



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SÃO JOÃO DEL-REI

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Associação Ampla entre
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
e Universidade Federal de São João Del-Rey

Mateus Clemente de Sousa

ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTO E SÍNTESE DE
CONTROLADORES ROBUSTOS ATRAVÉS DO MÉTODO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL PARA
SISTEMAS DISCRETOS

Belo Horizonte
2018

Mateus Clemente de Sousa

ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTO E SÍNTESE DE
CONTROLADORES ROBUSTOS ATRAVÉS DO MÉTODO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL PARA
SISTEMAS DISCRETOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais e Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.

Linha de Pesquisa: Sistemas de Controle.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves.

Belo Horizonte
2018

S725a Souza, Mateus Clemente de
Análise de estabilidade e desempenho robusto e síntese de controladores robustos através do método evolução diferencial para sistemas discretos. / Mateus Clemente de Souza. – – Belo Horizonte, 2018.
xv, 97 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica em associação ampla com a Universidade Federal de São João Del Rei, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Bibliografia

1. Controle Robusto. 2. Sistemas Discretos. 3. Otimização Matemática. I. Gonçalves, Eduardo Nunes. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título

CDD 621.31

Mateus Clemente de Sousa

ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTO E SÍNTESE DE
CONTROLADORES ROBUSTOS ATRAVÉS DO MÉTODO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL PARA
SISTEMAS DISCRETOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais e Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.

Linha de Pesquisa: Sistemas de Controle.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Erivelton Geraldo Nepomuceno
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza
Universidade Federal de Minas Gerais

DEDICO ESTE TRABALHO À DEUS,
À MINHA FAMÍLIA, PRINCIPAL-
MENTE MEUS PAIS E MINHA NAMO-
RADA, AOS MEUS AMIGOS E PRO-
FESSORES, EM ESPECIAL MEU ORI-
ENTADOR.

Agradecimentos

Agradeço,

À Deus por iluminar meu caminho durante minha vida.

À toda minha família, principalmente meus pais, José Arnaldo de Sousa e Rosângela do Céu Clemente de Sousa, que se fizeram presentes com incentivo, parceria, apoio e confiança. Ao meu irmão Thiago Clemente de Sousa e minha namorada, Nayara Kellen Teixeira Ferreira, pela paciência, incentivo, compreensão e companheirismo.

Ao meu orientador, Eduardo Nunes Gonçalves, pela supervisão durante este trabalho. Agradeço pela oportunidade de aprender com ele, todos ensinamentos passados, sem ele, este trabalho não seria possível.

A todos os meus amigos que estiveram comigo nessa trajetória.

Ao CEFET-MG, FAPEMIG e a CAPES pelos apoios financeiros, que deram suporte para a realização desta dissertação.

Enfim, agradeço a todos que torceram para a concretização deste sonho.

Quanto a você, porém, permaneça nas coisas que aprendeu e das quais tem convicção, pois você sabe de quem o aprendeu.

2 Timóteo 3:14

Resumo

A presente dissertação expõe metodologias de análise e síntese para sistemas de controle robusto, sendo estes sistemas, discretos, incertos, lineares e invariantes no tempo. São considerados modelos politópicos para representar os sistemas incertos. Formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares com propósito de análise e síntese de sistemas de controle robusto são populares, porém, podem gerar resultados conservadores ou fracassar na obtenção dos resultados, principalmente para sistemas de ordem mais elevada e/ou com maior número de vértices do politopo. Em trabalho passado foi demonstrado que a combinação de uma formulação de análise baseada em desigualdades matriciais lineares com uma técnica de divisão de politopos, consegue-se definir se um sistema politópico é robustamente estável ou não. Também, é possível calcular os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ com precisão desejada na análise de desempenho robusto. No entanto, esta metodologia apresenta a desvantagem de um crescimento elevado do custo computacional com a complexidade do sistema. Trabalhos recentes apresentaram metodologias de análise e síntese de sistemas de controle robusto baseado no método evolução diferencial para sistemas em tempo contínuo. Nesta dissertação foi utilizado tal procedimento para sistemas discretos. Um importante aprimoramento proposto está relacionado com a forma de criação da população inicial na metodologia de análise que aumenta a confiabilidade da mesma. São apresentados os resultados de teste exaustivos para averiguar a confiabilidade das metodologias de análise robusta. Os principais objetivos dessa dissertação são adaptar, aprimorar e avaliar o procedimento iterativo de síntese robusta baseado no método evolução diferencial para sistemas discretos. São apresentados três exemplos ilustrativos para comprovação da eficiência de procedimento de síntese.

Palavras-chave: Controle robusto, sistema politópico, método evolução diferencial, sistemas discretos.

Abstract

The present dissertation exposes methodologies of analysis and synthesis for robust control systems, being these systems, discrete, uncertain, linear and time invariant. It is considered polytopic models to represent the uncertain systems. Formulations based on linear matrix inequalities with the purpose of analysis and synthesis of robust control systems are popular, however, they can generate conservative results or fail to obtain the results, especially for systems of higher order and/or with greater number of polytope vertices. In previous works it has been shown that combining an analysis formulation based on linear matrix inequalities with a polytope subdivision technique, it is possible to define whether a polytopic system is robustly stable or not. It is also possible to compute the guaranteed $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ costs with the desired precision in robust performance analysis. However, this methodology presents the disadvantage of a high computational cost growth with the complexity of the system. Recent works have presented methodologies for the analysis and synthesis of robust control systems based on the differential evolution method for continuous time systems. In this dissertation we apply this procedure for discrete systems. An important proposed improvement is related to the way of creation of the initial population in the methodology of analysis that increases its reliability. Comprehensive test results are presented to ascertain the reliability of the robust analysis methodologies. The main objectives of this dissertation are to adapt, improve and evaluate the iterative procedure of robust synthesis based on the differential evolution method for discrete systems. Three illustrative examples are provided to prove the efficiency of the synthesis procedure.

Key-words: Robust control, polytopic system, differential evolution method, discrete systems.

Lista de Figuras

2.1	Fluxograma do método DE.	15
2.2	Mutação e cruzamento no espaço de parâmetros bidimensional.	17
2.3	Operação de cruzamento para 7 parâmetros.	18
3.1	Simulação dos operadores mutação, cruzamento e do tratamento de restrição para um $\eta = 2$	25
3.2	Exemplo de uma superfície de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$	30
3.3	Exemplo de curvas de nível de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$	30
3.4	Exemplo 2 de uma superfície de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$	31
3.5	Exemplo 2 de curvas de nível de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$	32
4.1	Superfície de $\ T_{zw}(s, \chi)\ _\infty$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 4$ e $\eta = 4$	44
4.2	Curva de nível de $\ T_{zw}(s, \chi)\ _\infty$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 4$ e $\eta = 4$	45
4.3	Perfil de $\ T_{zw}(s, \chi)\ _\infty$ sobre uma aresta de um teste para $n = 4$ e $\eta = 4$	45
4.4	Superfície de $\ T_{zw}(s, \chi)\ _2$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 8$ e $\eta = 4$	48
4.5	Perfil de $\ T_{zw}(s, \chi)\ _2$ sobre uma aresta de um teste para $n = 8$ e $\eta = 4$	49
4.6	Curva de nível de $\ T_{zw}(s, \chi)\ _2$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 8$ e $\eta = 4$	49
5.1	Simulação do porcedimento de otimização pela inclusão progressiva de pontos de fixação.	53
5.2	Diagrama de blocos de controle geral.	57
5.3	Resultado controladores robusto - exemplo F4E - z_1	68
5.4	Resultado controladores robusto - exemplo F4E - z_2	69
5.5	Resultado controladores robusto - exemplo F4E - z_3	70
5.6	Respostas transitórias de $z(t)$ para os 8 vértices - exemplo helicóptero VTOL.	73
5.7	Diagrama esquemático do processo quádruplo tanque.	75
5.8	Saídas controladas (sólido), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) para o primeiro modelo de referência.	79
5.9	Sinais de controle para o primeiro modelo de referência - tesões das bombas.	79
5.10	Saídas controladas (sólido), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) para o segundo modelo de referência.	80
5.11	Sinais de controle para o segundo modelo de referência - tesões das bombas.	81

5.12	Saídas controladas (sólido), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) para o segundo modelo de referência minimização do ruído.	82
5.13	Sinais de controle para o segundo modelo de referência minimização do ruído - tesões das bombas.	82

Lista de Tabelas

3.1	Resultados do teste exaustivo de análise de estabilidade robusta para três implementações diferentes do DE - porcentagem de acerto	27
3.2	Resultados do teste exaustivo análise de estabilidade robusta - tempo computacional	28
3.3	Resultados do teste exaustivo análise de estabilidade - apenas busca por grade	29
4.1	Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_\infty$	42
4.2	Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_\infty$ - Moura e Gonçalves (2016b).	43
4.3	Tempo computacional das metodologias com busca inicial com grade e Moura e Gonçalves (2016b) - Cálculo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$	44
4.4	Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_2$	46
4.5	Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_2$ - sem busca inicial por grade.	47
4.6	Tempo computacional das metodologias com busca inicial com grade e Moura e Gonçalves (2016b) - Cálculo custo garantido $\mathcal{H}_2$	47
4.7	Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_2$ com $\epsilon = 10^{-8}$	48
5.1	Dados dos parâmetros aerodinâmicos da equação (5.33)	65
5.2	Inicialização dos conjuntos finitos de pontos	66
5.3	Parâmetros DE - método iterativo passo síntese	71
5.4	Valores dos parâmetros para P_- e P_+	76
5.5	Resultados do exemplo do sistema de 4 tanques.	83

Lista de Acrônimos

BB	—	do inglês, <i>Branch-and-Bound</i>
BMI	—	do inglês <i>Bilinear Matrix Inequality</i>
CE	—	Cone-Elipsoidal
DE	—	do inglês, <i>Differential Evolution</i>
ESs	—	do inglês <i>Evolution Strategies</i>
ISE	—	do inglês <i>Integral of the Square of the Error</i>
LMI	—	do inglês, <i>Linear Matrix Inequalities</i>
PID	—	Proporcional-Integral-Derivativo
SLIT	—	Sistema Linear Invariante no Tempo

Lista de Notações

$*$	– Bloco simétrico nas LMIs
$\mathbb{R}$	– Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	– Conjunto dos números complexos
$\mathcal{R}$	– Parte real do número
$\ T\ _\infty$	– Norma H_∞ da função de transferência T
$\ T\ _2$	– Norma H_2 da função de transferência T
T_s	– Período de amostragem do sistema discreto
I ou I_n	– Matriz identidade de dimensão apropriada ou dimensão n
$\mathcal{I}_{(m)}$	– Um número inteiro pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[1, m]$
$\mathcal{U}_{(a,b)}$	– Um número real pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo (a, b)
Ω	– Conjunto politópico com infinitos sistemas
$\tilde{\Omega}$	– Conjunto com número finito de pontos contido em Ω
$Tr(\cdot)$	– Traço da matriz
$\bar{\sigma}$	– Valor singular máximo do argumento
$E\{\cdot\}$	– Esperança matemática do argumento
M^T	– Transposta da matriz M
M^*	– Transposta conjugada da matriz M

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	1
1.2	Motivação	8
1.3	Objetivos	9
1.4	Contribuições	10
1.5	Organização do Trabalho	10
2	Método Evolução Diferencial	12
2.1	Introdução	12
2.2	Técnica de Otimização através do Método Evolução Diferencial	14
2.2.1	População Inicial	15
2.2.2	Mutação	16
2.2.3	Cruzamento	17
2.2.4	Seleção	18
2.2.5	Algoritmo Básico	19
2.3	Conclusão	19
3	Análise de Estabilidade Robusta	20
3.1	Introdução	20
3.2	Formulação do Problema	21
3.3	Método Evolução Diferencial aplicado na Análise de Estabilidade Robusta	23
3.3.1	População Inicial	23
3.3.2	Mutação Diferencial	24
3.3.3	Cruzamento	24
3.3.4	Tratamento das Restrições	24
3.3.5	Seleção	25
3.3.6	Critério de Parada	25
3.4	Testes Exaustivos	26
3.5	Conclusões	33
4	Método DE no Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$	35
4.1	Fundamentação Teórica	35
4.2	Normas de Sinais e Sistemas	35
4.3	Formulação do Problema	38
4.4	Método Evolução Diferencial aplicado ao Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$	40

4.4.1	População Inicial	40
4.4.2	Mutação Diferencial	40
4.4.3	Cruzamento, Tratamento de Restrições e Seleção	41
4.4.4	Critério de Parada	41
4.5	Testes Exaustivos	41
4.6	Conclusões	50
5	Síntese de Controladores Robustos Discretos pelo Método DE	51
5.1	Introdução	51
5.2	Discretização de Sistemas Politópicos	54
5.3	Formulação do Problema	56
5.4	Procedimento de Síntese Iterativo	59
5.4.1	Passo - Síntese	59
5.4.2	Passo - Análise	60
5.5	Método Evolução Diferencial aplicado na Etapa de Síntese	62
5.5.1	População Inicial	62
5.5.2	Mutação Diferencial	62
5.5.3	Tratamento das Restrições	63
5.5.4	Critério de Parada	63
5.6	Exemplos Ilustrativos	64
5.6.1	Exemplo 5.1	64
5.6.2	Exemplo 5.2	71
5.6.3	Exemplo 5.3	74
5.7	Conclusões	83
6	Conclusão	85
6.1	Método Evolução Diferencial aplicado à Análise de Estabilidade Robusta .	85
6.2	Método Evolução Diferencial aplicado ao Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$	86
6.3	Síntese de Controladores Robustos pelo Método Evolução Diferencial . . .	87
6.4	Propostas para Trabalhos Futuros	87
6.5	Trabalhos Apresentados em Eventos Científicos Relativos à Dissertação . .	88
	Referências	89

Introdução

1.1 Revisão Bibliográfica

Embora na teoria de controle a maioria dos sinais de interesse são geralmente em tempo contínuo, o uso de controladores digitais é amplamente aplicado. O motivo disto é devido ao avanço da tecnologia digital e dos computadores. De fato, os controladores digitais têm várias vantagens quando comparados aos analógicos, como baixos custos de implementação e replicação, flexibilidade, expansibilidade e simplicidade na programação e maior precisão, uma vez que em analógicos não são encontrados valores exatos para implementação, como por exemplo resistência de um circuito elétrico. Portanto, existe um interesse crescente na síntese de sistemas de controle usando metodologias baseadas em tempo discreto (Braga et al., 2013).

Mesmo com o crescimento do estudo na área de sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não-lineares, as metodologias que são baseadas em modelos de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) tem grande aplicação, devido a sua maior simplicidade e a existência de metodologias já consolidadas para análise e de síntese. Com a inclusão de incertezas no modelo, os SLIT têm uma aplicabilidade ainda maior. Um dos desafios do projeto de sistemas de controle é garantir a estabilidade e o desempenho de sistemas com incertezas inerentes aos modelos utilizados para análise e síntese. Estas incertezas podem ocorrer, por exemplo, por causa de dinâmicas negligenciadas da planta, de não linearidades e de incertezas sobre parâmetros do sistema que não são precisamente conhecidos ou que podem sofrer variações aleatórias. Existem várias formas de se modelar sistemas incertos, uma bastante utilizada é modelar os sistemas incertos através de SLIT representados por modelos no espaço de estados, com incerteza politópica. Esta modelagem será utilizada nesta dissertação. No sistema politópico, cada um dos infinitos sistemas que pertencem ao domínio de incerteza podem ser descritos como uma combinação convexa dos sistemas correspondentes aos vértices do politopo. Sistemas com parâmetros que variam em faixas ou que possuem modelos para diferentes pontos de operação são exemplos que podem ser

representados por sistemas politópicos.

Os sistemas politópicos são populares por conta das formulações de análise e síntese serem baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequality*) (Boyd et al., 1994). Através de LMIs consegue-se analisar e projetar sistemas de controle considerando somente os sistemas correspondentes aos vértices do politopo. Assim, problemas de otimização global não-convexos ou de factibilidade com solução complexa, são representados por problemas convexos com maior facilidade de solução. A disponibilidade de *softwares* comerciais e gratuitos para resolver os problemas LMIs intensificaram a popularidade do uso de sistemas politópicos combinados com formulações LMIs (Gahinet et al., 1995; Sturm, 1999).

Há diversas formulações LMIs para a análise de estabilidade robusta de SLIT representados por modelos politópicos, tanto no tempo contínuo quanto no tempo discreto, ou no formato mais geral de $\mathcal{D}$ -estabilidade (Chilali e Gahinet, 1996). A condição de estabilidade quadrática (Boyd et al., 1994), fundamentada em função de Lyapunov, independente de incerteza, é a formulação mais simples, mas possui um maior conservadorismo quando aplicada a SLIT. Duas metodologias surgiram com intuito de diminuir o grau do conservadorismo:

- Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (de Oliveira, 2004; de Oliveira, Bernussou e Geromel, 1999; de Oliveira, Geromel e Hsu, 1999; de Oliveira e Skelton, 2002; Kau et al., 2005; Oliveira e Peres, 2005b; Ramos e Peres, 2001).
- Funções de Lyapunov com dependência polinomial de parâmetros (Chesi et al., 2005; Chesi, 2008; Chesi, 2010; Henrion et al., 2004; Oliveira e Peres, 2005a; Oliveira e Peres, 2006).

A vantagem destas formulações é incluir mais variáveis de otimização que resulta na redução do conservadorismo, em especial a segunda delas, em que o conservadorismo da condição pode ser menor com o aumento do grau da função de Lyapunov. Têm-se a capacidade de criar formulações com menor conservadorismo ao acrescentar mais variáveis de decisão com o custo de maior tempo de processamento. No entanto, têm a desvantagem que com o aumento da complexidade, tanto com o grau do polinômio, como no número de vértices do domínio incerto politópico, a eficiência destas formulações tende a diminuir, como averiguado em Leite e Peres (2003) e Gonçalves et al. (2007).

Considerando a análise de estabilidade robusta, mesmo com formulações LMIs mais complexas, há exemplos em que não é possível determinar se um sistema politópico é robustamente estável ou não. Com isto, motivou-se o desenvolvimento de um método de análise combinando formulações LMIs com uma técnica de divisão de politopo (Gonçalves et al., 2006; Gonçalves et al., 2007). Nesta metodologia, foi mostrado que, quando uma

formulação baseada em LMI não é factível para um determinado politopo, esta pode encontrar uma região factível se for aplicada as subdivisões do politopo. Consequentemente, é possível determinar se um sistema é robustamente estável dividindo cada politopo, de modo que, todos eles resultem em uma solução factível para formulação de análise LMI. Quando o sistema não é robustamente estável, localiza-se uma instância de sistema instável correspondente a um dos vértices dos politopos obtidos nas subdivisões. O método LMI/divisão pode ser considerado uma condição necessária e suficiente para análise de estabilidade robusta. Em Gonçalves et al. (2007), foi comprovado que este método requer menor custo computacional comparado às formulações LMIs mais complexas.

Existe outra abordagem para análise de estabilidade robusta que busca garantir uma certa precisão probabilística de acerto (Tempo et al., 1997; Ugrinovskii et al., 2004; Calafiore et al., 2011). Sobre o método LMI/divisão, este apresenta a mesma desvantagem das formulações LMIs complexas, aumenta-se o custo computacional com o aumento da ordem do sistema e/ou do número de vértices do politopo. Assim, existe a motivação no desenvolvimento de metodologias alternativas para análise de estabilidade robusta de SLIT. Uma destas alternativas é o trabalho de Moura e Gonçalves (2016a), em que foi proposto uma metodologia de análise de estabilidade robusta para SLIT em tempo contínuo baseada no algoritmo evolução diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*). Foi obtido um percentual de sucesso em mais de 99% dos 18.000 testes feitos.

Um sistema de controle robusto, além de garantir a estabilidade robusta do sistema, deve também atender um desempenho ótimo para todos os valores possíveis dos parâmetros incertos. Uma das formas de caracterizar o desempenho de sistemas de controle em malha-fechada é através de normas matriciais de certas matrizes de transferência do sistema. Normas matriciais, como as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, proporcionam uma medida da influência das entradas exógenas (distúrbios de carga, ruídos, sinais de referência etc.) sobre as saídas controladas do sistema (erros de rastreamento, sinais de controle etc.) (Zhou e Doyle, 1998). Os controladores LQG (do inglês, *Linear-Quadratic-Gaussian*), bastante difundidos na década de 60, podem ser vistos como um caso especial do controle ótimo $\mathcal{H}_2$. Doyle et al. (1989) apresenta soluções para os problemas de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ com formulação para sistemas no espaço de estados através de equações de Riccati. No entanto, as formulações em termos de equações de Riccati podem se tornar difíceis de serem aplicadas aos problemas de controle robusto.

Para cálculo das normas $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ de sistemas precisamente conhecidos, têm disponíveis vários métodos. Porém, no caso em sistemas incertos representados por modelo politópico, na atualidade, há poucos métodos para calcular com exatidão o valor do limitante para a norma de conjunto incerto. Existem estratégias de cálculo dos limitantes, conhecidos como custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$, fundamentadas em formulações por desigual-

dades matriciais (LMIs), porém, estes valores calculados são apenas um limite superior dos custos exatos (Palhares et al., 1997). As primeiras formulações por LMIs foram baseadas no conceito de estabilidade quadrática (Palhares et al., 1997), no entanto, estas formulações usam uma função de Lyapunov independente de parâmetros, que normalmente resultam em resultados conservadores. No intuito de reduzir o conservadorismo, trabalhos posteriores foram publicados, por exemplo, metodologias que adotaram o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, variáveis matriciais extras e/ou parâmetros de sintonia. Exemplos de trabalhos nesta linha são: de Oliveira et al. (2002), de Oliveira et al. (2004a), de Oliveira et al. (2004b), Xie et al. (2004), Trofino et al. (2005) e He et al. (2005) e as referências por eles citadas. Contudo, os valores obtidos por estas metodologias são apenas os limites superiores dos custos exatos e a precisão dos resultados podem ter uma variação considerável de um caso para outro. Para reduzir o conservadorismo, as novas formulações estão cada vez mais complexas, exigindo um esforço computacional maior, um exemplo, são as formulações baseadas em funções de Lyapunov quadráticas com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros (Chesi et al., 2005; Oliveira e Peres, 2005a). Uma vantagem à ser citada desta abordagem é que a precisão do custo garantido tem a possibilidade de melhora com o aumento do grau da dependência polinomial de parâmetros. No entanto, a complexidade dessas formulações aumenta rapidamente com o número de vértices do domínio politópico de incerteza e/ou com o grau do polinômio.

Em Gonçalves et al. (2007) foi mostrado que é possível calcular o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ com qualquer precisão desejável pelo método *Branch-and-bound* (BB). O método BB combina formulações LMIs com uma técnica de divisão de politopo. Esta estratégia é utilizada para o cálculo dos valores máximos das normas $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ (ou custos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$), sendo que o maior valor da norma nos vértices das divisões do politopo é o limitante inferior e o maior valor dos custos garantidos calculados para cada divisão do politopo é considerado o limitante superior. A convergência do método é dada quando a diferença entre estes dois limitantes atende uma precisão desejada ou quando se localiza um sistema instável nos vértices das divisões do politopo. A desvantagem do BB, assim como as formulações LMIs, é que o custo computacional eleva de forma notável com o aumento da ordem do sistema e/ou do número de vértice do politopo. Esta situação estimula desenvolver metodologias alternativas para análise de desempenho robusto de sistemas lineares invariantes no tempo. Uma alternativa proposta foi uma metodologia para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas em tempo contínuo, baseado no algoritmo de evolução diferencial (Moura e Gonçalves, 2016b). Esta metodologia obteve um percentual de acerto em mais de 90% em 2.250 testes. Logo, quando o método BB for proibitivo em termos de custo computacional, o método que utiliza o algoritmo DE pode se tornar uma

alternativa.

No projeto de sistemas de controle robusto, o controlador deve garantir a estabilidade robusta do sistema e minimizar os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ de certas matrizes de transferências de malha fechada. O problema de controle robusto é um problema de otimização semi-infinita em que é preciso minimizar o valor máximo da função objetivo e garantir o atendimento à todas as restrições em um domínio com infinitos pontos, problema este de complexa solução.

Utilizando formulações de análise para síntese de controle robusto com controlador invariante no tempo, quando se inclui as matrizes em malha fechada na formulação, que incluem as matrizes do controlador a serem determinadas, aparece o produto destas variáveis matriciais pelas variáveis de Lyapunov, resultando em uma desigualdade matricial bilinear (BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequality*). Para transformar a formulação BMI em uma formulação convexa LMI são necessárias manipulações matemáticas. No caso de síntese de controladores por realimentação de estados é fácil a obtenção de uma formulação LMI através de uma mudança de variáveis linearizantes (Gahinet et al., 1995; Scherer, 1995; Scherer et al., 1997; Apkarian et al., 2001; Trofino, 2002; de Oliveira et al., 2002; Ebihara e Hagiwara, 2004). No caso de realimentação dinâmica de saída, não existe até o momento uma formulação LMI obtida por simples mudanças de variáveis para projeto de controladores fixos robustos. O trabalho de Oliveira et al. (2002) teve-se realimentação de estados robusto para norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas em tempo discreto, sendo o primeiro trabalho a propor uma LMI para projeto de realimentação de saída, porém não conseguiu aplicar para controle robusto, apenas sistemas precisamente conhecidos. Uma desvantagem do método de de Oliveira et al. (2002) para projeto de controladores por realimentação de saída para sistemas precisamente conhecidos é que a ordem do controlador é fixa, sendo igual a ordem da planta. Ao se tentar mudança de variáveis linearizantes, as matrizes do sistema aparecem no cálculo final o que requer restrições adicionais sobre as mesmas. Uma estratégia adotada é a fixação de matrizes em função de alguns parâmetro de busca, que além de aumentar o conservadorismo, requer resolver a formulação LMI para cada valor dos parâmetros testados. Uma outra estratégia é o método iterativo com dois passos (Zakovic e Rustem, 2002). Neste caso, uma das variáveis do produto é fixada em um passo e otimizada no outro de forma alternada, de tal modo que cada passo envolve a solução de uma LMI. A dificuldade dessa metodologia é obter uma solução inicial que permita inicializar o procedimento. A velocidade de convergência e a qualidade da solução dependem desta solução inicial. Uma terceira estratégia é fixar variáveis de Lyapunov do produto para otimização das variáveis do controlador com base na variáveis de Lyapunov obtidas de um projeto de controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros (Agulhari et al., 2010; Moreira, Oliveira e Peres, 2011). Com isto, os problemas de

otimização semi-infinita, normalmente não-convexos, de solução difícil, são representados por problemas convexos com maior facilidade de obtenção de solução. Ao invés de obter diretamente um controlador por realimentação dinâmica de saída com mesma dimensão do sistema, é possível, através de uma representação aumentada do sistema proposta por Ghaoui, Oustry e Ait-Rami (1997), projetar um controlador de qualquer ordem a partir de uma formulação para projeto de controladores por realimentação estática de saída. Tal estratégia é empregada em vários trabalhos (Agulhari, Oliveira e Peres, 2012; Sadabadi e Karimi, 2015; Yaesh e Shaked, 2009).

A técnica apresentada por Agulhari, Oliveira e Peres (2012) teve inspiração no trabalho de controle por realimentação de saída para sistemas de tempo contínuo via norma $\mathcal{H}_2$ (Peaucelle e Arzelier, 2001) e estabilização por realimentação de saída (Peaucelle, Arzelier e Salhi, 2003; Mehdi, Boukas e Bachelier, 2004). Esta técnica consiste em duas etapas: um controle por realimentação do estado dependente de parâmetros é computado, a partir de uma condição LMI. As variáveis de Lyapunov obtidas neste projeto são utilizadas na segunda etapa, que consiste nas condições LMIs suficientes para garantir a existência de um controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de saída (independente de parâmetro) com ordem qualquer. A análise de estabilidade é feita via uma matriz homogênea de Lyapunov dependente de parâmetros em ambas etapas. A técnica proposta é capaz de levar em consideração incertezas em todas as matrizes do sistema. Porém, como afirmado pelos próprios autores, qualquer abordagem baseada em LMI, o custo computacional torna-se proibitivo para sistemas politópicos com um grande número de variáveis e vértices do politopo. Trabalhos similares podem ser encontrados em Yaesh e Shaked (2009) e Sadabadi e Karimi (2015), porém nestes trabalhos existe a limitação que algumas matrizes não podem incluir incertezas. O trabalho de Sadabadi e Karimi (2015) é para tempo discreto e contínuo. Estes trabalhos, com estratégia de calcular um controlador por realimentação dinâmica de saída através de realimentação estática, foram apenas para controlador baseado em norma $\mathcal{H}_\infty$. Em Moreira, Oliveira e Peres (2011) esta metodologia é aplicada para norma $\mathcal{H}_2$.

A dificuldade para obtenção de formulações LMI menos conservadoras que possam ser aplicadas de forma eficiente em sistemas mais complexos comprovam a necessidade de desenvolver novas estratégias de síntese que conseguem resolver problemas de controle robusto não formulados por meio de LMIs. Exemplos de metodologias alternativas são:

- Métodos probabilísticos para projetos de sistemas incertos (Calafiore, Dabbeneb e Tempo, 2011).
- Procedimento iterativo de dois passos similar ao método proposto por Zakovic e Rustem (2002) para soluções de problemas de otimização semi-infinita (Gonçalves

et al., 2005; Gonçalves, 2006; Gonçalves, Palhares e Takahashi, 2006; Gonçalves et al., 2008; Gonçalves, Bachur, Palhares e Takahashi, 2011). Com este procedimento iterativo obtém a solução do problema de controle robusto em seu formato original, sendo as variáveis de otimização os parâmetros do controlador.

Este segundo procedimento alcançou resultados melhores que os alcançados através de formulações LMIs em diferentes tipos de problemas na área de controle robusto (Gonçalves et al., 2005; Gonçalves, Palhares e Takahashi, 2006; Gonçalves et al., 2008). A proposta dessa metodologia é encontrar a solução do problema através de dois passos: síntese e análise. Na etapa da síntese, o domínio infinito é substituído por um conjunto finito de sistemas, que pode inicialmente ser os vértices do politopo. O controlador é projetado com o objetivo de minimizar a função objetivo e garantir que as restrições não sejam violadas no conjunto finito, o que faz o problema ter uma maior facilidade na obtenção da solução. No passo de análise, o controlador calculado na etapa de síntese é averiguado para todos os infinitos sistemas do politopo. Caso seja mostrado que alguma restrição não foi atendida ou que os máximos da função objetivo encontrados em ambas etapas (síntese e análise) possuem uma diferença significativa, novos sistemas são adicionados no conjunto finito e uma nova iteração do procedimento é executada. Quando é verificado que todas as restrições não foram violadas para todos os sistemas no domínio infinito e que a disparidade entre os máximos da função objetivo, calculados em cada etapa, está de acordo com um limite especificado, o processo é finalizado. Nos trabalhos citados, esse procedimento foi implementado considerando o algoritmo cone-elipsoidal (CE) para o passo de síntese e o método *Branch-and-Bound* (BB) para o passo de análise.

Uma variação deste procedimento iterativo para síntese de controladores robusto em tempo contínuo ou discreto foi apresentado em Bachur (2017) e Bachur et al. (2017). Nesta nova implementação, o passo de síntese é baseado em um algoritmo DE multiobjetivo que fornece um conjunto de soluções eficientes, candidatas ao conjunto de Pareto. Foi mantido o método BB no passo de análise. Como o custo computacional para avaliar, no passo de análise, o conjunto de soluções obtidas seria muito alto, foi incluída uma etapa intermediária de tomada de decisão, para selecionar apenas uma solução para ser avaliada na etapa de análise. Considerando que em muitos casos a tomada de decisão pode ser feita a priori, tal estratégia pode nem sempre ser a mais eficiente do ponto de vista computacional. Outro trabalho foi feito por Moura (2016) e Moura, Silva e Gonçalves (2016), em que é utilizado o método iterativo através do algoritmo de otimização evolução diferencial, em ambas etapas, análise e síntese, sendo aplicado para sistemas no tempo contínuo. Apesar de não existir a garantia de convergência do método DE tanto na etapa de síntese quanto na etapa de análise, foi mostrado em testes exaustivos, que com esta nova forma de implementação pode se obter resultados melhores que outras técnicas.

Além disso, o método DE é uma alternativa viável para substituir o método BB, quando o mesmo for proibitivo do ponto de vista do custo computacional.

1.2 Motivação

A implementação iterativa fundamentada na combinação do algoritmo cone-elipsoidal e no método *Branch-and-Bound* (BB) pode apresentar problemas em determinadas situações, como por exemplo:

- O algoritmo cone-elipsoidal é mais indicado para problemas de otimização convexos.
- O método *Branch-and-Bound* têm garantia de convergência para o máximo global com a precisão desejada, porém, seu custo computacional aumenta exponencialmente quando se aumenta a ordem do sistema e/ou o número de vértices do politopo (o mesmo ocorre com as formulações LMI).
- A aplicação do procedimento iterativo para problemas na área de controle multi-variável, na qual normalmente a ordem do modelo de estados é elevada, ou para problemas complexos (ordem do sistema elevada e/ou muitos parâmetros incertos), o método *Branch-and-Bound* pode se tornar proibitivo no quesito de custo computacional.
- Com o sistema de controle baseado em controladores proporcional-integral-derivativo (PID), é mostrado que existem diferentes regiões factíveis no espaço de variáveis de otimização, ou seja, é um problema multimodal, logo um problema não-convexo.

Com isto, motiva-se a estudar outras possibilidades de implementação desse procedimento. Uma alternativa foi apresentada por Moura, Silva e Gonçalves (2016), em que o método evolução diferencial é aplicado em ambos os passos do procedimento iterativo (análise e síntese) para sistemas em tempo contínuo.

O método evolução diferencial (Storn e Price, 1995) demonstra características que indicam a sua aplicação na implementação de ambos os passos do procedimento iterativo. O método DE é considerado um método evolucionário baseado em populações, por isso, é indicado sua aplicação em problemas não diferenciáveis, não convexos e multimodais, por possuir uma maior probabilidade de localização de mínimo global. Para problemas mais complexos, o método evolução diferencial, provavelmente terá um custo computacional muito menor quando comparado com o método BB, tornando-o uma alternativa interessante, como mostrado nos trabalhos de Moura e Gonçalves (2016a), Moura e Gonçalves (2016b), Moura, Silva e Gonçalves (2016), para sistemas em tempo contínuo. Assim, este trabalho foi motivado a propor e analisar o método evolução diferencial nos passos do

procedimento iterativo, análise e síntese, para SLIT no tempo discreto. Considerando os resultados obtidos até o momento com o método DE no passo de análise, uma motivação adicional é tentar propor melhorias em sua implementação que resultem uma taxa maior de sucesso e melhor precisão nos testes exaustivos. Um incentivo extra para o uso do método DE é sua maior facilidade de implementação que o método BB em conjunto com cone-elipsoidal, o que sugeri uma maior simplicidade na utilização do procedimento iterativo de síntese de controladores robusto por outros pesquisadores. Por fim, outra motivação é que as implementações anteriores que empregaram o método iterativo para o caso de sistemas discretos, foi ignorado o erro gerado na discretização do sistema politópico, como demonstrado em Braga et al. (2013). Neste trabalho será modificada a forma de tratar a discretização do sistema politópico para evitar este erro.

1.3 Objetivos

O foco principal deste projeto de pesquisa é analisar o desempenho do método evolução diferencial na implementação de ambos os passos do procedimento iterativo de síntese de controladores robustos para sistemas em tempo discreto. Assim, esta dissertação de mestrado tem como principais objetivos:

1. Adaptar, para o caso de sistemas incertos em tempo discreto, uma metodologia de análise de estabilidade robusta de SLIT em tempo discreto, com modelos politópicos, fundamentada no método evolução diferencial, com o intuito de utilizar esta metodologia no passo de análise do procedimento iterativo. No caso de localização de sistemas não robustamente estáveis o método deve ser capaz de obter uma coordenada do politopo relativa a um caso de sistema instável no politopo.
2. Avaliar o desempenho do método de evolução diferencial para análise de estabilidade robusta através de testes exaustivos, analisando o grau de confiabilidade do mesmo, determinando os valores mais adequados dos parâmetros do método e propor melhorias na implementação do método.
3. Adaptar, para o caso de sistemas incertos em tempo discreto, uma metodologia para calcular os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ de SLIT em tempo contínuo, com modelos politópicos, também, baseada no algoritmo DE, para ser executada na etapa de análise do procedimento iterativo. Cujo foco principal é calcular o sistema no politopo que corresponde ao valor máximo de norma.
4. Avaliar o desempenho de diferentes parâmetros do método DE para cálculo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ através de testes exaustivos, analisando o grau de confiabilidade

do mesmo e propor uma melhoria na sua implementação que resultem em maior grau de sucesso e melhor precisão.

5. Verificar a possibilidade de melhoria do método DE no passo de análise considerando formas alternativas de criação da população inicial.
6. Adaptar, para o caso de sistemas incertos em tempo discreto, a implementação do passo de síntese do procedimento iterativo, através do algoritmo DE, em que é necessário respeitar as restrições e minimizar o máximo da função objetivo, dentro de um número finito de sistemas pertencentes ao politopo, levando em consideração o erro decorrente da discretização de sistemas politópicos.
7. Avaliar o desempenho do procedimento iterativo, sendo, as duas etapas executadas e implementadas pelo método DE, para calcular a possível melhor solução para problemas de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ em sistemas de tempo discreto. Para esta avaliação, o procedimento foi aplicado em três exemplos ilustrativos.

1.4 Contribuições

As contribuições desta dissertação são:

1. Adaptar, aprimorar e avaliar o método de síntese iterativa (análise e síntese) por meio do algoritmo DE para sistemas em tempo discreto.
2. Propor uma melhoria na formação da população inicial do método DE para o passo de análise.
3. Avaliar qual é a melhor inicialização dos conjuntos finitos de pontos no procedimento iterativo de síntese.
4. Modificar a forma de tratamento da discretização de sistemas politópicos para evitar os erros de aproximação.

1.5 Organização do Trabalho

Esta dissertação de mestrado apresenta a seguinte organização:

- **Capítulo 1: Introdução.** Apresenta uma breve contextualização do tema abordado, os principais objetivos a serem alcançados pelo projeto e justificativas da elaboração desta dissertação.

- **Capítulo 2: Método Evolução Diferencial.** Fundamentação do método evolução diferencial, sendo este executado para solucionar diferentes problemas de otimização apresentados nos capítulos seguintes.
- **Capítulo 3: Análise de Estabilidade Robusta.** Avalia a viabilidade do uso do método evolução diferencial para a análise de estabilidade robusta em sistemas discretos no tempo, apresentando uma implementação e melhor escolha dos parâmetros do algoritmo DE.
- **Capítulo 4: Método DE no Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$.** Neste capítulo é analisada a implementação do método evolução diferencial para o cálculo do valor máximo de normas de SLIT em tempo discreto com modelo politópico de incerteza.
- **Capítulo 5: Síntese de Controladores Robustos pelo Método DE.** No capítulo 5 é uma implementação do método evolução diferencial para o passo de síntese do procedimento iterativo de projeto de controladores robustos. O procedimento iterativo tem a implementação feita através do método DE, tanto na etapa de análise, quanto na de síntese.
- **Capítulo 6: Conclusão.** Apresentação das conclusões, sugestões para trabalhos futuros e a produção acadêmica produzida em relação com a dissertação.

Método Evolução Diferencial

2.1 Introdução

Takahashi (2007) menciona que as técnicas de otimização são fundamentadas na busca pela “melhor solução”, conhecida também, como “ótimo global” dos problemas de projeto, quando é possível quantificar o grau de adequação de cada solução. Os métodos de otimização tem como um dos principais objetivos encontrar o conjunto de valores dos parâmetros do sistema para que o desempenho global do sistema seja o mais adequado, sob condições de projeto. Assim, projetistas, em grande parte das vezes, devem lidar com o problema clássico de otimização: encontrar a solução mais adequada de um problema, dentro das limitações e flexibilidades do projeto. Storn e Price (1995) mencionam três requisitos que usualmente os projetistas devem atender através de uma técnica de otimização, sendo estes:

1. Capacidade em localizar uma solução ótima para o problema, que ocasione um desempenho adequado para o sistema projetado.
2. Velocidade de convergência do algoritmo satisfatória (rápida), com menor custo computacional.
3. Possuir o menor número de parâmetros de ajuste do algoritmo para facilitar a execução.

Pelos estudos feitos por Moura e Gonçalves (2016a), Moura e Gonçalves (2016b), Moura, Silva e Gonçalves (2016), Gonçalves, Palhares e Takahashi (2005), Gonçalves, Palhares e Takahashi (2008), Gonçalves, Gonçalves, Palhares e Takahashi (2012), Siqueira, Silva, Gonçalves, Palhares e Takahashi (2014) e com base em experiência prévia, pode-se afirmar que, nas etapas de síntese e análise do procedimento iterativo de síntese de sistemas de controle robusto em estudo, podem surgir três diferentes características (inclusive

combinadas) dos problemas de otimização: não diferenciáveis, não convexos e multimodais. Com isto, métodos de otimização não evolutivos, como as estratégias de direção de busca (exemplo algoritmo do gradiente e quasi-Newton), estratégias de exclusão de regiões (exemplo algoritmo cone-elipsoidal), podem ter dificuldades ou até mesmo falhar na obtenção do mínimo global. Para essa classe de problemas, normalmente, se aplica os métodos evolutivos, baseados em populações de soluções, para ter uma maior probabilidade de obtenção da solução, ou seja, encontrar o mínimo global. Alguns dos métodos evolutivos mais conhecidos são: algoritmo genético (Goldberg, 1989), o método de enxame de partículas (Kennedy e Eberhart, 1995), o método evolução diferencial (Storn e Price, 1995) e o algoritmo de busca harmônica (Geem, Kim e Loganathan, 2001). Com base em experiência prévia com alguns desses algoritmos de otimização e pelos trabalhos de Moura e Gonçalves (2016a), Moura e Gonçalves (2016b), Moura, Silva e Gonçalves (2016), nesta dissertação de mestrado é realizada o estudo sobre a efetividade do método evolução diferencial aplicado na implementação dos dois passos do procedimento de projeto iterativo para controle robusto com parâmetros incertos em sistemas discretos.

O Método Evolução Diferencial (DE) foi proposto em 1995 por Storn e Price. O método é baseado no algoritmo de otimização evolucionário para solução de problemas com funções de domínio real. Em Storn e Price (1997), os autores explicam e mostram que o método DE foi projetado para atender os seguintes requisitos:

- Capacidade em lidar com funções de custo não diferenciáveis, não-lineares e multimodais.
- Paralelizabilidade para lidar com funções computacionais de custo intensivo.
- Facilidade no uso, ou seja, poucas variáveis para serem configuradas no algoritmo, sendo estas variáveis robustas e de fácil escolha.
- Convergência consistente para encontrar o mínimo global.

O algoritmo DE possui operadores semelhantes aos aplicados por algoritmos evolucionários padrões: mutação, cruzamento ou recombinação e seleção. Uma das principais características do DE é a mutação diferencial. A mutação diferencial gera um novo vetor adicionando a diferença ponderada entre dois vetores da população a um terceiro vetor. A mutação diferencial não tem base ou inspiração em nenhum processo natural, mesmo assim, o método DE é dito como um algoritmo evolutivo (Storn e Price, 1995). Um ano após o seu surgimento, o algoritmo destacou-se na comunidade internacional da Computação Evolutiva, depois de demonstrar um excelente desempenho nas edições de 1996 e 1997 da *International Contest on Evolutionary Optimization* da *International Conference on Evolutionary Computation* (IEE/ICEC) (Storn e Price, 1997). Das e Suganthan (2011)

fizeram um estudo da arte do algoritmo apresentando um histórico de prêmios iniciais do DE e citam que o algoritmo DE emergiu como uma forma muito competitiva de computação evolutiva. O método evolução diferencial possui características computacionais importantes, destacando-se:

- Simplicidade de implementação.
- Versatilidade.
- Robustez e eficiência.
- Autoadaptação.

A autoadaptação do método DE leva o vetor diferença de dois vetores da população escolhidos aleatoriamente para perturbar um vetor existente - mutação diferencial. A perturbação é feita por todo o vetor populacional. Este princípio é o principal contraste, quando comparado com os métodos usados pelas estratégias de evolução (ESs, do inglês *Evolution Strategies*) tradicionais, em que a função de distribuição é predeterminada por uma probabilidade para aplicar as perturbações dos vetores (Storn e Price, 1997).

2.2 Técnica de Otimização através do Método Evolução Diferencial

Desde a publicação do método DE em 1995, vários pesquisadores aplicam o DE para solucionar os problemas de otimização decorrentes dos diversos domínios da ciência e engenharia (Das e Suganthan, 2011).

Uma representação de um problema de otimização escalar com restrições de desigualdades é:

$$\begin{cases} \chi^* = \arg \min_{\chi} f(\chi) \\ \text{Sujeito a: } g(\chi) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo $\chi^* \in \mathbb{R}^\eta$ o vetor solução do problema; η o número de variáveis de otimização; $\chi \in \mathbb{R}^\eta$ o vetor de variáveis de otimização a ser determinado; $f(\chi) : \mathbb{R}^\eta \rightarrow \mathbb{R}$ a função objetivo a ser minimizada; $g(\chi) : \mathbb{R}^\eta \rightarrow \mathbb{R}^p$ o vetor de funções das restrições que devem serem atendidas.

O método DE é aplicado para resolver problemas de otimização escalar irrestrito, ou seja, problemas sem restrições ($g(\chi)$):

$$\chi^* = \arg \min_{\chi} f(\chi) \quad (2.2)$$

Definindo: $\mathcal{U}_{(a,b)}$ um número real pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo (a,b) ; $\mathcal{I}_{(m)}$ um número inteiro pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[1,m]$; e N o número de indivíduos ou soluções candidatas da população. Geralmente utiliza-se $5\eta \leq N \leq 10\eta$ (Storn e Price, 1997). Seja a população na k -ésima iteração, $X_k = \{\chi_{k,i}; i = 1, \dots, N\}$, sendo a i -ésima solução:

$$\chi_{k,i} = \begin{bmatrix} \chi_{k,i,1} \\ \vdots \\ \chi_{k,i,\eta} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

O fluxograma do algoritmo evolutivo DE é mostrado na figura 2.1, que ilustra a sequência dos operadores básicos. Nas próximas seções serão descritos estes operadores.

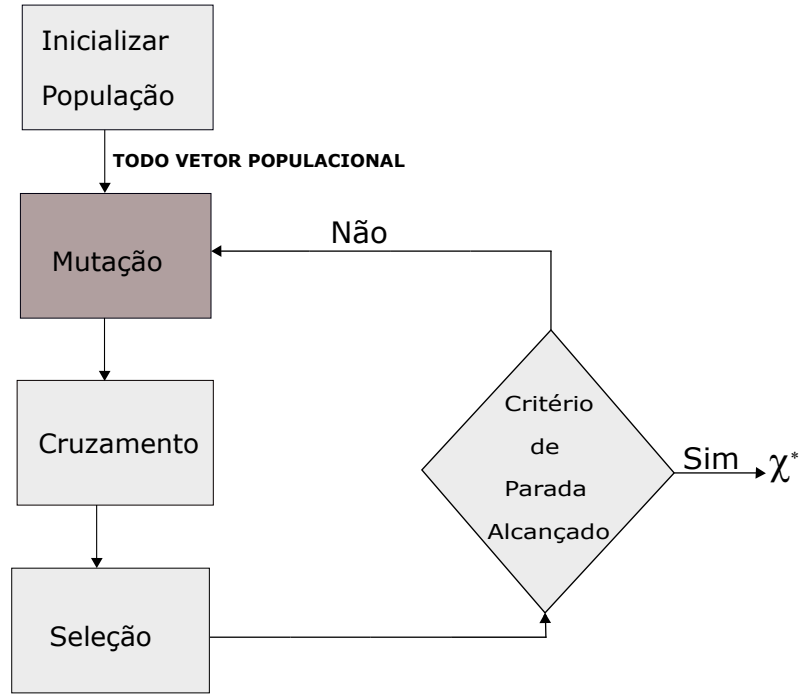


Figura 2.1: Fluxograma do método DE.

2.2.1 População Inicial

A população de vetores iniciais é escolhida aleatoriamente e deve cobrir todo o espaço de parâmetros (Storn e Price, 1997). Quando há falta de qualquer compreensão do espaço de busca, ou seja, regiões promissoras ou soluções parciais, indica-se aplicar uma distribuição uniforme para a população inicial. Na aplicação do método DE na etapa de análise do procedimento iterativo, em que a região de busca é um politopo, utilizou-se uma busca baseada em grade sobre cada aresta na criação da população inicial, sendo esta, uma contribuição da dissertação.

2.2.2 Mutação

Com a população inicial gerada, o método DE gera novos vetores de parâmetros, denominados vetores mutantes, adicionando a diferença ponderada entre dois vetores de parâmetros a um terceiro vetor, sendo este, denominado vetor base. Esta operação é intitulada de mutação.

Biologicamente, mutação significa uma mudança repentina nas características genéticas de um cromossomo. No contexto da computação evolutiva, a mutação é vista como uma mudança ou perturbação com um elemento aleatório. Na literatura DE, um vetor pai da geração atual é chamado de vetor alvo, um vetor mutante obtido através da operação de mutação diferencial é conhecido como vetor doador e a recombinação do doador com o vetor alvo é chamada de vetor de teste (Das e Suganthan, 2011).

A operação básica de mutação pode ser descrita na seguinte equação:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) \quad (2.4)$$

sendo que:

- Os índices $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ são gerados como $r_j = \mathcal{I}_{(N)}, j = 1, \dots, 3$.
- $\mathbf{v}_{k,i}$ representa a i -ésima solução mutante, na k -ésima geração.
- F é um fator de escala aplicado ao vetor diferença, Storn e Price (1997) cita em um F real e constante, geralmente $F \in [0; 2]$. Neste trabalho, utilizou-se o fator F aleatório para cada operação de mutação, como sugerido em Das e Suganthan (2001), sendo normalmente aplicado no intervalo $[0.1; 1]$.
- χ_{k,r_1} é o vetor base.

Desde modo, têm-se uma população mutante tomando como partida este procedimento: $V_k = \{\mathbf{v}_{k,i} = 1, \dots, N\}$. A operação de mutação é ilustrada na figura 2.2.

A notação geral do operador de mutação é: DE / x / y / z, em que x caracteriza um texto denotando o vetor base a ser perturbado, y representa o número de diferenças de vetores considerados para perturbação de x e z é o tipo de cruzamento a ser utilizado (exp: exponencial; bin: binomial).

O operador mutação básico, quando se utiliza em conjunto com cruzamento binomial, é: DE / rand / 1 / bin (Das e Suganthan, 2011). Em Storn e Price (1995 e 1997) são apresentados outros esquemas diferentes de mutação:

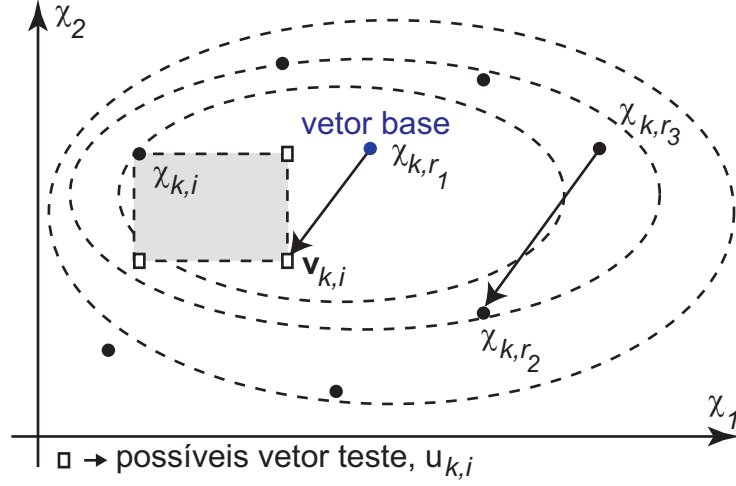


Figura 2.2: Mutação e cruzamento no espaço de parâmetros bidimensional.

- DE/best/1:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,best} + F(\chi_{k,r1} - \chi_{k,r2})$$

- DE/target-to-best/1:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_i} + F(\chi_{k,best} - \chi_{k,i}) + F(\chi_{k,r1} - \chi_{k,r2})$$

- DE/best/2:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,best} + F(\chi_{k,r1} - \chi_{k,r2}) + F(\chi_{k,r3} - \chi_{k,r4})$$

- DE/rand/2:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r1} + F(\chi_{k,r2} - \chi_{k,r3}) + F(\chi_{k,r4} - \chi_{k,r5})$$

2.2.3 Cruzamento

O operador de cruzamento, também conhecido como operador de recombinação, tem como principal objetivo aumentar a diversidade dos parâmetros dos vetores perturbados. Esta operação pode ser descrita da seguinte forma:

1. Os indivíduos da população X_k são recombinados com os indivíduos da população mutante V_k .
2. Com esta recombinação, é gerado uma população de soluções teste U_k .
3. Defina-se uma taxa de cruzamento (C_r).

No algoritmo DE clássico é adotado uma recombinação discreta com probabilidade C_r entre 0 e 1, assim, a etapa de cruzamento pode ser expressa por:

$$u_{k,i,j} = \begin{cases} v_{k,i,j}, & \text{se } \mathcal{U}_{(0,1)} \leq C_r \text{ ou } j = \delta_i \\ \chi_{k,i,j}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.5)$$

para $j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, N$, sendo $C_r \in [0,1]$. Sendo $\delta_i \in [1, 2, \dots, k]$, um índice escolhido aleatoriamente para garantir que pelo menos um $u_{k,i,j}$ é obtido pelo $v_{k,i,j}$. O $\delta_i = \mathcal{I}_\eta$ garante que $u_{k,i} \neq \chi_{k,i}$.

A figura 2.2 demonstra a operação de cruzamento no espaço bidimensional. Nesta figura, os quadrados brancos representam as possíveis soluções testes que podem ser obtidas a partir da recombinação entre a solução alvo e a solução mutante. A figura 2.3 ilustra a operação de cruzamento para um problema com $\eta = 7$ e $\delta_i = 7$.

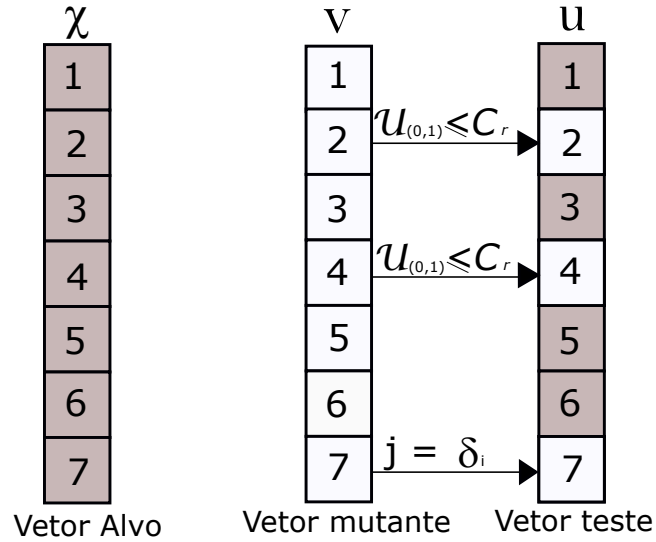


Figura 2.3: Operação de cruzamento para 7 parâmetros.

2.2.4 Seleção

A etapa de seleção define qual solução, se a alvo, $\chi_{k,i}$, ou tentativa, $u_{k,i}$, irá sobreviver na próxima geração, mantendo o tamanho da população constante ao longo das gerações subsequentes. A operação seleção pode ser descrita como:

$$\chi_{k+1,i} = \begin{cases} u_{k,i}, & \text{se } f(u_{k,i}) \leq f(x_{k,i}) \\ \chi_{k,i}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.6)$$

Portanto, se o novo vetor de teste produz um valor igual ou menor da função objetivo, ele substitui o vetor alvo correspondente na próxima geração, caso contrário, o alvo é mantido na população. Assim, a população melhorou (com respeito à minimização da função objetivo) ou permanece no mesmo estado de aptidão, mas nunca se deteriora (Das e Suganthan, 2011).

2.2.5 Algoritmo Básico

A estrutura do código para implementação do método DE é apresentada a seguir.

```

 $k \leftarrow 1$ 
 $X_k \leftarrow$  Inicia População ( $L, N$ )
 $F_x \leftarrow$  função objetivo ( $X_k$ )
enquanto critério de parada não atingido
  para  $i = 1, \dots, N$  - Operação Mutação -
    Gerar  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i \in \{1, \dots, N\}$ 
     $F_i \leftarrow \mathcal{U}_{(a,b)}$ 
     $\mathbf{v}_{k,i} \leftarrow \chi_{k,r_1} + F_i \times (\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3})$ 
  fim para
  para  $i = 1, \dots, N$ 
     $\delta_i \leftarrow I_{(n)}$ 
     $u_{k,i} \leftarrow$  Recombinação ( $\chi_{k,i}, v_{k,i}, \delta_i, C_r$ )
  fim para
   $F_u \leftarrow$  função objetivo ( $U_k$ )
   $X_{k+1} \leftarrow$  Seleção ( $X_k, U_k, F_x, F_u$ )
   $k \leftarrow k + 1$ 
fim do enquanto

```

sendo que: L é os limites de cada variável; N é o tamanho da população; M é o número de gerações e C_r a probabilidade de cruzamento (recombinação).

2.3 Conclusão

Neste capítulo foi descrito, em detalhes, o método evolução diferencial que será aplicado nesta dissertação para resolver diferentes problemas de otimização. Na etapa de análise, o método DE será aplicado em duas situações diferentes. No capítulo 3 é descrita e avaliada a aplicação do método DE para análise de estabilidade robusta. No capítulo 4, o método DE será empregado para análise de desempenho através do cálculo de custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Por fim, no capítulo 5, é descrito o procedimento de síntese iterativo completo, em que o método DE também é aplicado na etapa de síntese.

Análise de Estabilidade Robusta

3.1 Introdução

A análise de estabilidade robusta de sistemas incertos, a priori, é normalmente um problema de tratamento complexo, uma vez que, tem-se a necessidade de verificar os infinitos sistemas pertencentes ao domínio de incerteza. A Teoria de Lyapunov é bastante usada para esta análise, pois, o problema de dimensão infinita se transforma em um problema de dimensão finita, sendo necessário verificar apenas os vértices do domínio politópico de incerteza. A análise de estabilidade feita pela Teoria de Lyapunov é definida por um problema de factibilidade, formulado em termos de LMIs. Porém, mesmo com formulações complexas, quando aumenta-se a complexidade do problema, muitas vezes, as formulações não conseguem definir a estabilidade robusta. A metodologia LMI/divisão, como mencionado no capítulo 1, é considerada uma condição suficiente e necessária para determinar a estabilidade robusta, porém, o custo computacional aumenta de forma considerável com o aumento do número de vértice do politopo e/ou a ordem do sistema, como ocorre nas formulações LMIs.

Nesta dissertação, a análise de estabilidade robusta é determinada através de uma formulação de otimização resolvida pelo método DE, para sistemas em tempo discreto. O algoritmo evolução diferencial foi implementado com base numa configuração de parâmetros com objetivo de alcançar um melhor desempenho de tempo computacional em conjunto com o percentual de acerto. Tal configuração é obtida através de testes exaustivos com diferentes possibilidades. São mostrados os resultados dos testes realizados, para verificar a viabilidade do método DE como estratégia de análise de estabilidade robusta em SLIT em tempo discreto. Uma melhoria em relação ao método proposto em Moura e Gonçalves (2016a), com relação à forma de escolha da população inicial do método, é proposta e analisada.

3.2 Formulação do Problema

Considere o sistema discreto linear invariante no tempo descrito por:

$$x(k+1) = A(\chi)x(k) \quad (3.1)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de variáveis de estado. Considere que a matriz $A(\chi)$ pode ter parâmetros incertos que pertencem a um conjunto compacto convexo, ou politopo, definido por seus vértices:

$$\mathcal{A} \triangleq \left\{ A(\chi) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\chi) = \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i A_i; \chi \in \Omega \right\}, \quad (3.2)$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \chi \in \mathbb{R}^{\eta} : \chi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i = 1 \right\}, \quad (3.3)$$

sendo A_i , $i = 1, \dots, \eta$, os vértices do politopo e $\chi = [\chi_1 \dots \chi_{\eta}]^T$ o vetor que parametriza o politopo. O sistema politópico é robustamente estável se todos os autovalores de $A(\chi) \in \mathcal{A}$, para todo $\chi \in \Omega$, estão localizados dentro do disco de raio unitário, ou seja, possuem módulo menor que 1.

No sistema politópico (3.1), pode-se analisar facilmente a estabilidade robusta através do seguinte problema de factibilidade LMI: o sistema (3.1) é quadraticamente estável se existe $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $P \succ 0$ e:

$$A_i P A_i^T - P \prec 0, \quad (3.4)$$

para $i = 1, \dots, \eta$. Este problema é facilmente resolvido pelos LMIs *solvers* disponíveis, como por exemplo, Gahinet et al.(1995), Sturm (1999) e Peaucelle, Henrion, Labit e Taitz (2002).

A metodologia que combina as formulações LMIs com uma técnica de divisão de politopos orientada pelas arestas faz com que, caso a formulação LMI não seja factível para o politopo, o simplex no espaço d -dimensional, $d = \eta - 1$, é dividido em d^2 simplexes e a formulação LMI é empregada para cada um deles. Enquanto haver simplexes em que a formulação LMI seja infactível, estes simplexes devem ser subdivididos, até que uma das duas seguintes ocorrências ocorram:

1. O sistema é robustamente estável, isso quer dizer que, todos os simplexes que compõem o politopo, devem ser robustamente estáveis.

2. O sistema é robustamente instável, ou seja, é localizado uma matriz $A(\chi)$, $\chi \in \Omega$, que resulte em um sistema instável.

Esta metodologia corresponde a uma condição necessária e suficiente. Uma formulação LMI indicada para utilizar neste método, onde se obtêm um bom compromisso entre eficiência e complexidade, é a formulação apresentada em Peaucelle et al. (2000) - Teorema 4: o sistema (3.1) é robustamente estável se existem $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P_i \succ 0$ e:

$$\begin{bmatrix} -P_i + A_i^T F^T + F A_i & -F + A_i^T G \\ -F^T + G^T A_i & P_i - (G + G^T) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.5)$$

para $i = 1, \dots, \eta$.

A desvantagem do método LMI/divisão é o aumento do custo computacional com o número de vértice do politopo, η , que define a dimensão do simplex. Com isto, o desenvolvimento de uma nova metodologia de análise é importante quando o custo computacional é proibitivo.

A análise de estabilidade robusta do sistema politópico em tempo discreto pode ser formulada através de um problema de otimização não-linear. É necessário calcular o máximo valor do módulo dos n autovalores das infinitas matrizes $A(\chi) \in \mathcal{A}$ para analisar se este máximo é maior que 1. Para desenvolver o procedimento como um problema de minimização, será considerada a seguinte formulação:

$$\chi^* = \min_{\chi \in \Omega} f(\chi), f(\chi) \triangleq 1 - \max_i |\lambda_i(A(\chi))| \quad (3.6)$$

em que $\lambda_i(A)$ é o i -ésimo autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um algoritmo de otimização é aplicado para solução do problema (3.6), se $f(\chi^*) \leq 0$, isto comprova que existe um caso de $A(\chi)$ com autovalores fora ou sobre o disco de raio unitário no plano $\mathbb{Z}$, isto significa que o sistema não é robustamente estável. Caso $f(\chi^*) > 0$, existe uma grande probabilidade do sistema ser robustamente estável. Por ser um problema de otimização não convexo, com mínimos em diferentes regiões de Ω , ou seja, multimodal, não há uma garantia que a solução obtida seja o mínimo global da função, podendo existir um $\chi \neq \chi^*$ tal que $f(\chi) \leq 0$ em uma região não localizada pelo algoritmo de otimização.

Algoritmos evolutivos, que são fundamentados em populações, possuem uma melhor probabilidade de obter o mínimo global de funções multimodais. Diversos métodos de otimização evolutivo são encontrados, como por exemplo, o algoritmo genético (Goldberg, 1989), o algoritmo evolução diferencial (Storn e Price, 1995), o algoritmo de enxame de partículas (Kennedy e Eberhart, 1995) e o algoritmo de busca harmônica (Geem, Kim

e Loganathan, 2001). A escolha para execução deste trabalho foi o algoritmo evolução diferencial, descrito em detalhes no Capítulo 2, pois possui facilidade de implementação e pelo trabalho de Moura e Gonçalves (2016a) para tempo contínuo. A adequação do método DE para solução do problema (3.6) é descrita na próxima seção.

3.3 Método Evolução Diferencial aplicado na Análise de Estabilidade Robusta

Devido a complexidade do problema (3.6), a pura aplicação do método DE não é suficiente para se atingir uma boa confiabilidade do método de análise de estabilidade robusta. Além disso, deve ser levada em consideração que a região factível Ω é um politopo cujas faces são simplexes unitários. Adicionalmente, com base nos resultados obtidos com o método LMI/divisão, se o sistema não for robustamente estável, existe uma grande possibilidade de que seja localizado um sistema instável sobre uma das arestas do simplex. Deste modo, a contribuição deste trabalho é propor adequações e ajustes no método que aumentem a confiabilidade da metodologia proposta. As características específicas para a utilização do método DE para problema de análise de estabilidade robusta são apresentadas nas próximas seções.

3.3.1 População Inicial

Uma contribuição desta dissertação em comparação ao proposto por Moura e Gonçalves (2016a), é que, na inicialização da população inicial do algoritmo DE, é proposto o uso de uma busca baseada em grade sobre cada aresta. De acordo com esta grade, é escolhido as v melhores soluções em cada aresta, sendo este v um parâmetro a escolha. Esta estratégia têm o intuito de tornar o método DE mais eficaz e preciso. Deste modo, para a geração da população inicial faz-se uma busca por meio de grade, com discretização a , sobre cada aresta, e escolhe as v melhores soluções geradas por aresta. Além destes pontos gerados sobre as arestas, também são incluídos na população os η vértices do politopo Ω . Assim, a fórmula para o tamanho total da população é dada por:

$$N = \eta + \frac{v\eta(\eta - 1)}{2}, \quad (3.7)$$

em que η é o número de vértices; $\eta(\eta - 1)/2$ é o número de arestas; e $v \geq 2$ um número à escolher, sendo este, o número de pontos a serem obtidos da grade com $(1/a) - 1$ pontos (não incluídos os vértices).

Como será demonstrado, através de testes realizados, acrescentar os vértices e pontos nas arestas possuem as seguintes vantagens: agilizar a convergência do algoritmo e au-

mentar a eficiência, ou seja, ter maior probabilidade de se localizar sistemas instáveis no politopo se os mesmos existem. Esta conclusão se deve, pois, a técnica fundamentada em LMI/divisão, geralmente localiza sistemas instáveis sobre as arestas.

3.3.2 Mutação Diferencial

Com base na experiência em trabalhos anteriores e nos resultados para sistemas em tempo contínuo apresentados em Moura e Gonçalves (2016a), dentre as diversas formas de implementa o do operador de muta o diferencial, para análise de estabilidade robusta, utiliza-se o operador muta o diferencial no formato tradicional. Sejam os índices $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ gerados como $r_j = \mathcal{I}_{(N)}, j = 1, \dots, 3$. A i -ésima soluço mutante   calculada por:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_i(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) \quad (3.8)$$

para $i = 1, \dots, N$. Foi empregado o fator de escala aleatório para cada muta o, sendo este fator igual  : $F_i = \mathcal{U}_{0.6;0.8}$.

3.3.3 Cruzamento

O cruzamento   feito entre a i -ésima soluço da popula o atual, $\chi_{k,i}$, e da popula o mutante, $\mathbf{v}_{k,i}$, para assim, gerar a i -ésima soluço da popula o tentativa, $\mathbf{u}_{k,i}$. Esta opera o foi descrita anteriormente (se o 2.2.3). O valor da taxa de cruzamento, C_r , empregado foi de 0,5.

3.3.4 Tratamento das Restri es

Nos problemas de análise de estabilidade e desempenho robusto, a única restri o   que a soluço esteja no politopo Ω descrito pela equa o (3.3). Nesta disserta o, optou-se por impor que toda soluço atenda às restri es para não ser necessário o uso de tratamento de restri o, por exemplo, utilizar o método de penalidades. O problema de aplicar o método das penalidades   que existe uma grande possibilidade das solu es teste se localizarem fora do politopo e com isso o método DE não seria eficiente na cria o de solu es melhores. Para impor que toda soluço teste seja factível,   proposto executar as seguintes opera es, sobre as solu es tentativa calculadas pelas opera es de muta o e cruzamento (Moura e Gonçalves, 2016a):

$$\begin{aligned} u_{k,i,j} &= |u_{k,i,j}|, \quad j = 1, \dots, \eta; \\ \mathbf{u}_{k,i} &= \frac{\mathbf{u}_{k,i}}{\|\mathbf{u}_{k,i}\|_1} \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Na equação (3.9), a primeira operação garante que $u_{k,i,j} > 0$ e a segunda que $\sum_{j=1}^{\eta} u_{k,i,j} = 1$, ou seja, uma solução factível do problema (3.6). A restrição de igualdade pode ser trocada por uma restrição de desigualdade trabalhando no espaço $\eta - 1$, como considerado na metodologia LMI/divisão, mas pelo estudo realizado em Moura e Gonçalves (2016a) com esta estratégia fica mais difícil impor o atendimento a esta restrição.

A figura 3.1 mostra as operações de mutação, cruzamento e o tratamento de restrição descrito, para um sistema com $\eta = 2$. O índice relativo à iteração foi omitido para simplificação da anotação. A reta que interliga os vértices $[1 \ 0]^T$ e $[0 \ 1]^T$ é a região factível. Na etapa de mutação soma-se a diferença entre $\mathbf{x}_{r2}$ e $\mathbf{x}_{r3}$ sobre a solução base $\mathbf{x}_{r1}$, para assim, gerar a solução mutante, $\mathbf{v}_i$. Os quadrados brancos demonstram as possíveis soluções testes produzidas, após o cruzamento entre a solução alvo, $\mathbf{x}_i$, e a solução mutante, $\mathbf{v}_i$. Presuma-se a obtenção da solução teste $\bar{\mathbf{u}}_i$. Após efetuar os tratamentos de restrições da equação (3.9), é obtido a solução teste, $\mathbf{u}_i$, representada pelo quadrado preto.

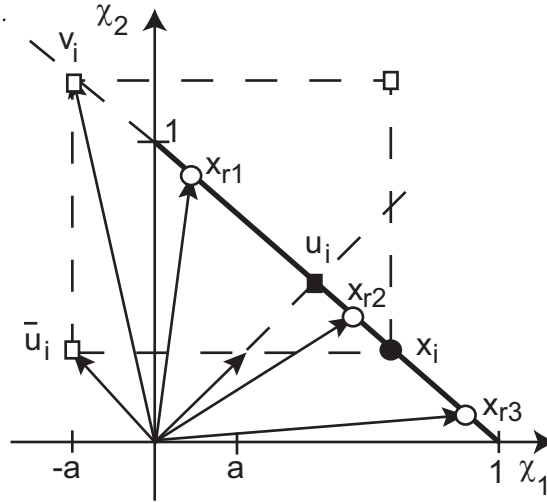


Figura 3.1: Simulação dos operadores mutação, cruzamento e do tratamento de restrição para um $\eta = 2$.

3.3.5 Seleção

A seleção adotada para a análise de estabilidade robusta foi a padrão, descrita no capítulo anterior (seção 2.2.4).

3.3.6 Critério de Parada

Os critérios de parada foram o número máximo de gerações, N_g , ou a convergência da população, comparando os valores máximos e mínimos da k -ésima população, $\max_i f(\chi_{k,i}) - \min_i f(\chi_{k,i}) \leq \varepsilon$, $\chi_{k,i} \in \mathbf{X}_k$. Neste trabalho foi utilizado o valor de $\varepsilon = 10^{-8}$.

No intuito de reduzir o custo computacional, se $f(\chi) \leq 0$, o critério de parada é modificado para um ε muito maior, $\varepsilon = 0.1$, uma vez que, já foi identificado que o sistema não é robustamente estável. Apesar do critério de parada adotado não significar necessariamente a convergência da população, ele é um critério simples de se implementar e se mostra útil para o aumento da eficiência do método. Vale ressaltar que o método LMI/divisão é interrompido tão logo o mesmo localize um sistema instável. Para a convergência do procedimento de síntese iterativo que será descrito no Capítulo 5, é interessante que seja calculada a solução χ^* mais próxima do pior caso de sistema instável, o que é uma vantagem do método DE em relação ao método LMI/divisão.

3.4 Testes Exautivos

Para avaliação do método de análise de estabilidade robusta fundamentado no algoritmo DE com busca inicial por grade, foi realizado um teste exaustivo. No teste realizado, foram gerados 100 sistemas aleatórios não robustamente estáveis para valores combinados de $n \in \{2,4,8\}$ e $\eta \in \{4,8\}$, assim, um total de 600 sistemas.

Seja σ_m o valor máximo do módulo de todos os autovalores calculados para as η matrizes A_i , ou seja, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, \eta$. Para obter vértices correspondentes a sistemas estáveis muito próximos do disco de raio unitário, todas as matrizes dos vértices do politopo foram recalculadas como:

$$A_i = \frac{A_i}{\sigma_m + 0,001 \times \mathcal{U}_{(0,1)}}, i = 1, \dots, \eta. \quad (3.10)$$

Tendo os vértices com autovalores próximos do disco unitário, aumenta-se a probabilidade do sistema não ser robustamente estável. O sistema politópico resultante é averiguado pelo método de análise combinando formulação LMI com uma técnica de divisão de politopo (LMI/divisão), sendo que, caso o sistema seja robustamente estável, o mesmo é desconsiderado. Se o sistema não é robustamente estável, porém, o primeiro sistema instável, localizado pelo método LMI/divisão, seja uma combinação convexa de dois vértices, isto quer dizer que, um sistema sobre a aresta do politopo, este sistema incerto também é descartado. O objetivo desta metodologia é tentar evitar que os sistemas não robustamente estáveis sejam identificados apenas pela grade utilizada para a geração da população inicial, mas também pelo método de otimização. Deste modo, aumenta-se a probabilidade de localizar sistemas instáveis apenas no interior do politopo (combinação convexa de pelo menos três vértices). Porém, a maioria dos sistemas politópicos gerados apresentaram sistemas instáveis sobre as arestas. É importante salientar que para sistemas com apenas dois vértices não é possível aplicar esta metodologia, uma vez que, não é possível ter pontos fora da única aresta. Este teste é ainda mais rigoroso que os realizados

Tabela 3.1: Resultados do teste exaustivo de análise de estabilidade robusta para três implementações diferentes do DE - porcentagem de acerto

n, η	$P_{DE}(\%)$	$P_{DE_{MG}}(\%)$	$P_{DE_G}(\%)$
2,4	100	100	100
2,8	98,62	100	100
4,4	100	99,97	100
4,8	99,07	100	100
8,4	99,97	99,96	100
8,8	99,92	99,98	100

em Moura e Gonçalves (2016a), onde a quase totalidade dos sistemas possuíam sistemas instáveis sobre as arestas e só se descartava os sistemas politópicos com sistemas instáveis sobre três pontos igualmente distribuídos sobre a aresta.

O método de análise robusta baseado no DE foi executado 100 vezes para cada sistema politópico. Foi utilizado um computador com processador Intel CoreTM i7-4510U 2,60GHz. A tabela 3.1 mostra os resultados obtidos, em que P_{DE} representa o percentual de sucesso do método puramente DE (Storn 1995), $P_{DE_{MG}}$ representa o percentual de sucesso do método DE com a inclusão dos vértices e três pontos sobre as arestas do politopo (Moura e Gonçalves 2016a) e P_{DE_G} representa o percentual de sucesso do método DE auxiliado por grade na geração da população inicial. Assim, 100 testes de 600 sistemas, gera um total de 60.000 testes. Nestes testes, na busca por grade foram adotados os valores de $a = 0,05$ (19 pontos, não incluindo os vértices) e $v = 7$.

Como pode ser verificado na tabela 3.1, para todos os 60.000 testes, a metodologia de análise de estabilidade robusta, para sistemas discretos, baseado no algoritmo DE, combinado com a busca por grade para geração da população inicial, obteve um percentual de acerto de 100%, em contra partida, as metodologias de Storn (1995) e Moura e Gonçalves (2016a) apresentaram erros, sendo que, para a segunda metodologia ocorreu um menor percentual de erro.

O principal objetivo é uma metodologia que tenha um custo computacional menor quando comparado com a metodologia LMI/divisão. A tabela 3.2 apresenta os tempos computacionais, sendo: T_{LD} o tempo computacional da análise pelo método LMI/divisão, utilizando o *LMI Control Toolbox* (Gahinet et al., 1995), T_{DE} o tempo computacional total médio das 100 análises pelo algoritmo DE apresentado por Storn (1995), $T_{DE_{MG}}$ o tempo computacional total médio das 100 análises pelo método DE mostrado em Moura e Gonçalves (2016a) e T_{DE_G} o tempo computacional total médio das 100 análises pelo algoritmo DE proposta nesta dissertação, sendo todos os tempos dado em segundos.

Como se mostra nos resultados, para todos os testes, o método DE auxiliado por

Tabela 3.2: Resultados do teste exaustivo análise de estabilidade robusta - tempo computacional

n, η	$T_{LD}(s)$	$T_{DE}(s)$	$T_{DE_{MG}}(s)$	$T_{DE_G}(s)$
2,4	15,4790	2,7622	2,4808	2,5331
2,8	494,2040	31,3558	24,8505	24,0830
4,4	31,0120	3,6425	3,3199	3,3630
4,8	856,0660	42,1127	34,0376	31,9446
8,4	290,0780	5,5601	4,8136	4,6989
8,8	$7,0034 \times 10^3$	59,4319	46,4412	47,1198

grade teve um tempo computacional médio menor que o método LMI/divisão, onde pode-se destacar que, com o aumento do número de vértices, esta diferença fica ainda mais evidente. No caso, para os sistemas com $n = 8$ e $\eta = 8$, o custo computacional do método LMI/divisão é na ordem de milhar, o que era esperado, uma vez que nesta metodologia o custo computacional cresce com a complexidade do problema, em compensação, o método baseado no algoritmo DE teve o tempo na ordem na casa de dezena, uma diferença de aproximadamente 14.863%. As metodologias de Storn (1995) e Moura e Gonçalves (2016b) obtiveram um tempo menor, em todos os casos, quando comparado com a metodologia LMI/divisão. O tempo computacional para as três metodologias que utilizam o algoritmo DE são próximos entre si. Assim, a metodologia proposta nesta dissertação apresenta uma precisão melhor quando comparada com metodologias de Storn (1995) e Moura e Gonçalves (2016a) e mostra um tempo computacional eficaz ao se comparar com o método LMI/divisão.

O aumento do custo computacional do método LMI/divisão pode ser explicado da seguinte forma: para cada politopo cuja formulação LMI não é factível e tenha todos os vértices estáveis, é preciso dividir o politopo em 2^d novos politopos, sendo, $d = \eta - 1$, onde é necessário que, todos politopos devem ser analisados pela formulação LMI. Por exemplo, para $\eta = 8$, cada divisão resulta em $2^7 = 128$ novos politopos, ou seja, o custo/tempo computacional é crescente exponencialmente com o aumento da complexidade do problema à ser analisado.

Foi verificado se com apenas o uso da pesquisa por grade sobre as arestas seria suficiente para se obter um resultado satisfatório na análise de estabilidade robusta. Esse questionamento impulsionou a ideia de tentar gerar sistemas politópicos com sistemas instáveis fora das arestas nos testes exaustivos. Para se fazer a verificação da busca por grade, foi determinado o percentual de acerto utilizando apenas o uso da mesma. Os testes realizados demonstraram que apenas a busca por grade não se chega a 100% de sucesso. A tabela 3.3 mostra o percentual de acerto da pesquisa pela grade, P_G , sem

Tabela 3.3: Resultados do teste exaustivo análise de estabilidade - apenas busca por grade

n, η	$P_G(\%)$	$R_{DE}(\%)$
2,4	98,00	61,05
2,8	100	50,97
4,4	81,00	85,09
4,8	89,00	80,99
8,4	74,00	87,44
8,8	82,00	88,62

necessidade do DE, e o percentual de vezes em que o DE refinou o resultado inicial obtido apenas pela grade, isto é, minimizou a função objetivo - equação (3.6), R_{DE} .

A tabela 3.3 ilustra a importância do algoritmo DE nesta metodologia. Em vários dos testes, a grade não conseguiu chegar no resultado, e nos casos em que grade identificou, sempre acima da metade dos testes foram refinados pelo DE. A busca inicial por grade para formação da população inicial é simples e de fácil implementação, se mostrando fundamental para aumentar a eficiência do método DE, sem necessariamente ter um aumento do custo computacional. Enfim, a essência da metodologia proposta neste trabalho é o algoritmo DE, sendo auxiliado por uma busca por grade inicial.

Para ilustrar a dificuldade para se localizar o mínimo global da função objetivo da equação (3.6), a figura 3.2 exemplifica uma superfície de nível e a figura 3.3 apresenta as curvas de nível, ambas para $f(\chi)$, sendo, $\chi = [\chi_1 \ 1 - \chi_1 - \chi_3 \ \chi_3 \ 0]^T$, para um dos sistemas testados, para $n = 8$ e $\eta = 4$, com 100×100 valores distribuídos uniformemente. Pelas curvas de contorno podemos observar que se trata de um problema não diferenciável, não convexo e multimodal. O método LMI/divisão localiza o primeiro caso de sistema instável em $\chi = [0,375 \ 0,375 \ 0,25 \ 0]^T$ com $\min_{\chi \in \Omega} f(\chi) = -0,012258$. Pelo método DE, em um dos testes, localizou em $\chi = [0,3707 \ 0,4104 \ 0,2189 \ 0]^T$ obtendo um valor de $\min_{\chi \in \Omega} f(\chi) = -0,0140$.

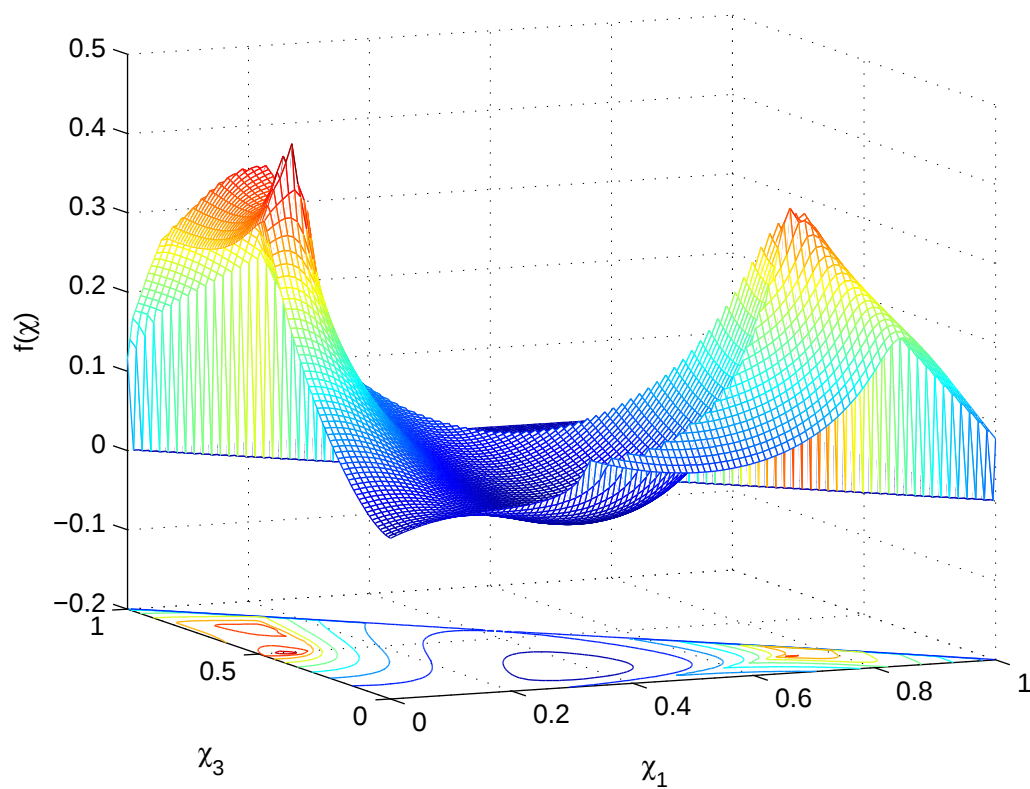


Figura 3.2: Exemplo de uma superfície de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$.

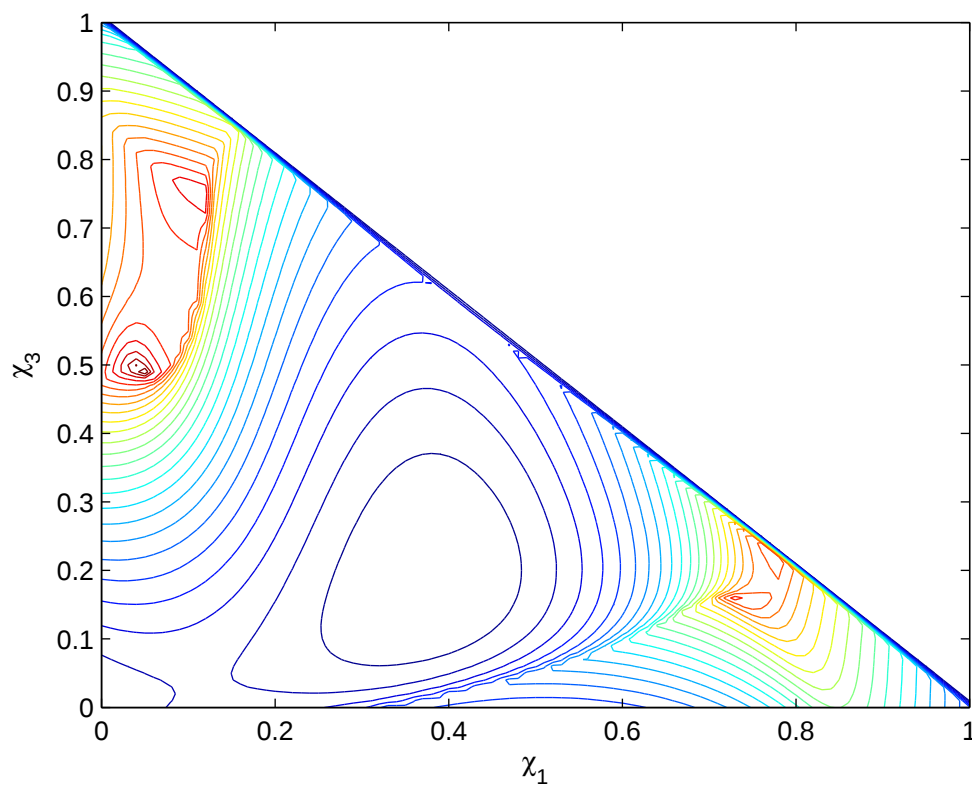


Figura 3.3: Exemplo de curvas de nível de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$.

Um segundo exemplo é a figura 3.4 que ilustra a superfície de nível de $f(\chi)$, sendo, $\chi = [\chi_1 \ \chi_2 \ 0 \ 1 - \chi_1 - \chi_2]^T$, para um dos sistemas testados com $n = 8$ e $\eta = 4$, para 1000×1000 valores distribuídos uniformemente. O método LMI/divisão localizou o mínimo global em $\chi = [0,0313 \ 0,8906 \ 0 \ 0,0781]^T$. Ao analisar, a coordenada do gráfico da figura 3.4 em $\chi_1 = 0,0313$ e $\chi_2 = 0,8906$, percebe-se uma pequena curva, que ultrapassa 0, sendo assim, um número negativo, representando a região de instabilidade. A figura 3.5 apresenta as curvas de níveis para o sistema citado. Observar que a região de instabilidade é tão pequena que houve a necessidade de plotar um segundo gráfico de curvas de nível para valores de $f(x)$ iguais a 0 e 0,1, figura 3.5(b), para poder visualizar a dimensão da região de instabilidade (destaque na figura). Porém, mesmo com essa dificuldade, o método DE, conseguiu-se localizar a instabilidade: $\min_{\chi \in \Omega} f(\chi) = -1.9907 \times 10^{-5}$.

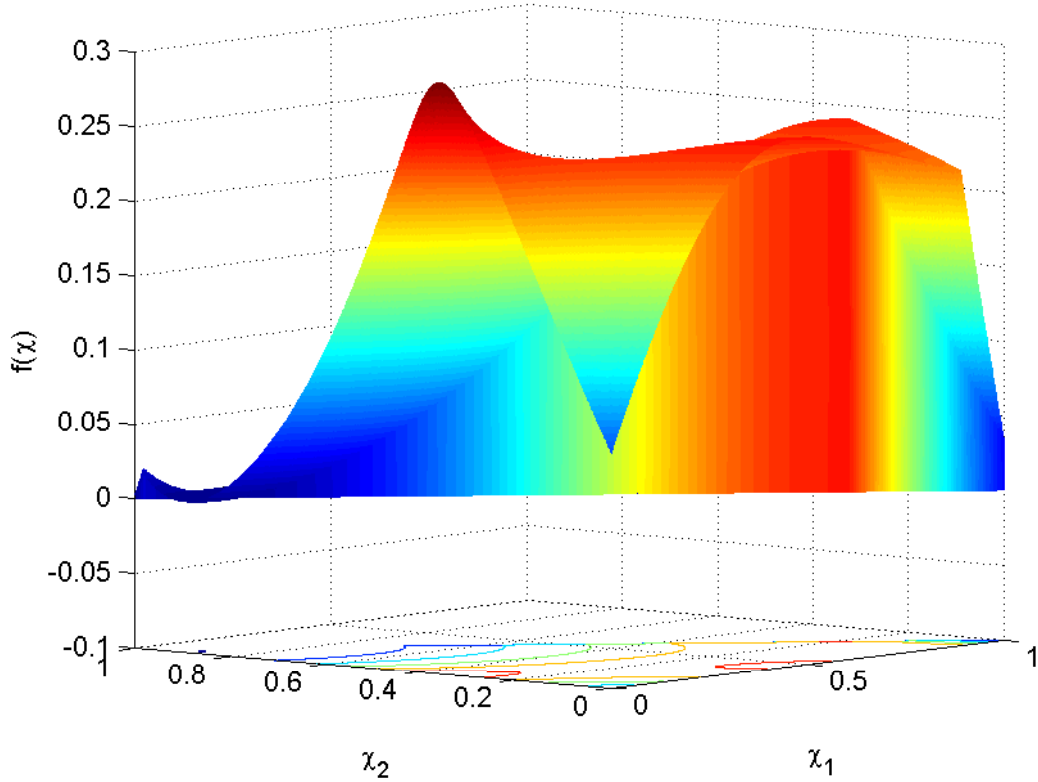
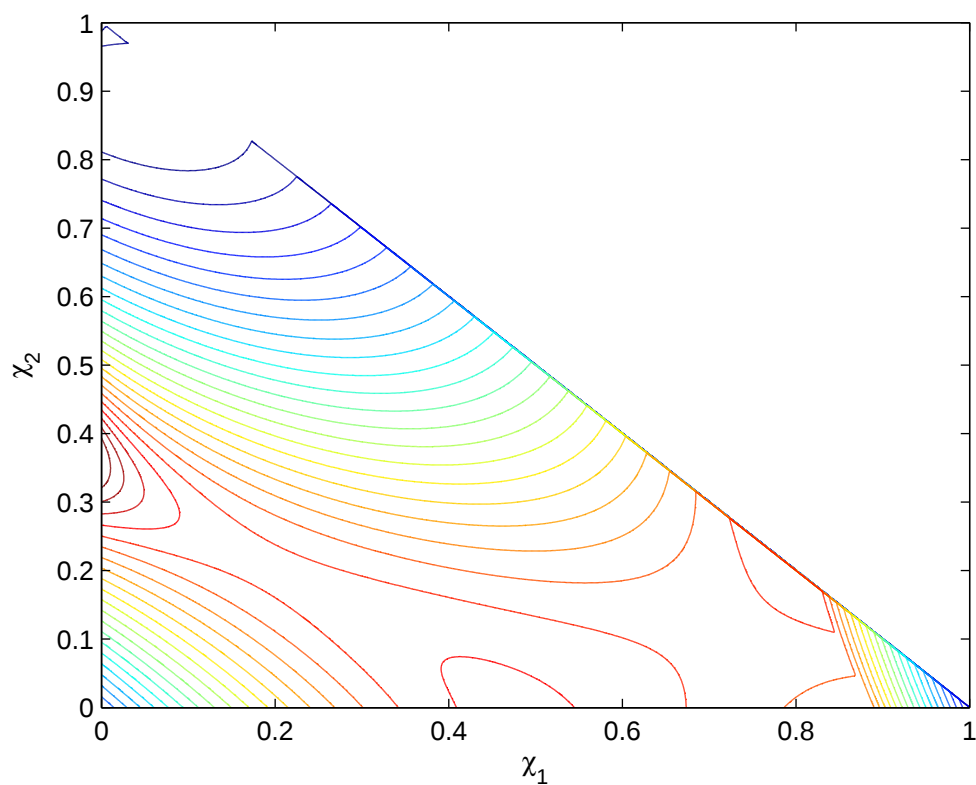
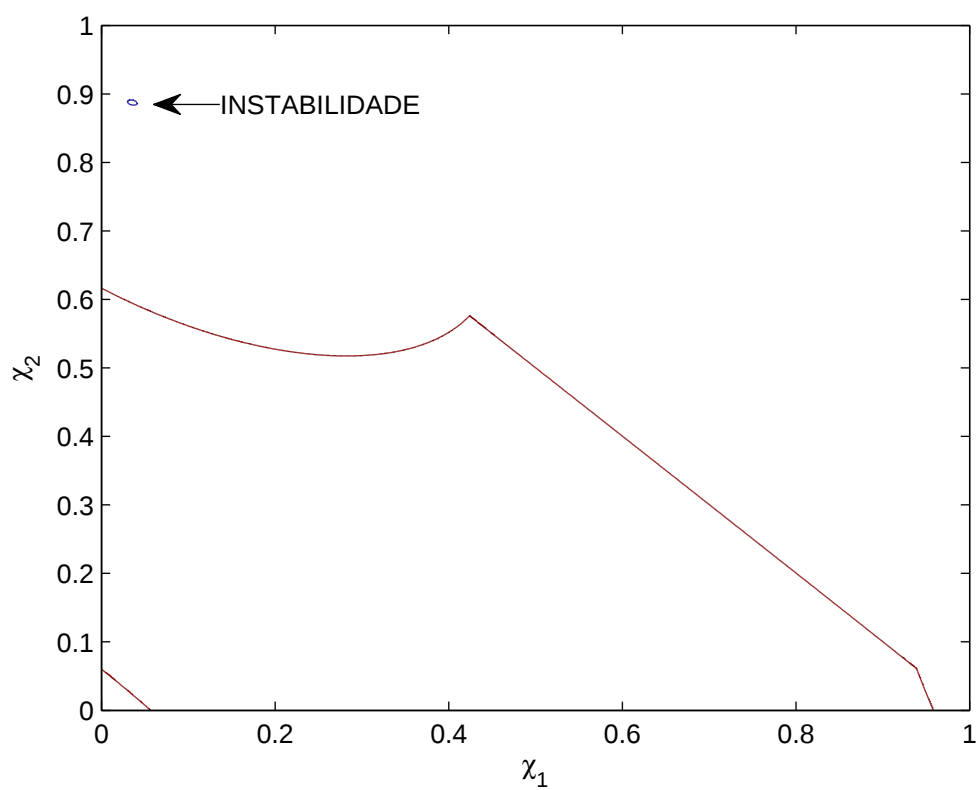


Figura 3.4: Exemplo 2 de uma superfície de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$.



(a) Curvas de nível.



(b) Curvas de nível iguais a 0 e 0,1.

Figura 3.5: Exemplo 2 de curvas de nível de $f(\chi)$ para $n = 8$ e $\eta = 4$.

NOTA 3.1: Para obter o 100% de sucesso, alguns parâmetros do algoritmo evolução diferencial foram testados, como por exemplo: o fator de escala da mutação diferencial, $F \in [0; 1]$; taxa de cruzamento, $C_r \in [0; 1]$; o tamanho da grade, ou seja, número de discretização, $a = 0,025$; e número de pontos escolhidos pela grade, $v \in [2, 7]$, onde estes dois últimos parâmetros, alteram o valor da população, N , como mostrado na equação (3.7).

NOTA 3.2: O método LMI/divisão calcula a coordenada χ do primeiro sistema instável, que fica localizado sobre o ponto médio de uma aresta, diferentemente do método fundamentado no algoritmo DE, que procura localizar a coordenada χ correspondente ao sistema com maior módulo dos autovalores de $A(\chi)$. Uma alternativa seria utilizar como critério de parada a localização do primeiro valor de $|f(\chi)| < 0$, mas para aplicação no procedimento iterativo de síntese de sistemas de controle robusto, descrito no capítulo 5, é mais importante localizar a coordenada que corresponde ao mínimo de $f(\chi)$.

NOTA 3.3: Nas metodologias que utilizou-se DE com estratégia apresenta em Storn (1995) e Moura e Gonçalves (2016a), manteve-se a mesma configuração da metodologia com grade, ou seja, um C_R de 0,5, um $F_i = \mathcal{U}_{0.6;0.8}$. O tamanho da população também foi igual para todas metodologias, sendo para $\eta = 4$, $N = 46$ e para $\eta = 8$, $N = 204$.

3.5 Conclusões

Foi proposto neste capítulo um método de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes e discretos no tempo com base no algoritmo evolução diferencial, auxiliado por uma busca por grade. Para problemas em que o custo computacional é aceitável, aconselha o uso do método que combina formulações LMIs com divisão de politopo para a análise de estabilidade robusta de SLIT com modelo politópico, uma vez que, este método identifica de forma determinística se o sistema é robustamente estável ou não. No caso do método proposto, se não for identificado um caso de sistema instável, não se pode afirmar que o sistema é robustamente estável. Porém, nesta dissertação, o método DE, auxiliado com a busca por grade, obteve 100% de acerto para os 60.000 testes realizados. É importante destacar que os sistemas testados, com todos os elementos das matrizes aleatórios, são bastante complexos, quando comparados com modelos de sistemas politópicos obtidos a partir de poucos parâmetros incertos variando em faixas, modelos estes, geralmente encontrados na prática.

Para examinar o método de análise de estabilidade robusta, para sistemas em tempo

discreto, baseado no algoritmo evolução diferencial, auxiliado com uma busca inicial por grade, foi gerado um teste exaustivo em que criou-se 600 sistemas e testou-se estes sistemas 100 vezes cada, um total de 60.000 testes. Estes testes foram mais exigentes que os abordados em Moura e Gonçalves (2016a), uma vez que nos testes realizados nesta dissertação teve-se sistemas politópicos com sistemas instáveis no interior do politopo. As diferenças da metodologia aplicada nesta dissertação para análise de estabilidade robusta em comparação ao trabalho de Moura e Gonçalves (2016a) são: o uso da busca por grade para gerar a população inicial do DE e a análise ser para sistemas em tempo discreto.

Como foi exposto na seção 3.4, o tempo computacional do método de análise fundamentado no algoritmo DE, foi menor do que o método LMI/divisão para todos os casos. Porém, o método LMI/divisão é determinístico, já o método DE é estocástico, não tendo a garantia de localização de um caso de sistema instável no politopo. Neste trabalho, mesmo o DE sendo estocástico, conseguiu-se 100% de acerto, diferentemente dos resultados obtidos pelas metodologias apresentadas por Storn (1995) e Moura e Gonçalves (2016a), sendo argumento mais plausível, o fato de que, o uso da busca por grade para definição da população inicial beneficiou o método DE. Na mesma seção, também foi mostrado que, somente a busca por grade não é suficiente, sendo necessário o método DE. Este o principal motivo para realização e sucesso do trabalho, sendo a pesquisa por grade um auxílio para o método DE.

Para a situação onde o método LMI/divisão se tornar proibitivo computacionalmente, o método proposto é uma alternativa a ser considerada, admitindo um pequeno risco.

Uma outra vantagem do método DE é sua maior simplicidade na implementação em relação ao LMI/divisão.

Além de mostrar a efetividade do método DE para análise de estabilidade robusta de sistemas politópicos em tempo discreto, uma outra contribuição desse estudo é apresentar uma implementação e configuração de parâmetros eficiente para o algoritmo DE tratar esse problema específico. Esta configuração final foi obtida após testes variando os parâmetros do algoritmo.

No próximo capítulo será avaliado o uso do método DE para cálculo de custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ para sistemas em tempo discreto. As metodologias de análise robusta apresentadas neste capítulo e no capítulo 4 serão empregadas no procedimento iterativo de síntese para controle robusto, apresentado no capítulo 5.

Método DE no Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$

4.1 Fundamentação Teórica

As normas matriciais de matrizes de transferência em malha fechada são uma das formas de descrever o desempenho de sistemas de controle. Como dito no capítulo 1, as normas matriciais $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ disponibilizam uma medida da ação das entradas exógenas (ruídos, distúrbios, sinais de referência etc.) sobre as saídas controladas do sistema (sinais de controle, erros de rastreamento etc.). No projeto de sistemas de controle, além de garantir a estabilidade, um desafio é certificar o desempenho com incertezas inerentes aos modelos empregados para análise e síntese.

Para aprimorar o método, da mesma forma adotada para análise de estabilidade robusta, é proposta uma nova forma de obtenção da população inicial que resulta em uma maior eficiência do método. A principal motivação para o desenvolvimento de uma metodologia para o cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ de sistemas em tempo discreto, é a utilização do método na etapa de análise do procedimento de síntese de controladores robustos descrito no capítulo seguinte.

4.2 Normas de Sinais e Sistemas

A norma $\mathcal{L}_2$ de um vetor de sinais discreto, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$, é definida por:

$$\|w(k)\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)^T w(k)} \quad (4.1)$$

Seja $T_{zw}(z) = C(zI - A)^{-1} + D$ a matriz de transferência que relaciona o vetor de entradas exógenas $w(k)$ com o vetor de saídas controladas $z(k)$. Duas normas de matrizes de transferência são as normas $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$. A norma $\mathcal{H}_2$ de uma matriz de transferência,

de um SLIT, própria, estável, em tempo discreto, no domínio da frequência, pode ser calculada como:

$$\|T_{zw}(z)\|_2 \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}[T_{zw}^*(e^{jw})T_{zw}(e^{jw})]dw} \quad (4.2)$$

sendo $\text{Tr}(\cdot)$ o traço da matriz. A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência para um sistema estável, é o pico do ganho da resposta em frequência, sendo definida como:

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty \triangleq \sup_{w \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}[T_{zw}(e^{jw})], \quad (4.3)$$

sendo $\bar{\sigma}$ o valor singular máximo do argumento.

Minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ significa minimizar o valor singular máximo, isso quer dizer, diminuir a “pior direção ou pior frequência”. Agora, minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ corresponde a minimizar a soma do quadrado de todos os valores singulares em todas as frequências, ou seja, “a direção média, frequência média”.

Estas duas normas têm interpretações relacionando os sinais de entrada e saída no domínio do tempo:

- Quando se têm uma entrada $w(k)$ na forma de um processo ruído branco com variância e intensidade unitária, a variância do sinal de saída $z(k)$ em regime estacionário é obtida por:

$$\|T_{zw}(z)\|_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left\{\frac{1}{T} \sum_{k=0}^T z(k)^T z(k)\right\} \quad (4.4)$$

sendo $E\{\cdot\}$ é a esperança matemática do argumento.

- O ganho $\mathcal{L}_2$ (ganho RMS) de um SLIT estável, corresponde ao maior ganho entre a entrada e saída sobre os sinais de entrada limitados $w(t) \in \mathcal{L}_2$, podendo ser obtido por:

$$\|T_{zw}(z)\|_\infty = \max_{w(k) \in \mathcal{L}_2, w(k) \neq 0} \frac{\|z(k)\|_2}{\|w(k)\|_2} \quad (4.5)$$

As normas de sistemas podem ser calculados através do modelo de espaço de estados. Considere que $T_{zw} = C(zI - A)^{-1}B + D$, então:

$$\|T_{zw}(z)\|_2^2 = \text{traço}(B^TQB + D^TD) = \text{traço}(CPC^T + DD^T) \quad (4.6)$$

sendo Q e P os Gramianos de observabilidade e controlabilidade respectivamente, que podem ser calculados pelas seguintes equações algébricas de Lyapunov:

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (4.7)$$

$$A^TQ + QA + C^TC = 0 \quad (4.8)$$

O cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ para sistema discreto no tempo, estável e próprio, pode ser caracterizado pelo problema LMI:

$$\begin{aligned} \|T_{zw}\|_2^2 &= \min_{P,J} \text{Tr}(J) \\ \text{sujeito: } &APA^T - P + BB^T \prec 0 \\ &\begin{bmatrix} J & CP & D \\ PC^T & P & \mathbf{0} \\ D^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando o complemento de Schur:

$$APA^T - P + BB^T \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & AP & B \\ PA^T & P & \mathbf{0} \\ B^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.10)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada solucionando o seguinte problema de otimização baseado em LMI: se existir $\gamma > 0$ e $P = P^T \succ 0$ que resolvem:

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \min_{\gamma, P=P^T \succ 0} \gamma \\ \text{sujeito: } &\begin{bmatrix} P & A^TP & \mathbf{0} & C^T \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^TP & \mathbf{I} & D^T \\ C & \mathbf{0} & D & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

então $\|T_{zw}(z)\|_\infty^2 = \gamma$.

As formulações LMIs podem ser aplicadas em SLIT incertos com modelos politópico, para calcular o valor máximo da norma $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, isto é, os custos garantidos $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$.

4.3 Formulação do Problema

Considere a representação pelo modelo no espaço de estados de um sistema discreto, linear, invariante no tempo, a seguir:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\chi)x(k) + B(\chi)w(k) \\ z(k) &= C(\chi)x(k) + D(\chi)w(k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

com $A(\chi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\chi) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $C(\chi) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ e $D(\chi) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$. Seja $S(\chi)$ a matriz que representa de forma compacta o sistema (4.12):

$$S(\chi) \triangleq \begin{bmatrix} A(\chi) & B(\chi) \\ C(\chi) & D(\chi) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Considere que a matriz do sistema $S(\chi)$ não é precisamente conhecida, porém, pertence a um politopo ou conjunto poliédrico convexo fechado, $S(\chi) \in \mathbf{S}$. O conjunto $\mathbf{S}$ é um politopo no espaço de matrizes definido pelo conjunto de todas matrizes obtidas pela combinação convexa dos seus η vértices:

$$\mathbf{S} \triangleq \left\{ S(\chi) : S(\chi) = \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i S_i, \chi \in \Omega \right\} \quad (4.14)$$

sendo

$$S_i \triangleq \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, \eta \quad (4.15)$$

os vértices do politopo.

Para o cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ (valores máximos das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$) de um sistema SLIT incerto com modelo politópico, para o domínio politópico Ω , tem:

$$\delta_c \triangleq \max_{\chi \in \Omega} \|T_{zw}(z, \chi)\|_2 \quad (4.16)$$

$$\gamma_c \triangleq \max_{\chi \in \Omega} \|T_{zw}(z, \chi)\|_\infty \quad (4.17)$$

sendo $T_{zw}(z, \chi) = C(\chi)[zI - A(\chi)]^{-1}B(\chi) + D(\chi)$.

Uma formulação LMI para a determinação do custo garantido $\mathcal{H}_2$ pode ser encontrada no Teorema 3 apresentado em de Oliveira, Geromel e Bernussou (2002). Este teorema, modificado para tratar $D \neq 0$, diz: $\delta_c^2 \leq \mu_c$, se existe $P \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, $W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$\mu_c^* = \min_{\mu_c, P_i}$$

$$Tr(W_i) < \mu_c$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W_i & C_i G & D_i \\ GC_i^T & G + G^T - P_i & \mathbf{0} \\ D_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} P_i & A_i G & B_i \\ GA_i^T & G + G^T - P_i & \mathbf{0} \\ B_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & i = 1, \dots, \eta \end{aligned} \quad (4.18)$$

O cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pode ser feito através do teorema 4 proposto por de Oliveira, Geromel e Bernussou (2002), resolvendo o seguinte problema:

$$\mu_d^* = \min_{\mu_d, P_i}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_i & A_i G & B_i & \mathbf{0} \\ GA_i^T & G + G^T - P_i & \mathbf{0} & G^T C_i^T \\ B_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & D_i^T \\ \mathbf{0} & C_i G & D_i & \mu_d \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & i = 1, \dots, \eta \end{aligned} \quad (4.19)$$

então $\gamma_c^2 \leq \mu_d^*$.

As formulações de análise fundamentadas em LMIs, em muitos casos, não consegue obter uma solução para o problema de otimização e quando consegue calcular, pode apresentar um alto conservadorismo no resultado (Gonçalves et al., 2007). Os problemas de cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema politópico podem serem formulados como um problema de otimização:

$$\chi_2^* = \arg \max_{\chi \in \Omega} \|T_{zw}(z, \chi)\|_2 \quad (4.20)$$

$$\chi_\infty^* = \arg \max_{\chi \in \Omega} \|T_{zw}(z, \chi)\|_\infty \quad (4.21)$$

sendo $\delta_c = \|T_{zw}(z, \chi_2^*)\|_2$ e $\gamma_c = \|T_{zw}(z, \chi_\infty^*)\|_\infty$. A função objetivo a ser minimizada, $f(\chi) : \chi \in \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada norma, é estabelecida como:

$$f_2(\chi) \triangleq -\|T_{zw}(z, \chi)\|_2 \quad (4.22)$$

$$f_\infty(\chi) \triangleq -\|T_{zw}(z, \chi)\|_\infty \quad (4.23)$$

sendo a inversão de sinal aplicada para transformar o problema de maximização em um problema de minimização.

4.4 Método Evolução Diferencial aplicado ao Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$

Nesta seção será mostrado o uso do método evolução diferencial para cálculo de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ de SLIT em tempo discreto, referentes aos problemas de otimização (4.20) e (4.21) considerando as funções objetivo (4.22) e (4.23). As adequações do método DE para cálculo de custos garantidos são apresentados nas subseções seguintes.

4.4.1 População Inicial

Na formação da população inicial do algoritmo DE, assim como no capítulo anterior, utiliza-se uma busca baseada em grade sobre cada aresta. De acordo com esta grade, é escolhido as v melhores soluções em cada aresta, sendo este v um parâmetro a escolha.

A partir da busca por meio de grade, com discretização a sobre cada aresta, escolhe-se as $v + 2$ melhores soluções geradas por aresta. Este número de pontos por aresta foi escolhido após testes de forma a se ter um tamanho de população adequado. Além destes pontos gerados sobre as arestas, também são incluídos na população os η vértices do polítopo Ω e η pontos aleatórios sobre as arestas. A fórmula para o tamanho total da população é: $N = 2\eta + (2 + v)(\eta)(\eta - 1)/2$, sendo η o número de vértices, v um número à escolher e $\eta(\eta - 1)/2$ o número de arestas. O parâmetro v corresponde ao número de pontos a serem obtidos da busca por grade com $(1/a) - 1$ pontos (não incluídos os vértices).

4.4.2 Mutação Diferencial

Com base na experiência em outros trabalhos e nos resultados para sistemas em tempo contínuo apresentados em Moura e Gonçalves (2016b), dentre as diversas formas de implementação do operador de mutação diferencial, foi utilizado a mutação com diferença dupla (DE/rand/2):

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_1(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) + F_2(\chi_{k,r_4} - \chi_{k,r_5})$$

Foi empregado o fator de escala aleatório para cada mutação, sendo tanto para norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ o fator igual à: $F_i = \mathcal{U}_{0.1,1}$. Foram testados outras possibilidades de mutação, porém, a que apresentou melhor resultado foi a diferença dupla.

4.4.3 Cruzamento, Tratamento de Restrições e Seleção

A etapa de cruzamento é realizada da mesma forma descrita na seção 3.3.3, sendo, o valor da taxa de cruzamento, C_r , empregado de 0,5, para ambos custos garantidos. O tratamento das restrições foi feito idêntico ao da seção 3.3.4. O operador seleção adotado para o cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ é descrito no capítulo 2 na seção 2.2.3.

4.4.4 Critério de Parada

Como critério de parada têm-se: o número máximo de gerações, N_g , ou a convergência da população ao comparar os valores máximos e mínimos da k -ésima população, $\max_i f(\chi_{k,i}) - \min_i f(\chi_{k,i}) \leq \varepsilon$, $\chi_{k,i} \in \mathbf{X}_k$. Foi escolhido neste trabalho o valor de $\varepsilon = 10^{-3}$ em ambos custos garantidos.

O algoritmo evolução diferencial está descrito na seção 2.2.5.

NOTA 4.1: Diferentemente da norma $\mathcal{H}_2$, na norma $\mathcal{H}_\infty$ deve-se ter o cuidado da escolha do ε , pois, o mesmo deve ser compatível com a precisão especificada que foi requerida no cálculo. Neste trabalho, a precisão foi justamente o mesmo valor de ε , ou seja, 10^{-3} . Anteriormente, tinha sido escolhido um ε de 10^{-8} , no qual, aumentou o tempo computacional, sem ter grandes ganhos no percentual de acerto.

4.5 Testes Exaustivos

Para validar o método de cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ fundamentado no método evolução diferencial com busca inicial por grade, foi executado um teste exaustivo. No teste feito para cada custo garantido, foram gerados 25 sistemas aleatórios para valores combinados de $n \in \{2,4,8\}$ e $\eta \in \{2,4,8\}$, totalizando 225 sistemas para cada custo garantido. As matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $n_w = \mathcal{I}_{(n)}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $n_z = \mathcal{I}_{(n)}$, $i = 1, \dots, \eta$ e $D_i = 0$ de dimensão compatível, foram criadas com elementos aleatórios, com distribuição Gaussiana, com média zero e desvio padrão unitário. Para garantir que os vértices correspondam a sistemas estáveis, mas próximos da instabilidade, a matriz A_i foi recalculada como:

$$A_i = \frac{A_i}{\sigma_{m,i} + 0,1 \mathcal{U}_{(0,1)}}, i = 1, \dots, \eta, \quad (4.24)$$

sendo $\sigma_{m,i}$ o valor máximo do módulo dos autovalores de A_i . Para criação dos sistemas para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ na equação anterior não é necessário a multiplicação pelo fator 0,1. O objetivo desta estratégia de criação de sistemas politópicos é dificultar o cálculo do custo garantido.

Tabela 4.1: Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_\infty$.

n, η	$P_{DE}(\%)$	$E_{max}(\%)$	$T_{BB}(s)$	$T_{DE}(s)$	$P_G(\%)$	$R_{DE}(\%)$
2,2	98,8	0,0020	5,5740	9,9943	56	99,6
2,4	94,8	0,0039	18,7760	132,1055	28,4	98
2,8	91,2	0,0025	547,5960	$1,2259 \times 10^3$	32	92
4,2	95,2	0,0202	6,3340	11,3141	44,8	98
4,4	96,4	0,0015	44,4050	163,9551	32,4	96,8
4,8	93,6	0,0208	$2,9938 \times 10^3$	$1,5010 \times 10^3$	32,4	100
8,2	96,0	0,0226	50,96	16,8445	30	100
8,4	100	0	479,4540	213,4326	12,4	100
8,8	100	0	$2,3752 \times 10^4$	$1,8356 \times 10^3$	20	100

O método que combina divisão de politopo com formulação LMI foi usado para análise de estabilidade robusta e cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas politópicos criados de forma aleatória. Assim, caso um sistema não fosse robustamente estável ou o máximo da norma $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ ocorresse em um dos vértices do politopo, este sistema foi desconsiderado.

O método utilizado no cálculo do custo garantido, baseado no algoritmo DE foi efetuado 10 vezes para cada sistema politópico, totalizando 2.250 testes. Foi utilizado o mesmo computador que o da seção anterior: processador Intel CoreTM i7-4510U 2,60GHz. A tabela 4.1 mostra os resultados encontrados para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, sendo P_{DE} o percentual de sucesso do método DE, isso quer dizer, o percentual de vezes em que o método DE obteve valor igual ou superior ao do limitante inferior do método BB, T_{DE} o tempo computacional total médio das 10 análises do algoritmo DE, T_{BB} o tempo computacional pelo método BB (tempos dados em segundos), E_{max} o erro máximo percentual do método DE em relação ao limitante inferior do método BB, P_G o percentual de acerto da pesquisa pela grade e R_{DE} o percentual de vezes em que o algoritmo DE refinou o resultado inicial (pesquisa pela grade), ou seja, minimizou a função objetivo. Para estes testes, na busca por grade foram adotados os valores de $a = 0,05$ (19 pontos) e $v = 0$, lembrando que, diferentemente do capítulo anterior, aqui necessariamente já se soma 2 ao v para garantir o tamanho mínimo da população igual a 6, para a mutação com duas diferenças, para o valor mínimo de $\eta = 2$. O método BB foi implementado com a função limitante superior definida pela formulação LMI dada pela equação (4.19) para o cálculo de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$.

Pelos resultados obtidos, considera-se que o método DE obteve sucesso para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, uma vez que, o maior erro percentual foi de apenas 0,0226%, ou seja, quase nulo. Sobre o tempo computacional, o método DE, para valores menores de n e η é maior, porém, a partir de $n = 4$ e $\eta = 8$, esta situação inverte. Destaca-se que,

Tabela 4.2: Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_\infty$ - Moura e Gonçalves (2016b).

n, η	$P_{DE}(\%)$	$E_{max}(\%)$	$T_{BB}(s)$	$T_{DE}(s)$
2,2	99,2	0,0063	5,6070	10,3135
2,4	93,2	30,6769	19,0540	171,5359
2,8	92,4	41,9000	557,9360	$1,7826 \times 10^3$
4,2	96	0,0201	8,4900	15,1135
4,4	94	57,7551	45,1380	216,7928
4,8	92,8	2,2169	$3,0343 \times 10^3$	$2,2384 \times 10^3$
8,2	96	0,0226	51,3260	19,1853
8,4	99,6	11,1613	474,1610	300,1644
8,8	96,8	67,1108	$2,3838 \times 10^4$	$2,7032 \times 10^3$

com o aumento de n e η , a diferença do custo computacional favorável ao método DE fica maior.

Sobre o uso da pesquisa por grade sobre as arestas, esta sozinha praticamente não calcula o custo garantido, porém, é uma ferramenta de grande auxílio para o algoritmo DE. Para comprovar isto, a tabela 4.2 mostra os resultados obtidos para o cálculo do custo garantido pelo algoritmo DE com a estratégia de Moura e Gonçalves (2016b), sendo as variáveis as mesmas da tabela anterior (exceto o que engloba a busca por grade inicial). Na tabela 4.2, mostra que, assim como ocorreu no algoritmo DE auxiliado por uma busca por grade, com o método DE de Moura e Gonçalves (2016b), o tempo computacional foi menor, quando comprado com o método BB, a partir dos sistemas com $n = 4$ e $\eta = 8$. Porém, o erro máximo percentual em alguns testes foram bastante significativos, como por exemplo, em sistema $n = 8$ e $\eta = 8$, teve-se 67,1108% de erro. Isto comprova que a busca inicial por grade na formação da população inicial do algoritmo DE, para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, foi de grande valia para sua precisão. Para comparação dos tempos computacionais, a tabela 4.3, mostra o tempo computacional para o método DE axliado por grade, T_{DE_G} , e o método DE de Moura e Gonçalves (2016b), $T_{DE_{MG}}$, onde, os tempos são dados em segundos. Os resultados da tabela 4.3, demonstra que, para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$, a contribuição deste trabalho sobre a busca inicial por grade, mostrou grande importância no tempo computacional, sendo que em todos os testes, esta metodologia foi menor, um dos objetivos da dissertação - encontrar uma metodologia de análise robusta confiável com menor custo computacional possível.

Um erro percentual elevado no método, sem a busca por grade, ocorreu para um modelo com $n = 4$ e $\eta = 4$, erro de 57,7551%, sendo que o valor máximo de norma encontrado, em alguns testes, foi de 507,02. O método BB obteve o pior caso de norma igual a 1207,2 para um sistema sobre a aresta interligando os vértices 1 e 3: $\chi^* = [0.4297$

Tabela 4.3: Tempo computacional das metodologias com busca inicial com grade e Moura e Gonçalves (2016b) - Cálculo custo garantido $\mathcal{H}_\infty$

n, η	T_{DEMG} (s)	T_{DEG} (s)
2,2	10,3135	9,9943
2,4	171,5359	132,1055
2,8	$1,7826 \times 10^3$	$1,2259 \times 10^3$
4,2	15,1135	11,3141
4,4	216,7928	163,9551
4,8	$2,2384 \times 10^3$	$1,5010 \times 10^3$
8,2	19,1853	16,8445
8,4	300,1644	213,4326
8,8	$2,7032 \times 10^3$	$1,8356 \times 10^3$

0 0.5703 0] T . A figura 4.1 ilustra a superfície de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty$.

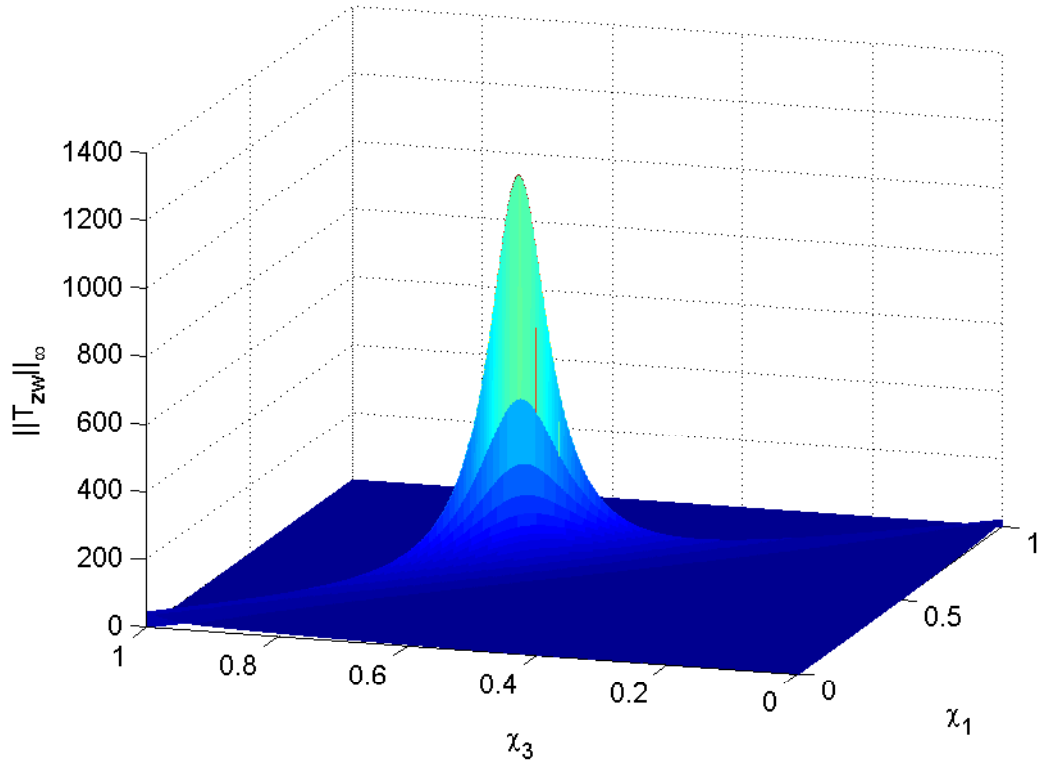


Figura 4.1: Superfície de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 4$ e $\eta = 4$.

A figura 4.2(a) apresenta as curvas de níveis para o sistema citado. Pela figura 5.2(b), que é uma ampliação da região próxima à aresta, nota-se que existem diversas bacias de atração, com mínimos locais próximos. O método DE auxiliado pela busca inicial por grade, para este exemplo, não obteve erro nos 10 testes.

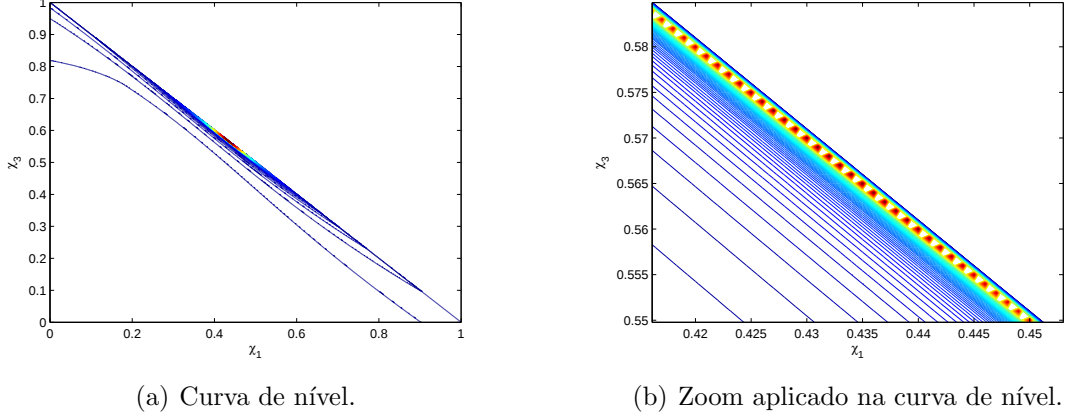


Figura 4.2: Curva de nível de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 4$ e $\eta = 4$.

A figura 4.3 apresenta o perfil da norma sobre a aresta entre χ_1 e χ_3 , variando de 0,001, onde pode ser observado a grande diferença entre o máximo local sobre o vértice e o máximo global.

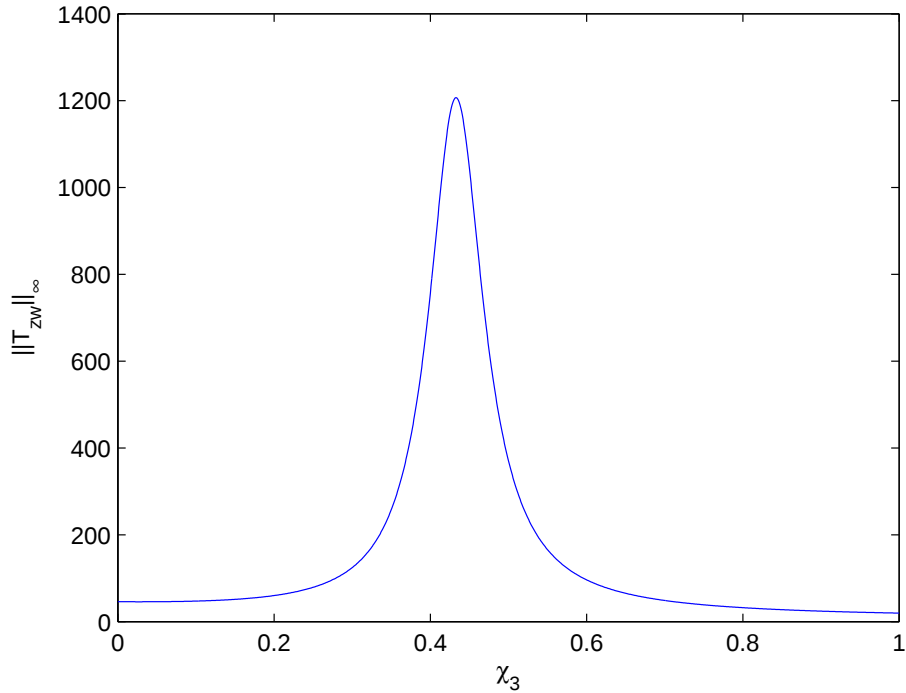


Figura 4.3: Perfil de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_\infty$ sobre uma aresta de um teste para $n = 4$ e $\eta = 4$.

Tabela 4.4: Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_2$

n, η	$P_{DE}(\%)$	$E_{max}(\%)$	$T_{BB}(s)$	$T_{DE}(s)$	$P_G(\%)$	$R_{DE}(\%)$
2,2	89,2	0,0029	9,761	9,4427	20,8	100
2,4	86	0,0076	76,253	84,4739	16	98,4
2,8	62,8	0,0055	$5,6404 \times 10^3$	681,1878	16	82,8
4,2	98	$3,6476 \times 10^{-4}$	26,005	7,7904	8,8	100
4,4	92,8	0,0037	260,327	97,4808	8	100
4,8	74,4	26,3495	$2,2469 \times 10^4$	792,9601	8	92,8
8,2	100	0	170,456	19,9517	8	99,6
8,4	80,8	77,7328	$2,4723 \times 10^3$	106,1146	4	94,8
8,8	88	9,3884	$3,0026 \times 10^5$	856,0521	0	92

A tabela 4.4 mostra os resultados encontrados para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$, sendo as variáveis as mesmas da tabela 4.1. A implementação do método BB foi com a função limitante superior definida pela formulação LMI dada pela equação (4.18) para o cálculo de custo garantido $\mathcal{H}_2$.

Através dos resultados encontrados pode-se considerar que o método DE obteve sucesso para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$, porém, apresentou erros percentuais consideráveis, para sistemas com $n = 4$ e $\eta = 8$, um erro de 26,3495%, para $n = 8$ e $\eta = 4$, um erro de 77,7328% e para $n = 8$ e $\eta = 8$, um erro de 9,3884% e 3,4001%, porém, estes erros são apenas para 4 sistemas de um total de 225. Exceto para estes 4 sistemas, o maior erro foi de 0,4% para $n = 8$ e $\eta = 4$. O tempo computacional no método DE com busca inicial com grade foi menor em todos os testes, quando comparado com o método BB, exceto para sistemas com $n = 2$ e $\eta = 4$. Assim, para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$, o algoritmo DE reforça ainda mais, sobre o custo benefício do tempo computacional.

Sobre o uso da pesquisa por grade sobre as arestas, por si só não é suficiente para o cálculo confiável do custo custo garantido $\mathcal{H}_2$, porém, auxilia o algoritmo DE. Para validação da afirmativa anterior, a tabela 4.5 apresenta os resultados obtidos, pelo método DE através da metodologia utilizada em Moura e Gonçalves (2016b), sendo as variáveis com o mesmo significado da tabela 4.4. Conforme apresentado, os erros aumentaram consideravelmente, como por exemplo no teste com $n = 2$ e $\eta = 4$. Enquanto o método com busca inicial através de uma grade apresentou um erro de apenas 0,0076%, o DE de Moura e Gonçalves (2016b) teve um erro de 41,9666%. Quando o método de Moura e Gonçalves (2016b) apresentou melhor desempenho, foi em caso que o método com busca com grade apresentou erro praticamente nulo. Por exemplo, considere o teste com sistema em $n = 2$ e $\eta = 2$, em que o DE apresentado por Moura e Gonçalves (2016b) teve 0% de erro e o com busca por grade teve 0.0029%. Sobre o tempo computacional, em comparação com BB, o método Moura e Gonçalves (2016b), exceto para os dois problemas

Tabela 4.5: Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_2$ - sem busca inicial por grade.

n, η	$P_{DE}(\%)$	$E_{max}(\%)$	$T_{BB}(s)$	$T_{DE}(s)$
2,2	100	0	9,7980	10,9609
2,4	97,6	41,9666	74,8490	181,3689
2,8	93,6	10,9094	$5,3774 \times 10^3$	$1,6461 \times 10^3$
4,2	100	0	25,969	17,2459
4,4	98,8	29,5660	257,6220	215,1040
4,8	64,4	64,5494	$2,2173 \times 10^4$	$1,7267 \times 10^3$
8,2	100	0	171,3230	15,7627
8,4	87,6	77,7328	$2,4607 \times 10^3$	227,9936
8,8	78,4	69,4680	$3,0026 \times 10^5$	$2,2772 \times 10^3$

Tabela 4.6: Tempo computacional das metodologias com busca inicial com grade e Moura e Gonçalves (2016b) - Cálculo custo garantido $\mathcal{H}_2$

n, η	$T_{DE_{MG}}(s)$	$T_{DE_G}(s)$
2,2	10,9609	9,4427
2,4	181,3689	84,4739
2,8	$11,6461 \times 10^3$	681,1878
4,2	17,2459	7,7904
4,4	215,1040	97,4808
4,8	$1,7267 \times 10^3$	792,9601
8,2	15,7627	19,9517
8,4	227,9936	106,1146
8,8	$2,2772 \times 10^3$	856,0521

mais simples, $n = 2$ e $\eta = 2$ e 4, obteve um tempo menor.

A tabela 4.6 mostra a comparação dos tempos computacionais entre o método DE auxiliado por grade, T_{DE_G} , e o método DE de Moura e Gonçalves (2016b), $T_{DE_{MG}}$, sendo, os tempos em segundos. Estes resultados comprovam que, para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$, a busca inicial por grade é de grande importância no tempo computacional, sendo que em todos os testes, esta metodologia apresentou menores valores em média, um dos objetivos da dissertação.

NOTA 4.2: Sobre a tabela 4.4, foi escolhido um critério de parada para o método DE que resulta em melhor desempenho computacional. Alguns testes não contabilizados como sucesso, na verdade obtiveram erros praticamente irrelevantes, como 0,0029%. Caso seja desejado uma melhora na quantidade de acerto, consegue-se com aumento da precisão, ϵ , para 10^{-8} , sendo alcançado um aumento do percentual do acerto, como contra-partida tem um aumento do custo computacional. A tabela 4.7 ilustra estes resultados.

Tabela 4.7: Resultados do teste exaustivo $\mathcal{H}_2$ com $\epsilon = 10^{-8}$

n, η	$P_{DE}(\%)$	$E_{max}(\%)$	$T_{DE}(s)$	$P_G(\%)$	$R_{DE}(\%)$
2,2	100	0	13,9466	20,4	100
2,4	100	0	144,6536	16,4	100
2,8	100	0	$1,2646 \times 10^3$	16	100
4,2	100	0	15,8502	8,4	100
4,4	100	0	156,1521	8	100
4,8	96,4	26,3495	$1,264 \times 10^3$	8	96,4
8,2	100	0	26,2046	8	100
8,4	93,6	77,7328	167,3361	4	93,6
8,8	92	9,3884	$1,5216 \times 10^3$	0	92

O pior caso de falha pelo método DE foi para os casos de $n = 8$ e $\eta = 4$, com o pior erro de 77,7328%, porém, isto aconteceu para 4 testes, os restantes dos testes (6) conseguiram encontrar o custo garantindo $\mathcal{H}_2$ com precisão. O método BB após 100 iterações não encontrou a norma com a precisão desejada, sendo necessário, aumentar o número de iterações neste teste para conseguir encontrar o resultado desejado, comprovando a imensa dificuldade deste teste. Para ilustrar a dificuldade do problema de cálculo do custo garantido deste teste, a figura 4.4 ilustra a superfície de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_2$ para $\chi = [\chi_1 \ 1 - \chi_1 - \chi_3 \ \chi_3 \ 0]^T$.

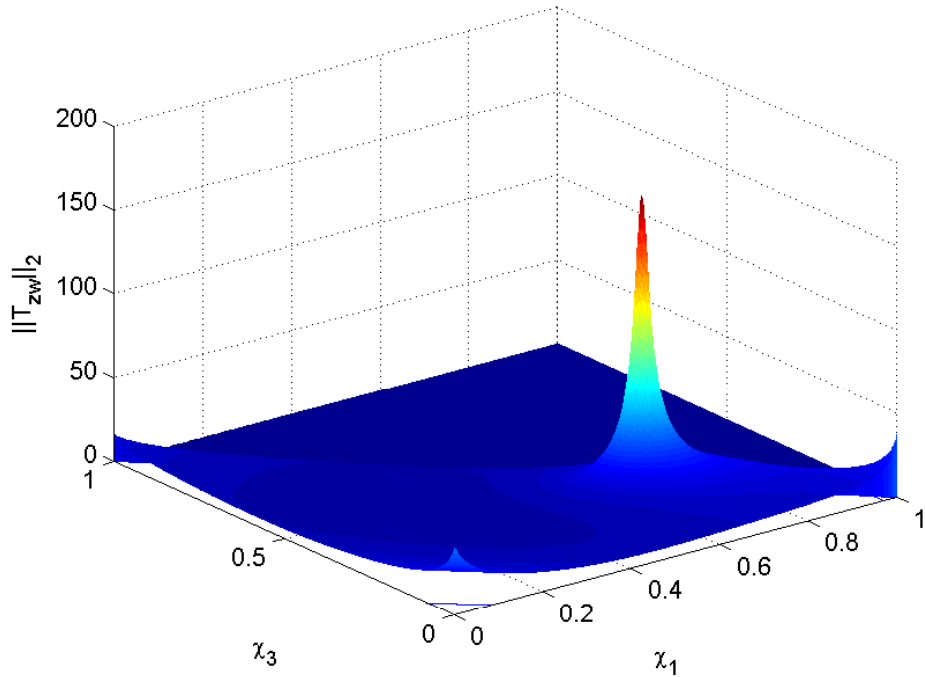


Figura 4.4: Superfície de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_2$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 8$ e $\eta = 4$.

O pior caso de norma ocorre sobre uma faixa estreita da aresta entre os vértices 1 e 3. A figura 4.5 mostra o perfil da norma sobre essa aresta χ_1 , variando de 0,001. O método BB chegou a 100 iterações sem localizar com a precisão desejada, assim, localizando o pior caso para $\chi^* = [0.6338 \ 0.0903 \ 0.2759 \ 0]^T$. Para a precisão desejada foram necessárias 300 iterações do método BB, porém o χ^* , foi praticamente o mesmo encontrado no teste com 100 iterações (mudança na 3ª casa decimal), quando se fez este teste das 300 iterações, o método DE encontrou 2 vezes a norma sem erro, provando, ser um método estocástico (metologia foi aplicada duas vezes, em uma conseguiu acertar 6 vezes, na segunda, apenas 2 vezes, para os 10 testes). A figura 4.6 mostra as curvas de níveis para este sistema.

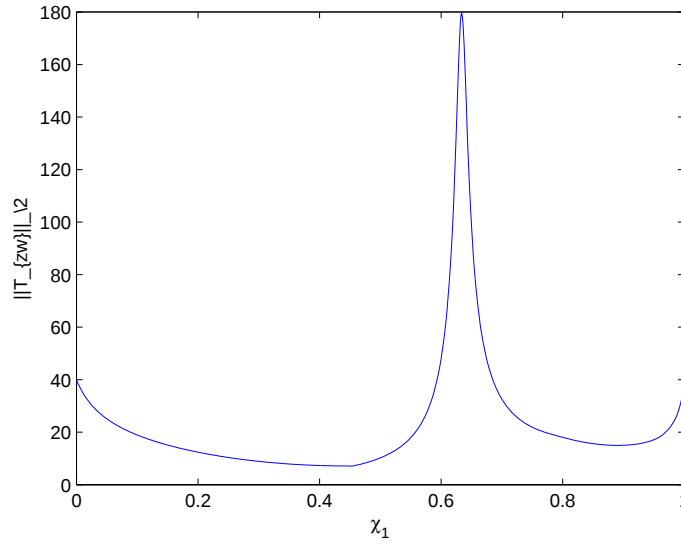


Figura 4.5: Perfil de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_2$ sobre uma aresta de um teste para $n = 8$ e $\eta = 4$.

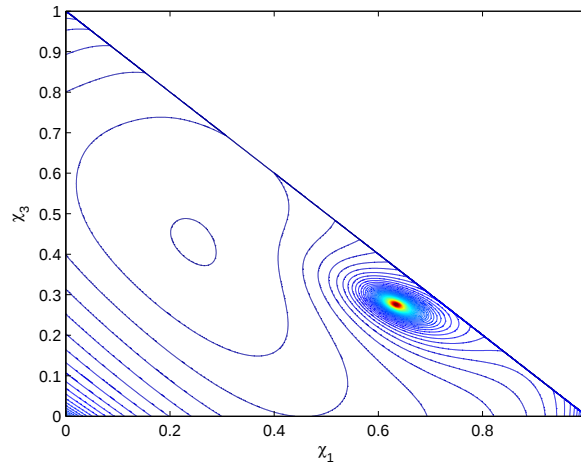


Figura 4.6: Curva de nível de $\|T_{zw}(s, \chi)\|_2$ em função de χ_1 e χ_3 para um modelo com $n = 8$ e $\eta = 4$.

4.6 Conclusões

Foi proposto um método de cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para de sistemas lineares invariantes e discretos no tempo com base no algoritmo evolução diferencial, auxiliado por uma busca por grade. Em problemas em que o custo computacional é aceitável quando se utiliza o método *Branch-and-bound*, indica-se este método por ser uma técnica que calcula o custo garantido de forma determinística, com uma precisão desejada. No caso do método proposto (DE), como foi verificado nos testes exaustivos, nem sempre o algoritmo DE converge para o máximo global. Neste trabalho, o método evolução diferencial, em conjunto com a busca por grade, para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pode-se dizer que praticamente obteve 100% para os 225 sistemas. Para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$, 4 sistemas dos 225, obteve erros significativos. É interessante destacar que os sistemas testados, com todos os elementos das matrizes aleatórios, são muito mais complexos do que os modelos de sistemas politópicos obtidos a partir de poucos parâmetros incertos variando em faixas. A versão final mostrada foi obtida após vários testes com diferentes implementações e diferentes configurações de parâmetros. Também foi feita uma comparação da metodologia proposta, com o algoritmo DE sem a busca inicial por grade. Foi verificado que, com a contribuição na metodologia de formação da população inicial, obteve-se erros bem menores e o principal objetivo, em todos os casos, tempo computacional menor.

Quando o método BB se tornar proibitivo computacionalmente, o método proposto é uma alternativa a ser considerada, admitindo um pequeno risco. Uma outra vantagem do método proposto é sua simplicidade na implementação em relação ao BB.

O próximo capítulo descreve o procedimento iterativo de síntese robusto, em que o método de análise de estabilidade robusta, apresentado no capítulo anterior, e os métodos de análise de desempenho robusto pelo cálculo dos custos garantidos, propostos nesse capítulo, são utilizados.

Síntese de Controladores Robustos Discretos pelo Método DE

5.1 Introdução

Na área de controle robusto tem ocorrido um grande desenvolvimento nas últimas décadas. Um problema amplamente estudado na literatura é o controle de sistemas lineares invariantes no tempo com parâmetros incertos, ou seja, parâmetros que não são precisamente conhecidos, porém variam em um intervalo conhecido. O sistema de controle tem como objetivos garantir a estabilidade do sistema e obter o desempenho ótimo para todos os infinitos valores possíveis dos parâmetros. No entanto, tal problema é de alta complexidade de solução.

Nos últimos anos surgiram vários trabalhos dedicados a criação de formulações para projeto de controladores aplicados em sistemas incertos, fundamentado em problemas de otimização lineares com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Uma grande vantagem desta metodologia é que o problema é convexo, assim o problema de otimização do pior caso é tratado apenas em termos dos vértices do politopo. Uma desvantagem das formulações LMIs é a obtenção de resultados conservadores, ou até mesmo, não garantia de geração de uma solução para certos problemas de controle robusto.

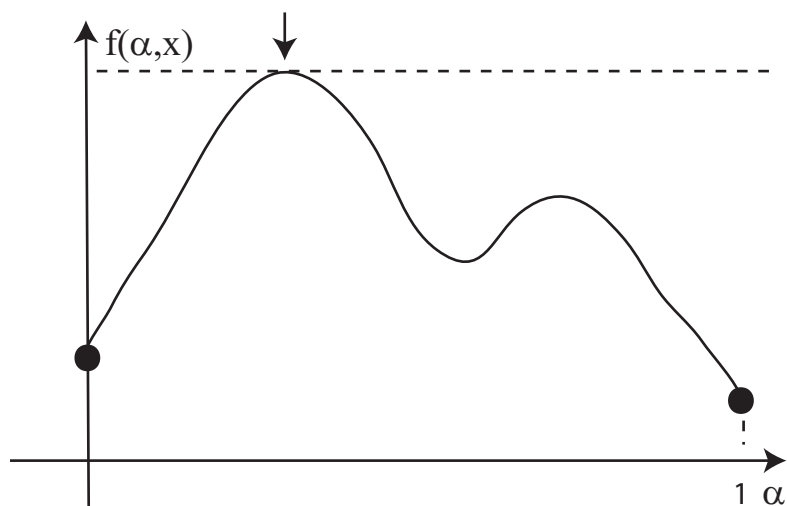
Trabalhos foram desenvolvidos com objetivo de solucionar o problema de síntese de controle robusto, por meio de formulação LMI com caracterizações com menor conservadorismo, por exemplo, através do uso de multiplicadores ou matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros. Estas caracterizações por LMI conseguem fazer o uso de matrizes de Lyapunov diferentes para cada vértice do politopo e cada especificação de estabilidade e desempenho. Porém permanece a necessidade de fixar uma única matriz para atender todas as restrições de estabilidade e desempenho pela qual são calculadas as matrizes do controlador. Como dito no capítulo 1, uma das abordagens alternativas propõe uma metodologia para a resolução do problema de minimizar o pior caso, um

problema de programação semi-infinita, através de um procedimento iterativo de dois passos (análise e síntese), similar ao método proposto por Zakovic e Rustem (2002). Pelo procedimento iterativo é possível trocar o problema de otimização semi-infinita por um problema de otimização finita, onde o domínio de incerteza infinito é substituído por um conjunto finito. A solução obtida para o conjunto finito é posteriormente avaliada para o conjunto infinito para verificar a necessidade de ampliar o conjunto finito.

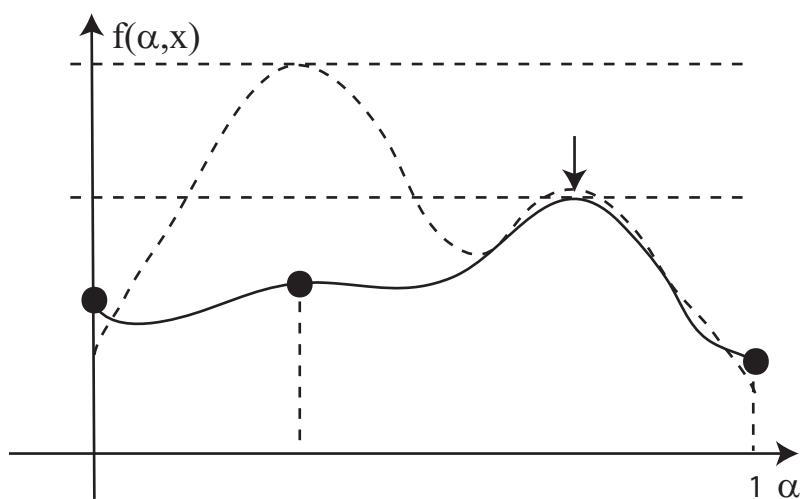
Para ilustrar a estratégia iterativa de dois passos, a figura 5.1 apresenta uma simulação deste método de otimização aplicado a uma função objetivo não convexa, $f(\alpha, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, onde, α é uma variável escalar, $0 \leq \alpha \leq 1$, que caracteriza o domínio de incerteza, e x é o vetor de parâmetros de otimização. Nesta figura, as curvas contínuas são os valores de $f(\alpha, x)$ após realizada a otimização, considerando o conjunto finito de valores de α indicados. Na primeira iteração do procedimento de projeto, figura 5.1a, o vetor x é calculado para minimizar $\max_{\alpha} f(\alpha, x)$ considerando apenas os dois valores extremos de α . Na etapa de análise, é averiguado se o máximo global acontece em um valor de α , no interior do intervalo, conforme está indicado na seta. Para esta condição, este ponto α é incluído no conjunto finito e uma nova iteração do procedimento é realizada. Na segunda iteração, figura 5.1b, o vetor x é calculado considerando os dois valores extremos de α , acrescido do ponto de máximo identificado na iteração anterior. A inclusão do terceiro ponto, tem a característica de minimizar a curva próxima a este ponto, assim, força esta curva para o nível dos outros dois pontos. Como o máximo de $f(\alpha, x)$ acontece novamente externamente do conjunto finito, uma nova iteração é realizada, com o acréscimo deste quarto ponto. Na terceira e última iteração, figura 5.1c, o vetor x encontrado resulta em uma curva suavizada de $f(\alpha, x)$, em que, o valor de máximo acontece em um ponto já incluso, deste modo, o procedimento de projeto é finalizado.

Uma observação da figura 5.1 é que pelas linhas tracejadas horizontais ocorre o decaimento progressivo da função $f(\alpha, x)$ a cada iteração. Este efeito de suavização na curva da função objetivo é dado pelo acréscimo progressivo de pontos de fixação, podendo ser generalizado para qualquer dimensão.

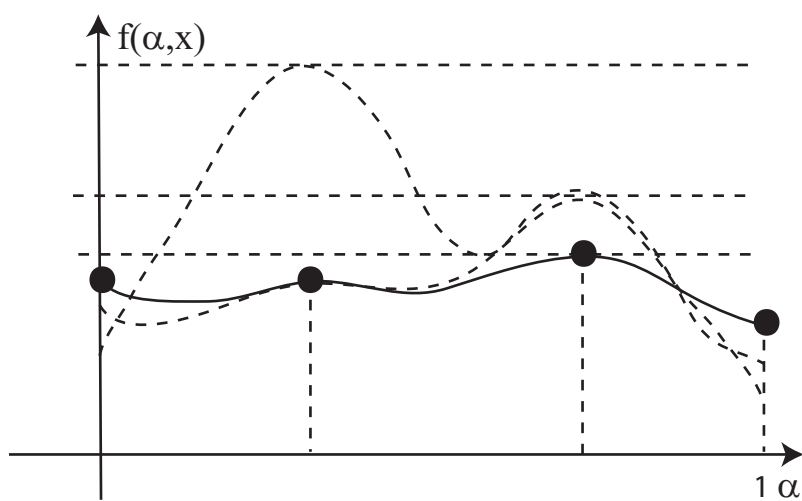
Neste capítulo, o procedimento iterativo de síntese de controladores robustos por realimentação de saída para sistemas lineares invariantes do tempo, em tempo discreto, é descrito em detalhes e é apresentada a sua implementação baseado no método evolução diferencial. Por meio de exemplos ilustrativos é demonstrado que a implementação do procedimento fornece controladores satisfatórios pelos desempenhos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_{\infty}$ para sistemas SLIT em tempo discreto. Para a realização de ambos os passos da metodologia iterativa, foi escolhido o método de otimização evolução diferencial (DE), com intuito de ter uma metodologia com custo computacional menor, especialmente na etapa de análise quando comparado com o método LMI/divisão, para assim, aplicar em sistemas complexos, com



(a) 1ª iteração



(b) 2ª iteração



(c) 3ª iteração

Figura 5.1: Simulação do procedimento de otimização pela inclusão progressiva de pontos de fixação.

sistemas de ordem mais elevada e/ou domínios de incerteza com número de vértices do politopo mais elevada.

Como dito no capítulo 1, a maioria dos sinais de interesse em sistemas de controle são em tempo contínuo, porém o uso de controladores digitais é amplamente aplicado, pois possuem as seguintes vantagens: baixos custos de implementação e replicação, flexibilidade, expansibilidade e simplicidade na programação e maior precisão. Geralmente, a síntese de controladores digitais é realizada das seguintes maneiras (Braga et al., 2013):

- Síntese baseada em tempo contínuo, onde o controlador é projetado diretamente no domínio de tempo contínuo, sendo convertido no tempo discreto usando, por exemplo, uma transformação de Tustin.
- Síntese direta no tempo discreto, onde um modelo discreto aproximado da planta é usado para a síntese de controle de tempo discreto, ignorando o comportamento de intercalação.

Considerando sistemas politópicos, a primeira abordagem é mais simples porém requer períodos de amostragem menores para que o sistema discreto tenha o mesmo desempenho do sistema contínuo. Na segunda abordagem, o controlador pode ser projetado para ter o desempenho adequado com o período de amostragem especificado, mas, em contrapartida, como demonstrado na próxima seção, a discretização de sistemas politópicos é mais complexa requerendo aproximações que resultam em erros de discretização que podem até mesmo comprometer a estabilidade robusta do sistema de controle.

5.2 Discretização de Sistemas Politópicos

A conversão de um sistema linear invariante no tempo em tempo contínuo com incerteza politópica para um sistema em tempo discreto não é uma operação simples. Para demonstrar a dificuldade desta operação, por simplicidade, considere um sistema politópico livre com dois vértices:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t), \quad A(\alpha) \triangleq \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \quad (5.1)$$

com

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T \in \Omega, \quad \Omega \triangleq \{\alpha | \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\}. \quad (5.2)$$

O objetivo é obter a representação do sistema em tempo discreto com incerteza politópica:

$$x[(k+1)T_s] = \Phi(\alpha)x(kT_s), \quad (5.3)$$

sendo T_s o período de amostragem. Considerando o método de otimização por segurador de ordem zero, as matrizes do sistemas discreto correspondentes aos dois vértices podem ser calculadas como:

$$\Phi_i = e^{A_i T_s} = I + A_i T_s + \frac{1}{2!} A_i^2 T_s^2 + \frac{1}{3!} A_i^3 T_s^3 + \dots + \frac{1}{k!} A_i^k T_s^k + \dots, \quad i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Observe que

$$\Phi(\alpha) = e^{A(\alpha) T_s} = e^{(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) T_s} = e^{\alpha_1 A_1 T_s} e^{\alpha_2 A_2 T_s} \quad (5.5)$$

não é igual a combinação convexa dos vértices discretizados:

$$\Phi(\alpha) \neq \Phi_{p,1}(\alpha) \triangleq \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 = \alpha_1 e^{A_1 T_s} + \alpha_2 e^{A_2 T_s} \quad (5.6)$$

Esta diferença pode ser observada considerando a série de infinitos termos:

$$\Phi(\alpha) = I + (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) T_s + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 A_1^2 + \alpha_2^2 A_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2 + \alpha_2 \alpha_1 A_2 A_1) T_s^2 + \dots \quad (5.7)$$

$$\Phi_{p,1}(\alpha) = I + (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) T_s + \frac{1}{2} (\alpha_1 A_1^2 + \alpha_2 A_2^2) T_s^2 + \dots \quad (5.8)$$

A matriz discreta $\Phi(\alpha)$ pode ser escrita como sendo uma função polinomial homogênea de α de ordem infinita. Como apontado em Braga et al. (2013), se for considerada uma representação de incerteza polinomial homogênea, Φ_{p,n_p} , de ordem finita, n_p , é necessário considerar um termo de erro limitado em norma:

$$\Phi(\alpha) = \Phi_{p,n_p} + \Delta\Phi(\alpha) \quad (5.9)$$

sendo que a norma de $\Delta\Phi(\alpha) \triangleq \Phi(\alpha) - \Phi_{p,n_p}$ não é de fácil determinação. Observe que $\Phi_{p,1}(\alpha)$ corresponde ao polinômio homogêneo de grau $n_p = 1$. Segundo Braga et al. (2013) desconsiderar o termo $\Delta\Phi(\alpha)$ na síntese de controladores robustos, pode não se ter a garantia que o sistema em malha-fechada é robustamente estável. Para evitar este problema, uma importante contribuição dessa dissertação em relação à implementação original, no procedimento de síntese iterativo implementado e avaliado nesta dissertação, a conversão para o sistema em tempo discreto é realizada para cada valor específico de α , após a combinação convexa dos vértices do sistema em tempo contínuo. Isto é, dado α , então

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \Rightarrow x[(k+1)T_s] = \Phi(\alpha)x(kT_s) + \Theta(\alpha)u(kT_s), \quad (5.10)$$

sendo

$$\Phi(\alpha) = e^{A(\alpha)T_s}, \Theta(\alpha) = \int_0^{T_s} e^{A(\alpha)\tau} B(\alpha) d\tau, B = [B_u \ B_w] \quad (5.11)$$

Desta forma, diferentemente de vários resultados da literatura em que tanto a análise como a síntese é baseada em formulações LMI que considera a discretização individual dos vértices do politopo, desconsiderando a erro limitado em norma da aproximação, o procedimento proposto neste trabalho evita tal erro considerando o sistema politópico exato em tempo contínuo.

Para contornar este problema do erro de discretização quando realizado a combinação convexa dos vértices discretizados, alguns trabalhos consideram o método de discretização de Euler (Agulhari, Oliveira e Peres, 2010) em que as matrizes da equação de estado discreta são dadas por:

$$\Phi(\alpha) = I + A(\alpha)T_s, \Theta(\alpha) = B(\alpha)T_s. \quad (5.12)$$

Neste caso a combinação convexa dos vértices discretizados

$$\begin{aligned} \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 &= \alpha_1(I + A_1T_s) + \alpha_2(I + A_2T_s) = (\alpha_1 + \alpha_2)I + \alpha_1A_1T_s + \alpha_2A_2T_s \\ &= I + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)T_s, \end{aligned} \quad (5.13)$$

corresponde ao sistema politópico discreto

$$\Phi(\alpha) = I + A(\alpha)T_s = I + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)T_s = \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2. \quad (5.14)$$

Obviamente existe um erro associado ao método de discretização de Euler que é baseado na aproximação da integral por integração numérica retangular. Pela discretização de Euler, cuja relação entre o plano-z e plano-s é dada por $z = 1 + sT_s$, um sistema contínuo estável pode até mesmo se tornar um sistema discreto instável de acordo com o período de amostragem adotado. Por exemplo, um polo em $s = -\sigma$ seria mapeado em $|z| \geq 1$ se $T_s \geq 2/\sigma$.

5.3 Formulação do Problema

Considere o diagrama de blocos de controle geral apresentado na figura 5.2. O sistema linear invariante no tempo em tempo contínuo, $P(s)$, pode ser descrito pelo modelo no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados; $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de variáveis manipuladas, ou

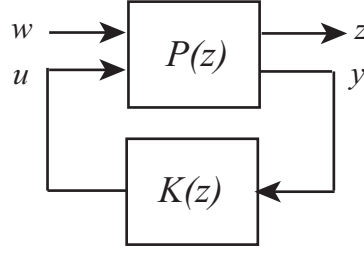


Figura 5.2: Diagrama de blocos de controle geral.

seja, as saídas do controlador; $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor das entradas exógenas, podendo ser distúrbios, $d(t)$, ruídos de medição, $n(t) \in \mathbb{R}^n$ e sinais de referência $r(t) \in \mathbb{R}^m$; $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de saídas de desempenho, que podem ser as saídas da planta, $c(t) \in \mathbb{R}^m$, e as variáveis manipuladas, $u(t)$; e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas medidas que são as entradas do controlador dinâmico.

Com o objetivo de simplificação da notação, as matrizes do modelo no espaço de estados dada na equação (5.15) podem ter a seguinte representação matricial:

$$P \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array} \right]. \quad (5.16)$$

sendo considerado, para simplificação, $D_{yu} = 0$.

Considere que a matriz do sistema P pode possuir parâmetros incertos, pertencentes a um conjunto convexo compacto, ou politópico, estabelecido pela combinação convexa de seus vértices:

$$\mathcal{P}(\alpha) \triangleq \left\{ P : P = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i P_i; \quad \alpha \in \Omega \right\}, \quad (5.17)$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{\eta} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i = 1; \right\}, \quad (5.18)$$

sendo $P_i, i = 1, \dots, \eta$, os vértices do politpo e $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{\eta}]^T$ o vetor que parametriza o politopo. Para simplificação da notação, a dependência das matrizes do sistema de α é omitida.

A estrutura de controlador considerada nesta dissertação é o controlador dinâmico por realimentação de saída, definido pela seguinte matriz:

$$K(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c + D_c = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]. \quad (5.19)$$

A matriz em malha fechada relacionando as variáveis exógenas com as variáveis de desempenho é definida como:

$$T_{zw}(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right], \quad (5.20)$$

sendo,

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} \\ B_f &= \begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix} \\ C_f &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c \end{bmatrix} \\ D_f &= \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Considere um modelo de referência de bloco diagonal, que desacopla o sistema e atinge as especificações de resposta transitória de rastreamento (sobre-sinal, tempo de ajuste etc.) para cada saída controlada:

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} T_{m,1}(z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{m,2}(z) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_{m,m}(z) \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

em que $T_{m,j}(z), j = 1, \dots, m$, pode ser de qualquer ordem e qualquer tipo de termo. Considere as representações nas formas compactas do modelo de referência e da funções de transferência em malha fechada relacionando as saídas da planta e seus respectivos sinais de referência:

$$T_m(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & D_m \end{array} \right], T_{cr}(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_{cr} & D_{cr} \end{array} \right]. \quad (5.23)$$

Define-se o erro entre o modelo de referência e a função de malha fechada, como: $E(z) \triangleq T_m(z) - T_{cr}(z)$, cuja representação no espaço de estado pode ser:

$$E(z) = \left[\begin{array}{cc|c} A_m & 0 & B_m \\ 0 & A_{cr} & B_{cr} \\ \hline C_m & -C_{cr} & D_m - D_{cr} \end{array} \right] \quad (5.24)$$

A síntese do controlador robusto por realimentação de saída deve atender os seguintes objetivos para os infinitos sistemas incertos no domínio de incerteza: aproximação do

modelo de referência em malha fechada, rejeição de perturbações e diminuição da interferência do ruído de medição. Assim, o procedimento de síntese tem como objetivo calcular o controlador robusto ótimo, com uma estrutura especificada, que minimiza:

- A norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação do modelo de referência, $E(z)$.
- A norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência associada com o desempenho $\mathcal{H}_\infty$, T_∞ , como, por exemplo, a matriz de transferência relacionando as saídas da planta com distúrbios de energia limitada, T_{cd} .
- A norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência associada com o desempenho $\mathcal{H}_2$, T_2 , como, por exemplo, a matriz de transferência relacionando as entradas da planta com ruídos de medição, T_{un} .

Além de, assegurar que o sistema em malha fechada seja robusto e estável. Este problema de controle pode ser formulado como um problema de otimização semi-infinita multiobjetivo em que o controlador robusto ótimo, $K^*(z)$, é a solução de:

$$K^*(z) = \arg \min_{k(z)} \begin{bmatrix} \max_{\alpha \in \Omega} \|E(z, \alpha, K)\|_\infty \\ \max_{\alpha \in \Omega} \|T_\infty(z, \alpha, K)\|_\infty \\ \max_{\alpha \in \Omega} \|T_2(z, \alpha, K)\|_2 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

sujeito a: $K(z) \in \mathcal{F}$,

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores que resultam em sistemas a malha-fechada robustamente estáveis, com estruturas e restrições especificadas.

5.4 Procedimento de Síntese Iterativo

A metodologia de síntese iterativa é dividida em duas etapas, síntese e análise, descritas na subseções seguintes.

5.4.1 Passo - Síntese

O domínio de incerteza, Ω , do problema (5.25) é substituído por um conjunto finito de pontos, $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. O conjunto finito inicial pode ser composto, por exemplo, por um único ponto médio ou pelo conjunto de vértices do polítopo.

O problema de otimização multiobjetivo da equação (5.25) pode ser formulado como um problema de otimização escalar, através da soma ponderada das funções objetivo ou da minimização de uma função objetivo transformando as demais em restrições, ou pela combinação dessas duas técnicas (Chankong e Haimes, 1983). Nesta dissertação

utilizou-se transformar o problema multiobjetivo em um problema de otimização escalar, utilizando os dois métodos de forma flexível:

$$\begin{aligned}
 K^*(z) = \arg \min_{k(z)} & \lambda_m \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|E(z, \alpha, K)\|_{\infty} + \lambda_{\infty} \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_{\infty}(z, \alpha, K)\|_{\infty} \\
 & + \lambda_2 \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_2(z, \alpha, K)\|_2 \\
 \text{sujeito a: } & \begin{cases} \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|E(z, \alpha, K)\|_{\infty} \leq \epsilon_m, \\ \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_{\infty}(z, \alpha, K)\|_{\infty} \leq \epsilon_{\infty}, \\ \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_2(z, \alpha, K)\|_2 \leq \epsilon_2, \\ K(z) \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Com este problema de otimização escalar, consegue-se diferentes possibilidades. Através do vetor de pesos, $\lambda = [\lambda_m \ \lambda_{\infty} \ \lambda_2]$, escolhendo qual função objetiva será otimizada ($\lambda = 0$ a função objetiva não será otimizada ou então $\lambda > 0$) e através das restrições, $\epsilon = [\epsilon_m \ \epsilon_{\infty} \ \epsilon_2]$, limitando a função objetivo ($\epsilon = \infty$ a função objetiva não será limitada ou então $\epsilon < \infty$). Os valores dos pesos e das restrições podem ser variados, para gerar diferentes soluções do problema multiobjetivo. Considerando que as funções objetivos e restrições podem ser não diferenciáveis e não convexas, com mínimos em diferentes regiões do espaço de busca, é mais adequado aplicar um algoritmo de otimização evolutivo para resolver o problema de otimização escalar (5.26) considerando o conjunto finito $\tilde{\Omega}$.

5.4.2 Passo - Análise

O controlador encontrado no passo de síntese, $K^*(z)$, deve ser validado para todo o domínio infinito de incerteza, Ω .

Como explicado no capítulo 3, a análise de estabilidade robusta do sistema politópico pode ser representada como um problema de otimização, para o qual, é desejado calcular o maior módulo dos n autovalores das infinitas matrizes $A_f(\alpha)$:

$$\alpha_u = \arg \min_{\alpha \in \Omega} f_u(\alpha), \quad f_u(\alpha) \triangleq 1 - \max_i |\lambda_i(A_f(\alpha))| \quad (5.27)$$

sendo $\lambda_i(A)$ o i -ésimo autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $f(\alpha_u) \leq 0$, demonstra que há um caso de $A(\alpha)$ com autovalores fora ou sobre o disco de raio unitário no plano $\mathbb{Z}$, ou seja, o sistema não é robustamente estável. Caso $f(\alpha_u) > 0$, existe uma grande probabilidade do sistema ser robustamente estável. Por ser um problema de otimização não convexo, com mínimos em diferentes regiões de Ω , ou seja, multimodal, não há uma garantia que

a solução obtida seja o mínimo global da função. Quando é encontrado um α_u tal que $T_{zw}(z, \alpha_u, K^*)$ é instável, este ponto é incluído no conjunto finito, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_u\}$. A etapa de análise é interrompida e um novo passo de síntese deve ser realizado considerando o conjunto finito com o ponto adicional α_u .

Caso o sistema é robustamente estável, o próximo passo é analisar os valores das funções objetivos e as restrições. Como descrito no capítulo 4, os cálculos dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ para um sistema politópico podem ser formulados como problemas de otimização:

$$\alpha_\infty = \arg \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_\infty(z, \alpha, K^*)\|_\infty. \quad (5.28)$$

$$\alpha_2 = \arg \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_2(z, \alpha, K^*)\|_2. \quad (5.29)$$

$$\alpha_m = \arg \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|E(z, \alpha, K^*)\|_\infty. \quad (5.30)$$

De acordo com o vetor de pesos, λ , podem ser realizados os seguintes testes sobre as funções objetivos:

1. $\frac{\|T_\infty(z, \alpha_\infty, K^*)\|_\infty - \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_\infty(z, \alpha, K^*)\|_\infty}{\max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_\infty(z, \alpha, K^*)\|_\infty} > \varepsilon$, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_\infty\}$.
2. $\frac{\|T_2(z, \alpha_2, K^*)\|_2 - \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_2(z, \alpha, K^*)\|_2}{\max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|T_2(z, \alpha, K^*)\|_2} > \varepsilon$, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_2\}$.
3. $\frac{\|E(z, \alpha_m, K^*)\|_\infty - \max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|E(z, \alpha, K^*)\|_\infty}{\max_{\alpha \in \tilde{\Omega}} \|E(z, \alpha, K^*)\|_\infty} > \varepsilon$, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_m\}$.

Para todos os projetos de controlador robusto apresentados nos exemplos deste capítulo, foi adotado o valor de $\varepsilon = 0,1$. De acordo com o vetor de restrições, ϵ , podem ser realizados os seguintes testes:

1. $\|T_\infty(z, \alpha_\infty, K^*)\|_\infty > \epsilon_\infty$, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_\infty\}$
2. $\|T_2(z, \alpha_2, K^*)\|_2 > \epsilon_2$, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_2\}$
3. $\|E(z, \alpha_m, K^*)\|_\infty > \epsilon_m$, então, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{\alpha_m\}$.

Assim, se na etapa de análise for acrescentados pontos no conjunto finito $\tilde{\Omega}$, α_u ou α_2 e/ou α_m e/ou α_∞ , é necessário retornar para a etapa de síntese e os dois passos (síntese e

análise) devem ser executados novamente. Caso nenhum ponto adicional seja acrescentado na etapa de análise, o procedimento iterativo é finalizado. As aplicações do método de otimização evolução diferencial na etapa de análise para a solução dos problemas (5.27), (5.28), (5.29) e (5.30) foram descritas e avaliadas nos capítulos 3 e 4. Na seção seguinte é mostrado a configuração do algoritmo DE para ser aplicado no passo de síntese, para a solução da equação (5.26).

5.5 Método Evolução Diferencial aplicado na Etapa de Síntese

A escolha para implementação do passo de síntese por meio do algoritmo evolução diferencial foi devido a experiência prévia, sua facilidade de implementação e pelos resultados satisfatórios obtidos pelo trabalho para tempo contínuo de Moura, Silva e Gonçalves (2016).

O método DE aplicado na etapa de síntese diferencia no método aplicado na etapa de análise, pois, na síntese as variáveis de otimização são os elementos das matrizes A_c , B_c , C_c e D_c , tal que, $K(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$, em contrapartida, na etapa de análise, como mostrado nos capítulos anteriores, as variáveis de otimização foram as coordenadas α do politopo que possuem a restrição de pertencer ao politopo Ω . O algoritmo é descrito na próxima seção, uma vez que uma nova configuração do método é necessária.

5.5.1 População Inicial

Na etapa de síntese, como dito, as variáveis de otimização são os parâmetros do controlador, $\chi_{k,i} = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$, considerando p o número de parâmetros. A população inicial é distribuída aleatoriamente, com distribuição uniforme, no intervalo entre $L_{1,j}$ e $L_{2,j}$, $j = 1, \dots, p$, sendo o intervalo escolhido pelo projetista. Isto quer dizer que: $\chi_{1,i,j} = \mathcal{U}_{(L_{1,j}, L_{2,j})}$, para $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, p$. Por conta da variável de otimização na etapa de síntese não ser as coordenadas do politopo, não se justifica o uso da busca inicial por grade para formação da população inicial.

5.5.2 Mutação Diferencial

Sejam os índices $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ gerados como $r_j = \mathcal{I}_{(N)}, j = 1, \dots, 3$. No passo de síntese foi adotado que a i -ésima solução mutante é calculada como:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_i(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) \quad (5.31)$$

para $i = 1, \dots, N$. Foi adotado o fator de escala aleatório como sendo $F_i = \mathcal{U}_{(0,5,1)}$.

5.5.3 Tratamento das Restrições

Como dito anteriormente, o método DE é aplicado em problemas de otimização sem restrições. Para tratar problemas restritos, é necessário incluir as restrições na função objetivo por meio do método de penalidade combinado com o método de composição pelo máximo (Takahashi, 2007). Seja $f_0 = \lambda_e \|E(s, K)\|_\infty + \lambda_\infty \|T_\infty(s, K)\|_\infty + \lambda_2 \|T_2(s, K)\|_2$; $f_1 = 1 - \max_i |\lambda_i(A_f)|$, sendo $\lambda_i(A_f)$ o i -ésimo autovalor da matriz A_f ; $f_2 = \max_{k \in \{1, \dots, n_p\}} -\theta_k$, é uma restrição adicional para que as n_p primeiras variáveis de otimização sejam positivas, que pode ser necessário em algumas estruturas específicas de controlador; e $f_3 = \max\{\|E(s, K)\|_\infty - \epsilon_m, \|T_\infty(s, K)\|_\infty - \epsilon_\infty, \|T_2(s, K)\|_2 - \epsilon_2\}$. Considera-se a seguinte função objetivo modificada no algoritmo DE:

$$f(K) = \begin{cases} f_0, & \text{se } f_1 < 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0 \\ 10^6 + f_3, & \text{se } f_1 < 0, f_2 \leq 0, f_3 > 0 \\ 10^{10} + f_2, & \text{se } f_1 < 0, f_2 > 0 \\ 10^{14} + f_1, & \text{se } f_1 \geq 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

Com a formulação (5.32), ao se comparar as soluções alvo e teste, é imposta a seguinte ordem de preferência: a melhor solução é aquela que resulta em um sistema estável em malha fechada, que atende à restrição de n_p variáveis positivas, quando existir, e que atende as restrições sobre as funções objetivos, ϵ . A segunda prioridade é a solução que resulta em um sistema estável, que não viola a restrição de n_p variáveis positivas, quando existir, mas que não atende a alguma restrição sobre as funções objetivos, ϵ . A terceira prioridade é a solução que resulta em um sistema estável, mas que viola a restrição de n_p variáveis positivas, quando existir. A última prioridade é a solução que resulta em um sistema instável em malha fechada. Ao comparar duas soluções que violam as mesmas restrições, a solução mais próxima da região factível é a melhor.

Sobre a faixa de variação das variáveis de otimização não é adotada nenhuma restrição, ou seja, podem assumir qualquer valor, independentemente dos valores mínimos e máximos adotados na criação da população inicial.

5.5.4 Critério de Parada

Como critérios de parada foram adotados: número máximo de gerações, N_g , ou a convergência da população, sendo feita a comparação entre os valores máximos e mínimos de $f(\chi)$ da k -ésima população, ou seja, $\max_i f(\chi_{k,i}) - \min_j f(\chi_{k,j}) \leq \varepsilon$. O valor de ε deve ser um número pequeno. Em todos os exemplos a serem apresentados, foi adotado o valor de N_g elevado de modo que o outro critério seja atendido primeiro, com $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$.

5.6 Exemplos Ilustrativos

O procedimento de síntese iterativo, com ambos os passos implementados pelo algoritmo DE, será aplicado em três exemplos: avião F4E, helicóptero VTOL (do inglês *Vertical Take-Off and Landing*) e um problema de quatro tanques interativos. O primeiro exemplo foi escolhido para avaliar o comportamento do procedimento iterativo para duas opções diferentes do conjunto inicial de pontos finitos, especialmente devido ao fato de que o valor máximo de norma não ocorrer exatamente em um vértice do politopo. O segundo exemplo foi considerado porque existem resultados na literatura que permitem comprovar a capacidade do procedimento de síntese proposto de obter soluções melhores que outras metodologias existentes. Diferentemente dos dois primeiros exemplos, que possuem apenas um objetivo, o terceiro exemplo foi incluído para demonstrar a aplicação do procedimento de projeto incluindo dois objetivos de controle, inclusive a aproximação de modelo de referência. Outro fato importante neste terceiro exemplo é que o controlador possui uma estrutura específica (PI) com restrição de que as constantes de tempo integral sejam positivas, com uso da restrição f_2 da equação (5.32). Toda discretização realizada nos exemplos foi através do método segurador de ordem zero (ZOH, do inglês, *zero-order holder*). Nas subseções seguintes são descrito cada exemplo e apresentados os resultados obtidos pelo procedimento iterativo.

5.6.1 Exemplo 5.1

O primeiro exemplo ilustrativo é um modelo de um avião F4E (Ackermann e Franklin, 1981). Considere uma versão modificada do controle de ângulo de inclinação apresentado por Yaesh e Shaked (2009):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} N_z \\ q \\ \delta_e \\ \tilde{\delta}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_z \\ q \\ \delta_e \\ \tilde{\delta}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (5.33)$$

sendo: N_z o fator de carga e q a taxa do ângulo de inclinação, componentes aerodinâmicos, δ_e o ângulo de elevação e $\tilde{\delta}_e$ um estado adicional, componentes servos. Os parâmetros $a_{i,j}$,

Tabela 5.1: Dados dos parâmetros aerodinâmicos da equação (5.33)

Ponto de operação	1	2	3	4
a_{11}	-0,9896	-1,702	-0,6607	-0,5162
a_{12}	17,41	50,72	18,11	26,96
a_{13}	96,15	263,5	84,34	178,9
a_{21}	0,2648	0,2201	0,08201	-0,6896
a_{22}	-0,8512	-1,418	-0,6587	-1,225
a_{23}	-11,39	-31,99	-10,81	-30,38
b_1	-97,78	-272,2	-85,09	-175,6

sendo $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$, e b_1 são dados por Ackermann e Franklin (1981) em quatro pontos de operações listados na tabela 5.1.

O objetivo é minimizar o efeito da perturbação, nenhuma restrição foi adicionada, $\epsilon_\infty = \epsilon_2 = \epsilon_m = \infty$. Os pesos são: $\lambda_\infty = 1$; $\lambda_2 = \lambda_m = 0$, para equação (5.26), ou seja, o objetivo é minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência em malha fechada, $T_{zw}(z)$. Serão projetados controladores de ordem 0, realimentação estática, e ordem 1 à 4, realimentação dinâmica de saída. Foi feito um estudo para avaliar a melhor inicialização dos pontos do conjunto finito, $\tilde{\Omega}$, considerado na etapa de síntese, sendo escolhida duas formas:

1. Um ponto no meio do politopo, $\tilde{\Omega} = [1/\eta \cdots 1/\eta]^T$: nesta estratégia que começa apenas com um ponto, existe uma maior possibilidade de serem necessários pontos adicionais para convergência, gerando assim, iterações no procedimento.
2. Conjunto de pontos igual aos vértices do politopo, $\tilde{\Omega} = \mathbf{I}_\eta$: nesta estratégia existe menor possibilidade de serem necessários pontos adicionais, podendo não ser necessárias iterações do procedimento.

Para avaliar qual é a melhor inicialização do conjunto finito de pontos no procedimento iterativo de síntese é considerado o tempo computacional. A tabela 5.2 mostra o resultado para o exemplo do F4E, sendo: T_1 o tempo computacional para primeira estratégia (inicia o conjunto com um único ponto médio); T_2 o tempo computacional para segunda estratégia (inicia o conjunto com os vértices do politopo); $\mathcal{H}_\infty - 1$ resultado da norma $\mathcal{H}_\infty$ para estratégia 1; $\mathcal{H}_\infty - 2$ resultado da norma $\mathcal{H}_\infty$ para estratégia 2; I_1 números de iterações da estratégia 1; I_2 números de iterações da estratégia 2.

Conforme mostrado na tabela 5.2, a melhor inicialização ocorre para estratégia que o conjunto de pontos é igual aos vértices do politopo, considerando que esta opção apresenta menor tempo computacional a medida que aumenta a complexidade do problema (sistema em malha-fechada de ordem mais elevada) além de obter um melhor desempenho (menor

Tabela 5.2: Inicialização dos conjuntos finitos de pontos

Controlador	T_1	T_2	$\mathcal{H}_\infty - 1$	$\mathcal{H}_\infty - 2$	I_1	I_2
ordem 0	78,8190	103,0260	0,7866	0,7624	3	1
ordem 1	199,7830	201,2490	0,6738	0,6594	3	1
ordem 2	$2,8104 \times 10^3$	$2,7724 \times 10^3$	0,6761	0,6573	2	1
ordem 3	$1,6784 \times 10^4$	$1,1314 \times 10^4$	0,68083	0,6597	3	1
ordem 4	$1,4103 \times 10^4$	$1,0463 \times 10^4$	0,6734	0,6541	3	1

valor da norma $\mathcal{H}_\infty$). Como era esperado, a primeira opção sempre necessitou de pontos adicionais, demandando iterações do procedimento, ao passo que inicializando com os vértices o procedimento converge na primeira iteração. Vale ressaltar que o conjunto finito final da opção de um ponto possui menos pontos (2 a 3) do que o número de vértices (4). A vantagem do conjunto finito com menos pontos é o menor custo computacional de cada iteração do método DE no passo de síntese. Para sistemas mais complexos, o maior custo computacional ocorre na etapa de análise. Deste modo, é melhor evitar as iterações do procedimento, o que geralmente é o caso inicializando $\tilde{\Omega}$ com apenas um ponto do conjunto infinito. Além disso, como não é adotado um critério de parada muito exigente (variações relativas de 10%), havendo necessidade de iterações, o procedimento pode obter resultados a princípio um pouco piores. De qualquer modo, é interessante observar a capacidade do procedimento de convergir mesmo partindo de um único ponto. Desta forma, para todos os demais exemplos desta dissertação, utiliza-se a estratégia 2 para inicialização dos pontos.

O critério de parada do procedimento é para variações relativas menores de 10% entre análise e síntese o que justifica as diferenças entre $\mathcal{H}_\infty - 1$ e $\mathcal{H}_\infty - 2$, já que com um critério de parada mais exigente, seriam necessárias mais iterações e o procedimento resultaria em valores mais próximos independentemente do conjunto finito inicial. Como a diferença não é tão significativa não foi utilizado o cálculo com mais iterações, que demandaria maior custo computacional.

Os controladores robustos obtidos para o exemplo F4E são:

Ordem 0:

$$K = [0,3327 \quad 1,0668].$$

Ordem 1:

$$K = \left[\begin{array}{cc|cc} 1,2165 & 1,0878 & 1,6604 & \\ 0,5968 & 0,9812 & -1,1093 & \end{array} \right].$$

Ordem 2:

$$K = \left[\begin{array}{cc|cc} 1,1874 & 0,1327 & 1,0505 & 1,1045 \\ -0,0794 & -0,2694 & -0,3848 & 1,7773 \\ \hline 1,2605 & 0,0839 & 1,2706 & -7,3498 \end{array} \right].$$

Ordem 3:

$$K = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0,5225 & 0,1206 & 0,5637 & 1,2200 & 2,0428 \\ -0,3960 & 0,1888 & -0,1482 & -1,0107 & 1,6977 \\ 1,8487 & 0,3056 & 0,1728 & 1,9815 & 0,0288 \\ \hline 0,2100 & -0,0425 & 0,2601 & 0,8917 & -0,6196 \end{array} \right]. \quad (5.34)$$

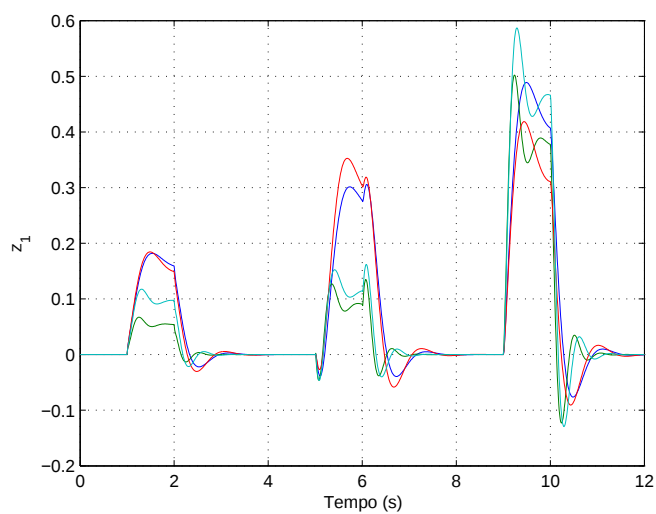
Ordem 4:

$$K = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0,5092 & 0,3270 & -0,7645 & -0,5119 & -0,4185 & -0,3247 \\ 0,8859 & -0,5323 & 0,7303 & -0,6895 & 0,1161 & -1,4059 \\ -0,3098 & 0,0166 & 0,3069 & 0,5337 & 0,1547 & -0,1097 \\ -0,6083 & 0,1552 & -0,5092 & -0,0531 & 0,1392 & 0,7717 \\ \hline -0,6362 & -0,1209 & 0,9223 & 0,1762 & 0,6192 & -1,0342 \end{array} \right].$$

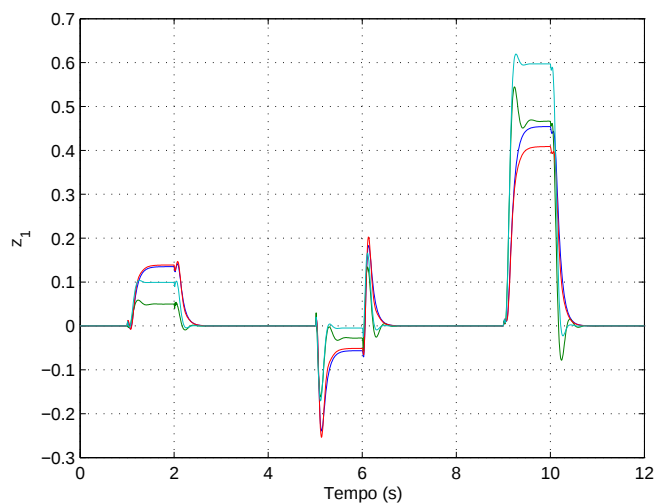
Para simulação, a primeira perturbação teve pulso unitário começando em 1 segundo, com duração de 1 segundo. A segunda perturbação teve pulso unitário em 5 segundos com duração de 1 segundo. A última perturbação foi um pulso unitário em 9 segundos, com duração de 1 segundo. As figuras 5.3, 5.4 e 5.5 ilustra a resposta transitória de z_1 , z_2 e z_3 respectivamente para os controladores de ordem 0, 1 e 4.

A melhora do controlador estático, ordem 0, para o dinâmico de ordem 1 é visível no gráfico para respostas transitórias de z_1 (figura 5.3) e de z_2 (figura 5.4) na segunda perturbação (5 à 6 segundos). Agora ao se comparar os controladores dinâmicos, graficamente, a princípio as variações máximas em torno do ponto de operação são similares mas, para o controlador de ordem mais elevada, são observadas oscilações no transitório que não ocorrem nos controladores de ordem mais baixa provavelmente devido ao aumento do número de polos do sistema em malha-fechada.

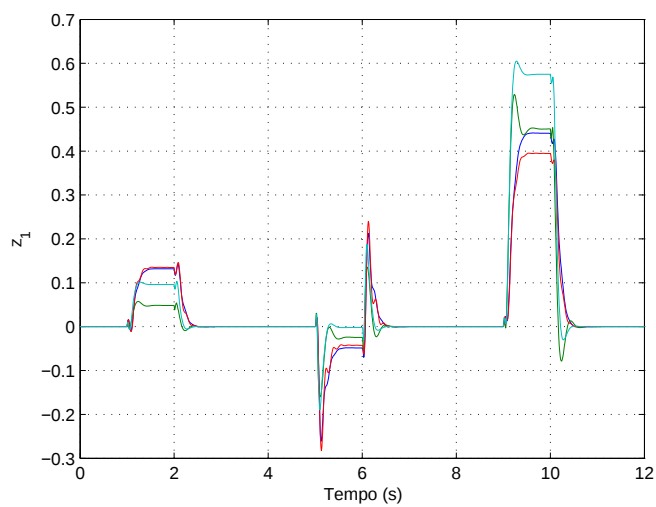
Para analisar a capacidade de convergência do procedimento iterativo para obter um sistema robustamente estável com desempenho robusto ótimo, foi considerada a síntese do controlador de ordem 4 com o procedimento inicializado com um ponto médio. Na primeira iteração, projetando apenas para o ponto médio, não foi suficiente para garantir



(a) Ordem 0.

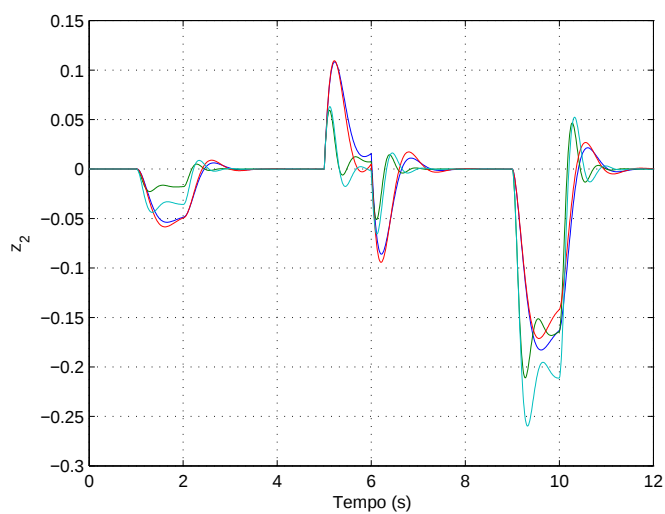


(b) Ordem 1.

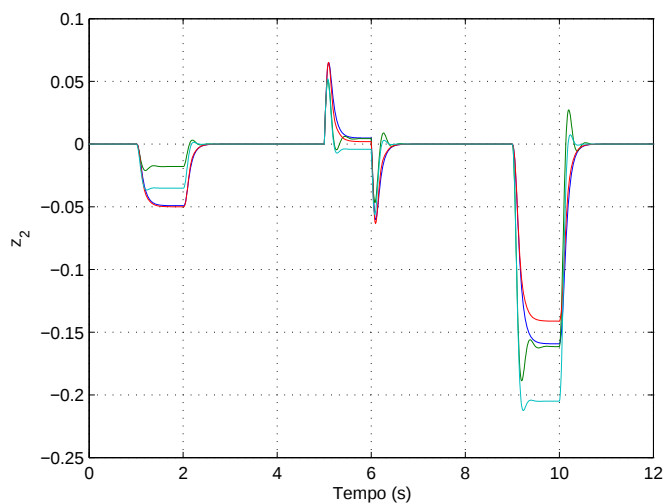


(c) Ordem 4.

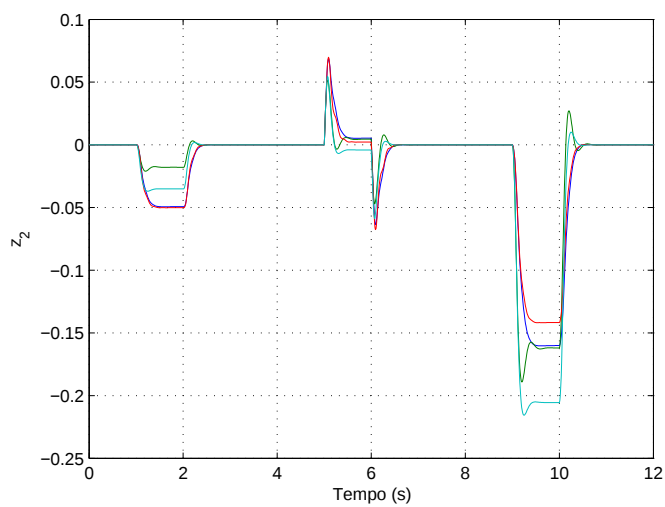
Figura 5.3: Resultado controladores robusto - exemplo F4E - z_1 .



(a) Ordem 0.

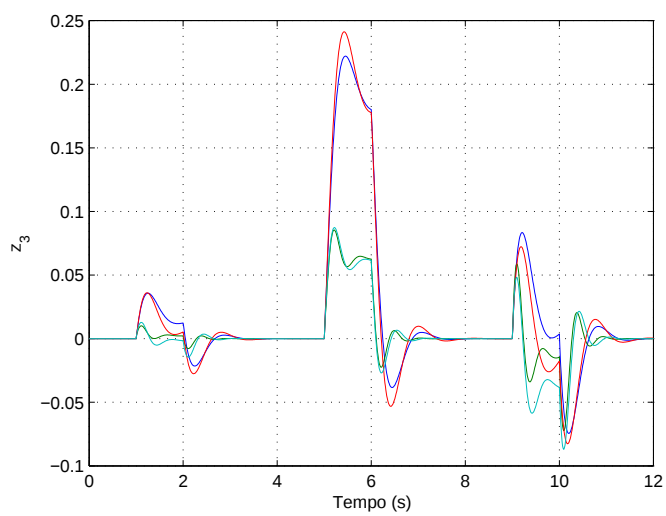


(b) Ordem 1.

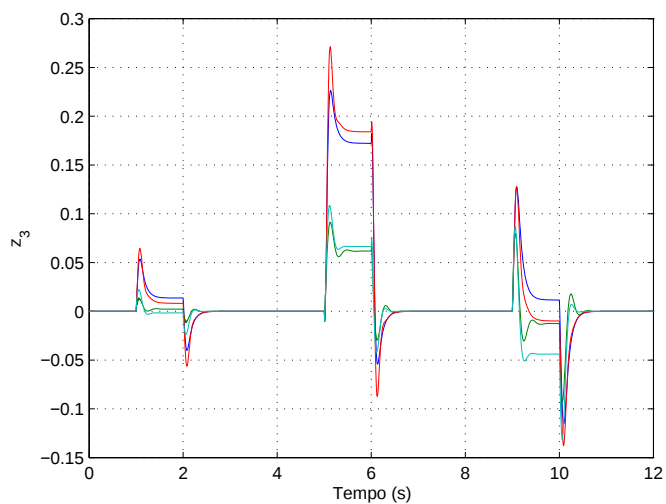


(c) Ordem 4.

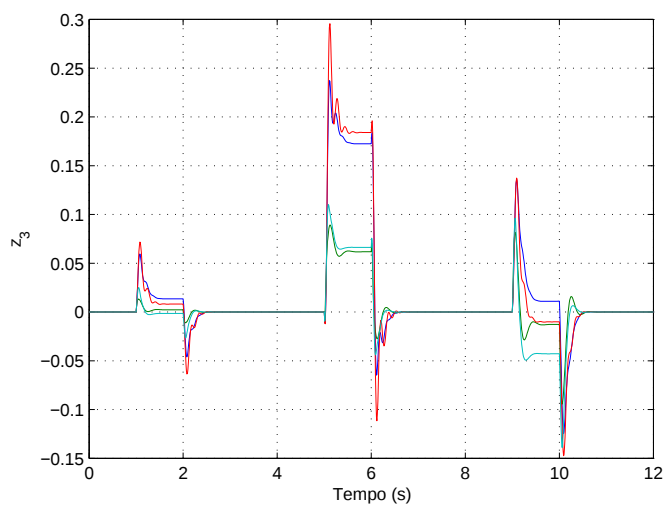
Figura 5.4: Resultado controladores robusto - exemplo F4E - z_2 .



(a) Ordem 0.



(b) Ordem 1.



(c) Ordem 4.

Figura 5.5: Resultado controladores robusto - exemplo F4E - z_3 .

Tabela 5.3: Parâmetros DE - método iterativo passo síntese

Controlador	N	Δ
ordem 0	8	0,1
ordem 1	18	0,1
ordem 2	36	0,1
ordem 3	100	0,1
ordem 4	90	0,1

a estabilidade robusta do sistema incerto, sendo localizado, na etapa de síntese, o ponto $a_u = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$, terceiro vértice, que corresponde a um sistema instável. Na segunda iteração, considerando o conjunto finito com dois pontos, na etapa de análise, foi localizado $\alpha_u = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ (segundo vértice) que corresponde a um sistema instável. Por fim, apenas na terceira iteração, considerando um conjunto finito com 3 pontos, é obtido um sistema em malha-fechada robustamente estável e é atendido ao critério de parada da diferença entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ obtida na síntese e na análise. Para este exemplo específico, um critério de parada mais exigente demandaria iterações mesmo inicializando o conjunto com 4 vértices uma vez que o pior caso não ocorre sobre eles. Por exemplo, modificando o critério de parada para 1%, para o controlador de ordem 1, o procedimento de síntese, inicializado com os 4 vértices, converge com duas iterações, sendo acrescentado o ponto $\alpha_\infty = [0 \ 0,5394 \ 0 \ 0,4606]^T$ (ponto sobre a aresta conectando os vértices 2 e 4), com o valor final igual a 0,6519 (variação na terceira casa decimal em relação ao critério de 10%). Inicializando com um ponto foram necessárias 5 iterações (2 a mais que o critério de 10%) com a seguinte sequência de valores de norma: ∞ (sistema não robustamente estável); 0,7963; 0,6738; 0,6576 e 0,6523. Nesse caso as duas estratégias de inicialização do conjunto finito resultam em soluções similares com diferença na terceira casa decimal.

Para este exemplo específico, os parâmetros para o método DE no passo de síntese do método iterativo, estão listados na tabela 5.3, sendo N o tamanho da população e Δ a distribuição inicial, isto é, $L_{1,j} = -\Delta$ e $L_{2,j} = \Delta$, para $j = 1, \dots, p$. Tanto o valor de N como o valor de Δ podem afetar o resultado final mas geralmente é necessário avaliar um conjunto limitado de valores. Em todos os exemplos foram considerados N igual a múltiplos inteiros do número de parâmetros de otimização e $\Delta \in \{0,01; 0,1; 1; 10; 100\}$.

5.6.2 Exemplo 5.2

O segundo exemplo é uma versão discretizada da equação dinâmica, linearizada do helicóptero VTOL (Kell e Howze, 1988). Agulhari, Oliveira e Peres (2010) utilizaram a primeira aproximação de Euler e período de amostragem de 0,01 segundos. As matrizes do modelo em tempo contínuo são:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,010 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & a_{32} & -0,707 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} -0,4422 & -0,1761 \\ b_{21} & 7,5922 \\ 5,52 & -4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
B_w &= \mathbf{I}_4; D_{zw} = \mathbf{0}_4; D_{zu} = \mathbf{0}_{4 \times 2}; D_{yu} = \mathbf{0}_2; C_z = 0,1\mathbf{I}_4; \\
C_y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

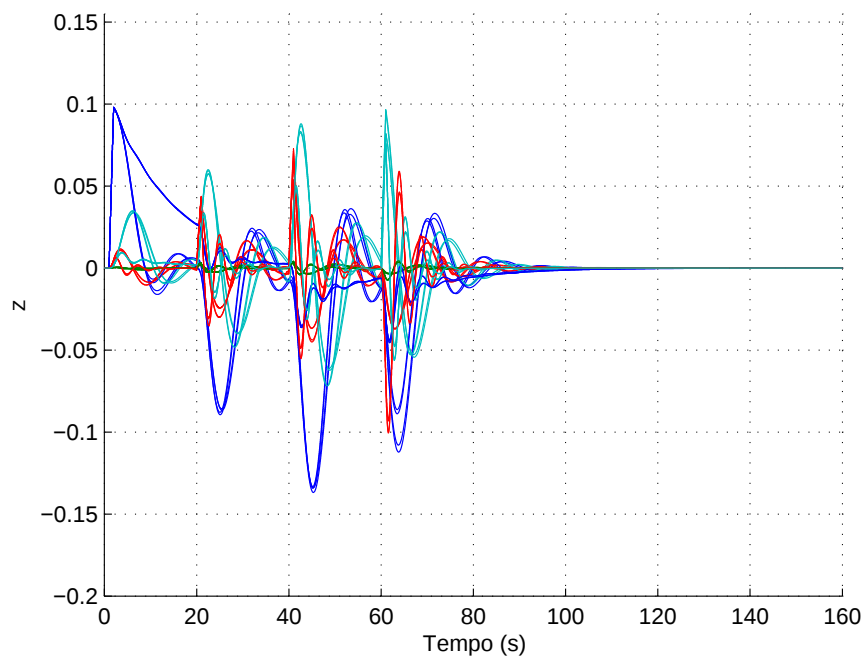
Foi considerado as incertezas conforme Agulhari, Oliveira e Peres (2010), sendo estas incertezas maiores que do artigo original (Kell e Howze, 1988). O sistema gerado é um politopo de 8 vértices, as incertezas em torno do ponto de operação são:

- $a_{32} = 0,3681 + \Delta p_1 \quad |\Delta p_1| \leq 1;$
- $a_{34} = 1,4200 + \Delta p_2 \quad |\Delta p_2| \leq 0,8;$
- $b_{21} = 3,5446 + \Delta p_3 \quad |\Delta p_3| \leq 0,2;$

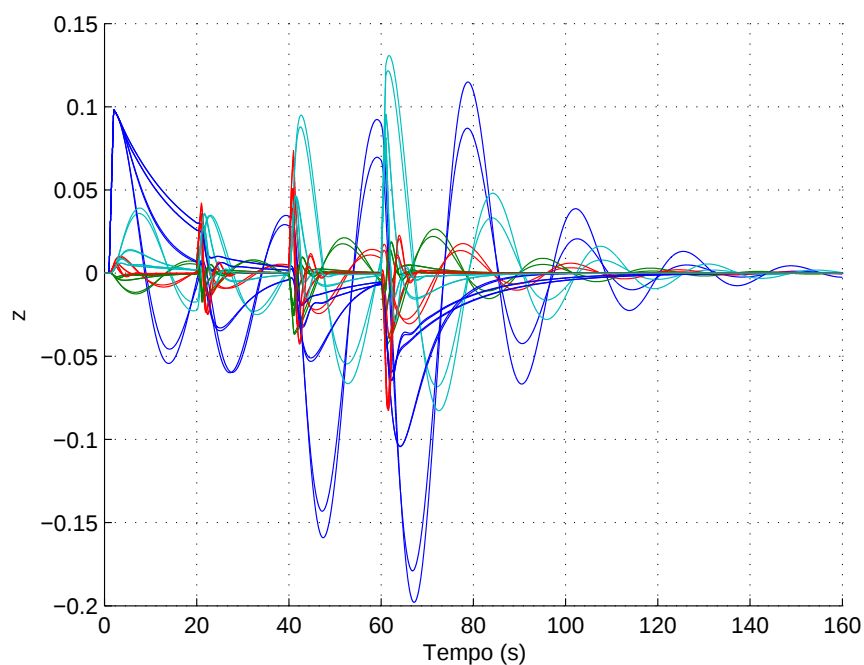
O objetivo é minimizar a perturbação, nenhuma restrição foi adicionada, $\epsilon_\infty = \epsilon_2 = \epsilon_m = \infty$. Os pesos são: $\lambda_\infty = 1; \lambda_2 = \lambda_m = 0$, para equação (5.26), isto quer dizer, minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$. O pior caso da norma encontrado por Agulhari, Oliveira e Peres (2010) foi de 2,67. No método desta dissertação teve-se o pior caso da norma igual a 1,49, ou seja, uma melhoria de 44,19% em comparação à metodologia proposta por Agulhari, Oliveira e Peres (2010).

A figura 5.6 mostra as respostas transitórias das quatro variáveis de desempenho para os 8 vértices, destes dois métodos. Pode-se observar que no método desta dissertação, chega-se no regime permanente mais rápido, em torno de 100 segundos, quando comparado com Agulhari, Oliveira e Peres (2010), em torno de 160 segundos. Outro fato de se observar é que pelo método Agulhari, Oliveira e Peres (2010) teve-se extremos de variações das respostas transitórias maiores, por exemplo na figura 5.6(b), após 60 segundos ultrapassou 0,1 e -0,15, em contrapartida o método proposto nesta dissertação, figura 5.6(a), neste mesmo período, não se alcançou valores acima que 0,1 e menores -0,15. A perturbação teve pulso unitário com duração de 1 segundo em cada uma das 4 perturbações, sinal de teste de energia limitada, sendo que em cada entrada o pulso ocorreu em instantes distintos (1 segundo, 20, 40 e 60 segundos).

O vetor da soma do ISE (do inglês *Integral of the Square of the Error*) das quatro variáveis, para cada vértice, encontrado pelo método iterativo é: $\gamma^* = [0,1111 \ 0,1204 \ 0,2681 \ 0,2916 \ \mathbf{0,3090} \ 0,2759 \ 0,1195 \ 0,1106]$ e para o método do Agulhari, Oliveira e Peres



(a) Procedimento iterativo proposto.



(b) Método Agulhari, Oliveira e Peres (2010).

Figura 5.6: Respostas transitórias de $z(t)$ para os 8 vértices - exemplo helicóptero VTOL.

(2010): $\gamma^* = [0,1180 \ 0,1191 \ 0,1751 \ 0,6296 \ \mathbf{0,8378} \ 0,1752 \ 0,1185 \ 0,1182]$. Ao se comparar os resultados percebe-se que para este sinal de teste específico, o pior caso ocorreu no vértice cinco para ambos métodos, porém, o método desta dissertação teve uma melhora de 63,12%.

Sobre o método do Agulhari, Oliveira e Peres (2010), como dito no capítulo 1, o método é por dois passos. Primeiro resolve um problema LMI para projetar um controlador sub-ótimo por realimentação de estados dependente de parâmetros, ou seja, um controlador que garante um custo garantido fixado. No segundo passo é obtido o controlador por realimentação estática de saída ótimo resolvendo um problema LMI que fixa as variáveis de Lyapunov dependente de parâmetros iguais as obtidas no passo 1. É necessário fazer uma busca de um valor escalar que especifica o limitante do problema LMI no passo 1, para obtenção do melhor resultado final, não necessariamente o melhor resultado do passo 1.

O controlador robusto obtido via método iterativo com algoritmo DE para o exemplo VTOL é:

$$K = \begin{bmatrix} 2,3238 & -0,1208 \\ -24,0857 & 1,6490 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Os parâmetros para o método DE no passo de síntese do método iterativo foram: tamanho da população, $N = 20$, e região de distribuição da população inicial, $\Delta = 10$.

5.6.3 Exemplo 5.3

O terceiro exemplo ilustrativo é um sistema para controle dos níveis de quatro tanques interativos apresentado em Johansson (2000). Um diagrama esquemático deste processo é mostrado pela figura 5.7. Os níveis de água nos tanques 1 e 2 são controlados por duas bombas. As posições das válvulas de 3 vias determinam a existência ou não de um zero no semi-plano direito do plano-S da função de transferência, multivariável, para o modelo linearizado.

As entradas do processo são v_1 e v_2 (tensões de entrada para as bombas) e as saídas são y_1 e y_2 (tensões dos dispositivos de medição de nível). Pela lei de balanço das massas e Bernoulli's tem-se:

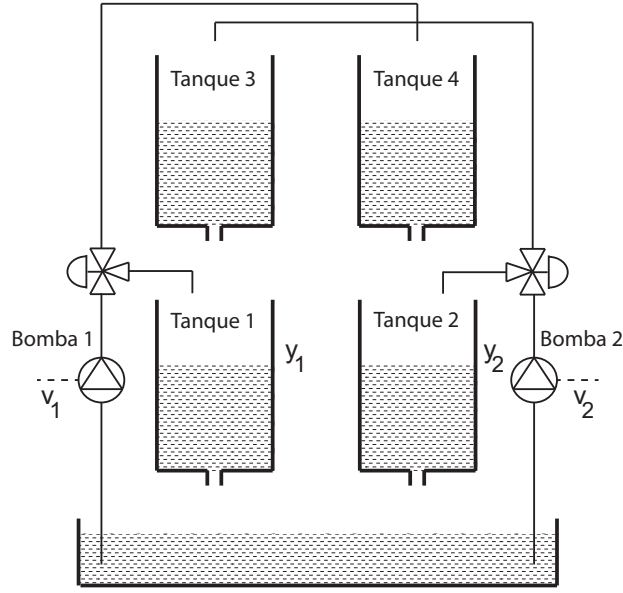


Figura 5.7: Diagrama esquemático do processo quádruplo tanque.

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1 \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2 \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_2}v_2 \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

sendo: A_i seção transversal (área) do i -ésimo tanque; a_i seção transversal do orifício de saída do i -ésimo tanque; h_i nível da água do i -ésimo tanque; v_i voltagem aplicada na i -ésima bomba; $k_i v_i$ é o fluxo correspondente da i -ésima bomba; e $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ são os ajustes das válvulas de 3 vias que determinam o percentual de vazão de entrada em cada tanque. O fluxo de entrada do tanque 1 é $\gamma_1 k_1 v_1$ e o fluxo de entrada do tanque 4 é $(1-\gamma_1)k_1 v_1$. O mesmo ocorre para o tanque 2 e tanque 3 em função de γ_2 . A aceleração da gravidade, g , é considerada igual a 981 cm/s^2 . Os sinais de nível medidos são $k_c h_1$ e $k_c h_2$. Os valores dos parâmetros do processo laboratorial são: $A_1 = A_3 = 28 \text{ cm}^2$; $A_2 = A_4 = 32 \text{ cm}^2$; $a_1 = a_3 = 0,071 \text{ cm}^2$; $a_2 = a_4 = 0,057 \text{ cm}^2$; $k_c = 0,5 \text{ V/cm}$, dados retirados de Johansson (2000).

Em Johansson (2000), o modelo e o controle do processo são abordados em dois pontos operacionais: P_- que apresenta características de fase mínima e P_+ que exibe características de fase não mínima. Os valores dos parâmetros para estes pontos operacionais estão

Tabela 5.4: Valores dos parâmetros para P_- e P_+

		P_-	P_+
$(h_1^0; h_2^0)$	(cm)	(12,4; 12,7)	(12,6; 13,0)
$(h_3^0; h_4^0)$	(cm)	(1,8; 1,4)	(4,8; 4,9)
$(v_1^0; v_2^0)$	(V)	(3,00; 3,00)	(3,15; 3,15)
$(k_1; k_2)$	(cm ³ /Vs)	(3,33; 3,35)	(3,14; 3,29)
$(\gamma_1; \gamma_2)$		(0,70; 0,60)	(0,43; 0,34)

na tabela 5.4.

Considere: $x(t) = [h_1(t) \ h_2(t) \ h_3(t) \ h_4(t)]^T$, $u(t) = [v_1(t) \ v_2(t)]^T$, $w(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ n_1(t) \ n_2(t)]$, $z(t) = [k_c h_1(t) \ k_c h_2(t)]^T$ e $y(t) = [r_1(t) - (k_c h_1(t) + n_1(t)) \ r_2(t) - (k_c h_2(t) + n_2(t))]^T$, sendo $r_i(t)$ e $n_i(t)$, para $i = 1, 2$, os sinais de referência e ruídos de medição, respectivamente. As matrizes no modelo de espaço de estado em tempo contínuo são:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_4} \end{bmatrix}, \\
 B_w &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{A_3} \\ \frac{(1 - \gamma_1) k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_z &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_y = \begin{bmatrix} -k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{zw} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{yw} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

sendo as constantes de tempo do sistema linearizado definidas como: $T_i = \frac{A_i}{a_1} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}$, para $i = 1, \dots, 4$. Foi adicionado uma variação no parâmetro h_i para simular as incertezas, sobre as constante de tempo, T_i , sendo esta variação de $\pm 50\%$ em torno do ponto de operação, assim gera um politopo de 16 vértices (2^4). Nesta dissertação foi simulado

apenas o sistema para fase mínima (P_-).

O objetivo de controle para o processo de quatro tanques é obter uma função de transferência em malha-fechada, $T_{cr}(z)$, que aproxima o modelo de referência, ou seja, minimização da diferença entre a resposta real e o modelo de referência. O tempo de amostragem é $T = 1s$. Para este exemplo é considerado a síntese de um controlador PI descentralizado com objetivo, inicialmente, de aproximação de modelo de referência em malha-fechada. Pela escolha apropriada do modelo de referência diagonal é possível desacoplar o sistema e simultaneamente garantir especificações da resposta transitória de rastreamento. É adotado neste trabalho, como elementos da diagonal do modelo de transferência, funções de transferência com um zero e dois pólos complexos:

$$T_{m,i} = \frac{\omega_{ni}^2(T_{zi}s + 1)}{(s^2 + 2\zeta_i\omega_{ni}s + \omega_{ni}^2)} \quad (5.39)$$

com $i=1,2$. Inicialmente foram determinados os seguintes parâmetros para o modelo de referência, obtidos experimentalmente: $\zeta_1 = 0,7$, $\omega_{n1} = 0,4$, $T_{z1} = 4$ e para o segundo modelo os mesmo parâmetros, assim: $\zeta_2 = 0,7$, $\omega_{n2} = 0,4$ e $T_{z2} = 4$. A função de transferência é:

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,00639z-0,006374}{z^2-1,994z+0,9944} & 0 \\ 0 & \frac{0,00639z-0,006374}{z^2-1,994z+0,9944} \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Para o teste em que o objetivo é apenas a aproximação do modelo de referência, nenhuma restrição foi adicionada, $\epsilon_\infty = \epsilon_2 = \epsilon_m = \infty$ e tem-se peso na minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ para erro em relação ao modelo de referência, $\lambda_m = 1$; $\lambda_\infty = \lambda_2 = 0$, para equação (5.26).

É considerado um controlador PI descentralizado cujas entradas são os erros de rastreamento e saídas as tensões das bombas. O controlador em tempo discreto é representado no espaço de estados como:

$$K_j(z) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{c,j} & B_{c,j} \\ \hline C_{c,j} & D_{c,j} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{T}{T_{i,j}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{T}{T_{i,j}} \\ \hline k_{p,j} & 0 & k_{p,j}(1 + \frac{T}{2T_{i,j}}) & 0 \\ 0 & k_{p,j} & 0 & k_{p,j}(1 + \frac{T}{2T_{i,j}}) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

onde, $k_{p,j}$ é o ganho proporcional, $T_{i,j}$ é a constante de tempo integral. Cabe ressaltar que para todos os testes deste exemplo, existe a restrição de que as constantes de tempo integral devam ser positivas, sendo necessário a restrição f_2 na equação (5.32), com $n_p = 2$. Foram obtidos os seguintes parâmetros do controlador através do procedimento de síntese proposto:

$$K_{p,1} = 11,6152; T_{i,1} = 3,8391; K_{p,2} = 15,4077; T_{i,2} = 3,9575 \quad (5.42)$$

Os sinais de referência são degraus unitário sendo que para $r_1(t)$ o degrau ocorre em $t = 0$ e para $r_2(t)$ o degrau ocorre em $t = 250$. O ruído é pseudoaleatório com distribuição normal padrão (função *randn* do Matlab) multiplicado por 0,005. A figura 5.8 apresenta os resultados obtidos das respostas transitórias das saídas controladas (sólidas), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado). A figura 5.9 mostra os sinais de controle. Pode ser observado pela figura 5.8 que a resposta transitória de todos os vértices reproduz de forma precisa a resposta especificada pelo modelo de referência e que o acoplamento entre as malhas é pequeno quando comparado com a apresentada no artigo de Johanson (2000).

A maior norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação encontrado foi de $\|E(z, \alpha_m, K^*)\|_\infty = 0,1407$. Definindo o erro de rastreamento como:

$$ISE_i = \int_0^\infty [r_i(t) - h_i(t)]^2 dt \quad (5.43)$$

sendo $i = 1, 2$ e $ISE_T = ISE_1 + ISE_2$. O valor máximo da integral do erro de rastreamento foi de $ISE_T = 3,0886$.

Define-se a variação do sinal de controle:

$$\delta u_i = \max_k u(kT_s) - \min_k u(kT_s), k \in [k_i, K_s] \quad (5.44)$$

O valor do pior caso dos vértices para cada variação foi de $\delta u_1 = 0,3857$ e $\delta u_2 = 0,4561$ no terceiro vértice, calculados no intervalo de $k \in [400, 500]$, que corresponde aos últimos 100 segundos de simulação (sistema já atingiu regime permanente). A maior variância dos sinais de controle, δu_1 e δu_2 , ou seja, $\max(\delta u_1 + \delta u_2)$, foi 0,8418.

Conforme pode ser verificado na figura 5.9, o esforço de controle atinge valores maiores que quatro vezes o valor de regime. Com intuito de reduzir este sinal, para no máximo 10 volts, um novo modelo de referência foi adotado, sendo este, correspondendo a um transitório mais lento e amortecido. O segundo modelo de referência possui os seguintes parâmetros: $\zeta_1 = 0,74$, $\omega_{n1} = 0,17$, $T_{z1} = 17$, $\zeta_2 = 0,91$, $\omega_{n2} = 0,093$ e $T_{z2} = 17$. A função de transferência em tempo discreto fica:

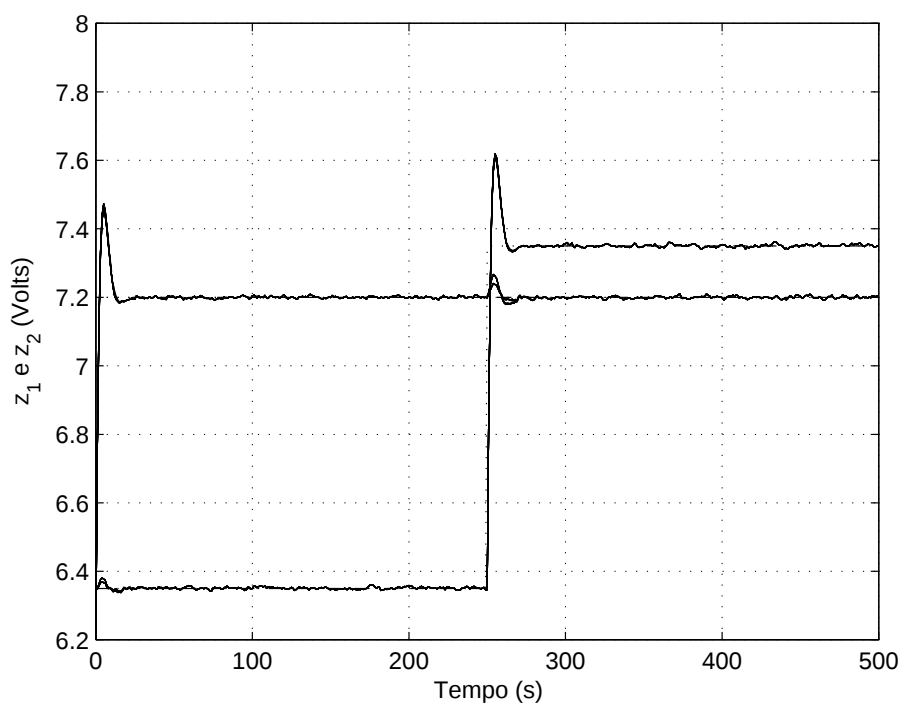


Figura 5.8: Saídas controladas (sólido), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) para o primeiro modelo de referência.

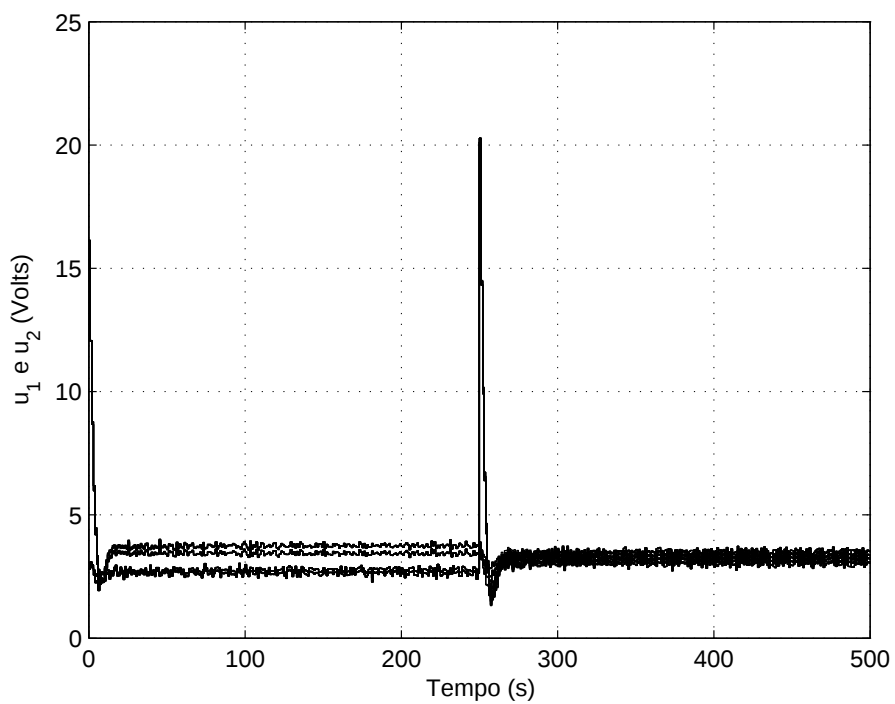


Figura 5.9: Sinais de controle para o primeiro modelo de referência - tensões das bombas.

$$T_m(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,2167z-0,1912}{z^2-1,752z+0,7776} & 0 \\ 0 & \frac{0,1392z-0,1312}{z^2-1,836z+0,8443} \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Para este modelo, mantém o objetivo de aproximação do rastreamento do modelo de referência, como realizado no teste anterior. A estrutura do controlador também é mantida para este modelo, sendo obtidos os seguintes parâmetros do controlador:

$$K_{p,1} = 5,5504; T_{i,1} = 10,2252; K_{p,2} = 4,4340; T_{i,2} = 24,1715 \quad (5.46)$$

A figura 5.10 apresenta os resultados obtidos das respostas transitórias das saídas controladas (sólidas), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) e a figura 5.11 mostra o sinal de controle para este novo modelo de referência mais lento. Pela figura 5.11 é verificado que o pico do sinal de controle diminuiu, conforme desejado.

Para este modelo teve-se o pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação, $\|E(z, \alpha_m, K^*)\|_\infty = 0,1583$. O valor máximo da integral do erro foi de $ISE_T = 6,1835$. O valor do pior caso dos vértices para cada variação foi de $\delta u_1 = 0,1825$ e $\delta u_2 = 0,1177$ no décimo quarto, calculados no intervalo de $k \in [400, 500]$. A maior variância dos sinais de controle, δu_1 e δu_2 , ou seja, $\max(\delta u_1 + \delta u_2)$, foi 0,3002.

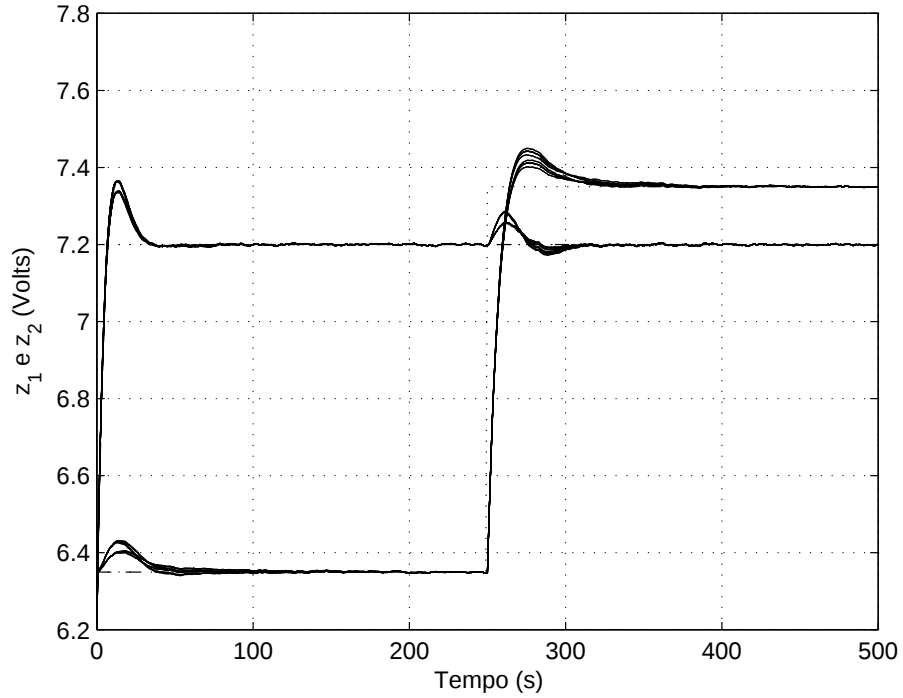


Figura 5.10: Saídas controladas (sólido), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) para o segundo modelo de referência.

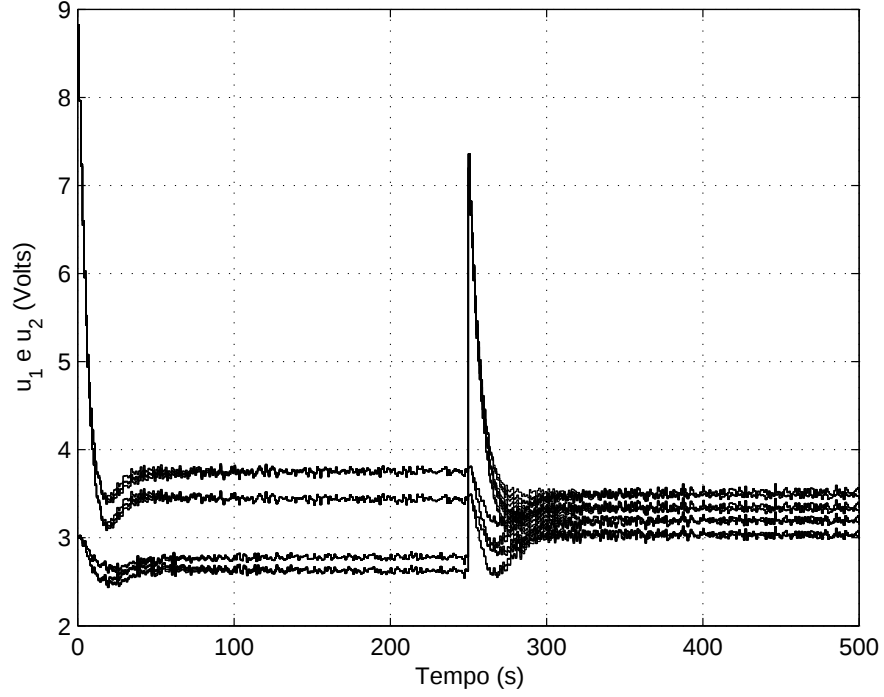


Figura 5.11: Sinais de controle para o segundo modelo de referência - tesões das bombas.

Foi realizado um segundo teste com o modelo lento, com o objetivo de minimizar o efeito do ruído de medição. Uma restrição foi adicionada para o erro do modelo de referência, $\epsilon_\infty = \epsilon_2 = \infty$ e $\epsilon_m = 0,3$, ou seja, um erro máximo do modelo de referência de 0,3. Para otimização da norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência relacionando os ruídos de medição e os sinais de controle, são adotados os seguintes pesos: $\lambda_2 = 1$; $\lambda_\infty = \lambda_m = 0$, para equação (5.26). Os parâmetros do controlador obtidos são:

$$K_{p,1} = 3,9371; T_{i,1} = 8,3373; K_{p,2} = 3,1239; T_{i,2} = 28,1988 \quad (5.47)$$

A figura 5.12 ilustra os resultados obtidos das respostas transitórias das saídas controladas (sólidas), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) e a figura 5.13 mostra o sinal de controle para este modelo de referência lento para o segundo teste (minimização do ruído).

Neste segundo teste do segundo modelo (mais lento) teve-se o pior caso da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação, $\|E(z, \alpha_m, K^*)\|_\infty = 0,3000$, conforme especificado no projeto (restrição ϵ_m). O valor máximo da integral do erro foi de $ISE_T = 8,4230$. O valor do pior caso dos vértices para cada variação foi de $\delta u_1 = 0,0900$ e $\delta u_2 = 0,0828$ no décimo quarto, calculados nos últimos 100 segundos. A maior variância dos sinais de controle, δu_1 e δu_2 , ou seja, $\max(\delta u_1 + \delta u_2)$, foi 0,1729.

Para melhor comparação, a tabela 5.5 apresenta os resultados obtidos com os valores

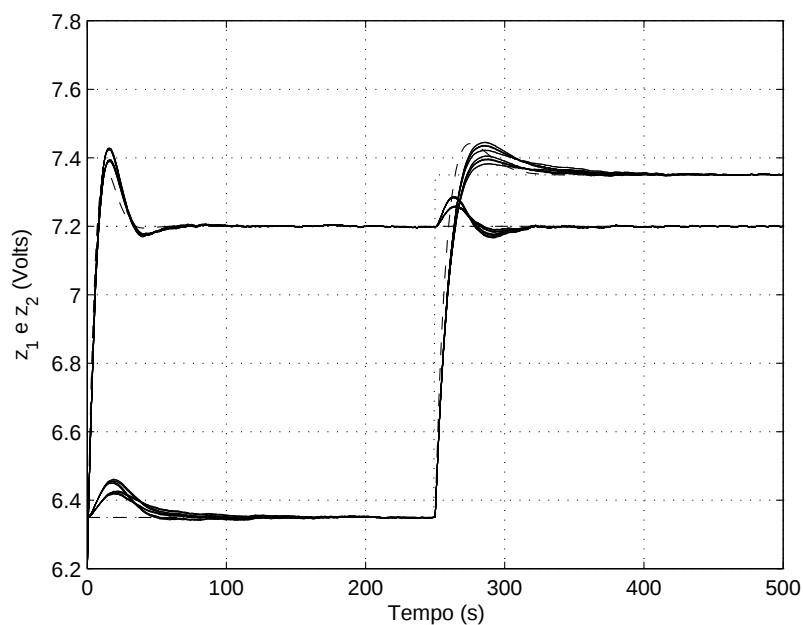


Figura 5.12: Saídas controladas (sólido), saídas do modelo de referência (tracejado) e sinais de referência (pontilhado) para o segundo modelo de referência minimização do ruído.

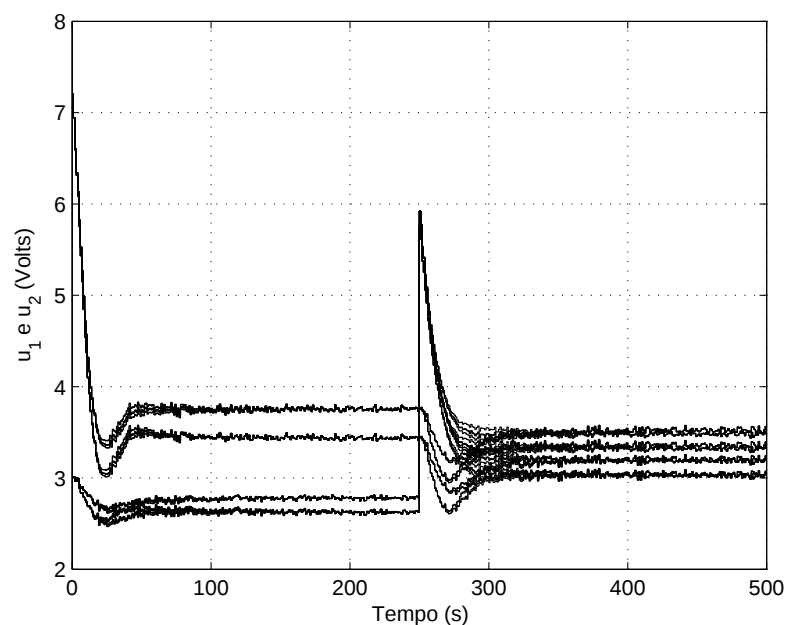


Figura 5.13: Sinais de controle para o segundo modelo de referência minimização do ruído - tesões das bombas.

Tabela 5.5: Resultados do exemplo do sistema de 4 tanques.

	$\max \ E(z, \alpha, K^*)\ _\infty$	ISE_T	$\max(\delta u_1 + \delta u_2)$
Modelo 1	0,1407	3,0886	0,8418
Modelo 2	0,1583	6,1835	0,3002
Modelo 2 com $\epsilon_m \leq 0.3$	0,3000	8,4230	0,1729

de norma do erro de aproximação, integrais de erro e variações totais dos sinais de controle para os três testes realizados neste exemplo.

O modelo de referência com transitório mais lento apresenta maior erro de aproximação, quando comparado com o primeiro modelo, o que reflete no maior acoplamento entre malhas e respostas não exatamente iguais à do modelo de referência para os 16 vértices. Ao se admitir um maior erro de aproximação do modelo de referência com intenção de atenuar os efeitos dos ruídos de medição, são obtidas menores valores de variação dos sinais de controle em relação ao projeto que considera apenas a minimização do erro de aproximação. Para o primeiro modelo (mais rápido), tem-se o menor erro de aproximação, em contrapartida o maior sinal de controle, inclusive com pico que ultrapassa 20 volts.

Os parâmetros para o método DE no passo de síntese do método iterativo foram: o tamanho da população, $N = 20$, para todos os três testes e a região de distribuição da população inicial, $\Delta = 0,1$ para o teste de minimização do erro de rastreamento (dois modelos) e $\Delta = 10$ para o teste da minimização da norma $\mathcal{H}_2$ (segundo modelo com minimização do ruído). Como são desejadas constantes de tempo integrais positivas, os limites inferiores das duas primeiras variáveis de otimização, $\chi_j = T_s/T_{i,j}$, $j = 1,2$, são escolhidos iguais a zero ao invés de $-\Delta$.

5.7 Conclusões

Foi avaliada uma implementação para um procedimento de síntese de sistemas de controle robusto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ em tempo discreto fundamentado em dois passos iterativos, análise e síntese. Na etapa de síntese é calculado um controlador que minimiza a função objetivo e atende às restrições considerando um número finito de pontos do domínio politópico de incerteza. No passo de análise, o controlador determinado é verificado para todo o domínio infinito de incerteza e é analisado a necessidade de acrescentar novos pontos no conjunto finito de pontos da etapa de síntese. Nesse capítulo foi estudado a implementação dos dois passos, análise e síntese, via método evolução diferencial. Diferente de trabalhos anteriores, foi considerado uma nova forma de obter um sistema discreto do domínio de incerteza, fazendo a combinação convexa dos vértices representados em tempo contínuo para posterior discretização, que evita o erro obtido ao se realizar a combinação convexa

dos vértices discretizados, quando utilizando o método de discretização por segurador de ordem zero. No passo de síntese, o método evolução diferencial tem uma maior probabilidade de obter uma solução melhor que algoritmos não evolutivos. No passo de análise, LMI/divisão é capaz de determinar de forma determinística a estabilidade robusta e o máximo da norma no domínio infinito com precisão específica, porém, seu custo computacional pode se tornar proibitivo com o aumento da complexidade do problema. O método evolução diferencial é uma alternativa para etapa de análise, assumindo um pequeno risco, com a vantagem de apresentar um custo computacional menor para problemas complexos.

O procedimento iterativo, com ambas etapas implementadas pelo método DE, foi avaliado em três problemas ilustrativos, para diferentes possibilidades. O primeiro problema foi o avião F4E, com objetivo de minimizar a perturbação, norma $\mathcal{H}_\infty$, com controlador por realimentação de saída estático e dinâmico (ordem 0 à 4). Através deste exemplo foi possível avaliar a convergência do procedimento de síntese mesmo quando inicializando o conjunto finito com apenas um ponto médio do politopo. O segundo exemplo foi para o helicóptero VTOL, com o mesmo objetivo de minimizar perturbação. Este exemplo foi escolhido para comparar com um trabalho da literatura (Agulhari et al. 2010), conforme mostrado, a estratégia desta dissertação obteve resultado mais eficaz. Por fim, teve-se o problema dos quatros tanques, com objetivo de ter o menor erro com um modelo de referência especificado, ou seja, minimizar norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação. Um segundo modelo de referência foi testado, mais lento, com o mesmo objetivo de minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de referência. No mesmo problema, teve-se a minimização da norma $\mathcal{H}_2$ com intuito de otimizar o ruído de medição, com restrição ao erro de aproximação do modelo de referência. Assim, teve-se exemplos para as três situações de λ e um exemplo multiobjetivo (restrição ϵ_m). Mesmo o método evolução diferencial não possuindo a garantia de obtenção da solução ótima global, ele pode ser efetivo com menor custo computacional.

Conclusão

6.1 Método Evolução Diferencial aplicado à Análise de Estabilidade Robusta

Uma contribuição desta dissertação foi adaptar e avaliar uma metodologia de análise de estabilidade robusta, baseada no método evolução diferencial, para ser aplicada em sistemas em tempo discreto, lineares e invariantes no tempo, representados por modelos de sistemas politópicos. Uma segunda contribuição foi apresentar uma melhoria na formação da população inicial do método DE, via busca por grade. A metodologia apresentada foi comparada com duas metodologias: LMI/divisão e método DE apresentado por Moura e Gonçalves (2016a). O método LMI/divisão determina se um sistema é robustamente estável ou localiza uma instância de sistema instável no politopo, uma segunda vantagem é apresentar um custo computacional menor quando comparado apenas com formulações LMIs. Porém, o método LMI/divisão, assim como as formulações LMIs, apresenta um rápido crescimento do custo computacional com o aumento da complexidade do problema. Isto motivou o desenvolvimento do método DE para análise de estabilidade robusta apresentado por Moura e Gonçalves (2016a) para sistemas contínuos, no qual teve-se pequenos erros e um menor custo computacional. A metodologia mostrada nessa dissertação foi desenvolvida para sistemas discretos e propôs uma busca inicial por grade, tendo obtido 100% de acerto com desempenho do custo computacional significativo. Assim, o método desta dissertação obteve-se uma maior eficiência na porcentagem de acerto quando comparado com o proposto por Moura e Gonçalves (2016a), com um custo computacional menor ao comparar com o método LMI/divisão, sendo nítido este benefício do tempo com o aumento da complexidade. A configuração final do método DE apresentada foi obtida após vários experimentos, com diferentes formas de implementação e diferentes configurações dos parâmetros do método DE. A conclusão final sobre análise de estabilidade robusta é que se computacionalmente o método LMI/divisão for viável, este é mais indicado uma vez que, o método é determinístico. Caso o método LMI/divisão apresente

um custo computacional inaceitável, o método DE com busca inicial por grade é uma boa alternativa para análise de estabilidade robusta, admitindo um pequeno risco, uma vez que, este método é estocástico. A principal motivação do uso do método DE para análise de estabilidade robusta é que ele seja aplicado no procedimento iterativo de síntese de controladores robustos em sistemas com maior complexidade.

6.2 Método Evolução Diferencial aplicado ao Cálculo de Custos Garantidos $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$

Outra contribuição dessa dissertação foi adaptar e avaliar uma metodologia de cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$, novamente para SLIT em tempo discreto com modelos politópicos baseado no método evolução diferencial. Assim, como na análise de estabilidade robusta, uma contribuição deste trabalho foi apresentar uma melhoria na formação da população inicial do DE. O método BB, que combina formulações LMI com divisão de politpo, é o mais indicado quando o custo computacional é aceitável, uma vez que calcula o custo garantido ($\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$) com a precisão desejada. Para o método DE, como mostrado nos testes exaustivos, nem sempre o algoritmo de otimização converge para o máximo global. Foi realizada uma comparação para três configurações do método DE: o DE original apresentado por Storn (1995), o método com pontos iniciados nas arestas apresentado por Moura e Gonçalves (2016b) e o DE com busca inicial por grade apresentado nesta dissertação. Sobre o tempo computacional, a diferença entre estes métodos não são significativos. Para o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ o método DE com a melhoria proposta nesta dissertação, pode-se dizer que obteve 100% de acerto, uma vez que, os erros percentuais tiveram erros a partir de duas casas decimais, diferentemente das outras duas versões do método DE. Os custos garantidos $\mathcal{H}_2$, para alguns sistemas, apresentaram erros significativos em todas as versões do método DE, sendo que para a versão proposta nesta dissertação, erros significativos foram observados para apenas 4 sistemas dos 225 avaliados. Apesar disto, o método DE com busca inicial por grade teve um percentual de acerto considerável, assim, quando o método BB for proibitivo computacionalmente, o método apresentado na dissertação é uma alternativa a ser considerada. Uma vantagem do método DE é sua maior simplicidade de implementação em relação ao método BB. Além de apresentar a viabilidade do algoritmo DE para cálculo dos custos garantidos de sistemas politópicos em tempo discreto e mostrar uma melhoria na formação da população inicial deste método, uma outra contribuição da dissertação é apresentar uma implementação e uma configuração de parâmetros eficiente para aplicar o método DE neste problema específico. Esta versão final do algoritmo foi obtida após vários testes com diferentes implementações e diferentes configurações de parâmetros. Do mesmo modo que ocorreu para

a metodologia de análise de estabilidade robusta, a motivação para o uso do método DE para o cálculo de custo garantido é a sua aplicação no procedimento iterativo de síntese de controladores robustos aplicado a sistemas mais complexos.

6.3 Síntese de Controladores Robustos pelo Método Evolução Diferencial

Por fim, esta dissertação avaliou uma implementação para o procedimento iterativo de síntese de sistemas de controle robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas discretos no tempo. Esta metodologia é baseada em dois passos iterativos, análise e síntese, sendo que na etapa de síntese é determinado um controlador que minimiza a função objetivo e atenda as restrições, em que é considerado um número finito de pontos do domínio politópico de incerteza. Nesta dissertação foram avaliadas duas possibilidades de inicialização destes pontos. No passo de análise, o controlador encontrado é verificado para todo o domínio infinito de incerteza e caso necessário, acrescenta pontos no conjunto finito de pontos considerado no passo de síntese. Neste trabalho ambas as etapas do processo iterativo foram implementadas via o método de otimização evolução diferencial. O método evolução diferencial não tem garantia de obtenção da solução ótima global, método estocástico, porém é uma alternativa a ser considerada, admitindo um pequeno risco, com a grande vantagem do custo computacional ser menor. A implementação de síntese iterativa via DE, proposta nesta dissertação, foi testada para três exemplos ilustrativos, em que foi testado as três possíveis minimizações (norma $\mathcal{H}_2$ para distúrbio, norma $\mathcal{H}_\infty$ para perturbação e erro de aproximação do modelo de referência, $\mathcal{H}_\infty$) e uma situação multiobjetivo. Para todos os testes, a metodologia adota nesta dissertação obteve resultados satisfatórios.

6.4 Propostas para Trabalhos Futuros

É importante propôr uma forma de aumentar a confiabilidade da metodologia para o cálculo do custo garantido $\mathcal{H}_2$ para SLIT com modelo politópico. Isto pode ocorrer por uma escolha ainda mais adequada da implementação e/ou no ajuste dos parâmetros. Outra forma é escolher outro tipo de algoritmo de otimização, como o enxame de partículas ou busca harmônica, ou até mesmo uma forma híbrida que combina dois ou mais algoritmos.

Nesta dissertação, o procedimento de síntese iterativa para controle robusto foi aplicado a exemplos ilustrativos, sendo que em trabalhos futuros pode ser avaliado em problemas de controladores de sistemas industriais multivariáveis, uma vez que, estes sistemas podem ser representados no espaço de estados por modelos de ordem elevadas. Avaliar os controladores projetados pelo procedimento de síntese em protótipos ou sistemas de

laboratório, para obtenção de resultados experimentais, como por exemplo, o sistema dos quatros tanques.

6.5 Trabalhos Apresentados em Eventos Científicos Relativos à Dissertação

- SOUSA, M. C.; GONÇALVES, E. N.. Análise de estabilidade robusta pelo método evolução diferencial para sistema em tempo discreto. In: XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2017, Porto Alegre, RS. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. 2017. p. 424 - 429

Referências Bibliográficas

Ackermann, J. e Franklin, S. N. (1981). Robust Flight Control: A Design Example, *Journal of Guidance and Control*, vol.4, no.6, pp. 597.

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2010). Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains, *American Control Conference*, pp. 4677-4682.

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). LMI relaxations for reduced-order robust $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 6, pp. 1532-1537.

Apkarian, P. e Noll, D. (2006). Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ synthesis, *IEEE Transactions Automatic Control* vol. 51, no. 1, pp. 71-86.

Apkarian, P., Tuan, H. D. e Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and $\mathcal{H}_2$ synthesis with enhanced LMI characterizations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1941-946.

Bachur, W. E. G. (2017). Síntese de Controladores Robustos via Otimização Evolutiva Multiobjetivo. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 15 de setembro de 2017.

Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Ramírez, J. A. e Batista, L. S. (2017). A multi-objective robust controller synthesis approach aided by multicriteria decision analysis, *Applied Soft Computing* **60**(2017): 374-386.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM, Philadelphia, PA.

Braga, M. F., Morais C. F., Tognetti E. S., Oliveira R. C. L. F. e Peres P. L. D. (2013). A New Procedure for Discretization and State Feedback Control of Uncertain Linear Systems, *52 IEEE Conference on Decision and Control*. Florence, Itália. 6397-6402.

Calafiore, G. C., Dabbeneb, F. e Tempo, R. (2011). Research on probabilistic methods for control system design, *Automatica* **47**(7): 1279-1293.

Chankong, V. e Haimes, Y. Y. (1983). Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, Elsevier.

Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. e Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(3): 365-370.

Chesi, G. (2008). On the non-conservatism of a novel LMI relaxation for robust analysis of polytopic systems, *Automatica* **44**(11): 2973-2976.

Chesi, G. (2010). Time-invariant uncertain systems: A necessary and sufficient condition for stability and instability via homogeneous parameter-dependent quadratic Lyapunov functions, *Automatica* **46**(2): 471-474.

Chilali, M. e Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358-367.

Das, S. e Suganthan, P. N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art, *Proceedings of IEEE International Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 15, No. 1.

de Oliveira, M. C. (2004). Investigating duality on stability conditions, *Systems e Control Letters* **52**: 1-6.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *System e Control Letters* **37**(4): 261-265.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2002). Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *Internati-*

onal Journal of Control **75**(9): 666-679.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Hsu, L. (1999). LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case, *Linear Algebra and its Applications* **296**: 27-38.

de Oliveira, M. C. e Skelton, R. E. (2002). On stability tests for linear systems, *Proceedings of the 15th Triennial World Congress, IFAC*, Barcelona, Spain.

de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. e Peres, P. L. D. (2004a). $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *International Journal of Systems Science* **35**(5): 305-315.

de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F. e Peres, P. L. D. (2004b). $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions, *Automatica* **40**: 1053-1061.

Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. e Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *IEEE Transactions in Automatic Control* **34**(8): 831-847.

Doyle, J., Packard, A. e Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs, and μ , *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, IEEE*, pp. 1227-1232.

Ebihara, Y. e Hagiwara, T. (2004). New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis, *Automatica* **40**: 2003-2009.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB, *The Math Works Inc.*, Natick.

Geem, Z.W.; Kim, J. e Loganathan, G. (2001). A new heuristic optimization algorithm: harmony search, simulation, *Simulation, Vol. 76, No. 2* **76**: 60-68.

Geromel, J. C. e Peres, P. L. D. (1994). An alternate numerical solution to the linear quadratic problem, *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 198-202.

Ghaoui L. E., Oustry F. e AitRami M. (1997). A cone complementarity linearisation

- algorithm for static output feedback and related problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1171-1176.
- Goldberg, D. (1989). Genetic algorithms in search, optimization and machine learning., MA: AddisonWesley Professional.
- Gonçalves, E. N. (2006). Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Setembro de 2006.
- Gonçalves, B. M., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2012). Robust decoupling PI controllers for multi-loop control, *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, Maui, Hawaii, USA, pp. 1530-1535.
- Gonçalves, E. N., Bachur, W. E. G., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2011). Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ /reference model dynamic output-feedback control synthesis, *International Journal of Control* **84**(12): 2067-2080.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2005). Improved optimisation approach to robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for linear systems, *IEE Proceedings Control Theory & Applications* **152**(2): 171-176.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2006). $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **54**(9): 3620-3626.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2008). A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems, *Journal of Process Control* **18**(1): 19-26.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2006). Algorithm 860: SimpleS - an extension of Freudenthal's simplex subdivision, *ACM Transactions on Mathematical Software* **32**(4): 609-621.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Mesquita, R. C. (2007). New strategy for robust stability analysis of discrete time uncertain systems, *Systems e Con-*

trol Letters **56**: 516-524.

Gumussoy, S., Henrion, D., Millstone, M., e Overton, M. L. (2009). Multiobjective robust control with HIFOO 2.0, in *Proceedings 6th IFAC 8/5000 Symposium Robust Control, Design* pp. 144-149.

He, Y., Wu, M. e She, J.-H. (2005). Improved bounded-real-lemma representation and $\mathcal{H}_\infty$ control of systems with polytopic uncertainties, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs* **52**(7): 380-383.

Henrion, D., Arzelier, D., Peaucelle, D. e Lasserre, J.-B. (2004). On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp. 887-892.

Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 456-465.

Kau, S. W., Liu, Y.-S., Hong, L., Lee, C.-H., Fang, C.-H. e Lee, L. (2005). A new LMI condition for robust stability of discrete-time uncertain systems, *Systems e Control Letters* **54**: 1195-1203.

Keel, S. P. L. B. e Howze, J. W. (1988). Robust control with structured perturbations, *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 33, no. 1, pp. 68-78.

Kennedy, J. e Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization, *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*.

Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. (2003). An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(3): 500-504.

Mehdi, D., Boukas, E. K. e Bachelier, O. (2004). Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems, *IMA J. Mathematical Control Information*, vol. 21, no. 1, pp. 1-13.

Moreira H. R., Oliveira R. C. L. F. e Peres P. L. D. (2011). Robust $\mathcal{H}_2$ static output

feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems, *Optimal Control Applications and Methods* **32**:1-13.

Moura, D. M. (2016). Análise e síntese de sistemas de controle robusto baseado no método evolução diferencial. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ.

Moura, D. M. e Gonçalves E. N. (2016a). Análise de estabilidade robusta pelo método de evolução diferencial. *XXI Congresso Brasileiro de Automatica* 170-175.

Moura, D. M. e Gonçalves E. N. (2016b). Cálculo de custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ pelo método de evolução diferencial. *XXI Congresso Brasileiro de Automatica* 176-181.

Moura, D. M., Silva, S.J. e Gonçalves E. N. (2016). Síntese de controladores robustos pelo método de evolução diferencial. *XXI Congresso Brasileiro de Automatica* 182-187.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2005a). LMI conditions for the existence of polynomially parameter-dependent Lyapunov functions assuring robust stability, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, IEEE, Seville, Spain, pp. 1660-1665.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2005b). Stability of polytopes of matrices via affine parameterdependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions, *Linear Algebra and its Applications* **405**: 209-228.

Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2006). LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions, *Systems e Control Letters* **55**(1): 52-61.

Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. e Peres, P. L. D. (1997). $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems, *International Journal of Systems Science* **28**(2): 183-188.

Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O. e Bernussou, J. (2000). A new robust $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Systems e Control Letters* **40**: 21-30.

Peaucelle, D. e Arzelier, D. (2001). An efficient numerical solution for $\mathcal{H}_2$ static

output feedback synthesis, in *Proceedings European Control Conference*, pp. 3800-3805.

Peaucelle, D., Arzelier, D. e Salhi, S. (2003). Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound, in *Proceedings 4th IFAC Symposium Robust Control Design*, pp. 425-430.

Peaucelle, D., Henrion, D., Labit, Y. e Taitz, K. (2002). User's guide for SeDuMi interface 1.04. Version 1.04.

Ramos, D. C. W. e Peres, . L. D. (2001). A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems, *Systems e Control Letters* **43**: 371-378.

Sadabadi, M. S. e Karimi, A. (2015). Fixed-order Control of LTI Systems Subject to Polytopic Uncertainty via the Concept of Strictly Positive Realness, *American Control Conference*, pp. 2882-2887.

Scherer, C., Gahinet, P. e Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896-911.

Scherer, C. W. (1995). From single-channel LMI analysis to multi-channel mixed LMI synthesis: a general procedure, *Selected Topics on Identification, Modelling and Control* **8**: 1-8.

Siqueira, M. A. S., Silva, L. F. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2014). Robust decoupling control synthesis, *Proceedings of the 2014 American Control Conference*, AACC, Portland, Oregon, USA, pp. 1530-1535.

Storn, R. e Price, K. (1995). Differential Evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces, *Technical Report TR-95-012*, International Computer Science Institute - ICSI. Disponível em: <ftp://ftp.icsi.berkeley.edu/pub/techreports/1995/tr-95-012.pdf>. Acessado em 15 agosto 2017.

Storn, R. e Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization* **11**(4): 341-359.

Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11-12**: 625-653. Version 1.05.

Takahashi, R. H. C. (2007). Notas de aula: Otimização Escalar e Vetorial, Vol. 2. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/taka/Download/OTEV-Vol2.pdf>. Acessado em 15 agosto 2017.

Tempo, R., Bai, E. e Dabbene, F. (1997). Probabilistic robustness analysis: Explicit bounds for the minimum number of samples, *Systems e Control Letters* **30**(5): 237-242.

Trofino, A., Coutinho, D. F. e Barbosa, K. A. (2005). Improved $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ conditions for robust analysis and control synthesis of linear systems, *Revista Controle e Automação* **16**(4): 427-434.

Trofino, A. (2009). Sufficient LMI conditions for the design of static and reduced order controllers, in *Procedure 48th IEEE Conf. Decision Control-28th Chinese Control Conference*, Shanghai, China, pp. 6668-6673.

Trofino, A. (2002). Robust, stable and reduced order dynamic output feedback controllers with guaranteed $\mathcal{H}_2$ performance, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 3470-3475.

Ugrinovskii, V., Tempob, R. e Fujisakic, Y. (2004). A primal-dual probabilistic setting for quadratic stability of uncertain systems, *Systems e Control Letters* **52**(1): 39-48.

Xie, L., Lu, L., Zhang, D. e Zhang, H. (2004). Improved robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ filtering for uncertain discrete-time systems, *Automatica* **40** (5): 873-880.

Yaesh, I. e Shaked, U. (2009). Robust reduced-order output-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control, in *Procedure 6th IFAC Symposium Robust Control Design*, pp. 155-160.

Zakovic, S. e Rustem, B. (2002). Semi-infinite programming and applications to minimax problems, *Annals of Operations Research* **124**: 81-110.

Zhou, K. e Doyle, J. C. (1998). Essentials of Robust Control, *Prentice-Hall*, New Jersey.