frac{\gamma_{1,3}}{M_1} q_3' + \dots + \frac{\gamma_{1,n}}{M_1} q_n' \\ \quad - \frac{k_1 + k_{1,2} + k_{1,3} + \dots + k_{1,n}}{M_1} q_1 + \frac{k_{1,2}}{M_1} q_2 + \frac{k_{1,3}}{M_1} q_3 + \dots + \frac{k_{1,n}}{M_1} q_n \\ q_2'' = \frac{\gamma_{2,1}}{M_2} q_1' - \frac{\gamma_{2,1} + \gamma_2 + \gamma_{2,3} + \dots + \gamma_{2,n}}{M_2} q_2' + \frac{\gamma_{2,3}}{M_2} q_3' + \dots + \frac{\gamma_{2,n}}{M_2} q_n' \\ \quad + \frac{k_{2,1}}{M_2} q_1 - \frac{k_{2,1} + k_2 + k_{2,3} + \dots + k_{2,n}}{M_2} q_2 + \frac{k_{2,3}}{M_2} q_3 + \dots + \frac{k_{2,n}}{M_2} q_n \\ \vdots \\ q_n'' = \frac{\gamma_{n,1}}{M_n} q_1' + \frac{\gamma_{n,2}}{M_n} q_2' + \dots + \frac{\gamma_{n,n-1}}{M_n} q_{n-1}' - \frac{\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2} + \dots + \gamma_{n,n-1} + \gamma_n}{M_n} q_n' \\ \quad + \frac{k_{n,1}}{M_n} q_1 + \frac{k_{n,2}}{M_n} q_2 + \dots + \frac{k_{n,n-1}}{M_n} q_{n-1} - \frac{k_{n,1} + k_{n,2} + \dots + k_{n,n-1} + k_n}{M_n} q_n. \end{array} \right. \quad (131)$$

Comparando com a Equação (130), obtemos, para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{i,j} = M_i b_{ij} \\ k_{i,j} = M_i c_{ij} \end{array} \right. \quad (132)$$

e, para $i = 1, \dots, n$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_i = -M_i \sum_{j=1}^n b_{ij} \\ k_i = -M_i \sum_{j=1}^n c_{ij}. \end{array} \right. \quad (133)$$

A Equação (130) pode ser reescrita em sua forma matricial como

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2}(t) = \mathbf{B} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) + \mathbf{C} \mathbf{X}(t), \quad (134)$$

em que

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (135)$$

A discretização da Equação (134) é a mesma definida pela Equação (120), e, tomando $\Delta t = 1$, obteremos

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{P} \mathbf{X}(\tau - 1) + \mathbf{Q} \mathbf{X}(\tau - 2), \quad (136)$$

em que

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \right)^{-1} (2\mathbf{I} + \mathbf{C}) \quad (137)$$

e

$$\mathbf{Q} = - \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \right), \quad (138)$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem n . Ou seja, a [Equação \(136\)](#) é dada por

$$\begin{bmatrix} X_1(\tau) \\ X_2(\tau) \\ \vdots \\ X_n(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\tau-1) \\ X_2(\tau-1) \\ \vdots \\ X_n(\tau-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\tau-2) \\ X_2(\tau-2) \\ \vdots \\ X_n(\tau-2) \end{bmatrix}, \quad (139)$$

em que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}. \quad (140)$$

A [Equação \(139\)](#) é representada pelo sistema

$$\begin{cases} X_1(\tau) = p_{11}X_1(\tau-1) + p_{12}X_2(\tau-1) + \cdots + p_{1n}X_n(\tau-1) + q_{11}X_1(\tau-2) + \\ \quad q_{12}X_2(\tau-2) + \cdots + q_{1n}X_n(\tau-2) \\ X_2(\tau) = p_{21}X_1(\tau-1) + p_{22}X_2(\tau-1) + \cdots + p_{2n}X_n(\tau-1) + q_{21}X_1(\tau-2) + \\ \quad q_{22}X_2(\tau-2) + \cdots + q_{2n}X_n(\tau-2) \\ \vdots \\ X_n(\tau) = p_{n1}X_1(\tau-1) + p_{n2}X_2(\tau-1) + \cdots + p_{nn}X_n(\tau-1) + q_{n1}X_1(\tau-2) + \\ \quad q_{n2}X_2(\tau-2) + \cdots + q_{nn}X_n(\tau-2). \end{cases} \quad (141)$$

Tal sistema é caracterizado por um modelo VAR de segunda ordem. Tomando $y_{i_k} = X_i(k)$, $i = 1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{cases} y_{1\tau} = p_{11}y_{1\tau-1} + p_{12}y_{2\tau-1} + \cdots + p_{1n}y_{n\tau-1} + q_{11}y_{1\tau-2} + q_{12}y_{2\tau-2} + \cdots + q_{1n}y_{n\tau-2} + \varepsilon_{y_1\tau} \\ y_{2\tau} = p_{21}y_{1\tau-1} + p_{22}y_{2\tau-1} + \cdots + p_{2n}y_{n\tau-1} + q_{21}y_{1\tau-2} + q_{22}y_{2\tau-2} + \cdots + q_{2n}y_{n\tau-2} + \varepsilon_{y_2\tau} \\ \vdots \\ y_{n\tau} = p_{n1}y_{1\tau-1} + p_{n2}y_{2\tau-1} + \cdots + p_{nn}y_{n\tau-1} + q_{n1}y_{1\tau-2} + q_{n2}y_{2\tau-2} + \cdots + q_{nn}y_{n\tau-2} + \varepsilon_{y_n\tau}, \end{cases} \quad (142)$$

em que $\varepsilon_{y_i\tau}$, $i = 1, \dots, n$, são os resíduos relativos aos parâmetros estimados.

A partir do nosso modelo, podemos determinar os coeficientes do oscilador harmônico acoplado. Do modelo VAR, obtivemos as matrizes $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$, então determinamos os elementos

b_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, da [Equação \(138\)](#):

$$\begin{aligned} -\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\right)\mathbf{Q} &= \mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) &= \mathbf{Q} + \mathbf{I} \Leftrightarrow \\ \mathbf{B} &= 2(\mathbf{Q} + \mathbf{I})(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^{-1}. \end{aligned} \quad (143)$$

Substituindo na [Equação \(137\)](#), determinamos os elementos c_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{I} + \mathbf{C} &= \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2} \cdot 2(\mathbf{Q} + \mathbf{I})(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^{-1}\right]\mathbf{P} \Leftrightarrow \\ \mathbf{C} &= \mathbf{P} - (\mathbf{Q} + \mathbf{I})(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{P} - 2\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (144)$$

Observamos, nas [Equações \(132\)](#) e [\(133\)](#), que, para determinar os parâmetros do oscilador harmônico acoplado, temos que resolver um sistema com $2n^2$ equações e $2n^2 + n$ incógnitas. Como temos um sistema com mais variáveis do que equações, vamos considerar que todas as massas são unitárias. Desse modo, obtemos, para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$,

$$\begin{cases} \gamma_{i,j} = b_{ij}, \\ k_{i,j} = c_{ij}, \\ \gamma_i = -\sum_{j=1}^n b_{ij}, \\ k_i = -\sum_{j=i}^n c_{ij}, \end{cases} \quad (145)$$

o que resulta em um sistema com $2n^2$ equações e $2n^2$ variáveis.

Observe que $k_{i,j}$ em geral é diferente de $k_{j,i}$, o mesmo acontecendo em relação a $\gamma_{i,j}$ e $\gamma_{j,i}$. Fisicamente, para um sistema com massas, molas e amortecedores, é esperado que as constantes da mola $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$ sejam iguais, bem como os coeficientes de atrito $\gamma_{i,j}$ e $\gamma_{j,i}$. No modelo financeiro, esses parâmetros descrevem a influência do ativo j sobre o ativo i : se a influência não for simétrica, é razoável que encontremos tais diferenças.

Além disso, a [Equação \(145\)](#) pode levar a valores negativos das constantes da mola e dos coeficientes de atrito, o que não ocorre em sistemas físicos. Porém, para o modelo financeiro, os parâmetros $k_{i,j}$ e $\gamma_{i,j}$ descrevem a influência do ativo j no ativo i , então ativos anti-correlacionados podem levar a valores negativos de tais coeficientes. Apesar disso, continuaremos a denominar os parâmetros k_i e $k_{i,j}$ como constantes da mola, e γ_i e $\gamma_{i,j}$ como coeficientes de atrito. É possível definir quantidades análogas às energias cinética e potencial. Como podemos ter diferenças entre $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$, uma quantidade análoga à energia potencial não pode ser definida para todo o sistema associado à dinâmica descrita na [Equação \(11\)](#). Então, definimos quantidades análogas às energias separadamente para cada oscilador. A quantidade análoga à energia cinética do oscilador i é definida como

$$E_{c_i}(t) = \frac{1}{2}M_i[X'_i(t)]^2, \quad (146)$$

e a quantidade análoga à energia potencial do oscilador i , como

$$E_{p_i}(t) = \frac{1}{2}k_i X_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} k_{i,j} [X_i(t) - X_j(t)]^2. \quad (147)$$

Assim, as quantidades análogas às energias cinética e potencial são definidas como

$$E_c(t) = \sum_{i=1}^n E_{c_i}(t) \quad (148)$$

e

$$E_p(t) = \sum_{i=1}^n E_{p_i}(t), \quad (149)$$

respectivamente. A soma da energia cinética e potencial é a energia total do sistema.

3.3 Modelo de previsão

Nesta seção, utilizaremos o modelo proposto pela [Equação \(130\)](#)

$$\begin{cases} X_1'' = b_{11}X_1' + b_{12}X_2' + \cdots + b_{1n}X_n' + c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \cdots + c_{1n}X_n \\ X_2'' = b_{21}X_1' + b_{22}X_2' + \cdots + b_{2n}X_n' + c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \cdots + c_{2n}X_n \\ \vdots \\ X_n'' = b_{n1}X_1' + b_{n2}X_2' + \cdots + b_{nn}X_n' + c_{n1}X_1 + c_{n2}X_2 + \cdots + c_{nn}X_n \end{cases}$$

para a previsão de tendência de preços de ativos financeiros. Definindo $Y_i = X_i'$ e $Y_{n+i} = X_i$, $i = 1, \dots, n$, temos que $Y_i' = X_i''$ e $Y_{n+i}' = X_i'$, $i = 1, \dots, n$. Utilizando a [Equação \(130\)](#), podemos escrever:

$$\begin{cases} Y_1' = b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + \cdots + b_{1n}Y_n + c_{11}Y_{n+1} + c_{12}Y_{n+2} + \cdots + c_{1n}Y_{2n} \\ Y_2' = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + \cdots + b_{2n}Y_n + c_{21}Y_{n+1} + c_{22}Y_{n+2} + \cdots + c_{2n}Y_{2n} \\ \vdots \\ Y_n' = b_{n1}Y_1 + b_{n2}Y_2 + \cdots + b_{nn}Y_n + c_{n1}Y_{n+1} + c_{n2}Y_{n+2} + \cdots + c_{nn}Y_{2n} \\ Y_{n+1}' = Y_1 \\ Y_{n+2}' = Y_2 \\ \vdots \\ Y_{2n}' = Y_n, \end{cases} \quad (150)$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{D} \mathbf{Y}(t), \quad (151)$$

em que

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \\ Y_{n+1}(t) \\ Y_{n+2}(t) \\ \vdots \\ Y_{2n}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (152)$$

Definimos a discretização da [Equação \(151\)](#) como

$$\frac{\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}(t - \Delta t)}{\Delta t} = \mathbf{D}\mathbf{Y}(t). \quad (153)$$

Tomando $\Delta t = 1$, obtemos

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(t - 1), \quad (154)$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem $2n$. Supondo que exista a inversa da matriz $\mathbf{I} - \mathbf{D}$, podemos reescrever a equação anterior como

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{Y}(t - 1), \quad (155)$$

ou, ainda,

$$\mathbf{Y}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Y}(t - 1), \quad (156)$$

em que $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$.

A utilização do modelo aqui apresentado para previsão envolve a estimação dessa matriz de coeficientes, que tem $(2n)^2$ elementos. Observemos que a fórmula (156) corresponde a $2n$ equações, não sendo, portanto, suficiente para a determinação da matriz $\tilde{\mathbf{A}}$. Para equilibrarmos tal número de equações com a quantidade de elementos a serem determinados, podemos proceder como em [Resende et al. \(2017\)](#) e agregar $2n$ equações do tipo (151) na forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y}_{2n}(t) = \mathbf{D}\mathbf{Y}_{2n}(t), \quad (157)$$

em que

$$\mathbf{Y}_{2n}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t - 2n + 1) & \cdots & Y_1(t - 1) & Y_1(t) \\ Y_2(t - 2n + 1) & \cdots & Y_2(t - 1) & Y_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{2n}(t - 2n + 1) & \cdots & Y_{2n}(t - 1) & Y_{2n}(t) \end{bmatrix}. \quad (158)$$

Discretizando a [Equação \(157\)](#) como fizemos na [Equação \(153\)](#), e tomando $\Delta t = 1$, obtemos

$$\mathbf{Y}_{2n}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Y}_{2n}(t-1), \quad (159)$$

em que $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$. Podemos observar que a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ fica determinada caso exista a inversa de $\mathbf{Y}_{2n}(t-1)$, ou seja, o sistema (157) admite soluções que passam em todos os pontos dados em $\mathbf{Y}_{2n}(t)$ e $\mathbf{Y}_{2n}(t-1)$, os $2n+1$ instantes de tempo entre $t-2n$ e t .

Buscando matrizes que podem ser aproximadamente ajustadas em intervalos de tempo maiores $[t-R, t]$, consideremos

$$\mathbf{Y}_R(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}_R(t-1) + \epsilon, \quad (160)$$

em que

$$\mathbf{Y}_R(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t-R+1) & Y_1(t-R+2) & \cdots & Y_1(t) \\ Y_2(t-R+1) & Y_2(t-R+2) & \cdots & Y_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{2n}(t-R+1) & Y_{2n}(t-R+2) & \cdots & Y_{2n}(t) \end{bmatrix}, \quad (161)$$

e

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t-R+1) & \varepsilon_1(t-R+2) & \cdots & \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t-R+1) & \varepsilon_2(t-R+2) & \cdots & \varepsilon_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{2n}(t-R+1) & \varepsilon_{2n}(t-R+2) & \cdots & \varepsilon_{2n}(t) \end{bmatrix} \quad (162)$$

é o vetor de resíduos relativo ao ajuste.

Para obtermos a matriz $\mathbf{A}$, utilizamos o método de mínimos quadrados. Tal método reduz ϵ , minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, conforme apresentado em [Resende \(2021\)](#). Como $\mathbf{Y}_R(t-1)$ não é uma matriz quadrada, multiplicamos por sua transposta, pela direita, ambos os lados da [Equação \(160\)](#), obtendo

$$\mathbf{Y}_R(t)[\mathbf{Y}_R(t-1)]^T = \mathbf{A}\mathbf{Y}_R(t-1)[\mathbf{Y}_R(t-1)]^T. \quad (163)$$

Supondo que exista a inversa, encontramos a matriz $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{Y}_R(t)[\mathbf{Y}_R(t-1)]^T\} \{\mathbf{Y}_R(t-1)[\mathbf{Y}_R(t-1)]^T\}^{-1}. \quad (164)$$

Utilizaremos a matriz $\mathbf{A}$ para prever o desvio do preço em $t+1$, que será denotado por $\hat{\mathbf{X}}(t+1)$, como segue. A partir da [Equação \(160\)](#), obtemos $\mathbf{Y}_R$ previsto no tempo $t+1$ como

$$\hat{\mathbf{Y}}_R(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{Y}_R(t). \quad (165)$$

Desse modo, a R -ésima coluna de $\hat{\mathbf{Y}}_R(t+1)$ é igual a $\hat{\mathbf{Y}}(t+1)$, a previsão de $\mathbf{Y}$ em $t+1$. Como $X_i = Y_{n+i}$, $i = 1, \dots, n$, obtemos, assim, $\hat{\mathbf{X}}(t+1)$.

Por fim, podemos prever o preço do ativo k no tempo $t + 1$, $\hat{x}_k(t + 1)$, a partir da Equação (114), que é dada por

$$X_k(t) = \ln x_k(t) - \ln \bar{x}_k(t) = \ln \frac{x_k(t)}{\bar{x}_k(t)},$$

para $k = 1, \dots, n$. Daí, temos que

$$x_k(t) = \bar{x}_k(t) e^{X_k(t)}. \quad (166)$$

Portanto, podemos prever o preço como

$$\hat{x}_k(t + 1) = \bar{x}_k(t + 1) e^{\hat{X}_k(t+1)}. \quad (167)$$

Utilizaremos $\hat{x}_k(t + 1)$ para verificar a sua tendência, ou seja, estamos interessados em saber se $\hat{x}_k(t + 1) > x_k(t)$ ou $\hat{x}_k(t + 1) < x_k(t)$. Analisaremos se o mesmo ocorre entre $x_k(t + 1)$ e $x_k(t)$, para assim calcular a acurácia do modelo. Sendo n_c o número de previsões de preços corretas e n o número total de previsões calculadas, a acurácia para cada ativo é calculada como a razão

$$a_k = \frac{n_c}{n}. \quad (168)$$

Como analisamos a previsão de tendência de preços dos ativos, nos casos em que não houve variação no preço, este último foi removido para o cálculo da acurácia.

4 Metodologia

Neste capítulo, apresentaremos os métodos utilizados para os cálculos de alguns parâmetros do modelo e das análises estatísticas realizadas.

4.1 Preço de referência

O modelo (130) foi aplicado a 65 ações que compuseram o índice Ibovespa em algum momento do intervalo de 17/12/2004 a 29/05/2020, apresentadas no [Quadro 1](#), utilizando o software gratuito *R* ([R Core Team, 2021](#)). Como base de dados, os preços dos ativos $x_k(t)$ foram considerados como os preços de fechamento diário de tais ações, totalizando 4031 pontos em cada série. No dia em que a ação não foi negociada, seu preço foi considerado como o preço do dia anterior.

O preço de referência é calculado por uma média móvel, $\bar{x}_k(t) = \frac{1}{S} \sum_{\tau=t-S}^{t-1} x_k(\tau)$, e escolhemos o parâmetro $S = 12$, valor usado por [Resende et al. \(2017\)](#) a partir de experimentos e considerando que existem 12 candles com frequência de cotação de 5 minutos em uma hora de negociação ([RESENDE, 2021](#)).

4.2 Modelo VAR

Utilizando a base de dados considerada, geramos no software *R* um modelo VAR de segunda ordem através do pacote *vars* ([PFAFF, 2008](#)). As matrizes **P** e **Q** dadas pela [Equação \(136\)](#) são obtidas diretamente, sendo os coeficientes dos termos $y_{i_{\tau-1}}$ e $y_{i_{\tau-2}}$, para $i = 1, \dots, n$, da [Equação \(142\)](#). As matrizes **B** e **C** são calculadas pelas [Equações \(143\)](#) e [\(144\)](#), e então determinamos os coeficientes do oscilador harmônico pela [Equação \(145\)](#).

Ao aplicar uma modelagem VAR, inicialmente devemos verificar a estacionariedade das séries temporais consideradas. Para esse fim, utilizamos o teste de Dickey-Fuller para examinar se a transformação aplicada na [Equação \(114\)](#) garante a estacionariedade das séries. No software *R*, o teste de Dickey-Fuller foi implementado através do pacote *tseries* ([TRAPLETTI; HORNIK, 2022](#)).

Os resíduos do modelo VAR devem ser não autocorrelacionados. Para verificar tal hipótese, podemos utilizar o teste estatístico de Breusch-Godfrey, cuja hipótese nula é que não há autocorrelação nos resíduos do modelo. O processo de erro de equações regressivas é testado, verificando se os resíduos do modelo são autocorrelacionados, a partir do teste de hipótese nula ([GODFREY, 1978](#)), ([BREUSCH, 1978](#)). Fizemos tal verificação utilizando o pacote *vars*.

Quadro 1 – Ações do Ibovespa consideradas na aplicação do modelo.

Código	Nome do pregão	Código	Nome do pregão
EMBR3	EMBRAER	BRKM5	BRASKEM
ETER3	ETERNIT	FESA4	FERBASA
INEP4	INEPAR	GGBR3	GERDAU
POMO4	MARCOPOLO	GGBR4	GERDAU
RAPT4	RANDON PART	GOAU3	GERDAU MET
TASA4	TAURUS ARMAS	GOAU4	GERDAU MET
OIBR3	OI	KLBN4	KLABIN S/A
OIBR4	OI	MGEL4	MANGELS INDL
TELB4	TELEBRAS	CSNA3	SID NACIONAL
VIVT3	TELEF BRASIL	UNIP6	UNIPAR
TIMS3	TIM	USIM3	USIMINAS
ALPA4	ALPARGATAS	USIM5	USIMINAS
CTNM4	COTEMINAS	VALE3	VALE
ESTR4	ESTRELA	PETR3	PETROBRAS
GUAR3	GUARARAPES	PETR4	PETROBRAS
LAME3	LOJAS AMERIC	CLSC4	CELESC
LAME4	LOJAS AMERIC	CMIG3	CEMIG
RSID3	ROSSI RESID	CMIG4	CEMIG
TEKA4	TEKA	CESP3	CESP
WHRL4	WHIRLPOOL	CESP5	CESP
ABEV3	AMBEV S/A	COCE5	COELCE
BOBR4	BOMBRIL	CGAS5	COMGAS
BRIV4	ALFA INVEST	CPLE3	COPEL
BAZA3	AMAZONIA	CPLE6	COPEL
BBDC3	BRADESCO	ELET3	ELETROBRAS
BBDC4	BRADESCO	ELET6	ELETROBRAS
BBAS3	BRASIL	EMAE4	EMAE
ITSA3	ITAUSA	EGIE3	ENGIE BRASIL
ITSA4	ITAUSA	LIGT3	LIGHT S/A
ITUB3	ITAUUNIBANCO	SBSP3	SABESP
ITUB4	ITAUUNIBANCO	SAPR4	SANEPAR
BRAP3	BRADESPAR	TRPL4	TRAN PAULIST
BRAP4	BRADESPAR		

Fonte: Busca do site da B3 (<https://www.b3.com.br/pt_br/>, acesso em: 23/05/2022.).

4.3 Distribuição empírica

Avaliamos a distribuição empírica de alguns parâmetros estimados, com o intuito de analisar se a distribuição apresenta uma cauda pesada. Clauset, Shalizi e Newman (2009) disponibilizam as implementações dos métodos online¹. É possível, por exemplo, utilizar o pacote *poweRlaw* (GILLESPIE, 2015), do software R.

Uma lei de potência contínua é ajustada ao valor absoluto dos dados, e o limiar mínimo x_{min} , descrito na Seção 2.3, é estimado. O mesmo é feito para um vetor com distribuição

¹ <https://aaronclauset.github.io/powerlaws/>

normal, e então, esboçamos as duas distribuições em um gráfico log-log. Logo após, testamos se os dados seguem uma lei de potência, e determinamos o p-valor, verificando se a lei de potência é uma hipótese plausível ou não para os dados.

4.4 Correlação linear

Dadas duas variáveis quantitativas x e y , a força e a direção da relação linear entre elas são medidas pela *correlação* r , dada por

$$r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right), \quad (169)$$

em que x_i e y_i , $i = 1, \dots, n$, são as n observações das variáveis x e y , respectivamente, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as respectivas médias, e s_x e s_y os desvios padrões de cada variável (MOORE; NOTZ, 2021).

Temos que $-1 \leq r \leq 1$, e existe uma associação positiva entre as variáveis quando $r > 0$, e negativa quando $r < 0$. Uma relação linear muito fraca é indicada para valores de r próximos de 0, e a força da relação aumenta a medida que r se aproxima de 1 ou de -1 .

4.5 Expoente de Hurst

Dada uma série temporal $x(i)$, $i = 1, \dots, N$, de acordo com a Seção 2.4, o método DFA para o cálculo do expoente de Hurst transforma tal série em uma série acumulada,

$$y(k) = \sum_{i=1}^k [x(i) - \langle x \rangle],$$

em que $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i)$ é a média da série original. Diferentes tamanhos de janela s são escolhidos para dividir a série acumulada em $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ segmentos de tamanho s . Um polinômio de grau m (geralmente $m = 1$) é ajustado para cada segmento v de tamanho s , para modelar a tendência local. Calculamos a flutuação em cada segmento, para então, determinar a flutuação média. Os cálculos são repetidos para diferentes valores de s , neste trabalho, consideramos escalas entre 25 e $N/4$.

Para o expoente de Hurst generalizado, a média de todos os segmentos é calculada, para obter a função de flutuação de ordem q , conforme apresentado na Subseção 2.4.1. Utilizamos, neste trabalho, os valores de q variando entre -2 e 2 , e escalas também entre 25 e $N/4$, em que N é o número de pontos da série temporal.

5 Resultados

Apresentaremos, neste capítulo, os resultados da aplicação do modelo proposto, assim como do modelo de previsão.

5.1 Caracterização das séries por meio de um modelo autorregressivo vetorial

Um modelo do tipo VAR foi estimado para 65 ações extraídas do conjunto que compõe o índice Ibovespa, apresentadas no [Quadro 1](#). Consideramos os preços de fechamento diário no período de 17/12/2004 a 29/05/2020, totalizando 4031 pontos em cada série.

Para verificar a estacionariedade das séries temporais consideradas, realizamos o teste de Dickey-Fuller em cada série. Pelo resultado obtido, rejeitamos a hipótese nula de raiz unitária com um nível de confiança de 95%. Assim, concluímos que cada série de preços tratados é estacionária.

Após aplicar nosso modelo a essas séries, devemos analisar se os resíduos não são autocorrelacionados. Para isso, utilizamos o teste de Breusch-Godfrey para erros serialmente correlacionados, e rejeitamos a hipótese nula de correlação serial com um nível de confiança de 95%. Desse modo, concluímos que os resíduos são não autocorrelacionados.

Com esses resultados, podemos concluir que as séries analisadas são caracterizadas pelo modelo autorregressivo vetorial de segunda ordem dado pela [Equação \(142\)](#) de modo satisfatório.

Analisamos os coeficientes dos osciladores harmônicos acoplados, as quantidades análogas às energias cinética, potencial e total do sistema, a distribuição empírica de parâmetros, investigamos a existência de correlações nos conjuntos de parâmetros e calculamos o expoente de Hurst das quantidades análogas às energias cinética e potencial. Tais resultados serão apresentados a seguir.

5.1.1 Estatísticas dos parâmetros do modelo

Consideramos os coeficientes do VAR que são estatisticamente significativos com um nível de significância de 5%, isto é, os coeficientes com p-valor maior do que 0,05 foram substituídos por 0.

Esboçamos um mapa de calor das constantes elásticas da mola $k_{i,j}$, para melhor visualizá-las, em que a diagonal secundária da [Figura 3](#) não apresenta valores, pois $k_{i,j}$ não está definida para $i = j$. As ações foram organizadas pela ordem apresentada no [Quadro 1](#). O intervalo de variação das constantes está entre $-0,358$ e $0,178$, com média $-1,46 \times 10^{-2}$.

e desvio padrão $4,14 \times 10^{-2}$. Observamos 2281 valores positivos, com média $8,22 \times 10^{-3}$ e desvio padrão $1,12 \times 10^{-2}$, e 1879 valores negativos, com média $-4,23 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $4,74 \times 10^{-2}$. Apesar de considerarmos os coeficientes do VAR que são estatisticamente significativos, nenhuma constante elástica apresentou valor igual a 0, pois tais coeficientes estão relacionados através de operações matriciais, de acordo com as equações (143), (144) e (145).

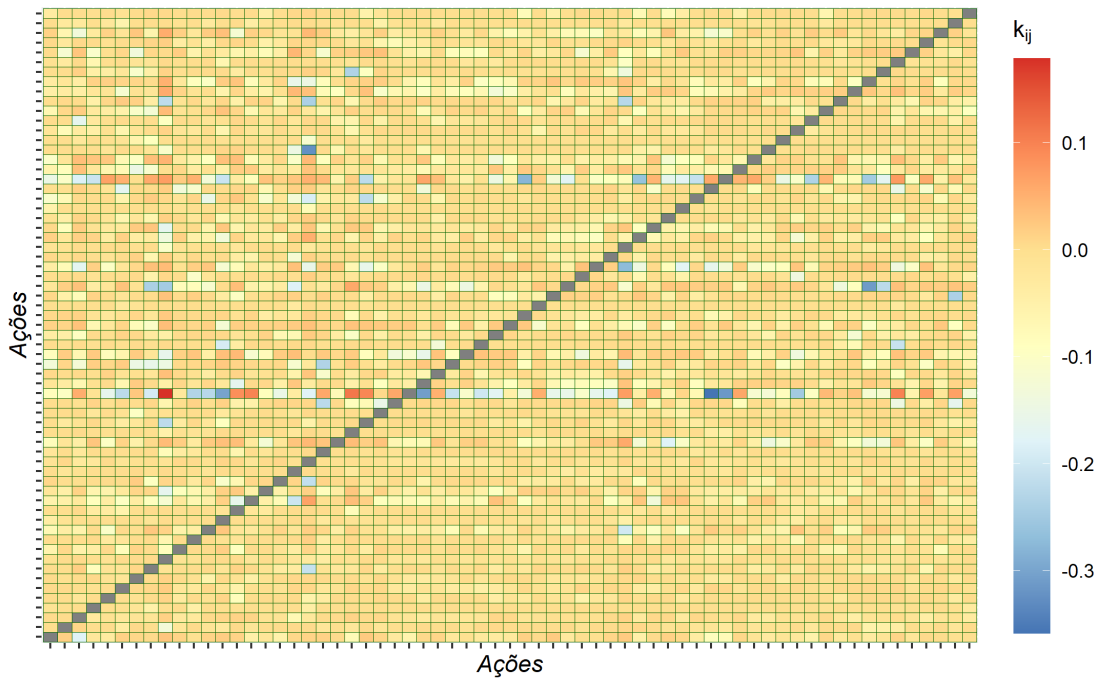


Figura 3 – Constantes elásticas da mola $k_{i,j}$. A diagonal secundária não apresenta valores, pois $k_{i,j}$ não está definida para $i = j$.

Fonte: De autoria própria.

Em um sistema físico com massas, molas e amortecedores, espera-se que as constantes da mola $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$ sejam iguais. Em nosso modelo, podemos obter tais constantes distintas, de acordo com a Equação (145). Na Figura 4, apresentamos um mapa de calor do valor absoluto da diferença entre as constantes elásticas $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$. Os valores variam entre $1,43 \times 10^{-6}$ e 0,358, com média $3,74 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $4,53 \times 10^{-2}$. Verificamos que os valores de $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$ estão relativamente próximos.

Considerando apenas as constantes k_i , $i = 1, \dots, n$, como podemos observar na Figura 5, todos os valores são positivos, variando entre 2,32 e 3,63, com média 2,92 e desvio padrão 0,30. O fato de os k_i serem positivos está de acordo com o que se espera de constantes de mola físicas. Também está em linha com a tendência de reversão à média, frequentemente observada em séries financeiras. Já o equilíbrio aproximado entre valores positivos e negativos de $k_{i,j}$ não corresponde a molas físicas, caso em que seriam positivos. Do ponto de vista econômico, $k_{i,j}$ positivos podem estar associados a ações que costumam ter movimentos no mesmo sentido, e $k_{i,j}$ negativos, a ações que costumam ter movimentos

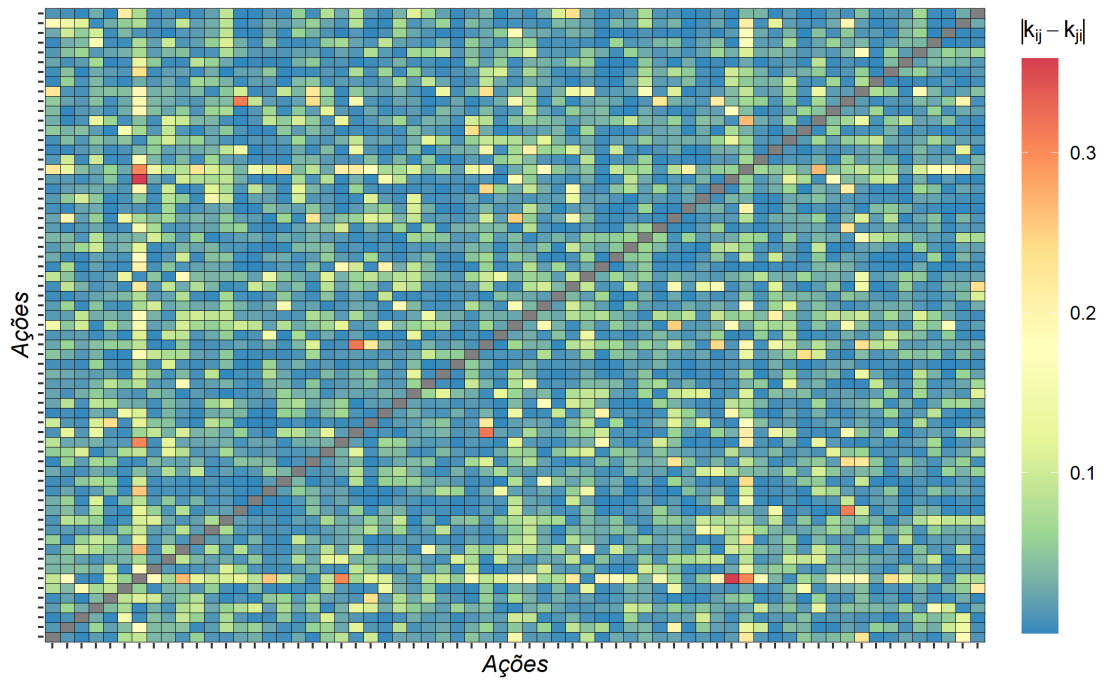


Figura 4 – Valor absoluto da diferença entre as constantes elásticas da mola $k_{i,j}$ e $k_{j,i}$. A diagonal secundária não apresenta valores, pois $k_{i,j}$ não está definida para $i = j$.

Fonte: De autoria própria.

contrários (a subida de uma frequentemente é acompanhada pela descida da outra).

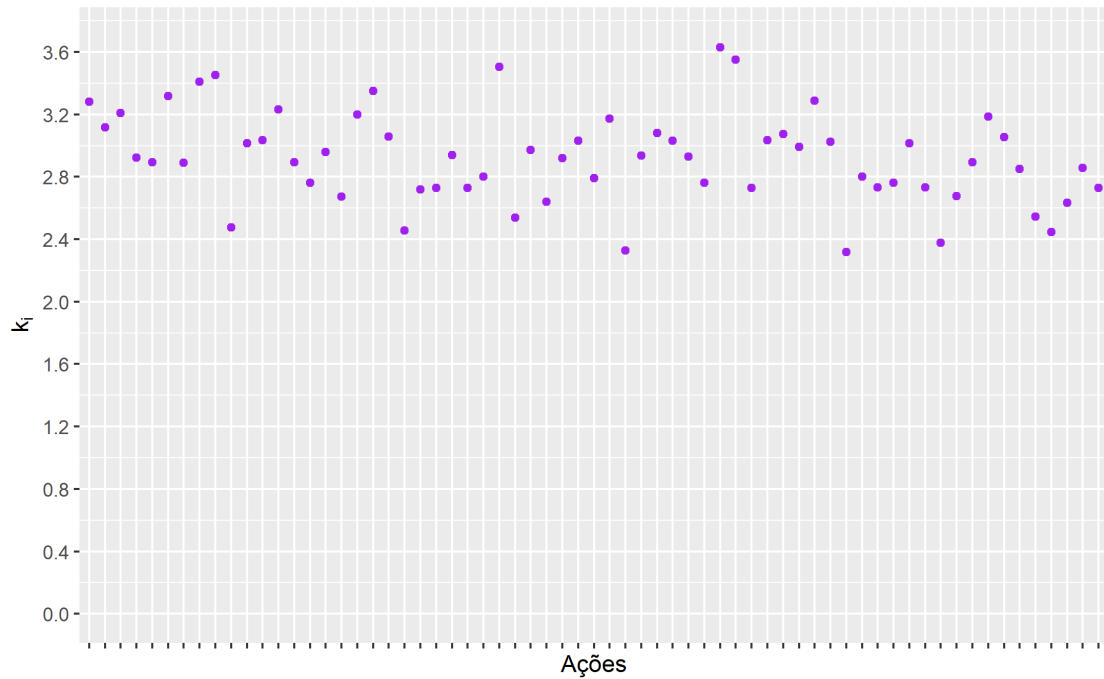


Figura 5 – Constantes elásticas da mola k_i .

Fonte: De autoria própria.

A Figura 6 apresenta o mapa de calor dos coeficientes de atrito dos amortecedores

$\gamma_{i,j}$, cujos valores estão entre $-0,481$ e $1,003$, com média $2,86 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $8,25 \times 10^{-2}$. São 1858 valores positivos, com média $8,24 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $9,65 \times 10^{-2}$, e 2302 valores negativos, com média $-1,49 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $2,37 \times 10^{-2}$. Nenhum coeficiente de atrito apresentou valor igual a 0, apesar de considerarmos os coeficientes do VAR estatisticamente significativos.

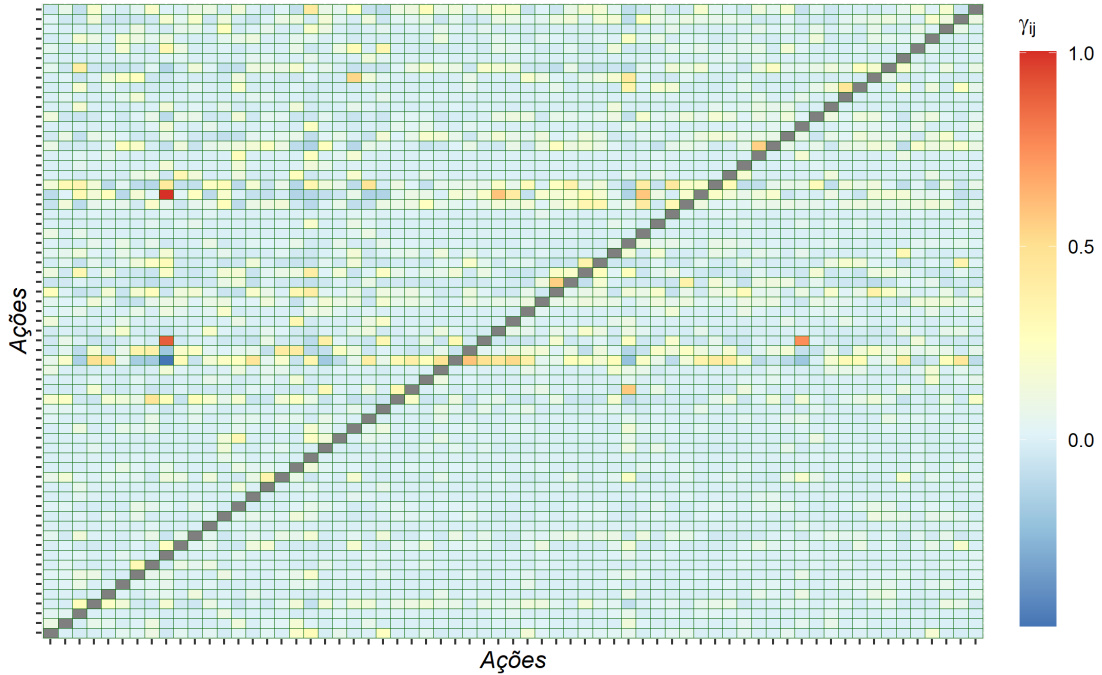


Figura 6 – Coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$. A diagonal secundária não apresenta valores, pois γ_i não está definida para $i = j$.

Fonte: De autoria própria.

Em relação aos coeficientes de atrito dos amortecedores, também esperamos que $\gamma_{i,j}$ e $\gamma_{j,i}$ sejam iguais em um sistema físico, o que pode não ocorrer em nosso modelo a partir das relações obtidas na [Equação \(145\)](#). Na [Figura 7](#) esboçamos um mapa de calor do valor absoluto da diferença entre os coeficientes de atrito $\gamma_{i,j}$ e $\gamma_{j,i}$, cujos valores variam entre $3,80 \times 10^{-5}$ e $1,005$, com média $7,40 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $9,10 \times 10^{-2}$. Verificamos que para alguns poucos casos, a diferença entre os coeficientes chega próxima a uma unidade.

Na [Figura 8](#) consideramos apenas os coeficientes γ_i , $i = 1, \dots, n$. O intervalo de variação está entre $-2,26$ e $0,98$, com média $8,54 \times 10^{-2}$ e desvio padrão $5,20 \times 10^{-1}$. Observamos 42 valores positivos, variando entre $2,56 \times 10^{-3}$ e $9,76 \times 10^{-1}$, com média $3,58 \times 10^{-1}$ e desvio padrão $2,48 \times 10^{-1}$, e 23 valores negativos, variando entre $-2,26$ e $-6,23 \times 10^{-4}$, com média $-4,13 \times 10^{-1}$ e desvio padrão $5,18 \times 10^{-1}$.

Fisicamente, os coeficientes de atrito são sempre positivos. O sistema econômico, contudo, não tem essa restrição, e verificamos relativo equilíbrio entre valores positivos e negativos aqui. Isso pode estar relacionado ao fato de que, embora oscilações grandes tendam a ser amortecidas, tal amortecimento não chega a fazer com que as oscilações tendam a

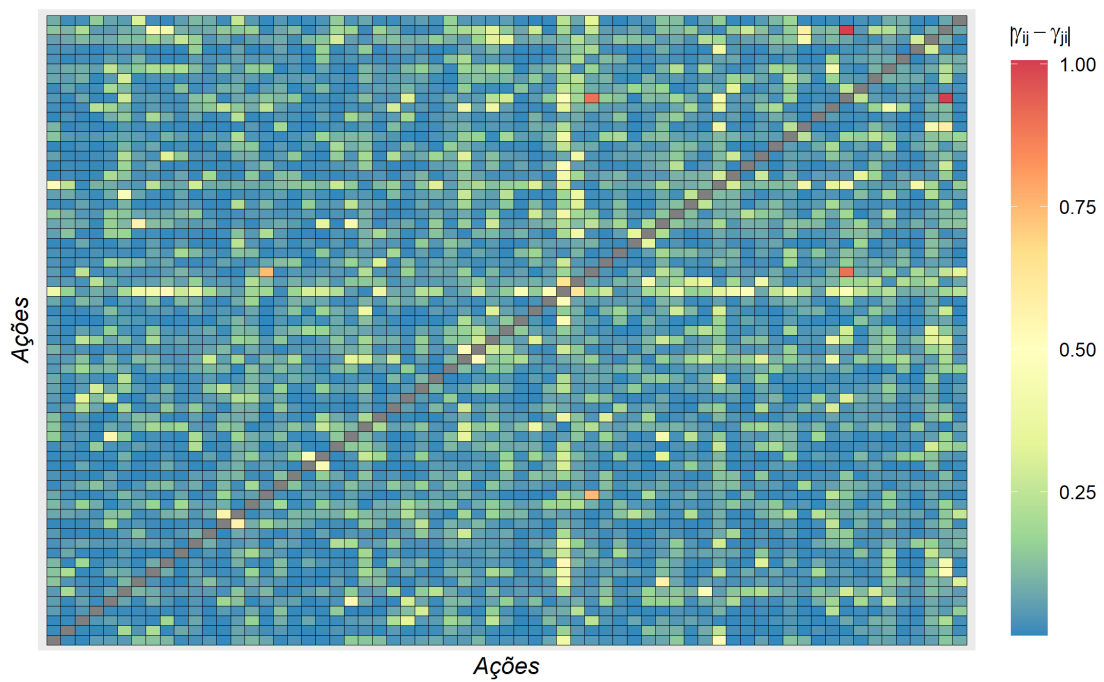


Figura 7 – Valor absoluto da diferença entre os coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$ e $\gamma_{j,i}$. A diagonal secundária não apresenta valores, pois $\gamma_{i,j}$ não está definida para $i = j$.

Fonte: De autoria própria.

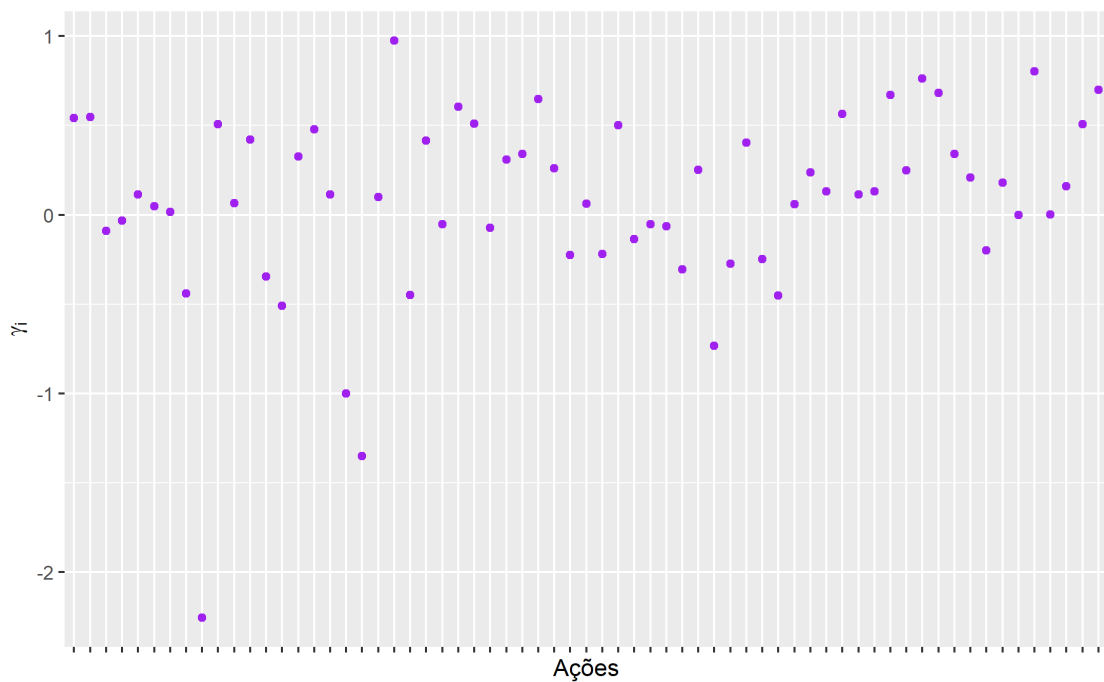


Figura 8 – Constantes elásticas da mola γ_i .

Fonte: De autoria própria.

desaparecer, como acontece, em geral, no sistema físico com amortecimento. Ou seja, as oscilações residuais sempre presentes nas séries financeiras podem estar relacionadas às distribuições dos coeficientes de atrito encontradas.

A distribuição empírica de alguns parâmetros estimados foi avaliada. Na [Figura 9](#) vemos a distribuição empírica das constantes elásticas k_i . Apesar da aparente proximidade entre essa distribuição e uma distribuição gaussiana (representada pela curva em vermelho), a cauda decai em lei de potência, pois o teste de adequação apresentou p-valor igual a 0,22. O expoente da distribuição é $\delta = 15,54$. O alto valor de δ indica uma cauda que não é pesada, então, não justifica-se fazer um ajuste linear da cauda da distribuição inversa acumulada.

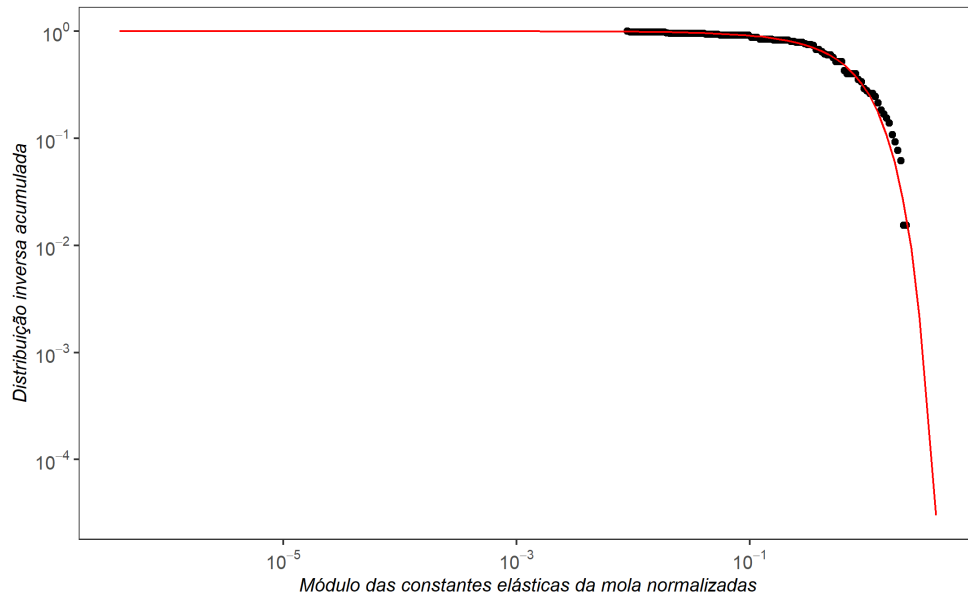


Figura 9 – Distribuição inversa acumulada das constantes elásticas k_i (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão.

Fonte: De autoria própria.

A [Figura 10](#) apresenta a distribuição empírica das constantes elásticas da mola $k_{i,j}$, e, pelo teste de adequação, a lei de potência não é uma hipótese plausível para os dados, uma vez que o p-valor é igual a 0,02. Observamos, entretanto, a partir da comparação com a gaussiana, que essa distribuição empírica tem cauda pesada.

Analizamos, também, a distribuição empírica dos coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i , apresentada na [Figura 11](#). A partir do teste de adequação, temos que a cauda de tal distribuição decai em lei de potência, apresentando p-valor igual a 0,8. O expoente da distribuição é $\delta = 3,69$, e, ao fazer um ajuste linear nos pontos da cauda da distribuição empírica, o coeficiente de determinação é $R^2 = 0,9789$.

A [Figura 12](#) apresenta a distribuição empírica dos coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$, em que a cauda decai em lei de potência, apresentando p-valor igual a 0,93 no teste de adequação, e expoente da distribuição $\delta = 5,65$. Ao fazer um ajuste linear nos pontos da cauda da distribuição empírica, o coeficiente de determinação tem valor $R^2 = 0,9509$. Em comparação com a gaussiana, observamos uma cauda pesada para essa distribuição empírica.

Visando investigar se existe relação entre liquidez e os coeficientes do oscilador

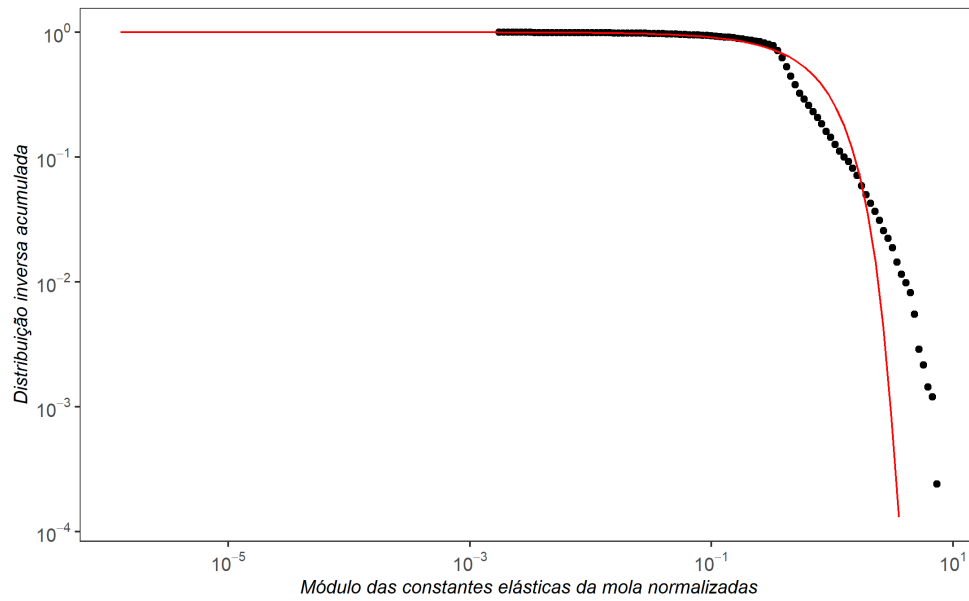


Figura 10 – Distribuição inversa acumulada das constantes elásticas $k_{i,j}$ (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão.

Fonte: De autoria própria.

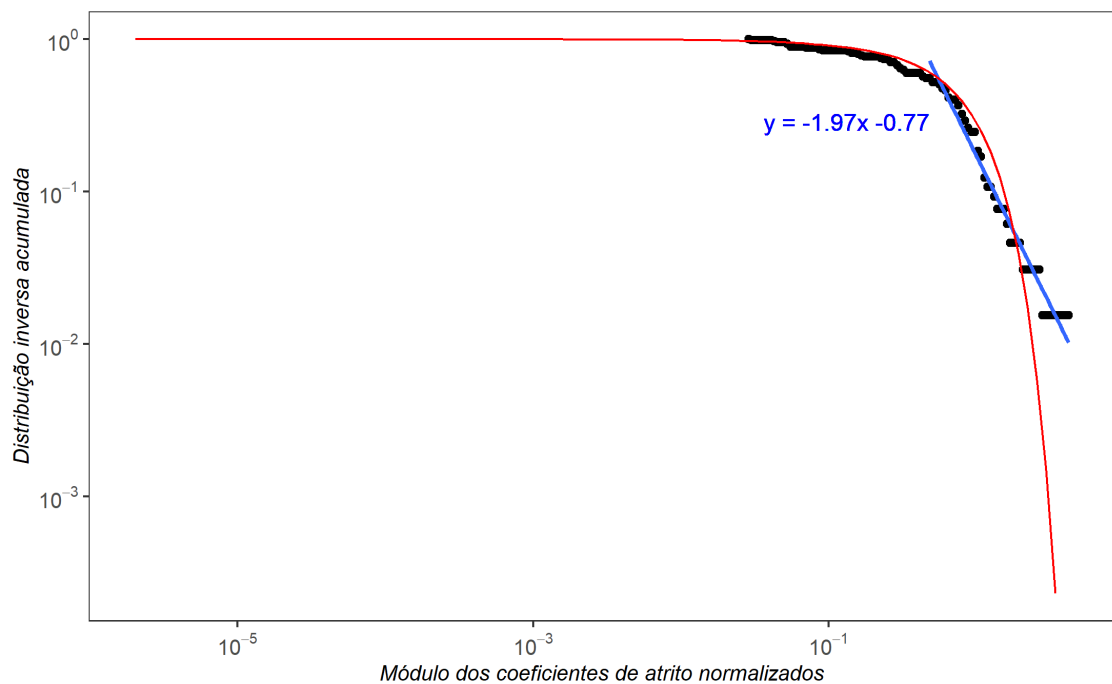


Figura 11 – Distribuição inversa acumulada dos coeficientes de atrito γ_i (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão, e a reta azul representa o ajuste linear da cauda da distribuição inversa acumulada.

Fonte: De autoria própria.

harmônico acoplado, calculamos o coeficiente de correlação de Pearson r entre estas variáveis. Se um ativo for vendido em um espaço de tempo curto por um preço pouco abaixo do que seria vendido a um tempo mais longo, o ativo é dito líquido (BLACK, 1971). Neste trabalho,

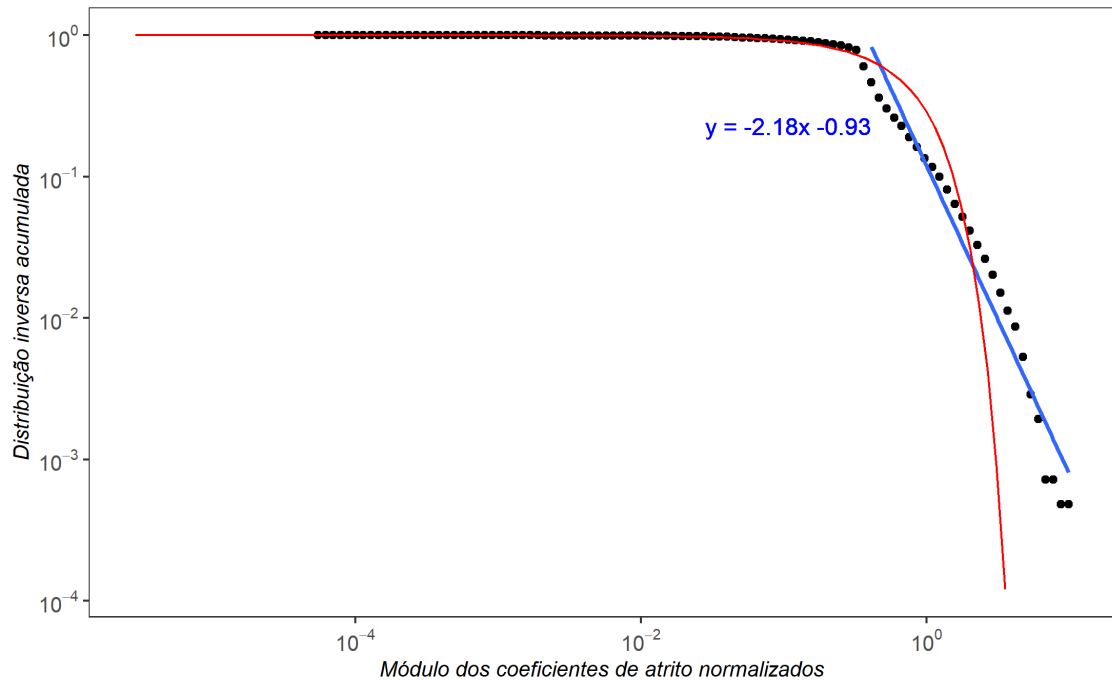


Figura 12 – Distribuição inversa acumulada dos coeficientes de atrito $\gamma_{i,j}$ (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão, e a reta azul representa o ajuste linear da cauda da distribuição inversa acumulada.

Fonte: De autoria própria.

a liquidez das ações foi determinada pelo número de datas em que não há o preço de fechamento da ação. Quanto menor o número de datas em que a ação não foi negociada, mais líquida será a ação. O número de datas sem preço de fechamento de cada ação está apresentado no [Apêndice A](#).

Investigamos a correlação linear da liquidez das ações com as constantes elásticas da mola k_i , $i = 1, \dots, n$, e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i , $i = 1, \dots, n$. O coeficiente de correlação encontrado entre a liquidez das ações e as constantes elásticas da mola foi $r = 0,0581$ (p-valor = 0,646). Como o p-valor é maior do que 0,05, tal coeficiente é estatisticamente igual a zero. Este valor indica uma correlação linear positiva muito fraca (MOORE; NOTZ, 2021). A [Figura 13](#) apresenta o gráfico de dispersão entre as constantes elásticas da mola k_i e a liquidez das ações, cujo eixo y está na escala log.

Já a correlação entre a liquidez das ações e os coeficientes de atrito dos amortecedores apresentou coeficiente de correlação $r = -0,1565$ (p-valor = 0,213), ou seja, estatisticamente igual a zero, pois o p-valor é maior do que 5%. Isto indica uma correlação linear negativa fraca. O gráfico de dispersão entre os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i e a liquidez das ações pode ser visto na [Figura 14](#), em que o eixo y está na escala log.

Outras relações analisadas foram entre a média dos volumes das ações consideradas e os coeficientes do oscilador harmônico acoplado. O volume das ações é determinado pelo número de ações negociadas em cada dia. A média dos volumes de cada ação pode ser vista

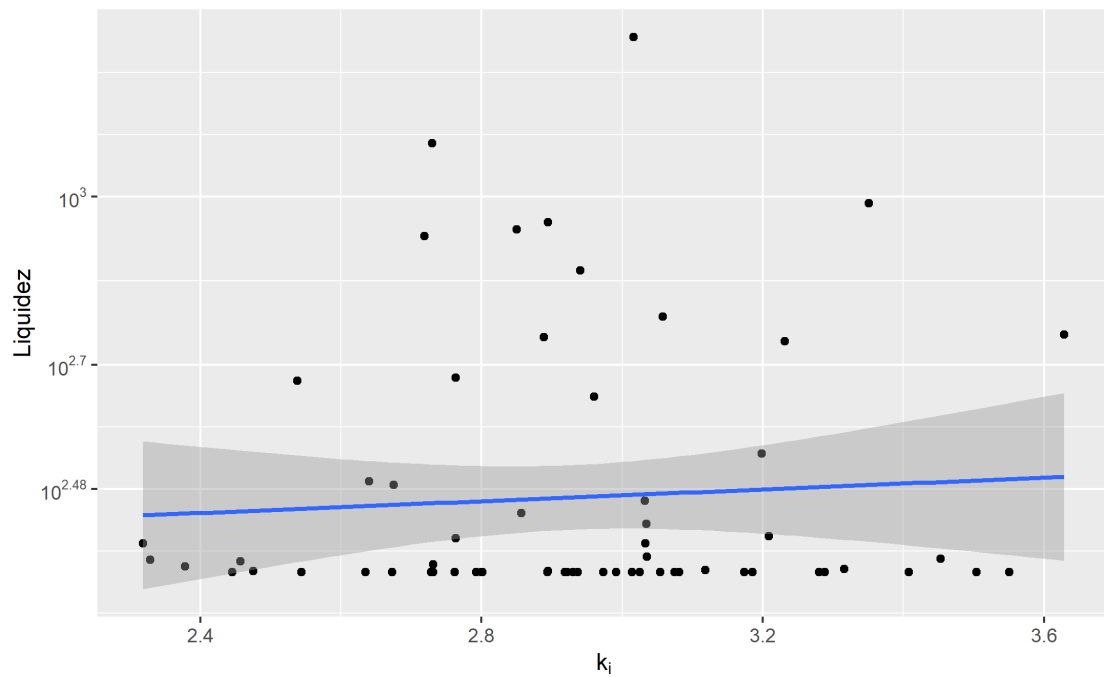


Figura 13 – Correlação entre a liquidez e as constantes elásticas da mola k_i . A reta azul representa a linha de tendência do gráfico, e a região cinza escura corresponde ao intervalo de confiança da reta. O eixo y está na escala log.

Fonte: De autoria própria.

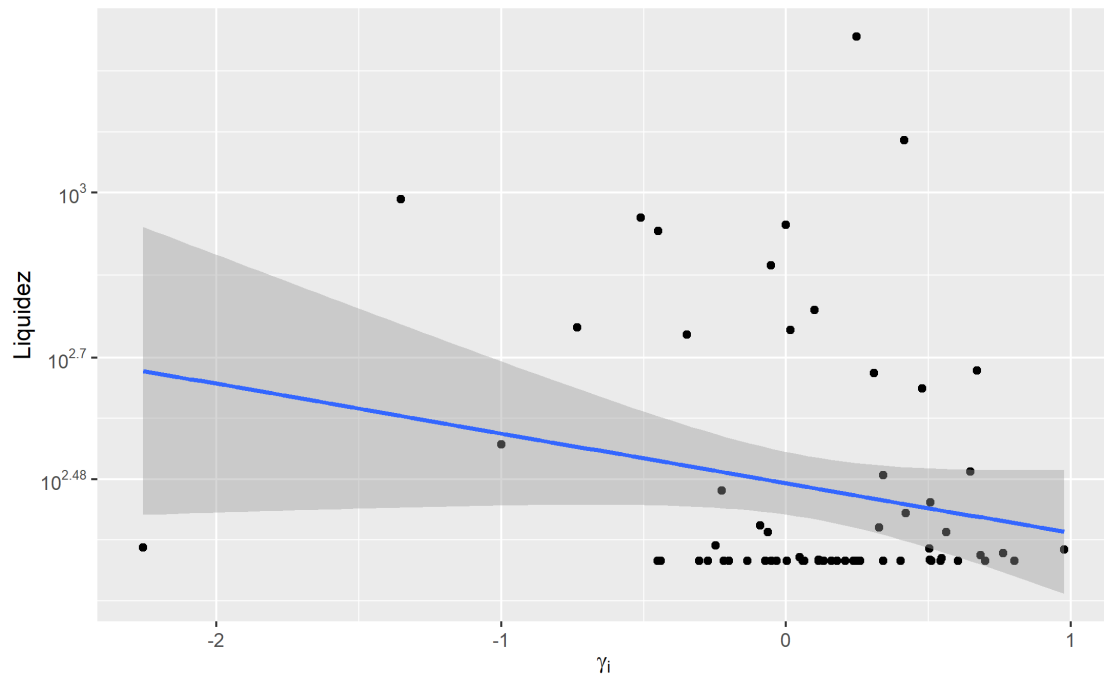


Figura 14 – Correlação entre a liquidez e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i . A reta azul representa a linha de tendência do gráfico, e a região cinza escura corresponde ao intervalo de confiança da reta. O eixo y está na escala log.

Fonte: De autoria própria.

no [Apêndice B](#). Analisamos a correlação linear entre a média dos volumes das ações e as constantes elásticas da mola k_i , $i = 1, \dots, n$, e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i , $i = 1, \dots, n$.

O coeficiente de correlação de Pearson entre a média dos volumes e as constantes elásticas da mola foi $r = 0,1948$ (p-valor = 0,1199). Uma vez que o p-valor é maior do que 0,05, tal coeficiente é estatisticamente igual a zero, o que indica uma correlação linear positiva fraca entre tais variáveis. Podemos visualizar tal correlação na [Figura 15](#), que apresenta o gráfico de dispersão entre as constantes elásticas da mola k_i e a média dos volumes das ações.

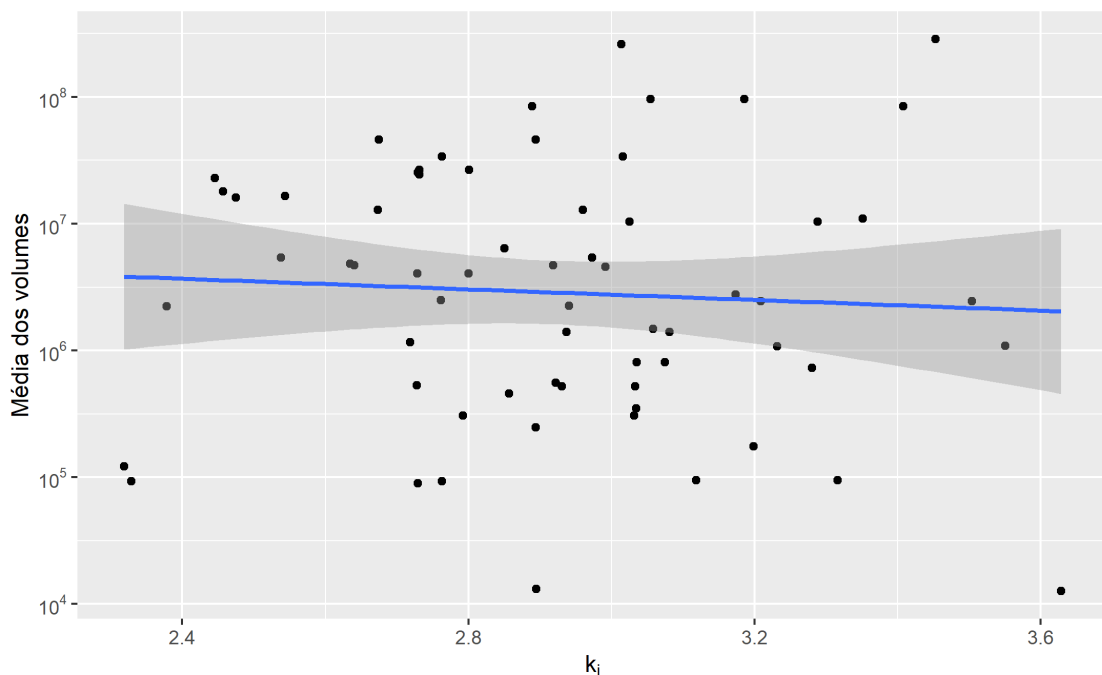


Figura 15 – Correlação entre a média dos volumes das ações e as constantes elásticas da mola k_i . A reta azul representa a linha de tendência do gráfico, e a região cinza escura corresponde ao intervalo de confiança da reta.

Fonte: De autoria própria.

Já $r = -0,3759$ (p-valor = $2,032 \times 10^{-3}$) foi o coeficiente de correlação encontrado entre a média dos volumes e os coeficientes de atrito dos amortecedores, indicando que as variáveis analisadas possuem uma correlação linear negativa fraca e estatisticamente significativa, devido a seu p-valor menor do que 5%. A [Figura 16](#) apresenta o gráfico de dispersão entre os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i e a média dos volumes das ações.

Dentre as relações tratadas acima, entre os coeficientes do modelo e liquidez ou média do volume das ações, a única estatisticamente significativa, com sinal negativo, foi entre média dos volumes e coeficientes de atrito. Tais coeficientes podem ser conectados ao decaimento de oscilações grandes, comparadas a oscilações típicas. Assim, concluímos que esse decaimento é mais intenso para ações com menos volume de negociação. Um cenário

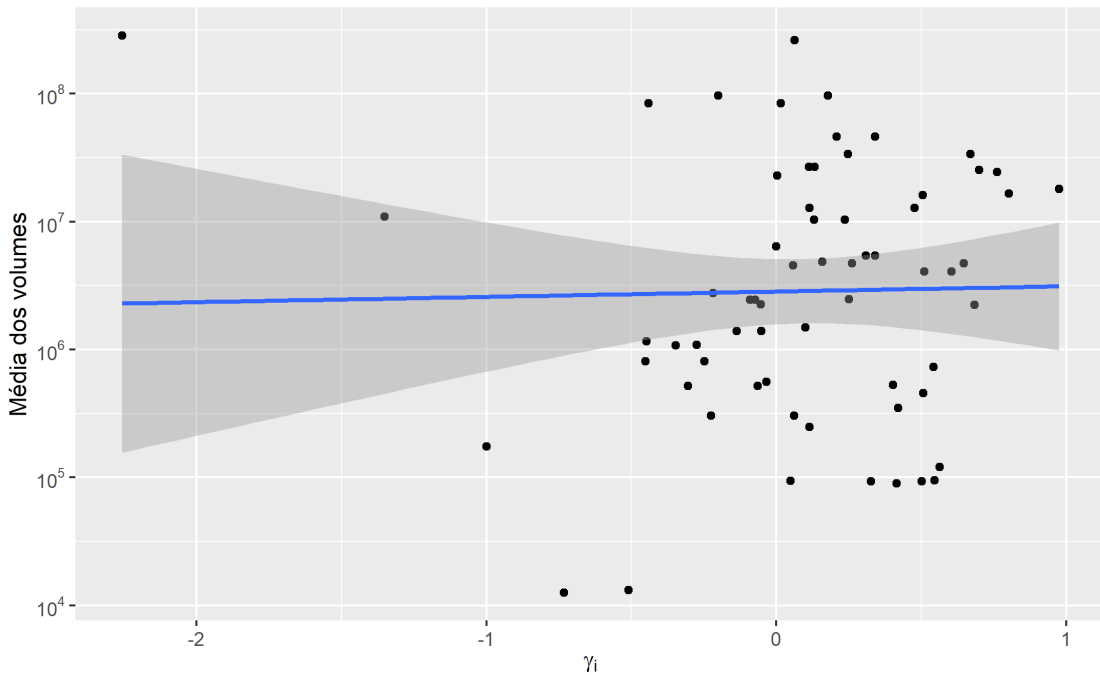


Figura 16 – Correlação entre a média dos volumes das ações e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i . A reta azul representa a linha de tendência do gráfico, e a região cinza escura corresponde ao intervalo de confiança da reta.

Fonte: De autoria própria.

plausível é aquele em que ações pouco negociadas experimentam grandes variações quando fatos externos impactam o mercado, mas tais oscilações são rapidamente amortecidas.

Investigamos, também, a relação entre as constantes elásticas da mola k_i e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i , $i = 1, \dots, n$. O coeficiente de correlação de Pearson obtido ao analisar tal correlação foi $r = -0,6188$ (p-valor = $3,934 \times 10^{-8}$), indicando que existe uma correlação linear negativa moderada e estatisticamente significativa entre as variáveis analisados. Assim, ações em que a força restauradora é mais presente sentem menos os efeitos do amortecimento. Tal correlação pode ser visualizada na [Figura 17](#).

A relação entre as constantes elásticas $k_{i,j}$ e os coeficientes de atrito $\gamma_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ foi investigada, e apresentou coeficiente de correlação de Pearson $r = 0,2964$ (p-valor $< 2,2 \times 10^{-16}$). Daí, verificamos que existe uma correlação linear positiva fraca e estatisticamente significativa entre tais coeficientes, que visualizamos na [Figura 18](#). Portanto, há uma tendência de que ações mais conectadas às outras por efeitos relacionados às molas também o serão pelas forças relativas aos amortecedores.

5.1.2 Quantidades análogas às energias

Apresentaremos, nesta seção, alguns resultados relacionados às quantidades análogas às energias cinética, potencial e total. A [Figura 19](#) exhibe a quantidade análoga à energia cinética do sistema, onde todos os valores são positivos, por definição, e podemos observar

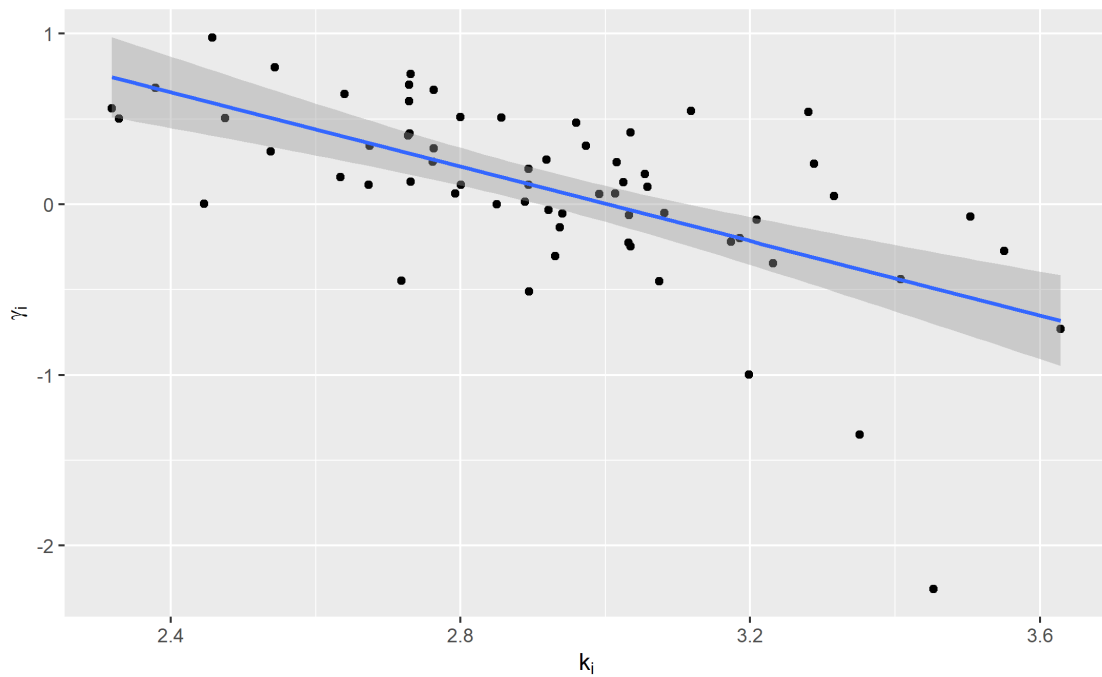


Figura 17 – Correlação entre as constantes elásticas da mola k_i e os coeficientes de atrito dos amortecedores γ_i . A reta azul representa a linha de tendência do gráfico, e a região cinza escura corresponde ao intervalo de confiança da reta.

Fonte: De autoria própria.

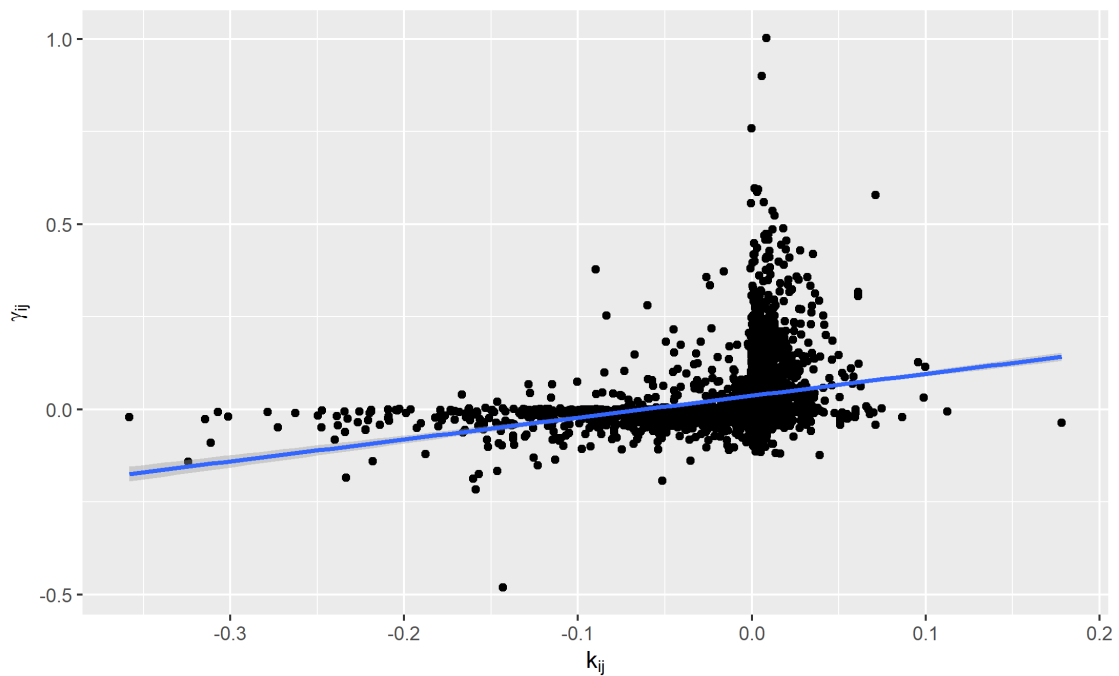


Figura 18 – Correlação entre as constantes elásticas da mola $k_{i,j}$ e os coeficientes de atrito dos amortecedores $\gamma_{i,j}$. A reta azul representa a linha de tendência do gráfico, e a região cinza escura corresponde ao intervalo de confiança da reta.

Fonte: De autoria própria.

grandes picos de energias em outubro de 2008, janeiro de 2016 e março de 2020. Consideramos como grandes picos os valores das quantidades análogas à energia cinética maiores do que 0,2.

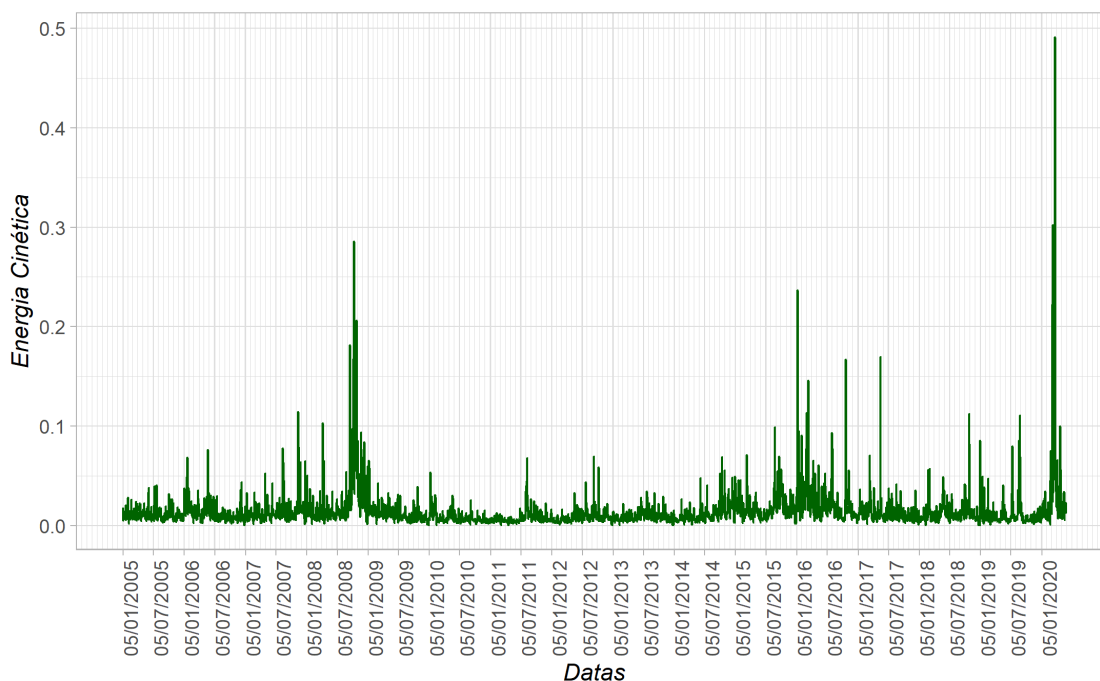


Figura 19 – Quantidade análoga à energia cinética do sistema.

Fonte: De autoria própria.

A quantidade análoga à energia potencial pode ser vista na [Figura 20](#), cujo gráfico apresenta grandes picos em outubro de 2008 e março de 2020, o que também acontece na [Figura 21](#) com a quantidade análoga à energia total do sistema. Em ambos os casos, todos os valores das quantidades análogas às energias são positivos, e consideramos como grandes picos os valores das quantidades análogas às energias potencial e total maiores do que 3.

Os grandes picos apresentados nos gráficos anteriores estão relacionados a eventos ocorridos no Brasil e no mundo e que geraram alguma instabilidade nos preços das ações. Em 2007 teve início a crise financeira do *subprime* dos Estados Unidos, devido à queda dos preços da habitação nos EUA, que levou a níveis altos de inadimplência. O impacto dessas inadimplências no setor financeiro foi muito grande, e a crise perdurou até 2008 (REINHART; ROGOFF, 2008). Após esse período, os EUA tiveram dificuldades em reduzir a taxa de desemprego (COUTO; DANTAS; FREITAS, 2013). Além disso, em 08/01/2016 foi divulgado o Índice Nacional de Preços do Consumidor Amplo (IPCA) do ano anterior, que mede a inflação do Brasil, sendo a maior entre os 13 anos anteriores.¹ Por fim, em março de 2020, foi declarada a pandemia de COVID-19 (CIOTTI et al., 2020).

¹ <https://brasil.elpais.com/brasil/2016/01/08/economia/1452253515_364203.html>, acesso em 24/10/2022.

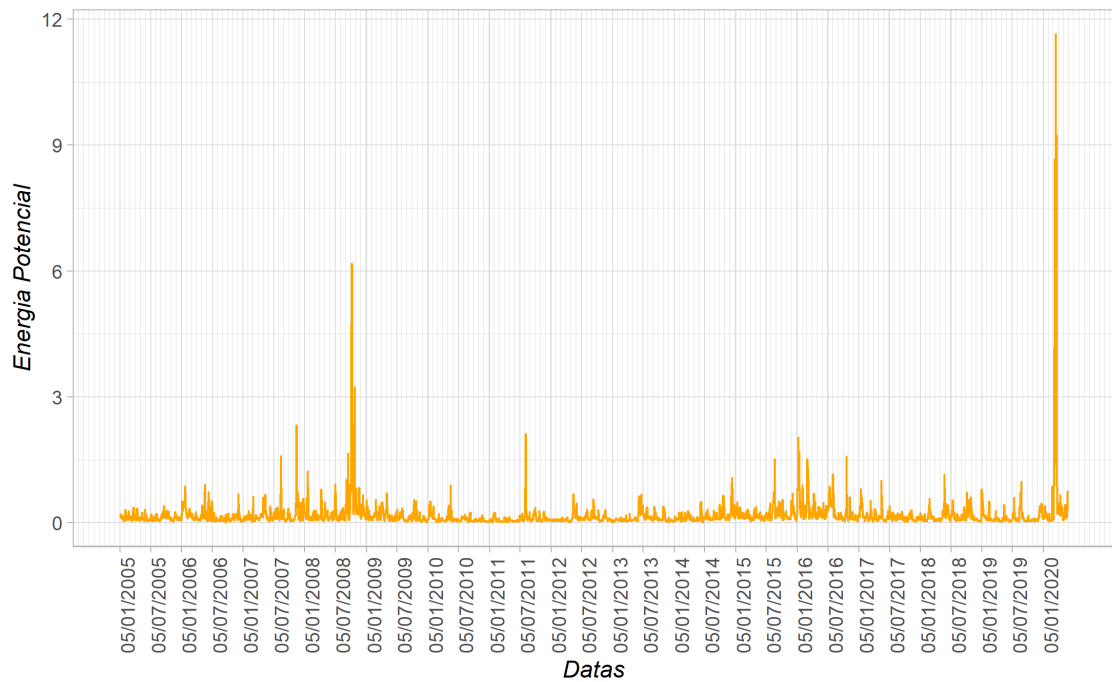


Figura 20 – Quantidade análoga à energia potencial do sistema.

Fonte: De autoria própria.

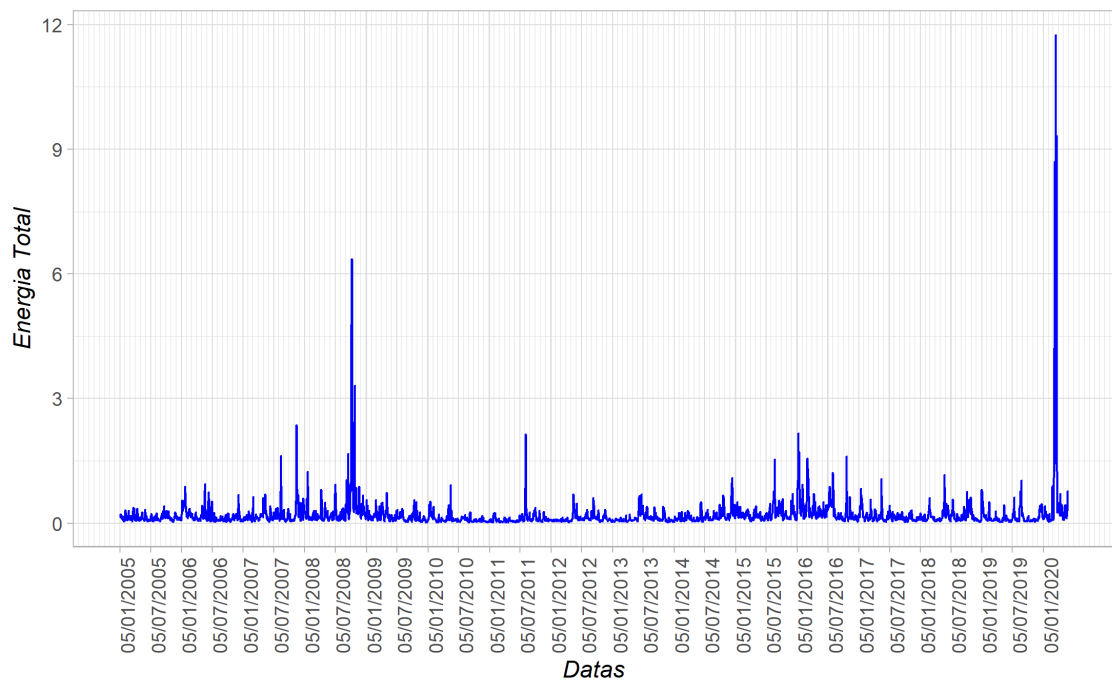


Figura 21 – Quantidade análoga à energia total do sistema.

Fonte: De autoria própria.

Apresentamos a distribuição empírica das quantidades análogas às energias cinética, potencial e total do sistema nas Figuras 22, 23 e 24, respectivamente. Pelo teste de adequação, a cauda da distribuição empírica das quantidades análogas às energias cinéticas decai em

lei de potência, pois apresenta p-valor igual a 0,33. O expoente da distribuição é $\delta = 2,87$, e o coeficiente de determinação, $R^2 = 0,9126$. Como vemos na Figura 22, tal distribuição empírica apresenta uma cauda pesada, a partir da comparação com a gaussiana.

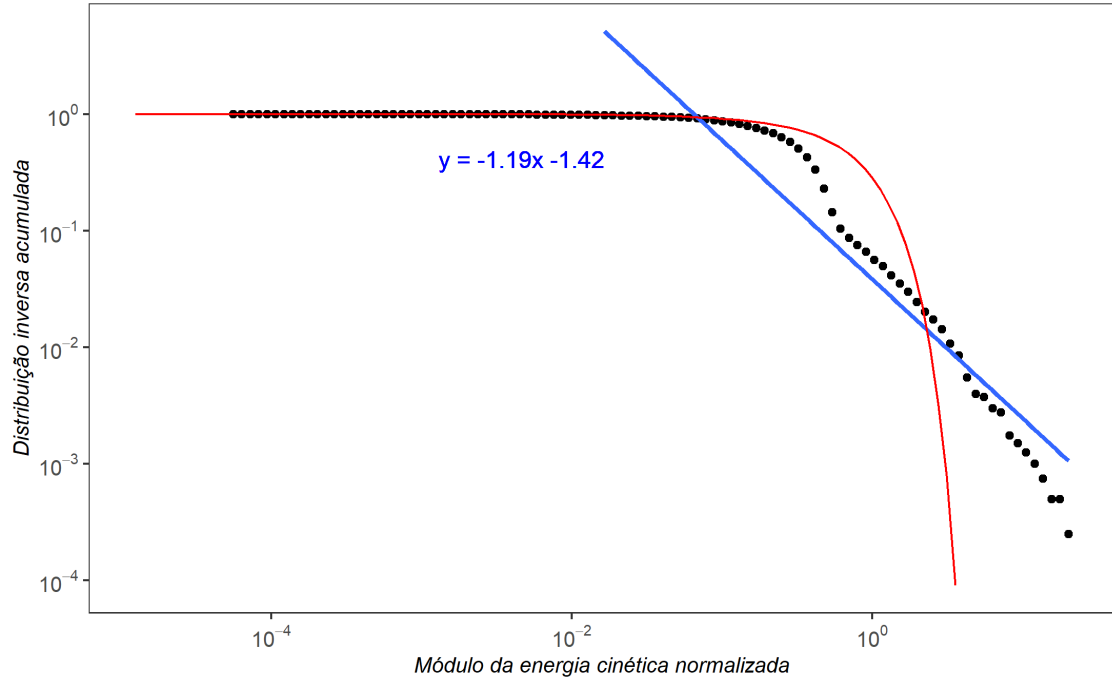


Figura 22 – Distribuição inversa acumulada das quantidades análogas às energias cinéticas do sistema (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão, e a reta azul representa o ajuste linear de parte da cauda da distribuição inversa acumulada.

Fonte: De autoria própria.

A cauda da distribuição empírica da quantidade análoga à energia potencial decai segundo uma lei de potência, uma vez que apresenta p-valor igual a 0,38 no teste de adequação, cujo expoente da distribuição é $\delta = 2,8$. Ao fazer um ajuste linear nos pontos da cauda de tal distribuição, obtivemos o coeficiente de determinação $R^2 = 0,9714$. Em comparação com a gaussiana, a distribuição empírica tem uma cauda pesada, de acordo com a Figura 23.

Fizemos, também, um ajuste linear nos pontos da cauda da distribuição empírica da quantidade análoga à energia total, pois apresenta p-valor igual a 0,35 no teste de adequação. O coeficiente de determinação encontrado é $R^2 = 0,974$, e o expoente da distribuição é $\delta = 2,88$. Na Figura 24, observamos que essa distribuição apresenta uma cauda pesada, comparando com a gaussiana.

Calculamos o expoente de Hurst das quantidades análogas às energias cinética e potencial. O expoente de Hurst encontrado para a quantidade análoga à energia cinética foi $H = 0,042$, e para a quantidade análoga à energia potencial obtivemos $H = 0,044$. Em ambos os casos, temos um alto nível de anti-persistência, o que pode ser verificado nas

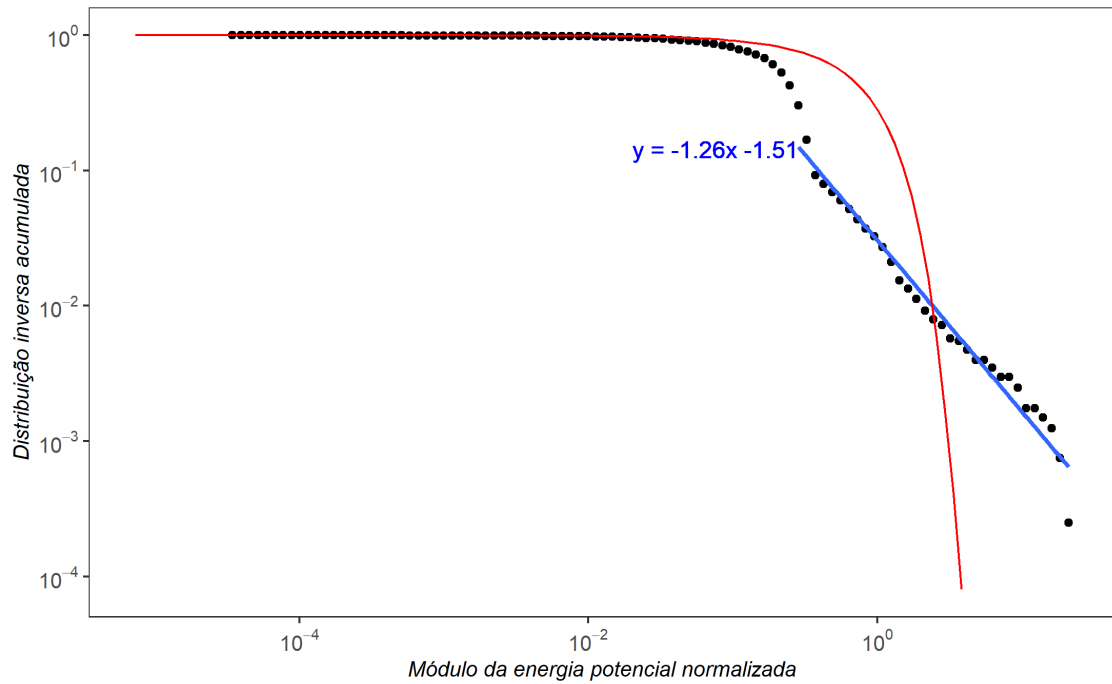


Figura 23 – Distribuição inversa acumulada das quantidades análogas às energias potenciais do sistema (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão, e a reta azul representa o ajuste linear de parte da cauda da distribuição inversa acumulada.

Fonte: De autoria própria.

Figuras 19 e 20, respectivamente. Nas duas figuras vemos que as quantidades retornam para a origem constantemente.

Em relação ao expoente de Hurst generalizado, as Figuras 25 e 26 apresentam o espectro de singularidade e o comportamento associado às funções de flutuação de ordem q , $F_q(s)$, para as quantidades análogas às energias cinética e potencial, respectivamente. Cada curva azul representa o gráfico de s por $F_q(s)$, em escala log-log, para 21 valores de q distribuídos no intervalo $[-2, 2]$. A largura do espectro de singularidade está relacionada à presença de correlações não lineares, à distribuição da série e à sua finitude. Quando embaralhamos a série antes de calcular tal largura, eliminamos as correlações. Assim, a diminuição observada na largura indica a presença dessas correlações na série original.

O valor encontrado de $\Delta\alpha$ para a série da quantidade análoga à energia cinética foi $\Delta\alpha = 0,47$. Para trinta amostras de séries embaralhadas, a média dos valores $\Delta\alpha$ foi 0,31, e o desvio padrão foi igual a 0,05. Do mesmo modo, encontramos $\Delta\alpha = 0,75$ para a série da quantidade análoga à energia potencial. A média de $\Delta\alpha$ para trinta amostras de séries embaralhadas foi 0,52, e o desvio padrão encontrado foi 0,07. Em ambos os casos, observamos uma diminuição significativa na largura, indicando a presença de correlações não-lineares em ambas as séries.

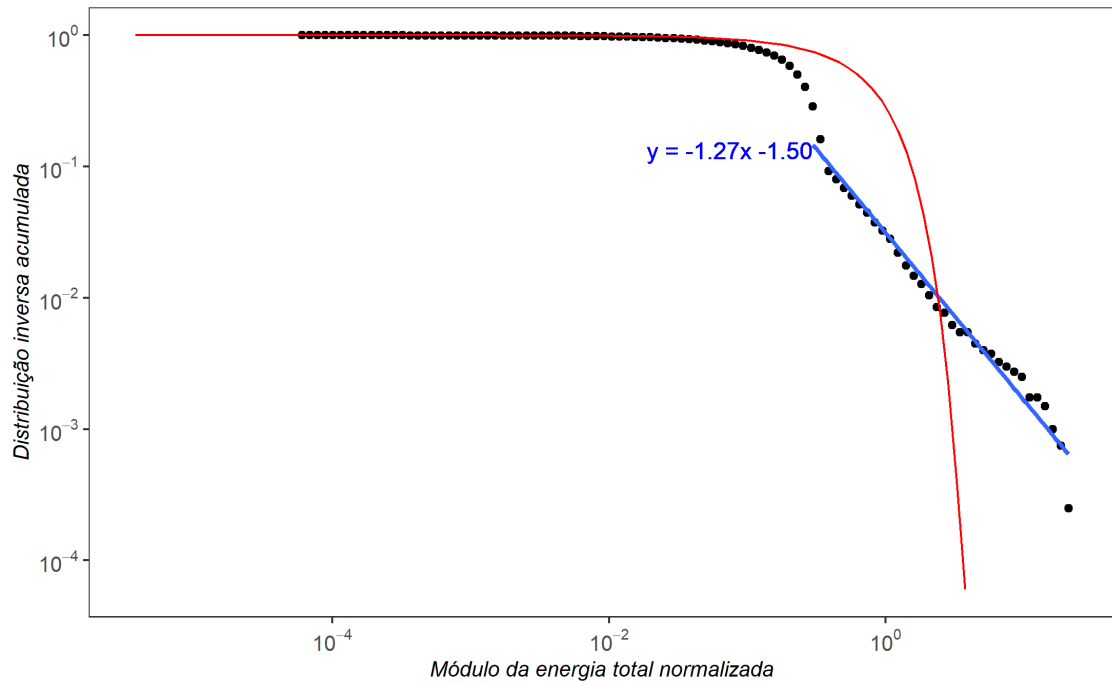


Figura 24 – Distribuição inversa acumulada das quantidades análogas às energias totais do sistema (pontos pretos) em escala log-log. A curva vermelha corresponde à distribuição normal padrão, e a reta azul representa o ajuste linear de parte da cauda da distribuição inversa acumulada.

Fonte: De autoria própria.

5.2 Modelo de previsão

Para o modelo de previsão, utilizamos como base de dados os preços de fechamento, em candles de 1 minuto, das 87 ações que compuseram o índice Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024 (02/01/2024 a 03/05/2024), apresentadas no [Quadro 2](#). Os dados foram coletados da plataforma LSEG.

5.2.1 Previsão da tendência

Estamos interessados em analisar a previsão de tendência de preços dos ativos, então quando não houve alteração no preço, este último foi removido para o cálculo da acurácia, pois queremos verificar se o preço do ativo aumentou ou diminuiu em relação ao preço do tempo anterior. A ação RRRP3 foi a menos negociada, ficando, assim, com um total de 421 valores em sua série de preços considerada. Para os demais ativos, a quantidade de valores nas séries de preços varia entre 14.356 (GOLL4) e 31.821 (SBSP3).

O modelo de previsão foi construído de modo a verificar se o preço previsto aumentou ou diminuiu, então, calculamos a acurácia como a razão entre o número de acertos e o número total de observações. A [Tabela 1](#) apresenta a acurácia encontrada para cada ativo analisado.

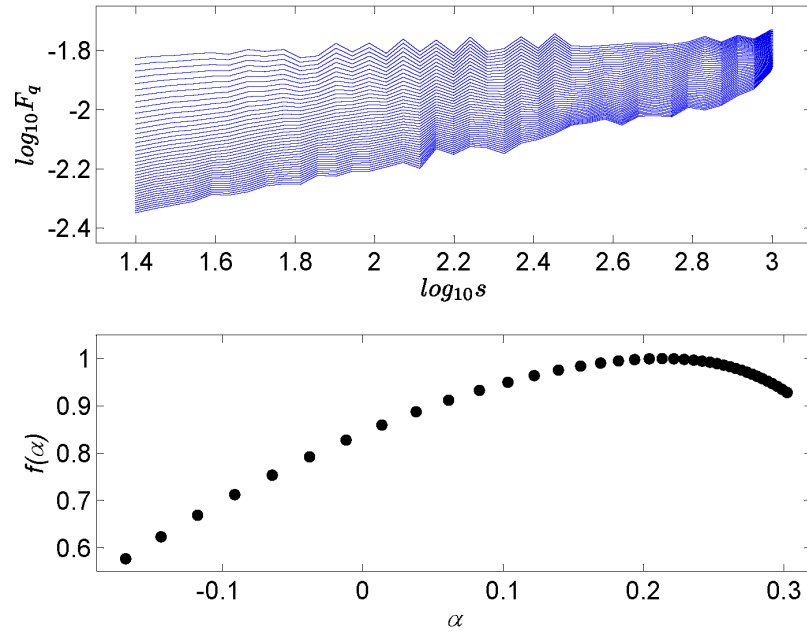


Figura 25 – O gráfico superior apresenta, para a quantidade análoga à energia cinética, o comportamento de escala da função de flutuação de ordem q , $F_q(s)$, para 21 valores de q distribuídos no intervalo $[-2, 2]$. O espectro de singularidade é exibido no gráfico inferior, e está de acordo com a escala multifractal nos dados. A largura $\Delta\alpha = 0,47$ depende de correlações não lineares, da distribuição da série e de sua finitude.

Fonte: De autoria própria.

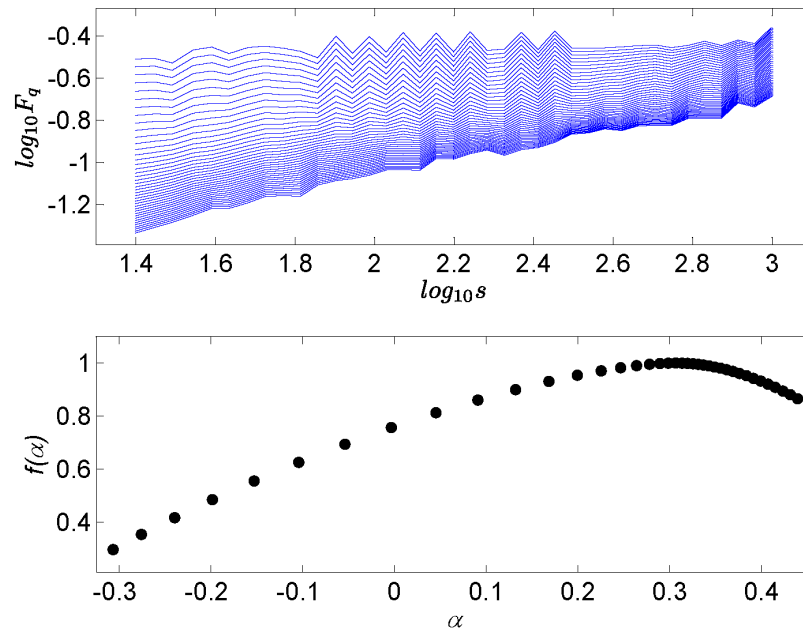


Figura 26 – O gráfico superior apresenta, para a quantidade análoga à energia potencial, o comportamento de escala da função de flutuação de ordem q , $F_q(s)$, para 21 valores de q distribuídos no intervalo $[-2, 2]$. O espectro de singularidade é exibido no gráfico inferior, e está de acordo com a escala multifractal nos dados. A largura $\Delta\alpha = 0,75$ depende de correlações não lineares, da distribuição da série e de sua finitude.

Fonte: De autoria própria.

Tabela 1 – Acurácia de cada ativo no modelo de previsão.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0,5036	0,5288	0,5323	0,5835	0,5105	0,5228	0,5127	0,5603
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0,5244	0,6044	0,5789	0,5401	0,5091	0,5136	0,5151	0,5160
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0,5228	0,5419	0,5555	0,5626	0,6872	0,7120	0,6184	0,5237
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0,5308	0,6214	0,6588	0,5075	0,5843	0,5111	0,5415	0,5145
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0,5173	0,5642	0,5367	0,5159	0,5252	0,5651	0,5232	0,6273
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0,6181	0,5175	0,5836	0,6310	0,5093	0,5201	0,5140	0,6690
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0,5268	0,5269	0,5341	0,5098	0,5734	0,5153	0,7251	0,5518
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRIO3
0,6208	0,5535	0,5266	0,5967	0,5162	0,5189	0,5168	0,5023
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMTO3
0,5976	0,5193	0,7180	0,5143	0,5265	0,5121	0,5400	0,5215
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0,5262	0,5352	0,5085	0,5355	0,5173	0,5480	0,5072	0,5219
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0,5160	0,5637	0,5071	0,5609	0,5200	0,5145	0,5128	

Observamos que todas as acurácias obtidas foram maiores do que 0,5. O menor valor de acurácia encontrado foi 0,5023, da ação PRIO3, que apresenta bastantes valores em sua série de preços, sendo 30.617. Já a maior acurácia ocorreu para MGLU3, sendo igual a 0,7251. A série de preços de tal ativo tem 14.509 valores. A acurácia do ativo RRRP3 foi 0,5036, de GOLL4 foi igual a 0,6181, e encontramos o valor 0,5121 para a ação SBSP3.

Dada a hipótese de mercado eficiente, previsões de tendência em séries financeiras dificilmente apresentam alta acurácia. Um preditor completamente aleatório, semelhante àquele vinculado ao lançamento de uma moeda justa, acerta, em média, metade das vezes. Queremos saber se o preditor aqui proposto é capaz de extrair alguma informação das séries financeiras, tornando-se estatisticamente diferente do preditor aleatório. Para cada ativo, realizamos o seguinte teste de hipóteses para verificar se as acurácias são estatisticamente

iguais a 0,5:

$$\begin{cases} H_0 : a_k = 0,5 \\ H_1 : a_k \neq 0,5. \end{cases} \quad (170)$$

Como o tamanho das amostras é grande, podemos considerar a hipótese de normalidade em todos os casos. Realizamos o teste z , e na [Tabela 2](#) apresentamos o p -valor encontrado para cada ativo.

Apenas dois ativos apresentaram p -valor maior do que 0,05, sendo 0,88 para RRRP3 e 0,42 para PRIO3, cujas acurácias foram iguais a 0,5036 e 0,5023, respectivamente. Então, para essas ações, falhamos em rejeitar a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5, ou seja, não existem evidências estatísticas suficientes, com nível de significância de 5%, para garantir a rejeição da afirmativa de que as acurácias são diferentes de 0,5.

Para os demais ativos, rejeitamos a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5. Isto é, existem evidências estatísticas, com nível de significância de 5%, de que as acurácias são diferentes de 0,5.

5.2.2 Previsão do módulo do retorno

Podemos analisar o módulo do retorno previsto do ativo i no tempo $t + 1$, que é calculado como o valor absoluto da diferença entre o preço previsto no tempo $t + 1$ e o preço real no tempo t . Os módulos dos retornos previstos apresentaram um valor mínimo igual a $1,38 \times 10^{-8}$, e valor máximo igual a 1,33. A média de tais módulos de retorno foi igual a $1,03 \times 10^{-2}$ e o desvio padrão encontrado foi $1,43 \times 10^{-2}$.

Considerando, agora, os preços reais, os módulos dos retornos reais têm como valor mínimo 0 e valor máximo igual a 4,31. A média de tais módulos de retorno foi $1,35 \times 10^{-2}$, com desvio padrão igual a $2,45 \times 10^{-2}$. As médias e desvios padrões dos retornos previstos apresentam ordens de grandeza semelhantes às dos retornos reais.

Visando uma maneira de determinar a acurácia dos módulos de retorno previstos pelo modelo baseado em osciladores harmônicos, introduzimos, para comparação, um modelo mais simples, onde calculamos o preço previsto em um instante de tempo t , através de uma janela móvel de tempo. Consideramos a janela móvel sendo um intervalo de tamanho S , ou seja, o preço previsto no tempo t foi calculado como a média dos preços reais entre os instantes $\tau = t - S$ e $\tau = t - 1$.

Calculamos a acurácia pela comparação da distância entre os módulos dos retornos previstos obtidos a partir do modelo baseado em osciladores harmônicos e os módulos de retornos reais, com a distância entre os módulos de retornos previstos pelo modelo baseado em médias móveis e os módulos de retornos reais. Se a primeira distância foi menor do que a segunda, consideramos como acerto, caso contrário, é um erro. Dividimos o número de acertos pela quantidade total de comparações.

Tabela 2 – P-valor de cada ativo no teste de hipóteses.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3
0,88	$6,45 \times 10^{-21}$	$2,88 \times 10^{-21}$	$2,94 \times 10^{-114}$	$1,73 \times 10^{-4}$	$7,54 \times 10^{-13}$
AZUL4	B3SA3	BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4
$6,48 \times 10^{-5}$	$1,87 \times 10^{-71}$	$3,35 \times 10^{-14}$	$4,04 \times 10^{-201}$	$2,30 \times 10^{-121}$	$1,84 \times 10^{-35}$
BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11	CRFB3	BHIA3
$1,84 \times 10^{-3}$	$6,80 \times 10^{-6}$	$1,40 \times 10^{-6}$	$6,05 \times 10^{-8}$	$4,02 \times 10^{-18}$	$1,04 \times 10^{-37}$
CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
$9,24 \times 10^{-59}$	$4,22 \times 10^{-70}$	0	0	$1,71 \times 10^{-237}$	$2,69 \times 10^{-13}$
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3
$2,90 \times 10^{-24}$	$4,33 \times 10^{-232}$	0	$1,26 \times 10^{-2}$	$5,89 \times 10^{-124}$	$1,18 \times 10^{-4}$
ELET6	EMBR3	ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3
$3,85 \times 10^{-47}$	$1,54 \times 10^{-6}$	$2,23 \times 10^{-9}$	$4,10 \times 10^{-80}$	$3,51 \times 10^{-33}$	$1,46 \times 10^{-7}$
EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4	GOLL4	NTCO3
$8,16 \times 10^{-16}$	$9,47 \times 10^{-82}$	$3,06 \times 10^{-13}$	$6,46 \times 10^{-306}$	$1,34 \times 10^{-186}$	$2,50 \times 10^{-8}$
SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
$1,56 \times 10^{-132}$	$9,57 \times 10^{-273}$	$1,66 \times 10^{-3}$	$1,84 \times 10^{-10}$	$1,90 \times 10^{-6}$	0
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3
$3,77 \times 10^{-18}$	$1,20 \times 10^{-17}$	$6,81 \times 10^{-27}$	$6,25 \times 10^{-4}$	$7,13 \times 10^{-88}$	$1,05 \times 10^{-6}$
MGLU3	MRFG3	BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3
0	$3,81 \times 10^{-52}$	$1,58 \times 10^{-226}$	$3,08 \times 10^{-56}$	$2,53 \times 10^{-17}$	$2,49 \times 10^{-132}$
PETR3	PETR4	RECV3	PRI03	PETZ3	RADL3
$2,55 \times 10^{-8}$	$1,28 \times 10^{-10}$	$2,14 \times 10^{-8}$	0,42	$5,59 \times 10^{-150}$	$6,29 \times 10^{-10}$
RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0	$1,44 \times 10^{-6}$	$2,69 \times 10^{-17}$	$1,70 \times 10^{-5}$	$3,35 \times 10^{-37}$	$5,07 \times 10^{-13}$
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3
$2,68 \times 10^{-16}$	$1,73 \times 10^{-27}$	$3,23 \times 10^{-3}$	$1,53 \times 10^{-28}$	$4,97 \times 10^{-9}$	$1,47 \times 10^{-43}$
TOTS3	TRPL4	UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3
$1,73 \times 10^{-2}$	$1,30 \times 10^{-11}$	$1,94 \times 10^{-7}$	$7,50 \times 10^{-75}$	$1,43 \times 10^{-2}$	$8,35 \times 10^{-70}$
VBRR3	WEGE3	YDUQ3			
$6,97 \times 10^{-11}$	$1,61 \times 10^{-6}$	$3,05 \times 10^{-5}$			

Consideramos o tamanho do intervalo da janela móvel variando entre $S = 1$ e $S = 10$. O valor das acurácias para cada caso pode ser visto no [Apêndice D](#). Podemos observar na

Tabela 6, que para o caso $S = 1$, as acurácias variam entre 0,82 e 0,998. De acordo com a hipótese de mercado eficiente, o melhor caso a ser considerado para o preço previsto é o valor do preço real no tempo anterior.

Quando $S = 2$, as acurácias variam entre 0,51 e 0,70, de acordo com a **Tabela 7**, exceto para o ativo RRRP3, cuja acurácia foi igual a 0,93. Para os demais casos, as acurácias ficaram em torno de 0,5, variando entre 0,39 e 0,59, com exceção do ativo RRRP3. Suas acurácias variam entre 0,88 e 0,93.

Realizamos o teste de hipótese (170) para cada caso, e, como o tamanho das amostras é grande, consideramos a hipótese de normalidade. Ao efetuar o teste z , o p -valor encontrado, para a grande maioria dos casos foi menor do que 0,05. A **Tabela 3** apresenta, para cada valor de S , a quantidade de ativos que apresentou p -valor maior do que 0,05. Observamos que, na maioria dos casos, os p -valores são menores do que 0,05. Desse modo, na maior parte dos casos, rejeitamos a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5. Isto é, existem evidências estatísticas, com nível de significância de 5%, de que as acurácias são diferentes de 0,5. Destacamos, para $S = 3$ e $S = 5$, que 20 ativos (23% dos ativos) apresentaram p -valor maior que 0,05. E para $S = 4$, encontramos 44 ativos (51% dos ativos) com p -valor maior do que 0,05. Para essas ações, falhamos em rejeitar a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5, ou seja, não existem evidências estatísticas suficientes, com nível de significância de 5%, para garantir a rejeição da afirmativa de que as acurácias são diferentes de 0,5.

Tabela 3 – Quantidade n de p -valores maiores que 0,05 no teste de hipóteses.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	0	20	44	20	12	5	2	1	1

Consideramos, também, a distância euclidiana entre os módulos dos retornos previstos obtidos a partir do modelo baseado em osciladores harmônicos e os módulos dos retornos reais, e comparamos com a distância euclidiana entre os módulos dos retornos previstos pelo modelo baseado em médias móveis e os módulos dos retornos reais. A primeira distância foi menor do que a segunda para todos os ativos, quando consideramos os valores de S entre 6 e 10. Nos demais casos, isso ocorreu para a maioria dos ativos. No caso $S = 1$, excetuaram-se os ativos RRRP3 e PETZ3. Quando consideramos $S = 2$, a primeira distância foi menor do que a segunda para 54 dos 87 ativos considerados (62% dos ativos). Já para $S = 3$, isso ocorreu para 75 dos 87 ativos considerados (86% dos ativos). No caso $S = 4$, excetuaram-se os ativos COGN3, MGLU3 e RAIZ4, e, para $S = 5$, isso não ocorreu apenas para o ativo RAIZ4. Portanto, para a grande maioria dos casos, os módulos dos retornos previstos obtidos a partir do modelo baseado em osciladores estão mais próximos dos módulos dos retornos reais do que os módulos dos retornos previstos pelo modelo baseado em médias móveis, considerando-se a distância euclidiana. Assim, o modelo baseado em osciladores apresentou uma capacidade de previsão maior do que o modelo baseado em médias móveis.

6 Considerações Finais

Um modelo para a dinâmica de preços de ativos financeiros inspirado no sistema físico composto por osciladores harmônicos acoplados foi proposto. Escolhemos os desvios dos preços (preços tratados) para serem as variáveis do modelo, calculados como diferenças logarítmicas entre preços de ativos e preços de referência, obtidos a partir de médias móveis. O amortecimento das oscilações do sistema está associado ao fato dos efeitos de choques externos sobre o sistema econômico cessarem, o que caracteriza estacionariedade em séries temporais. A produção e rompimento de bolhas estão associados à inércia, que pode ser um elemento de não estacionariedade das séries temporais. As forças restauradoras podem estar relacionadas à tendência de um ativo flutuar em torno de um valor determinado por seus fundamentos, o que é chamado de reversão à média na literatura de séries temporais.

Discretizamos as equações que regem a evolução temporal dos osciladores, e obtivemos um modelo VAR de segunda ordem. O modelo foi aplicado a 65 ações que compuseram o índice Ibovespa em algum momento do período compreendido entre 17/12/2004 e 29/05/2020, o que totaliza 4031 pontos em cada série. As séries de desvio de preço mostraram-se estacionárias pelo teste de Dickey-Fuller, e a aplicação de tais séries no modelo resultaram em resíduos não autocorrelacionados, o que foi verificado através do teste de Breusch-Godfrey. Desse modo, as séries investigadas caracterizam satisfatoriamente tal modelo VAR de segunda ordem.

Buscando relacionar os coeficientes do modelo proposto com os do sistema que representa a dinâmica do oscilador harmônico, consideramos os coeficientes do VAR que são estatisticamente significativos, e escolhemos todas as massas como unitárias. Obtivemos constantes elásticas da mola e coeficientes de atrito dos amortecedores positivos e negativos; em um sistema físico composto por massas, molas e amortecedores, não esperamos encontrar tais valores negativos. Porém, para um sistema econômico, tais coeficientes negativos conectando dois ativos podem estar relacionados a comportamentos opostos, em que a subida de uma ação acompanha a descida de outra. Todas as constantes elásticas da mola k_i , $i = 1, \dots, n$, são positivas, o que é esperado no sistema físico, e ressalta a importância da regressão à média nas séries analisadas.

Analisamos a distribuição empírica das constantes elásticas da mola, dos coeficientes de atrito dos amortecedores e das quantidades análogas às energias. Pelo teste de adequação, a lei de potência não é uma hipótese plausível apenas para os dados $k_{i,j}$. Nas demais distribuições avaliadas, fizemos um ajuste linear nos pontos da cauda. A cauda da distribuição empírica das constantes $k_{i,j}$ e dos coeficientes $\gamma_{i,j}$ apresentaram-se mais pesadas do que a distribuição normal. Como esses coeficientes descrevem as interações entre as ações, tais caudas pesadas indicam uma variação significativa na força da conexão entre os ativos. As quantidades análogas às três energias também apresentaram cauda pesada na distribuição

empírica, que podem estar associadas à grande variação na importância das influências externas que impactam o mercado e como os agentes reagem a tais fenômenos.

Investigamos a existência de correlação linear entre os parâmetros do oscilador harmônico acoplado, a liquidez e a média dos volumes das ações. Verificamos que há uma correlação linear moderada e estatisticamente significativa entre as constantes elásticas k_i e os coeficientes de atrito γ_i . A média dos volumes das ações apresentou uma correlação linear fraca com as constantes k_i . O mesmo ocorreu entre a média dos volumes com os coeficientes γ_i , e também entre as constantes $k_{i,j}$ e os coeficientes $\gamma_{i,j}$, sendo que estes dois casos apresentaram uma correlação linear estatisticamente significativa. Uma correlação linear muito fraca foi encontrada entre a liquidez das ações e as constantes k_i , assim como entre a liquidez e os coeficientes γ_i .

O expoente de Hurst encontrado para as quantidades análogas às energias cinética e potencial indica um alto nível de anti-persistência, comportamento verificado no gráfico da evolução temporal de ambas as quantidades, isto é, a tendência de retornarem constantemente para uma região próxima de zero. Acerca do expoente de Hurst generalizado, a largura do espectro de singularidade nos dois casos apresenta uma diminuição significativa, o que indica a presença de correlações não-lineares em suas séries.

O modelo proposto foi utilizado para a previsão de tendência de preços de ativos financeiros, sendo aplicado a preços de fechamento em candles de 1 minuto das 87 ações que compuseram o índice Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024, período compreendido entre 02/01/2024 e 03/05/2024. Nos propusemos a verificar se tal preditor é estatisticamente diferente de um preditor aleatório semelhante ao ligado ao lançamento de uma moeda justa. O teste de hipóteses rejeitou a hipótese nula de que as acurácias das previsões são iguais a 0,5, com nível de significância de 5%, para 85 das 87 ações consideradas.

O modelo baseado em osciladores também foi utilizado para a previsão do módulo do retorno. Para avaliar a qualidade de tais previsões, as comparamos a previsões a partir de um modelo mais simples, baseado em médias móveis. Por meio dessa comparação, pudemos definir acurácias para as previsões realizadas pelo modelo baseado em osciladores. Variando o tamanho do intervalo da janela móvel entre $S = 1$ e $S = 10$, o teste de hipóteses, para cada ativo, rejeitou a hipótese nula de que as acurácias são iguais a 0,5, com nível de significância de 5%. Também calculamos a distância euclidiana entre os módulos dos retornos dos preços reais e os previstos por cada um dos modelos, para cada ação. Na grande maioria das vezes, o modelo baseado em osciladores apresentou distância menor, o que indica maior capacidade de previsão.

Referências

ALFI, V. et al. Minimal agent based model for financial markets I: Origin and self-organization of stylized facts. **The European Physical Journal B**, Springer Science and Business Media LLC, v. 67, n. 3, p. 385–397, jan. 2009. Citado na página 15.

ALFI, V. et al. Minimal agent based model for financial markets II: Statistical properties of the linear and multiplicative dynamics. **The European Physical Journal B**, Springer Science and Business Media LLC, v. 67, n. 3, p. 399–417, jan. 2009. Citado na página 15.

ATAULLAH, A.; TIPPETT, M. Equity prices as a simple harmonic oscillator with noise. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier BV, v. 382, n. 2, p. 557–564, aug 2007. Citado na página 16.

AZIZAN, F. L.; RAHIM, N. F.; ZULPAKAR, N. A. N. Predicting market trends: A stock prices forecasting with artificial neural network. **Applied Mathematics and Computational Intelligence (AMCI)**, v. 14, n. 1, p. 96–119, fev. 2025. ISSN 2289-1315. Citado na página 16.

B3. **Ibovespa B3**. 2022. Disponível em: <www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm>. Acesso em: 27/09/2022. Citado na página 41.

BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, Societe Mathematique de France, v. 17, p. 21–86, 1900. ISSN 1873-2151. Reimpresso em Cootner, Paul H. (ed.) *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge: The MIT Press, 1964. Citado na página 15.

BAILEY, R. E. **The economics of financial markets**. New York: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 41.

BLACK, F. Toward a fully automated stock exchange. **Financial Analysts Journal**, Informa UK Limited, v. 27, n. 4, p. 28–35+44, jul. 1971. Citado na página 62.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Citado na página 15.

BONANNO, G.; LILLO, F.; MANTEGNA, R. N. Levels of complexity in financial markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 299, p. 16, 2001. Citado na página 15.

BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M. **Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 41.

BREUSCH, T. S. Testing for autocorrelation in dynamic linear models. **Australian Economic Papers**, Wiley, v. 17, n. 31, p. 334–355, dez. 1978. Citado na página 53.

BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. **Introduction to time series and forecasting**. New York: Springer, 2002. ISBN 0-387-95351-5. Citado na página 25.

- CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. **The econometrics of financial markets**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1997. Citado na página 16.
- CIOTTI, M. et al. The covid-19 pandemic. **Critical Reviews in Clinical Laboratory Sciences**, v. 57, n. 6, p. 365–388, jul. 2020. ISSN 1549-781X. Citado na página 68.
- CLAUSET, A.; SHALIZI, C. R.; NEWMAN, M. E. J. Power-law distributions in empirical data. **SIAM Review**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), v. 51, n. 4, p. 661–703, nov. 2009. ISSN 1095-7200. Citado 3 vezes nas páginas 34, 36 e 54.
- CLAUSET, A.; YOUNG, M.; GLEDITSCH, K. S. On the frequency of severe terrorist events. **Journal of Conflict Resolution**, v. 51, n. 1, p. 58–87, fev. 2007. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 36.
- COUTO, J. M.; DANTAS, J. A. M.; FREITAS, C. E. A crise financeira internacional e o mercado de trabalho nos estados unidos: lições para o brasil. **A Economia em Revista**, v. 21, n. 2, p. 61–76, jul. 2013. Citado na página 68.
- CUNHA, M. C. C. **Métodos numéricos**. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000. ISBN 9788526808775. Citado na página 44.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, n. 366, p. 427–431, jun. 1979. Citado na página 28.
- ENDERS, W. **Applied econometric time series**. 4th. ed. [S.l.]: Wiley, 2015. ISBN 978-1-118-80856-6. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 21, 24, 25 e 28.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **The Journal of Finance**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 383–417, maio 1970. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 42.
- FRISCH, R. Propagation problems and impulse problems in dynamic economics. **Economic Essays in Honour of Gustav Cassel**, Oxford University Press (OUP), p. 171–205, 1933. Citado na página 16.
- GARCIA, M. M. et al. Forecast model for financial time series: An approach based on harmonic oscillators. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier BV, v. 549, n. 124365, p. 1–9, jul. 2020. Citado na página 17.
- GILLESPIE, C. S. Fitting heavy tailed distributions: The powerlaw package. **Journal of Statistical Software**, Foundation for Open Access Statistic, v. 64, n. 2, p. 1–16, fev. 2015. ISSN 1548-7660. Citado na página 54.
- GODFREY, L. G. Testing for higher order serial correlation in regression equations when the regressors include lagged dependent variables. **Econometrica**, JSTOR, v. 46, n. 6, p. 1303–1310, nov 1978. Citado na página 53.
- GRANGER, C. W. J.; NEWBOLD, P. Spurious regressions in econometrics. **Journal of Econometrics**, v. 2, n. 2, p. 111–120, jul. 1974. ISSN 0304-4076. Citado na página 16.
- HAMILTON, J. D. **Time series analysis**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994. ISBN 0-691-04289-6. Citado na página 24.

- HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 116, n. 1, p. 770–799, jan. 1951. ISSN 2690-4071. Citado na página 37.
- ITô, K. Stochastic integral. **Proceedings of the Imperial Academy**, v. 20, n. 8, p. 519–524, 1944. ISSN 0386-2194. Citado na página 15.
- KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier BV, v. 316, n. 1–4, p. 87–114, dez. 2002. ISSN 0378-4371. Citado 3 vezes nas páginas 37, 39 e 40.
- KULESZA, S.; BELEJ, M. Local real estate markets in poland as a network of damped harmonic oscillators. **Acta Physica Polonica A**, Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, v. 127, n. 3–A, p. A–99–A–102, mar. 2015. Citado na página 16.
- LENDASSE, A. et al. Non-linear financial time series forecasting - application to the bel 20 stock market index. **European Journal of Economic and Social Systems**, EDP Sciences, v. 14, n. 1, p. 81–91, 2000. ISSN 1292-8909. Citado na página 15.
- MALLIARIS, A. G. Wiener process. In: _____. **Time Series and Statistics**. London: Palgrave Macmillan, London, 1990. p. 316–318. ISBN 9781349208654. Citado na página 15.
- MALLIKARJUNA, M.; RAO, R. P. Evaluation of forecasting methods from selected stock market returns. **Financial Innovation**, v. 5, n. 40, dez. 2019. ISSN 2199-4730. Citado na página 15.
- MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 158 p. ISBN 0521620082. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 41.
- MONDAL, P.; SHIT, L.; GOSWAMI, S. Study of effectiveness of time series modeling (arima) in forecasting stock prices. **International Journal of Computer Science, Engineering and Applications**, Academy and Industry Research Collaboration Center (AIRCC), v. 4, n. 2, p. 13–29, abr. 2014. ISSN 2230-9616. Citado na página 15.
- MOORE, D. S.; NOTZ, W. I. **The basic practice of statistics**. 9. ed. New York: Macmillan International Higher Education, 2021. ISBN 978-1-319-38369-5. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 63.
- MUSHUNJE, L. Deduction of market prices for futures derivatives from projectile physics with effects of the simple harmonic oscillations on equilibrium price positions. **Chinese Business Review**, David Publishing Company, v. 18, n. 2, p. 38–47, abr. 2019. Citado na página 17.
- NOVA carteira do Ibovespa B3 de janeiro a abril tem 87 papéis. 2024. Acesso em 17/09/2024. Disponível em: <www.b3.com.br/pt_br/noticias/nova-carreira-do-ibovespa-b3-de-janeiro-a-abril-tem-87-papeis.htm>. Citado na página 88.
- OLIVEIRA, M. R. A. d.; MAGALHÃES, A. R. B. d.; RAAD, L. V. V. Modelo para caracterização de séries de preços baseado em osciladores harmônicos acoplados. **OBSERVATÓRIO DE LA ECONOMÍA LATINOAMERICANA**, v. 22, n. 3, p. 01–10, 2024. ISSN 1696-8352. Citado na página 45.
- PENG, C.-K. et al. Mosaic organization of dna nucleotides. **Physical Review E**, v. 49, n. 2, p. 1685–1689, fev. 1994. Citado na página 37.

PFAFF, B. Var, svar and svec models: Implementation within R package vars. **Journal of Statistical Software**, v. 27, n. 4, jul. 2008. Disponível em: <www.jstatsoft.org/v27/i04>. Citado na página 53.

R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria, 2021. Disponível em: <www.R-project.org>. Citado na página 53.

RAMOS-REQUENA, J. P.; TRINIDAD-SEGOVIA, J. E.; SÁNCHEZ-GRANERO, M. A. Introducing hurst exponent in pair trading. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier BV, v. 488, p. 39–45, dez. 2017. ISSN 0378-4371. Citado na página 37.

REINHART, C. M.; ROGOFF, K. S. **Is the 2007 U.S. sub-prime financial crisis so different? An international historical comparison**. [S.l.], 2008. Citado na página 68.

RESENDE, C. C. d. **Modelo matemático-computacional para previsão de tendência de preços: Abordagem com múltiplos ativos buscando oportunidades em desvios da hipótese de mercado eficiente**. Tese (phdthesis) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Belo Horizonte, fev. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.

RESENDE, C. C. de et al. Investigating market efficiency through a forecasting model based on differential equations. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier BV, v. 474, p. 199–212, maio 2017. Citado 3 vezes nas páginas 43, 50 e 53.

SAMANIDOU, E. et al. Agent-based models of financial markets. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 70, n. 3, p. 409–450, fev. 2007. Citado na página 15.

SANDOVAL, L.; FRANCA, I. D. P. Correlation of financial markets in times of crisis. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier BV, v. 391, n. 1-2, p. 187–208, jan. 2012. Citado na página 15.

SORNETTE, D. **Why stock markets crash: critical events in complex financial systems**. New Jersey: Princeton University Press, 2003. 456 p. ISBN 0-691-09630-9. Citado na página 41.

SUN, J.; FREES, E. W.; ROSENBERG, M. A. Heavy-tailed longitudinal data modeling using copulas. **Insurance: Mathematics and Economics**, Elsevier BV, v. 42, n. 2, p. 817–830, abr. 2008. ISSN 0167-6687. Citado na página 34.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2014. Tradução da 5ª edição norte-americana. ISBN 978-85-221-2627-9. Citado na página 19.

TRAPLETTI, A.; HORNIK, K. **tseries: Time series analysis and computational finance**. [S.l.], 2022. R package version 0.10-51. Disponível em: <CRAN.R-project.org/package=tseries>. Citado na página 53.

TSAY, R. S. **Analysis of financial time series**. 3rd. ed. [S.l.]: Wiley, 2010. 720 p. ISBN 9780470414354. Citado na página 16.

WIENER, N. Differential-space. **Journal of Mathematics and Physics**, Wiley, v. 2, n. 1–4, p. 131–174, out. 1923. ISSN 0097-1421. Citado na página 15.

WILLIAMSON, R. C.; DOWNS, T. Probabilistic arithmetic. i. numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. **International Journal of Approximate Reasoning**, Elsevier BV, v. 4, n. 2, p. 89–158, mar. 1990. ISSN 0888-613X. Citado na página [40](#).

XAVIER, P. O. C.; ATMAN, A. P. F.; MAGALHÃES, A. R. B. de. Equation-based model for the stock market. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 3, p. 032305–1–032305–8, set. 2017. Citado na página [16](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Número de dias sem preço de fechamento

A [Tabela 4](#) apresenta, no intervalo considerado, o número de dias em que não houve preço de fechamento para cada ação.

Tabela 4 – Número de dias sem preço de fechamento para cada ação.

BRIV4	ALPA4	BAZA3	ABEV3	BOBR4	BBDC3	BBDC4	BRAP3	BRAP4
1246	260	737	223	850	213	213	286	213
BBAS3	BRKM5	CLSC4	CMIG3	CMIG4	CESP3	CESP5	COCE5	CGAS5
213	213	240	213	213	474	1927	220	218
CPL3	CPL6	CTNM4	ELET3	ELET6	EMAE4	EMBR3	EGIE3	ESTR4
305	213	551	213	213	873	213	213	899
ETER3	FESA4	GGBR3	GGBR4	GOAU3	GOAU4	GUAR3	INEP4	ITSA3
215	224	213	213	240	213	245	247	468
ITSA4	ITUB3	ITUB4	KLBN4	LIGT3	LAME3	LAME4	MGEL4	POMO4
213	310	213	213	213	439	213	567	213
OIBR3	OIBR4	PETR3	PETR4	RAPT4	RSID3	SBSP3	SAPR4	CSNA3
561	213	213	213	214	347	213	272	213
TASA4	TEKA4	TELB4	VIVT3	TIMS3	TRPL4	UNIP6	USIM3	USIM5
216	972	225	214	213	213	213	227	213
VALE3	WHRL4							
213	610							

APÊNDICE B – Média dos volumes das ações

A média dos volumes de cada ação, no intervalo de tempo considerado, é apresentada na [Tabela 5](#). O volume das ações é dado pelo número de ações negociadas em cada dia.

Tabela 5 – Média dos volumes de cada ação.

BRIV4	ALPA4	BAZA3	ABEV3	BOBR4	BBDC3
89781.20	350199.26	2245654.06	17939423.21	1156404.62	4055101.54
BBDC4	BRAP3	BRAP4	BBAS3	BRKM5	CLSC4
4055101.54	305263.58	305263.58	2447707.41	2758479.37	121216.27
CMIG3	CMIG4	CESP3	CESP5	COCE5	CGAS5
26702651.43	26702651.43	33780466.40	33780466.40	24408789.70	2240471.69
CPLE3	CPLE6	CTNM4	ELET3	ELET6	EMAE4
46075469.86	46075469.86	1076473.93	96550660.36	96550660.36	6404565.51
EMBR3	EGIE3	ESTR4	ETER3	FESA4	GGBR3
730783.09	16576840.54	13180.85	95105.53	93129.48	1398954.69
GGBR4	GOAU3	GOAU4	GUAR3	INEP4	ITSA3
1398954.69	519276.49	519276.49	93064.05	2443278.67	5419084.41
ITSA4	ITUB3	ITUB4	KLBN4	LIGT3	LAME3
5419084.41	4712082.51	4712082.51	2484525.89	22938105.94	12829014.12
LAME4	MGEL4	POMO4	OIBR3	OIBR4	PETR3
12829014.12	12592.01	557952.55	84544793.24	84544793.24	10375441.54
PETR4	RAPT4	RSID3	SBSP3	SAPR4	CSNA3
10375441.54	247337.80	174936.20	4854785.80	458025.57	1087414.77
TASA4	TEKA4	TELB4	VIVT3	TIMS3	TRPL4
94341.60	10982348.73	286046690.58	16153367.56	261828315.01	25401243.81
UNIP6	USIM3	USIM5	VALE3	WHRL4	
528657.61	808559.65	808559.65	4567674.65	1482887.48	

APÊNDICE C – Ações utilizadas no modelo de previsão

Apresentamos, no [Quadro 2](#), as ações utilizadas na aplicação do modelo de previsão. Consideramos as 87 ações que compuseram o índice Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024 (02/01/2024 a 03/05/2024).

Quadro 2 – Ações do Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2024, consideradas na aplicação do modelo de previsão.

Código	Nome do pregão	Código	Nome do pregão	Código	Nome do pregão
RRRP3	3R PETROLEUM	ELET3	ELETROBRAS	MULT3	MULTIPLAN
ALOS3	ALLOS	ELET6	ELETROBRAS	PCAR3	PACUCAR-CBD
ALPA4	ALPARGATAS	EMBR3	EMBRAER	PETR3	PETROBRAS
ABEV3	AMBEV S/A	ENGI11	ENERGISA	PETR4	PETROBRAS
ARZZ3	AREZZO CO	ENEV3	ENEVA	RECV3	PETRORECSA
ASAI3	ASSAI	EGIE3	ENGIE BRASIL	PRIO3	PETRORIO
AZUL4	AZUL	EQTL3	EQUATORIAL	PETZ3	PETZ
B3SA3	B3	EZTC3	EZTEC	RADL3	RAIADROGASIL
BBSE3	BBSEGURIDADE	FLRY3	FLEURY	RAIZ4	RAIZEN
BBDC3	BRADESCO	GGBR4	GERDAU	RDOR3	REDE D OR
BBDC4	BRADESCO	GOAU4	GERDAU MET	RAIL3	RUMO S.A.
BRAP4	BRADESPAR	GOLL4	GOL	SBSP3	SABESP
BBAS3	BRASIL	NTCO3	GRUPO NATURA	SANB11	SANTANDER BR
BRKM5	BRASKEM	SOMA3	GRUPO SOMA	SMT03	SAO MARTINHO
BRFS3	BRF SA	HAPV3	HAPVIDA	CSNA3	SID NACIONAL
BPAC11	BTGP BANCO	HYPE3	HYPERA	SLCE3	SLC AGRICOLA
CRFB3	CARREFOUR BR	IGTI11	IGUATEMI S.A	SUZB3	SUZANO S.A.
BHIA3	CASAS BAHIA	IRBR3	IRBBRASIL RE	TAE11	TAESA
CCRO3	CCR SA	ITSA4	ITAUSA	VIVT3	TELEF BRASIL
CMIG4	CEMIG	ITUB4	ITAUUNIBANCO	TIMS3	TIM
CIEL3	CIELO	JBSS3	JBS	TOTS3	TOTVS
COGN3	COGNA ON	KLBN11	KLABIN S/A	TRPL4	TRAN PAULIST
CPLE6	COPEL	RENT3	LOCALIZA	UGPA3	ULTRAPAR
CSAN3	COSAN	LWSA3	LOCAWEB	USIM5	USIMINAS
CPFE3	CPFL ENERGIA	LREN3	LOJAS RENNER	VALE3	VALE
CMIN3	CSNMINERACAO	MGLU3	MAGAZ LUIZA	VAMO3	VAMOS
CVCB3	CVC BRASIL	MRFG3	MARFRIG	VBBR3	VIBRA
CYRE3	CYRELA REALT	BEEF3	MINERVA	WEGE3	WEG
DXCO3	DEXCO	MRVE3	MRV	YDUQ3	YDUQS PART

Fonte: [Nova... \(2024\)](#).

APÊNDICE D – Acurácias da previsão do módulo do retorno

Neste capítulo, exibimos as tabelas com as acurácias dos módulos de retorno previstos através da janela móvel de tempo, com o tamanho do intervalo da janela móvel variando entre $S = 1$ e $S = 10$.

Tabela 6 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 1$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.94	0.95	0.98	0.99	0.82	0.97	0.95	0.99
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.96	0.99	0.98	0.97	0.91	0.92	0.96	0.91
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.97	0.97	0.99	0.99	0.998	0.998	0.995	0.98
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.93	0.99	0.996	0.93	0.99	0.90	0.89	0.92
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.88	0.99	0.93	0.94	0.95	0.99	0.96	0.99
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.98	0.95	0.99	0.997	0.89	0.95	0.85	0.995
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.95	0.95	0.96	0.85	0.99	0.96	0.998	0.99
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.99	0.98	0.95	0.99	0.90	0.90	0.91	0.87
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.98	0.95	0.998	0.90	0.96	0.83	0.95	0.91
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.96	0.96	0.86	0.97	0.89	0.99	0.91	0.96
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.94	0.98	0.82	0.99	0.94	0.92	0.93	

Tabela 7 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 2$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.93	0.56	0.60	0.63	0.52	0.58	0.58	0.60
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.58	0.62	0.60	0.58	0.54	0.55	0.57	0.54
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.59	0.59	0.61	0.62	0.68	0.69	0.64	0.57
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.56	0.65	0.67	0.55	0.63	0.53	0.53	0.54
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.53	0.60	0.56	0.55	0.57	0.60	0.58	0.63
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.65	0.58	0.61	0.65	0.54	0.57	0.53	0.65
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.56	0.56	0.58	0.52	0.63	0.57	0.70	0.61
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.66	0.61	0.58	0.66	0.52	0.53	0.55	0.52
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.63	0.56	0.69	0.54	0.57	0.51	0.57	0.54
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.58	0.59	0.52	0.58	0.54	0.62	0.54	0.59
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.56	0.62	0.51	0.62	0.56	0.55	0.56	

Tabela 8 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 3$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.93	0.51	0.52	0.52	0.50	0.51	0.52	0.52
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.52	0.52	0.51	0.51	0.50	0.52	0.52	0.51
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.52	0.52	0.52	0.52	0.54	0.56	0.53	0.50
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.51	0.54	0.54	0.51	0.53	0.51	0.50	0.50
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.50	0.52	0.51	0.50	0.52	0.52	0.52	0.54
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.54	0.52	0.52	0.53	0.51	0.51	0.50	0.54
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.51	0.51	0.51	0.50	0.52	0.52	0.56	0.52
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.54	0.52	0.52	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.53	0.52	0.56	0.51	0.51	0.50	0.51	0.51
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.53	0.52	0.50	0.52	0.51	0.53	0.50	0.52
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.51	0.53	0.49	0.52	0.51	0.51	0.51	

Tabela 9 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 4$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.92	0.50	0.49	0.47	0.51	0.49	0.51	0.48
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.50	0.48	0.48	0.50	0.50	0.51	0.51	0.50
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.50	0.49	0.49	0.48	0.49	0.49	0.47	0.48
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.50	0.49	0.49	0.51	0.49	0.51	0.50	0.50
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.51	0.49	0.50	0.50	0.50	0.48	0.51	0.49
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.49	0.51	0.48	0.47	0.51	0.51	0.50	0.48
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.50	0.50	0.50	0.51	0.47	0.50	0.50	0.48
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.48	0.49	0.50	0.49	0.50	0.50	0.50	0.51
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.48	0.50	0.49	0.51	0.50	0.51	0.50	0.50
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.51	0.50	0.50	0.50	0.51	0.49	0.50	0.51
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.50	0.49	0.49	0.48	0.51	0.51	0.51	

Tabela 10 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 5$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.92	0.50	0.48	0.45	0.52	0.50	0.51	0.47
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.50	0.46	0.47	0.50	0.51	0.51	0.51	0.51
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.49	0.49	0.47	0.46	0.45	0.46	0.44	0.48
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.51	0.46	0.45	0.51	0.47	0.52	0.51	0.50
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.52	0.47	0.50	0.51	0.51	0.47	0.50	0.47
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.47	0.51	0.47	0.44	0.52	0.51	0.51	0.46
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.50	0.49	0.50	0.52	0.45	0.51	0.46	0.47
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.45	0.48	0.51	0.47	0.51	0.51	0.51	0.52
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.46	0.51	0.45	0.51	0.50	0.52	0.50	0.51
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.50	0.50	0.52	0.50	0.52	0.48	0.50	0.50
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.51	0.48	0.50	0.47	0.51	0.51	0.51	

Tabela 11 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 6$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.91	0.51	0.48	0.44	0.53	0.50	0.51	0.46
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.50	0.45	0.46	0.49	0.52	0.52	0.52	0.53
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.50	0.50	0.48	0.46	0.43	0.43	0.42	0.49
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.52	0.45	0.43	0.52	0.46	0.53	0.53	0.51
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.53	0.47	0.51	0.52	0.51	0.47	0.51	0.46
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.45	0.52	0.46	0.43	0.53	0.52	0.52	0.44
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.51	0.50	0.51	0.53	0.44	0.51	0.44	0.47
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.43	0.48	0.51	0.45	0.52	0.52	0.52	0.54
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.45	0.51	0.43	0.52	0.51	0.53	0.50	0.52
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.50	0.50	0.53	0.50	0.53	0.47	0.51	0.51
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.52	0.47	0.51	0.46	0.52	0.52	0.52	

Tabela 12 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 7$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.90	0.51	0.48	0.43	0.54	0.51	0.52	0.46
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.51	0.45	0.46	0.50	0.53	0.53	0.52	0.53
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.50	0.50	0.48	0.45	0.41	0.42	0.42	0.49
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.52	0.43	0.42	0.53	0.45	0.54	0.53	0.52
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.54	0.47	0.52	0.52	0.52	0.47	0.52	0.46
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.45	0.53	0.46	0.41	0.54	0.53	0.53	0.44
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.52	0.51	0.51	0.54	0.43	0.52	0.42	0.47
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.42	0.48	0.52	0.44	0.53	0.53	0.53	0.55
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.44	0.52	0.42	0.54	0.51	0.54	0.51	0.53
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.51	0.50	0.54	0.51	0.54	0.48	0.52	0.52
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.53	0.48	0.53	0.46	0.53	0.53	0.53	

Tabela 13 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 8$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.90	0.52	0.49	0.43	0.56	0.52	0.53	0.47
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.52	0.45	0.47	0.51	0.54	0.54	0.53	0.55
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.51	0.51	0.48	0.45	0.40	0.41	0.42	0.49
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.53	0.43	0.40	0.54	0.46	0.55	0.55	0.53
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.55	0.48	0.53	0.54	0.52	0.47	0.52	0.46
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.44	0.53	0.46	0.41	0.55	0.53	0.54	0.43
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.53	0.52	0.52	0.56	0.43	0.53	0.41	0.48
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.41	0.48	0.53	0.43	0.54	0.54	0.54	0.56
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.44	0.53	0.40	0.55	0.52	0.56	0.51	0.54
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.52	0.50	0.55	0.51	0.55	0.48	0.54	0.52
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.53	0.48	0.54	0.47	0.54	0.54	0.54	

Tabela 14 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 9$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.89	0.53	0.49	0.43	0.57	0.52	0.54	0.47
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.53	0.45	0.47	0.52	0.55	0.55	0.54	0.56
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.52	0.51	0.48	0.45	0.39	0.40	0.42	0.50
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.54	0.42	0.40	0.56	0.46	0.57	0.56	0.54
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.57	0.48	0.54	0.55	0.54	0.48	0.53	0.46
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.44	0.54	0.47	0.40	0.56	0.54	0.55	0.43
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.54	0.52	0.53	0.57	0.43	0.54	0.40	0.48
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.42	0.48	0.54	0.43	0.56	0.55	0.55	0.57
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.44	0.54	0.39	0.56	0.53	0.57	0.52	0.55
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.52	0.51	0.57	0.52	0.56	0.49	0.54	0.53
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.54	0.48	0.55	0.47	0.55	0.55	0.55	

Tabela 15 – Acurácias da previsão do módulo do retorno para $S = 10$.

RRRP3	ALOS3	ALPA4	ABEV3	ARZZ3	ASAI3	AZUL4	B3SA3
0.88	0.54	0.50	0.43	0.58	0.53	0.55	0.48
BBSE3	BBDC3	BBDC4	BRAP4	BBAS3	BRKM5	BRFS3	BPAC11
0.54	0.46	0.47	0.52	0.57	0.56	0.55	0.57
CRFB3	BHIA3	CCRO3	CMIG4	CIEL3	COGN3	CPLE6	CSAN3
0.53	0.52	0.49	0.46	0.39	0.39	0.42	0.51
CPFE3	CMIN3	CVCB3	CYRE3	DXCO3	ELET3	ELET6	EMBR3
0.55	0.43	0.40	0.57	0.46	0.57	0.57	0.55
ENGI11	ENEV3	EGIE3	EQTL3	EZTC3	FLRY3	GGBR4	GOAU4
0.58	0.49	0.55	0.56	0.54	0.48	0.54	0.46
GOLL4	NTCO3	SOMA3	HAPV3	HYPE3	IGTI11	IRBR3	ITSA4
0.43	0.55	0.47	0.40	0.57	0.56	0.57	0.42
ITUB4	JBSS3	KLBN11	RENT3	LWSA3	LREN3	MGLU3	MRFG3
0.55	0.53	0.53	0.58	0.43	0.55	0.40	0.49
BEEF3	MRVE3	MULT3	PCAR3	PETR3	PETR4	RECV3	PRI03
0.42	0.49	0.55	0.43	0.57	0.56	0.56	0.59
PETZ3	RADL3	RAIZ4	RDOR3	RAIL3	SBSP3	SANB11	SMT03
0.44	0.55	0.39	0.57	0.53	0.58	0.53	0.56
CSNA3	SLCE3	SUZB3	TAE11	VIVT3	TIMS3	TOTS3	TRPL4
0.53	0.52	0.58	0.53	0.57	0.49	0.55	0.54
UGPA3	USIM5	VALE3	VAMO3	VBBR3	WEGE3	YDUQ3	
0.56	0.48	0.56	0.47	0.56	0.56	0.56	