



Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais
Universidade Federal de São João Del Rei
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica



USO DE MÉTODOS SEM MALHA PARA AVALIAÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS - GERADOS POR LINHAS DE TRANSMISSÃO TRIFÁSICAS AÉREAS

Gustavo Ciro Ribeiro
Belo Horizonte
18/12/2017



Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais
Universidade Federal de São João Del Rei
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica



Gustavo Ciro Ribeiro

USO DE MÉTODOS SEM MALHA PARA AVALIAÇÃO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS - GERADOS POR LINHAS DE TRANSMISSÃO TRIFÁSICAS AÉREAS

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE UFSJ E CEFET-MG, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Elétricos

Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

Coorientador: Rafael Silva Alípio

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

Belo Horizonte

18/12/2017

Ribeiro, Gustavo Ciro
R484u Uso de métodos sem malha para avaliação de campos
eletromagnéticos: gerados por linhas de transmissão trifásicas aéreas /
Gustavo Ciro Ribeiro. – 2017.
102 f.: il., gráfs, tabs.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-
MG.

Orientador: Eduardo Henrique da Rocha Coppoli.
Coorientador: Rafael Silva Alípio.
Banca examinadora: Eduardo Henrique da Rocha Coppoli, Rafael
Silva Alípio, Alfred Gimpel Moreira Pinto e Leônidas Chaves de
Resende.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais.

1. Métodos sem malha (análise numérica) – Teses. 2. Galerkin,
Métodos de – Teses. 3. Linhas elétricas – Teses. 4. Método dos elementos
finitos – Teses. I. Coppoli, Eduardo Henrique da Rocha. II. Alípio,
Rafael Silva. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais. IV. Universidade Federal de São João del-Rei. V. Título.

CDD 621.319



Universidade Federal de São João Del Rei
Centro Federal de Educação Tecnológica
de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica



Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João Del Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 18 de dezembro de 2017 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Eduardo Henrique da Rocha Coppoli – Orientador
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Rafael Silva Alípio - Coorientador
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Alfred Gimpel Moreira Pinto
Faculdade Pitágoras

Prof. Dr. Leônidas Chaves de Resende
Universidade Federal de São João Del Rei

*Dedico este trabalho à minha mãe e à memória de meu
pai, que me incentivaram, desde minha mais tenra
infância, a audácia pelo saber.*

Agradecimentos

Durante esta trajetória não poderia deixar de agradecer à Deus e a todos aqueles que contribuíram para esta dissertação.

Agradeço aos professores orientadores, Eduardo Henrique da Rocha Coppoli e Rafael Silva Alípio, por toda orientação, confiança e incontáveis reuniões. Suas sugestões e indicações de materiais foram fundamentais para a realização desta pesquisa.

Agradeço aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do CEFET-MG pela contribuição, em particular à professora Úrsula do Carmo Resende por sempre me conceder um horário para esclarecimentos.

Ao professor e amigo, Daniel Mendes, pela leitura e sugestões neste trabalho.

Ao Márcio Matias, coordenador da Pós-Graduação.

Ao Arthur Farah pelo suporte referente aos assuntos de Linha de Transmissão e Método dos Elementos Finitos.

À minha mãe, pelo incentivo, dedicação e orações.

À toda minha família e aos meus irmãos, Daniel e Ana Luisa, pela torcida e suporte.

À Thamiris, por toda motivação e compreensão.

Também gostaria de agradecer a todos os amigos pelo apoio prestado durante este período, em especial aos do PPGEL, Pedro, Rafael, Fabiano, Vinícius, Leonardo, Diego e Daiana e também ao amigo de longa data, Fred.

Ao CEFET-MG pelo fomento.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste projeto.

Meu muito obrigado a todos!

Resumo

Os métodos sem malha são ferramentas numéricas promissoras para aplicações em engenharia. A principal característica destes métodos é que os mesmos não necessitam de uma malha como a existente em métodos como o de Elementos Finitos. Existe apenas um conjunto de nós distribuídos em uma região conhecida como o domínio do problema. O presente trabalho visa desenvolver modelos computacionais para problemas de contorno quase-estáticos e resolvê-los através de métodos sem malha. Neste contexto busca-se uma nova abordagem através da aplicação do método sem malha denominado *Element-Free Galerkin Method* (EFGM) visando o cômputo de campos magnético e elétrico nas proximidades de Linhas de Transmissão (LTs) de alta tensão. São realizadas, análises comparativas entre as soluções com o método proposto, modelos analíticos e soluções geradas com o Método dos Elementos Finitos.

Palavras Chaves: Métodos sem malha, Método de Galerkin sem Elementos, Linhas de Transmissão e Método dos Elementos Finitos.

Abstract

Meshless methods are promising numerical tools for engineering applications. The main characteristic of these methods is that they do not require a mesh like that found in methods such as Finite Element. There is only one set of nodes distributed in a region known as the problem domain. The present work intend to develops computational models for quasi-static boundary problems and compute them by meshfree methods. In this context, a new approach is sought through the application of the meshless method called Element-Free Galerkin Method (EFGM) aiming computation of magnetic and electric fields in the proximity of High Voltage Transmission Lines (TLs). In this work, we will perform comparative analyzes between the solutions with the proposed method, analytical models and solution generated with the Finite Element Method.

Key-words: Meshless/Meshfree, Element-Free Galerkin Method (EFGM), Transmission Lines, Finite Element Method

Sumário

Resumo.....	i
Abstract.....	ii
Sumário	iii
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas.....	vii
Lista de Símbolos.....	viii
Lista de Abreviações.....	x
Capítulo 1 – Introdução	12
1.1. Objetivo.....	15
1.2. Justificativa	15
1.3. Metodologia.....	15
1.4. Organização do Trabalho	16
Capítulo 2 – Estado da Arte	17
2.1. Métodos para Avaliação de Cálculos Eletromagnéticos Aplicados à Linhas de Transmissão	17
2.2. Métodos sem Malha.....	21
2.3. Considerações Finais	25
Capítulo 3 – Métodos sem Malha.....	26
3.1. Conceitos Iniciais	26
3.2. Método de Galerkin sem Elementos (EFGM)	28
3.2.1. Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS).....	28
3.2.1.1. Suporte Compacto e a Função Peso.....	31
3.2.2. Método dos Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes (IMLS).....	32
3.2.3. Método de Galerkin.....	34
3.2.4. Integração Numérica	36
3.2.5. Método da Visibilidade.....	37
3.3. Modelagem Matemática do Problema.....	38
3.3.1. Formulação para Determinação do Campo Magnético	39

3.3.2. Formulação para Determinação do Campo Elétrico	44
3.3.3. Formulação Generalizada.....	49
3.4. Fluxograma.....	50
Capítulo 4 – Resultados	52
4.1. Parâmetros do Problema	52
4.2. Raio Médio Geométrico - RMG.....	54
4.3. Tratamento da Condição de Fronteira Externa.....	56
4.3.1. Truncamento da Fronteira Externa	56
4.4. Cálculos de Erros.....	57
4.5. Considerações Gerais.....	58
4.5.1. Validação do Campo Magnético	59
4.5.1.1. Estudo de caso – Ligação NorteSul 500 kV	62
4.5.2. Validação do Campo Elétrico	63
4.5.2.1. Estudo de caso - LT Furnas	65
4.5.2.2. Estudo de caso - LT Kuwait.....	67
4.5.3. Análise de Sensibilidade	69
Capítulo 5 – Conclusão	73
5.1. Principais Contribuições	74
5.2. Propostas de Trabalhos Futuros	74
5.3. Publicação/Apresentação em Eventos e Congressos.....	75
Apêndice A – Exposição a Campos Eletromagnéticos	76
Apêndice B – Formulações Analíticas dos Campos Eletromagnéticos.....	80
Apêndice C – Exemplo Clássico de um Capacitor Eletrostático	86
Referências Bibliográficas	92

Lista de Figuras

Figura 1-1 – Representação esquemática do SEP (SANTOS, 2017).	12
Figura 3-1 – Discretização sem Malha em um domínio 2D.	27
Figura 3-2 – (a) Representação dos domínios de influência circulares de cada nó. (b) Representação dos domínios de influência retangulares de cada nó.....	27
Figura 3-3 – Dilatação da função peso.....	31
Figura 3-4 – Função Peso IMLS e MLS (ROSA, 2015).	34
Figura 3-5 – Representação dos pontos de integração aplicados no processo de integração numérica.....	37
Figura 3-6 – Critério da Visibilidade	38
Figura 3-7 – Representação da Linha de Transmissão	39
Figura 3-8 – (a) Condição de Dirichlet nula na fronteira do domínio. (b) Distribuição de nós em parte do domínio e em volta do condutor da fase A.....	41
Figura 3-9 – (a) Condição de Dirichlet nula na fronteira do domínio. (b) Condição de Dirichlet na superfície do condutor com valor do potencial da fase A.	46
Figura 3-10 – Fluxograma do algoritmo EFGM.	51
Figura 4-1 – Fases ABC em um sistema trifásico, simétrico e dispostas na sequência positiva.	53
Figura 4-2 – Feixe de condutores: (a) dois condutores (b) três condutores e (c) quatro condutores adaptado de (STEVENSON, 1986).	55
Figura 4-3 – Feixe de condutores igual ou superior a cinco (COSTA, 2009).	55
Figura 4-4 – Truncamento na fronteira (FARAH, 2014).	57
Figura 4-5 – Disposição dos Condutores (LT 500 kV Hydro-Québec).	59
Figura 4-6 – Densidade de fluxo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).....	60
Figura 4-7 – (a) Distribuição de campo magnético (LT 500 kV Hydro-Québec). (b) Distribuição do campo magnético em escala logarítmica (LT 500 kV Hydro-Québec).	61
Figura 4-8 – Densidade de fluxo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Tucuruí/Vila do Conde).	63
Figura 4-9 – Campo elétrico a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).	64
Figura 4-10 – Distribuição do campo elétrico ao longo da faixa de servidão em escala logarítmica (LT 500 kV Hydro-Québec).	65
Figura 4-11 – (a) Curva do campo elétrico obtida por (FARAH,2014). (b) Campo elétrico a 1 m do solo (LT de 525 kV Furnas).....	66
Figura 4-12 – Representação geométrica (LT 275 kV Kuwait) (FARAH, 2014).	67
Figura 4-13 – Campo elétrico a 1 m do solo (LT 275 kV Kuwait).	68
Figura 4-14 – Distribuição de campo elétrico em escala logarítmica (LT 275 kV Kuwait).	69

Figura 4-15 – (a) Análise da variação do tamanho do domínio de influência do campo elétrico (LT 500 kV Hydro-Québec). (b) Análise da variação do tamanho do domínio de influência do campo magnético (LT 500 kV Hydro-Québec).....	71
Figura 4-16 – (a) Análise da quantidade de pontos de integração gaussiana para o campo elétrico (LT 500 kV Hydro-Québec). (b) Análise da quantidade de pontos de integração gaussiana para o campo magnético (LT 500 kV Hydro-Québec).....	72

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Unidades gerais para cálculo do campo elétrico e magnético.	49
Tabela 4.1 – Características geométricas (LT 500 kV Hydro-Québec).	60
Tabela 4.2 – Análises de erros do campo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).	61
Tabela 4.3 – Características geométricas da interligação Norte/Sul (LT 500 kV Tucuruí/Vila do Conde)...	62
Tabela 4.4 – Análises de erros do campo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Tucuruí/Vila do Conde).....	63
Tabela 4.5 – Análises de erros do campo elétrico a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).	64
Tabela 4.6 – Características geométricas (LT 525 kV Furnas).	66
Tabela 4.7 – Análises de erros do campo elétrico a 1 m do solo (LT 525 kV Furnas).	66
Tabela 4.8 – Características geométricas (LT 275 kV Kuwait).	67
Tabela A.1 – Limites de exposição a campo elétrico e magnético estabelecidos pela IRPA.	77
Tabela A.2 – Limites de exposição a campo elétrico e magnético estabelecidos pela ICNIRP.	78
Tabela A.3 – Limites de exposição a campo elétrico e magnético estabelecidos pela RN 398.	79

Lista de Símbolos

A	Potencial Vetor Magnético (weber/metro).
$a(x)$	Coeficientes Desconhecidos e que dependem da posição de x .
b	Fonte de Excitação Atuando Sobre o Domínio.
B	Indução Magnética (weber/metro ²).
C_l	Distância Nodal.
d	Suporte da Função Janela.
d_i	Dimensão do Domínio de Influência.
d_{max}	Constante Escalar para o Domínio de Influência.
E	Campo Elétrico (volt/metro).
H	Campo Magnético (ampère/metro).
H^h	Espaço de Dimensão Finita.
H_0^1	Espaço de Dimensão Infinita.
H^0	Espaço de Funções com Quadrado Integrável.
H^1	Espaço de Funções cuja Derivada Primeira Possui Quadrado Integrável.
$\hat{H}^1$	Espaço de Funções Aproximadas cuja Derivada Primeira Possui Quadrado Integrável, sendo que $\hat{H}^1 \subset H^1$.
J	Funcional Quadrático.
J	Densidade de Corrente Elétrica (ampère/metro ²).
J_e	Densidade de Corrente Induzida (ampère/metro ²).
J_t	Densidade Total de Corrente (ampère/metro ²).
J_s	Densidade de Corrente Elétrica da Linha de Transmissão (ampère/metro ²).
K	Matriz de Rigidez.
n	Número total de Nós.
n	Vetor Unitário Normal Indicando para Fora da Fronteira.
p	Base Polinomial Completa.
T^h	Função Teste.
U	Vetor de Termos Desconhecidos.
u^h	Função de Aproximação Global.
$u(x_I)$	Coeficiente Desconhecido do Nó I
W	Função Peso ou Função Janela.
W_i	Função Peso Discreta.
Γ	Fronteira do Domínio do Problema.
Γ_u	Fronteira de Dirichlet.

Γ_t	Fronteira de Neumann.
Δ	Operador Laplaciano.
ϵ	Número Real Positivo Pequeno.
δ	Função Teste do Multiplicador de Lagrange.
Φ	Função de Forma.
μ_0	Permeabilidade Magnética do Vácuo (henry/metro).
μ_r	Permeabilidade Magnética Relativa do Meio (henry/metro).
ϵ_0	Permissividade Elétrica do Vácuo (farad/metro).
ϵ_r	Permissividade Elétrica Relativa do Meio (farad/metro).
ν	Relutividade do Material (ampère x metro/weber).
σ	Condutividade Elétrica do Material (siemens/metro).
∇	Operador Gradiente.
Ω	Domínio.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não Pertence.
$\subset$	Contido.
$\cup$	Indica União entre Subdomínios.
$\cap$	Indica Interseção entre Subdomínios.
$\forall$	Para Todo.
i	Vetor Unitário na Direção x.
j	Vetor Unitário na Direção y.
k	Vetor Unitário na Direção z.
$\cdot$	Operador do Produto Escalar.
$\times$	Operador do Produto Vetorial.

Lista de Abreviações

AIEE	<i>American Institute of Electrical Engineers</i> – Instituto Americano de Engenharia Elétrica
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CAA	Condutores de Alumínio com Alma de Aço
CDER	Modelo e retorno pela terra a uma profundidade complexa
CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CEP	Condutor Elétrico Perfeito
CFE	Condição de Fronteira Essencial
CSPH	<i>Correct Smooth Particle Hydrodynamics</i> – Método Partícula Hidrodinâmica Suavizada Corrigida
DEM	<i>Diffuse Element Method</i> – Método de Elemento Difuso
EDP	Equações Diferenciais Parciais
EFG	<i>Element Free Galerkin</i>
EFGM	<i>Element Free Galerkin Method</i> – Método de Galerkin sem Elemento
EHV	<i>Extra High Voltage</i> – Extra Alta Tensão
ELF	<i>Extremely Low Frequency</i> – Frequência Extramente Baixa
FDM	<i>Finite Difference Method</i> – Método das Diferenças Finitas
FDTD	<i>Finite Difference Time-Domain</i> – Diferenças Finitas no Domínio do Tempo
FEM	<i>Finite Element Method</i> – Método dos Elementos Finitos
HVDC	<i>High-Voltage Direct-Current</i> – Corrente Contínua de Alta Tensão
ICNIRP	<i>International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection</i> – Comissão Internacional de Proteção contra Radiação Não-Ionizantes
IEFGM	<i>Interpolating Element Free Galerkin Method</i> – Método dos Elementos Livres de Galerkin Interpolantes
IRPA	<i>International Radiation Protection Association</i> – Associação Internacional de Proteção contra Radiação

IMLS	<i>Interpolating Moving Least Squares</i> – Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i> – Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha
MEF	Metodo dos Elementos Finitos
MLS	<i>Moving Least Squares</i> – Mínimos Quadrados Móveis
MLSRKM	<i>Moving Least Squares Rernel Method</i> – Mínimos Quadrados Móveis com Núcleo Reproduzido
MOM	<i>Method of Moments</i> – Método dos Momentos
OMS	Organização Mundial de Saúde
PPGEL	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
PIM	<i>Point Interpolation Method</i> – Método de Interpolação de Pontos
PVC	Problemas de Valor de Contorno
RBF	<i>Radial Basis Function</i> – Funções de Base Radial
RBF-MLM	<i>Meshless Method based on Radial Basis Function</i> – Método sem Malha Baseado nas Funções de Base Radial
RI	Rádio Interferência
RK	<i>Reproducing Kernel</i> – Núcleo Reprodutor
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i> – Método de Partículas com Núcleo Reproduzido
RMG	Raio Médio Geométrico
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i> – Método Radial de Interpolação de Pontos
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> – Hidrodinâmica de Partículas Suavizado
TLM	<i>Transmission-Line Modeling</i>
VDC	<i>Voltage Direct Current</i> – Tensão de Corrente Contínua
UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei

Capítulo 1

Introdução

As linhas de transmissão, bem como os geradores e os transformadores são partes indispensáveis para o sistema de Energia Elétrica. A partir do surgimento da lâmpada elétrica lançada por Thomas Edison em outubro de 1879, iniciou-se a construção da primeira usina termelétrica. Em 1882 já se tem registro da operação desta usina, conhecida por Pearl Street em Nova York. Ainda em 1882 tem-se a primeira linha de transmissão, operando com 2400 VDC e com 59 km de extensão. No Brasil a primeira linha de transmissão foi construída em 1883, localizada na cidade de Diamantina, Minas Gerais possuindo 2 km de extensão e 2400 VDC de operação (PEREIRA, 2012).

Com a publicação do artigo técnico de Tesla no AIEE sobre motores bifásicos de corrente alternada, iniciou-se a conhecida guerra das correntes. Neste cenário as ideias de Tesla predominaram sobre as de Edison que preconizava o uso da corrente contínua, devido ao fato de os transformadores possibilitarem a elevação das tensões e, conseqüentemente, redução das perdas na transmissão da energia elétrica. Outro fato importante para alavancar a disseminação da corrente alternada foi a perspectiva de utilizar sistemas polifásicos. (PEREIRA, 2012).

Na atualidade os Sistemas Elétricos de Potência (SEP) são sistemas complexos, abrangendo um grande número de equipamentos destinados à geração, transmissão e distribuição da energia elétrica, partindo das usinas geradoras até as unidades consumidoras finais, para usos residenciais, comerciais ou industriais, conforme ilustrado na Figura 1-1.



Figura 1-1 - Representação esquemática do SEP (SANTOS, 2017).

O sistema responsável por fazer a transmissão da energia elétrica até as unidades consumidoras é composto principalmente por linhas de transmissão aéreas e subterrâneas, dentre outros equipamentos como transformadores, autotransformadores, banco de reatores e de capacitores, disjuntores, barramentos, isoladores, ferragens e estruturas. Entre a usina e as unidades consumidoras normalmente há subestações de energia elétrica, onde se encontram os demais equipamentos de transmissão. As linhas de transmissão podem operar com diversas tensões nominais, sendo que no Brasil a faixa de operação é de 230 kV até 765 kV em corrente alternada (CA) senoidal em 60 Hz, passando por 345 kV, 400 kV e 500 kV. Existem ainda duas linhas de transmissão operando em 1200 kV em corrente contínua (CC), geradas em 50 Hz na Usina de Hidrelétrica de Itaipu e retificadas em Foz do Iguaçu (PEREIRA, 2012).

Através de um sistema de distribuição primário a energia elétrica é entregue ao consumidor final cuja tensão varia de 13,8 kV até 138 kV, passando ainda por valores intermediários. Há também o sistema de distribuição secundário para chegar ao consumidor final. Neste sistema, o nível de tensão é normalmente abaixo de 600 V, como 127 V, 220 V, 380 V, existindo ainda outros valores conforme a concessionária de energia da região (STEVENSON, 1986).

De acordo com alguns economistas, o grau de desenvolvimento de um país, pode ser baseado no consumo per capita de energia elétrica e no aumento deste consumo. Logo, há uma ligação direta com a produção industrial e o poder aquisitivo da população, ou seja, ao aumentar o gasto com energia elétrica tem-se uma relação com o crescimento do poder de compra do consumidor. Com isso, se faz necessário aumentar constantemente as potências disponíveis nos Sistemas Elétricos de Potência (SEP), pois um déficit energético representa um retrocesso ao desenvolvimento (FUCHS, 1977). Dentre os motivos físicos e econômicos existe a necessidade de aumento da potência transmitida por linhas de transmissão (LTs) e, conseqüentemente, a elevação de tensão e corrente, com aumento dos níveis de campo elétrico e magnético associados, o que pode ocasionar interferência eletromagnética. O aumento dos níveis eletromagnéticos podem ser nocivos e, por isso, questões de segurança devem ser seguidas, garantido que pessoas não sejam expostas a campos eletromagnéticos superiores aos limites permitidos por normas (GUIMARÃES, 2005). Estas normas e diretrizes nacionais e internacionais sugerem limites para a exposição a campos elétricos e magnéticos determinando procedimentos para a correta medição (IEEE.STD.644-1994, 1994), (ICNIRP, 1998), (IEC.61786, 1998),

(ANEEL, 2010), (ICNIRP, 2010), (NBR25415, 2016). Os valores de referência das normas são apresentados no Apêndice A, juntamente com alguns trabalhos a respeito deste tema.

A transmissão de grandes blocos de energia elétrica por longas distâncias chamou a atenção de engenheiros, devido ao grande investimento necessário para tal infraestrutura. Por esta razão, encontra-se na literatura diversos trabalhos com diferentes abordagens e análises sobre o tema de linhas de transmissão, procurando por alternativas mais econômicas, com melhores resultados e aplicabilidades, fazendo uso de técnicas experimentais analíticas e numéricas.

As técnicas experimentais, são utilizadas por pesquisadores e engenheiros na solução de problemas eletromagnéticos, podendo ter altos custos, além de não permitir a variação de parâmetros construtivos da LT (SILVA, 2010). Já as formas analíticas ficam limitadas às geometrias tradicionais que nem sempre são triviais.

Como exemplos de alguns métodos aplicados ao cálculo de campos eletromagnéticos, podem ser destacados: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Momentos (MMO), Método dos Elementos Finitos (MEF) e os Métodos sem Malha (SILVA, 2010).

A abordagem para a escolha do método a ser aplicado para a solução do problema é um fator decisivo, levando em consideração questões relacionadas ao custo computacional, estabilidade, precisão e objetivo do cálculo.

O método empregado neste trabalho para obtenção dos resultados dos campos eletromagnéticos é o *Element-Free Galerkin Method* (EFGM) ou Método de Galerkin sem Elementos. O EFGM é um método sem malha (*Meshless Methods*) pertencente a uma classe de métodos numéricos aplicados na solução de equações diferenciais parciais (EDP). Esta técnica não faz uso explícito de malhas como as malhas desenvolvidas nos Métodos dos Elementos Finitos ou Diferenças Finitas.

Primeiramente, para a construção do método define-se a geometria do problema, onde é feita uma distribuição de nós para cobrir todo o domínio de interesse. A cada nó é associado um subdomínio fechado, conhecido por domínio de influência do nó, formando um apoio para a construção da função de aproximação ao redor do nó. Os subdomínios devem ser sobrepostos e não haver conexão entre os nós, permitindo formas variadas de polígonos, como circunferências e retângulos. Dessa maneira o usuário não precisa gerar a malha computacionalmente, ficando livre de problemas correlatados a isto. As equações são aproximadas por um processo de discretização, que consiste em passar do domínio

contínuo para o discreto. Feito isso, as equações resultantes são empregadas para resolver problemas de valor de contorno (PVC) através do método de Galerkin (VIANA, 1998).

1.1. Objetivo

O objetivo deste trabalho consiste na modelagem computacional de LTs trifásicas com parâmetros uniformes aplicando o Método de Galerkin sem Elementos (EFGM), para obter os valores dos campos elétricos e magnéticos nas proximidades de linhas de transmissão. Para isto, é apresentada uma nova abordagem numérica aplicada a LTs, fazendo uso de métodos sem malha, de forma inédita, analisando a estabilidade e precisão do método EFGM através de análises comparativas com métodos preexistentes e com a solução analítica.

1.2. Justificativa

Como o método sem malha ainda é uma técnica relativamente nova se comparada a outras aplicadas a problemas de eletromagnetismo, existem ainda inúmeras aplicações a serem pesquisadas, desenvolvidas e testadas. A partir daí, deseja-se apresentar uma nova contribuição através da modelagem de linhas de transmissão, verificando as vantagens e limitações no uso do EFGM na avaliação de campos eletromagnéticos em LTs, visto que ainda há poucos trabalhos nesta linha de pesquisa.

1.3. Metodologia

Como metodologia, a fim de se alcançar o objetivo geral, pretende-se:

- Elaborar a formulação variacional do problema para obtenção da forma fraca;
- Desenvolver a modelagem numérica e computacional para a avaliação dos campos eletromagnéticos gerados por uma linha de transmissão;
- Aplicar o algoritmo sem malha EFGM em 2D;

- Validar o modelo utilizado através da aplicação do MEF e da forma analítica;
- Determinar os valores dos campos eletromagnéticos ao longo de uma linha de transmissão através do método sem malha EFGM.
- Comparar os resultados entre EFGM, MEF e forma analítica;

1.4. Organização do Trabalho

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos incluindo este capítulo de introdução.

No capítulo 2, apresentam-se trabalhos relacionados a linhas de transmissão de energia elétrica, métodos analíticos e métodos numéricos, em especial o Método dos Elementos Finitos e Métodos Sem Malha, aplicados na solução de problemas eletromagnéticos. São mencionados ainda trabalhos de otimização envolvendo linhas de transmissão e interferências entre dutos metálicos.

No capítulo 3, são apresentados os conceitos do EFGM e suas características mais importantes. São introduzidos os métodos de aproximação dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS) e Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes (IMLS), forma fraca e funções peso utilizadas. Ao final do capítulo é descrito a modelagem matemática do problema proposto, juntamente com o sistema linear final para fornecer a solução aproximada.

No capítulo 4, são definidos os parâmetros iniciais utilizados para a implementação do algoritmo sem malha, como corrente, tensão, raio médio geométrico (RMG) e são apresentados os resultados alcançados pelo Método de Galerkin sem Elementos e comparados com outros modelos como a solução analítica e o MEF.

No capítulo 5, são destacadas as conclusões, bem como as contribuições desta pesquisa e apresentadas as propostas de continuidade e melhorias.

Capítulo 2

Estado da Arte

A partir da década de 60 com o aumento da potência utilizada em sistemas elétricos operando em tensões 345 a 735 kV, surgem trabalhos na literatura evidenciando o cálculo das distribuições de campos elétricos e magnéticos gerados por LTs (TAKUMA, KAWAMOTO e FUJINAMI, 1981). Devido às tensões elevadas das LTs surge a necessidade do desenvolvimento de novas técnicas destinadas aos cálculos e às medições dos campos eletromagnéticos gerados pela distribuição de cargas e correntes. Tais técnicas permitem uma melhor avaliação destes campos com relação à exposição de seres humanos e objetos evitando danos e prejuízos (OLSEN e WONG, 1992).

Inicialmente são apresentados trabalhos relacionados ao cálculo de campos elétricos e magnéticos de forma analítica e interferências ocasionadas por dutos metálicos e rádio interferência (RI). Em seguida destaca-se trabalhos empregando otimização em LTs. Ao final do capítulo ressalta-se trabalhos encontrados na literatura sobre métodos sem malha, especialmente pesquisas sobre o EFGM.

2.1. Métodos para Avaliação de Cálculos Eletromagnéticos Aplicados à Linhas de Transmissão

Na primeira etapa de um projeto de uma linha de transmissão aérea é feito o levantamento de dados, tais como perfil do solo, cadastro das propriedades, e ainda é necessário verificar se há reservas ambientais e obstáculos no trajeto. Estes e outros aspectos são relevantes a fim de garantir que o sistema de transmissão de energia elétrica seja viável economicamente, confiável e seguro respeitando as normas vigentes (PIRES, 2005). Deve-se ainda analisar o espaçamento uniforme das torres evitando a instalação de torres em: terrenos acidentados (com erosão e úmidos), com paralelismo entre linha de transmissão e linhas ferroviárias, cercas elétricas e gasodutos, garantido ainda a

distância mínima dos condutores em relação ao solo e minimizar as quantidades de torres (VIEIRA, 2013).

Inicialmente, o cálculo de campos elétrico e magnético gerados pela distribuição de cargas e correntes em LTs foi feito através de formulações analíticas, partindo das equações de Maxwell, fazendo uso de considerações quase-estática e do desacoplamento dos campos elétricos e magnéticos existentes (GUIMARÃES, 2005).

A solução analítica faz o uso do Método das Imagens, desenvolvido por Lord Kelvin em 1848. Este método foi desenvolvido com o propósito de determinar algumas grandezas na eletrostática, como potencial elétrico, campo elétrico e densidade de fluxo elétrico associados as cargas nos condutores. Este método ainda permite representar as correntes que penetram no solo influenciando o valor do campo magnético em um dado ponto de observação (SADIKU, 2004).

A modelagem eletromagnética analítica do campo elétrico em LTs é realizada partindo da Lei de Gauss. Em seguida determina-se a quantidade de carga linear nos condutores da linha de transmissão, através dos valores dos fasores de tensão presentes em cada condutor e da matriz dos coeficientes de Maxwell. Já a modelagem analítica do campo magnético é realizada através da Lei de Ampère. Neste modelo, são calculadas as densidades de fluxo magnético associadas às respectivas correntes em cada condutor da LT. As metodologias anteriores requerem simplificações da geometria da LT, em que o solo é considerado como um condutor elétrico perfeito (CEP) de extensão semi-infinita, os condutores considerados lineares, e é desprezada as estruturas da LT e objetos próximos (vegetação e variação topográfica). Há ainda modelos analíticos em que as correntes de retorno pela terra não são consideradas (DENO, 1976), transformando assim o sistema real em um sistema equivalente. Mesmos com essas simplificações, através do modelo analítico é possível obter resultados satisfatórios, tendo como referência de medição de campo em LT reais, como podem ser observadas em (GUIMARÃES, 2005). Maiores detalhes dessas metodologias podem ser consultadas em: (ADAMS, 1955), (HART e ANDREW, 1977), (HUNT, 1976), (IYYUNI e SEBO, 1990), (PINHO, 1994), (CASACA, 2007), (VIEIRA, 2013), (SOARES, AFONSO e PAGANOTTI, 2014), (SANTOS, 2017). Adicionalmente, o Apêndice B apresenta de forma resumida os fundamentos da metodologia analítica.

O fato de a corrente que penetra no solo ser negligenciada, é uma consideração mesmo em baixa frequência inconsistente. Tal efeito deve ser incluído na modelagem

eletromagnética, por exemplo através do Método das Imagens Complexas elaborado por A. Deri. Neste método é considerada uma profundidade complexa, situada abaixo do solo mediante a concepção de um plano complexo de condutividade infinita de retorno de corrente (SCHROEDER, 2001), (DERI, TEVAN, *et al.*, 1981). Existem ainda outras metodologias para a inclusão do efeito no solo, dentre elas tem-se as metodologias de CARSON, NODA, NAKAGAWA, entre outras. Porém, conforme (LÚCIO, 2012), os resultados apresentados por estas metodologias em baixa frequência geram soluções próximas.

Em 1982 (DENO e ZAFFANELLA), publicam o capítulo 8 do livro *Transmission Line Reference Book – 345 kV and Above*. Neste capítulo, os pesquisadores descrevem os resultados de uma pesquisa do programa conduzido pela “*Project UHV*”, retratando técnicas para cálculo e medições de campos elétrico e magnético, e cálculos de corrente e tensão induzidas em objetos de diferentes formatos sob diferentes configurações de linhas de transmissão.

Em 1990, (DAWALIBI e SOUTHEY) implementam um programa para calcular os níveis de tensão induzida em dutos aéreos e enterrados através de uma análise de sensibilidade relativa a técnicas de mitigação das tensões induzidas. O estudo mostra os efeitos da interferência eletromagnética entre linhas de transmissão e gasodutos através de um algoritmo onde são posicionados condutores acima do solo e enterrados com diferentes distâncias. Já em 2013, (VIEIRA) desenvolve a modelagem eletromagnética do acoplamento magnético entre linhas de transmissão em regime permanente e dutos metálicos aéreos contemplando o efeito do solo.

Outro aspecto importante neste contexto de campos eletromagnéticos é a geração de rádio interferência (RI) provenientes de linhas de alta tensão. (LEÃO) em 2008 desenvolve um método para calcular a RI ocasionadas por LTs a fim de conservar o sinal recebido por equipamentos eletrônicos e de comunicações utilizados nas proximidades. Já em 2011 (FILHO) realiza medições nas proximidades de uma LT de 500 kV e cálculos de RI.

As RIs não são exclusivas de linhas de transmissão em corrente alternada, ocorrendo também em *High-Voltage Direct-Current* (HVDC). (ZHANG, WANG e HE, 2017) avaliam o efeito corona da LT HVDC com bases em testes de gaiola, validado em uma escala reduzida.

A grande relevância do tema sob investigação, impulsionou o desenvolvimento de novas técnicas, derivações e melhorias para que os métodos apresentados fornecessem soluções satisfatórias ou aplicáveis.

Os problemas de campo em baixa frequência, ou seja, quase-estáticos não-lineares são geralmente resolvidos por meio do Método dos Elementos Finitos em conjunto com algumas técnicas clássicas como o esquema iterativo de Crank-Nicolson para soluções no domínio do tempo. Em cada intervalo de tempo a não linearidade deve ser tratada iterativamente. Um novo sistema linear deve ser resolvido para cada iteração, ocasionando ampliação do tempo de processamento. Para solucionar a não linearidade (DEBLECKER, JACQUES e BROCHE, 2003) sugerem uma modelagem da linha de transmissão utilizando MEF. A ideia baseia-se na analogia que existe entre a matriz de elementos finitos e a matriz de admitância do nó, em que as resistências e os capacitores mantenham as propriedades do material. O material não-linear é substituído por um material fictício linear e homogêneo permitindo que a matriz de rigidez permaneça inalterada ao longo do processo.

Em 2003, (JAISWAL e THOMAS) empregam a equação de Poisson para descrever o campo ionizado em torno de uma linha de alta tensão em corrente contínua (HVDC) resolvendo-a através da técnica dos elementos finitos. Uma nova técnica é apresentada com elementos isoparamétricos quadrilaterais de primeira ordem, juntamente com um procedimento iterativo. São mostrados resultados da corrente corona com diferentes tensões, e com o campo elétrico ao plano do solo com e sem o efeito de cargas espaciais. O efeito corona atingido por linhas de transmissão HVDC pode introduzir íons em torno das linhas, o que aumenta o campo elétrico e a densidade corrente iônica. Com base nisto, em 2007 (LU, FENG, *et al.*), propõem um algoritmo iterativo para analisar o campo elétrico e a densidade de corrente. Tal método foi utilizado para projetar sistemas de 800 kV na China.

(PAO-LA-OR, ISARAMONGKOLRAK e KULWORAWANICHONG, 2010), apresentam uma aplicação da equação de onda utilizando o MEF, para o cômputo de campo magnético devido à linhas de transmissão de (500 kV) alta tensão (EHV), sob condições normais e curto-circuito.

Em (KIM, 2013) é proposto um método preciso e eficiente para o cômputo de campos magnéticos para linhas de transmissão CA que acopla o método analítico expresso com uma série de Fourier e a formulação por elementos finitos. Ao final, o algoritmo é

validado através de um modelo trifásico de LT com dois circuitos e comparados aos valores medidos e observa-se nos resultados apresentados por Kim que o custo computacional diminui consideravelmente.

(FARAH, 2014) desenvolve uma modelagem numérica aplicando o Método dos Elementos Finitos com a finalidade de obter a intensidade dos campos eletromagnéticos quase-estáticos em torno de LT aéreas. Essa modelagem permite a simulação de casos mais reais e complexos em comparação aos modelos analíticos, permitindo incluir a presença de dutos metálicos e solos estratificados. FARAH ainda apresenta alguns tratamentos do domínio do problema como Truncamento, Strategic Dual Image e a transformação espacial de Kelvin, concluindo que o uso da transformação de Kelvin é a que indica melhor resultado e permite uma aproximação de LTs reais.

Alguns trabalhos desenvolvidos recentemente na literatura refere-se ao emprego do MEF em LTs no domínio do tempo para as soluções dependentes da frequência para linhas uniformes e não uniformes (JURIC-GRGIC, BERNADIC e LUCIC, 2016), (JURIC-GRGIC, LUCIC e BERNADIC, 2015), (JURIC-GRGIC, LUCIC e DABRO, 2013).

A fim de alcançar melhores resultados são aplicados processos de otimização. Diante desta constatação visa-se a preservação ambiental, a redução de gastos e a elevação da capacidade de transmissão de energia elétrica (DART, DOMINGUES, *et al.*, 2005). As técnicas de recapacitação de LTs potencializam as características mecânicas e elétricas, apresentando alternativas factíveis. Visando a importância deste tema encontra-se na bibliografia trabalhos sobre a otimização de feixes de condutores de LTs, minimização dos impactos eletromagnéticos e recapacitação não convencional de linhas aéreas (FILHO, 1993), (JUNIOR, 1995), (NETO, 2007), (PAGANOTTI, 2012), (SANTOS, 2017).

2.2. Métodos sem Malha

Destacada importância dos campos eletromagnéticos gerados por LTs no tópico anterior, são apresentados a seguir trabalhos sobre os métodos sem malha, em especial aqueles aplicados a problemas eletromagnéticos de forma geral, uma vez que, temas relacionados especificamente com LTs e EFGM não são encontrados facilmente na literatura, o que destaca-se o carácter inovador desta dissertação.

O uso de métodos sem malha são encontrados na bibliografia há mais de 80 anos, como por exemplo trabalhos de (SLATER, 1934), (FRASER, JONES e S.W, 1934) (LANCZOS, 1938) utilizando o Método de Colocação. Já outros trabalhos sem malha um pouco mais recentes comparados com os já citados são: o Método do Vórtice (*Vortex Method*) (CHORIN, 1973), (BERNARD, 1995), o Método das Diferenças Finitas (*Finite Difference Method - FDM*) utilizando grades arbitrárias ou o Método das Diferenças Finitas Geral (*Geral Finite Difference Method - GFDM*), (GIRAULT, 1974); (PAVLIN e PERRONE, 1975); (SNELL e VESEY, 1981); (LISZKA e ORKISZ, 1977); (LISZKA & ORKISZ, 1980); (KROK e ORKISZ, 1989). Um outro método sem malha bem conhecido é o Método de Hidrodinâmica de Partículas Suavizado (*Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH*), utilizado inicialmente para a modelagem de fenômenos astrofísicos como explosão de estrelas e nuvens de poeira sem fazer o uso de fronteiras (GINGOLD e MONAGHAN, 1977); (MONAGHAN e LATTANZIO, 1985); (MONAGHAN, 1992). De maneira geral, houve menos estudos dedicados aos métodos sem malha referente em sua formulação forte, visto que era menos robusto do que o método baseado em sua forma fraca. Outro indicativo para não haver muitos estudos a respeito da formulação forte foi a dedicação a pesquisas referentes ao MEF, o qual baseia-se em formas fracas (LIU e GU, 2005). A partir daí então aconteceu um passo natural para os estudos do métodos sem malha utilizando formulação fraca.

A partir da década de 90 houve um aumento de trabalhos sobre métodos sem malha utilizando forma fraca, e muitos destes métodos propostos alcançaram um bom progresso, criando um novo grupo de métodos: o Método de Elemento Difuso (*Diffuse Element Method - DEM*) (NAYROLES, TOUZOT e P, 1992) , o Método de Galerkin sem Elementos (*Element Free Galerkin Method- EFGM*) (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994), o Método de Partículas com Núcleo Reproduzido (*Reproducing Kernel Particle Method - RKPM*) (LIU, JUN e F, 1995), o Método de Interpolação Pontual (LIU e GU, 2001); (WANG e LIU, 2000), o Método Petrov-Galerkin Local Sem Malha (*Meshless Local Petrov-Galerkin Method - MLPG*) (ATLURI e ZHU, 1998), o Método do Nó de Fronteira (*Boundary Node Method - BNM*), (MUKHERJEE, 1997), o Método de Interpolação de Pontos de Fronteira (*Boundary Point Interpolation Method - BPIM*) (GU e LIU, 2001), (GU e LIU, 2002), (GU e LIU, 2003) e o Método sem Malha Fraca-Forte (*Meshfree Weak-Strong - MWS*), (LIU e GU, 2002), entre outros.

(BELYTSCHKO, LU e GU, 1994) adotam o método de Galerkin sem Elementos, o qual é aplicável a formas arbitrárias, requerendo apenas a inclusão de dados nodais sem conectividade, aplicados ao tema de elasticidade e a condução de calor. Nesta implementação são utilizados os multiplicadores de Lagrange para impor as condições de contorno essenciais. Entretanto, o uso de tais multiplicadores aumenta o custo das soluções. Com isso, ainda em 1994 (LU, BELYTSCHKO e GU) desenvolveram uma nova implementação com base no princípio variacional modificado em que os multiplicadores de Lagrange são substituídos de modo que as equações discretas sejam acopladas.

Em 1998, (DOLBOW e BELYTSCHKO) desenvolvem detalhadamente o método EFG em uma dimensão (1D) aplicado à um problema linear de elasticidade, empregando os multiplicadores de Lagrange. Ao final, o problema é estendido a 2D.

(VIANA, 1998), propõe a técnica *meshless* para soluções de problema de contorno eletrostáticos e magnetostáticos baseado no EFGM. Inicialmente são discutidos alguns conceitos fundamentais do método proposto e de eletromagnetismo. Em seguida são apresentados os aspectos necessários para a implementação do método utilizando o MLS e o MLSRKM conjugados com o EFGM, finalizando com os resultados de problemas eletromagnéticos.

Em 2003 LIU publica o livro: *"Mesh Free Methods – Moving Beyond the Finite Element Method"* sobre métodos sem malha aplicados em problemas de engenharia, descrevendo detalhadamente os métodos e as suas funções, aprimorando e atualizando o livro no ano de 2005 acrescentando e explicando a programação por trás dos métodos sem malha (LIU, 2003), (LIU e GU, 2005).

O método EFG tem grande aplicabilidade em problemas em que há dificuldades em se construir uma malha eficiente em 3D. Em (PARREIRA, SILVA, *et al.*, 2006) encontra-se a formulação em problemas eletrostáticos de 3D, baseando-se nos multiplicadores de Lagrange alcançando erros de 1,40%, enquanto que empregando o MEF o erro é de 3,56%.

Na modelagem eletromagnética com o EFGM são encontrados alguns problemas relevantes como domínios periódicos, imposições de condições de contorno essenciais e acoplamento entre equações de campo e de circuito entre outros. Frequentemente, problemas referentes a descontinuidade de materiais levam a situações de oscilações espúrias nas curvas de campos elétrico e magnético. No sentido de resolver especificamente esses problemas, (COPPOLI, 2010) apresenta um trabalho identificando-os na modelagem de dispositivos móveis por meio do método sem malha EFGM. Para

encontrar a solução são utilizadas funções de peso especiais. Coppoli demonstra um método que permite o acoplamento entre o campo magnético e as equações de circuito no domínio do tempo através da simulação de uma máquina de indução trifásica.

(OLIVEIRA, 2011) investiga um método de otimização da capacidade de transmissão de LT, através do posicionamento dos feixes de condutores e a impedância característica da linha, aplicando o vetor de Poynting como função objetivo. Os campos elétrico e magnético fundamentais para o vetor de Poynting são determinados pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC).

(MARINHO, 2012) faz um tratamento auto adaptativo de interfaces materiais no método EFGM aplicado a problemas de eletromagnetismo com o propósito de melhorar a aproximação da solução e reduzir oscilações indesejadas.

(ROSA, 2015) demonstra uma técnica híbrida, que combina o método sem malha EFGM e o IMLS juntamente com o Método dos Momentos (MoM) para soluções de espalhamento eletromagnético em 2D. Este problema é descrito por um cilindro dielétrico infinito dividido em um cilindro interno e um cilindro externo, onde são aplicados respectivamente o IEFGM e MoM.

Linhas de transmissão não uniformes possuem diferentes parâmetros que variam com o comprimento ao longo da linha. Isso torna a análise no domínio do tempo complicada comparada a LT uniformes. Uma maneira encontrada muitas vezes na literatura é fazer uma aproximação por seções discretas uniformes formando uma cascata. Esta cascata implica em um grande consumo de recursos da memória do computador e tempo de processamento da CPU. Focalizando em uma melhor modelagem (BENKHAOUA, BENHABILES e RIABI, 2015) publicam um artigo aplicando três métodos (PIM, RBF-MLM e RPIM) sem malha no domínio do tempo para solucionar as equações de tensão e corrente da LT não uniforme. A confiabilidade dos resultados são comparadas com o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) e com o Método de Expansão de Onda Wavelet. Mais alguns trabalhos a respeito de LT não uniforme podem ser encontrados em: (TANG e MAO, 2008), (JEONG e NEVELS, 2009), (WATANABE, SEKINE e TAKAHASHI, 2009), (YU e CHEN, 2009).

(OLIVEIRA, 2016) expõe um estudo sobre sistemas de aterramento em baixas frequências para solos homogêneos e estratificado em duas camadas aplicando o método sem malha EFG para resolver a equação diferencial parcial associado ao problema, partindo das equações de Maxwell. São propostas duas metodologias para incluir a haste

de aterramento no domínio do problema. Na primeira são distribuído nós na superfície da haste, já na segunda a haste é representada por um modelo filamentar. Os resultados são comparados e validados com o MoM.

Visto a necessidade de aprimorar novas técnicas sem malha para superar as dificuldades como o divergente nulo e a fim de eliminar soluções falsas presentes nos problemas vetoriais, (LIMA, 2016) apresenta a aplicação de formas fracas enfraquecidas no Método de Interpolação de Ponto (PIM), eliminando a incompatibilidade da função de forma e o uso das Funções de Base Radial (RFB).

2.3. Considerações Finais

Neste capítulo são abordadas as publicações de alguns trabalhos relacionados ao cômputo de campos elétrico e magnético de forma analítica e numérica, interferências ocasionadas por dutos metálicos e métodos sem malha aplicados à problemas eletromagnéticos.

Como já citado os métodos sem malha dispensam o uso de uma malha no processo de discretização, tornando estes métodos muito atraentes, principalmente em problemas de geometrias complexas. Trabalhos utilizando métodos sem malha para diferentes aplicações na área de eletromagnetismo como em aterramentos elétricos, modelagem de dispositivos móveis, problemas de contornos magnetostáticos e estáticos evidenciam o grande potencial que as técnicas sem malha representam na área de pesquisa numérica e de simulação. Destaca-se ainda grande uso de métodos sem malha em engenharia mecânica e civil.

Os aspectos do método sem malha para encontrar a solução aproximada são discutidos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Métodos sem Malha

O presente capítulo descreve os conceitos básicos dos métodos sem malha, apresentando o conceito de problemas de contorno, e as formulações para o cômputo dos campos eletromagnéticos devidos a LTs aplicando o método proposto *Element-Free Galerkin Method* (EFGM). Em seguida são apresentadas a construção da função de forma empregando o *Moving Least Square* (MLS) e o *Interpolation Moving Least Square* IMLS, função peso ou função janela e o critério da visibilidade.

3.1. Conceitos Iniciais

Os métodos sem malha são métodos numéricos que não necessitam de malha e sim de uma nuvem de pontos distribuída no domínio, juntamente com as equações diferenciais que regem o problema e as equações de fronteira. Devido à estas características são considerados sem malha. Os problemas de contorno emergem do modelamento matemático dos problemas físicos contínuos construídos por equações diferenciais parciais (EDP). Este método está sendo utilizado frequentemente para resolver EDP, e cada vez mais é empregado na solução de cálculos eletromagnéticos e na modelagem de dispositivos elétricos (COPPOLI, ALÍPIO, *et al.*, 2017).

Para a construção do modelo matemático, inicialmente determina-se uma geometria fictícia representando o modelo original. A geometria representa o domínio (Ω) do problema limitado por fronteiras (Γ). Posteriormente são determinadas as equações matemáticas capazes de retratar a geometria do problema válidas no domínio e nas fronteiras (VIANA, 1998).

A principal característica da metodologia é não necessitar de uma malha explícita. É essencial apenas uma distribuição de nós pelo domínio do problema, contornos e fronteiras sem a necessidade de uma conexão pré-estabelecida entre os nós, e uma função desconhecida regida por um Problema de Valor de Contorno (PVC). O método é

identificado através da distribuição de nós juntamente com a descrição da condição de contorno do problema e das fronteiras ao longo de todo o domínio (LIU, 2003). A Figura 3-1 mostra uma distribuição de nós em 2D, ou seja (x,y) , sobre todo o domínio $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

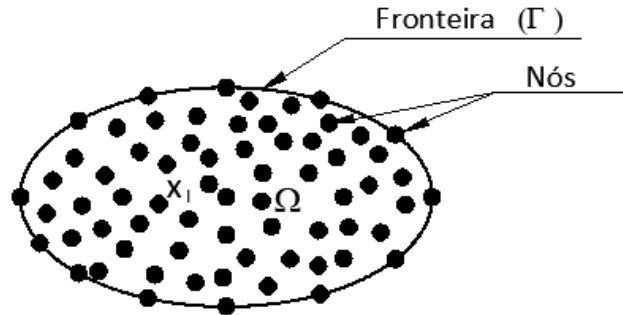


Figura 3-1 - Discretização sem Malha em um domínio 2D.

A cada nó é associado um subdomínio fechado chamado de domínio de influência do nó. O domínio de influência é responsável pela certificação da função de aproximação ao redor do nó I , que faz uso função de forma (Φ_I) representando assim a solução do problema por uma combinação linear (OLIVEIRA, 2016). A Figura 3-2 ilustrada a seguir demonstra que os domínios de influência podem ser sobrepostos uns aos outros, e podem possuir formas circulares ou retangulares, desde que os domínios de influência envolvam todo o domínio do problema desde que não haja uma conexão entre os nós.

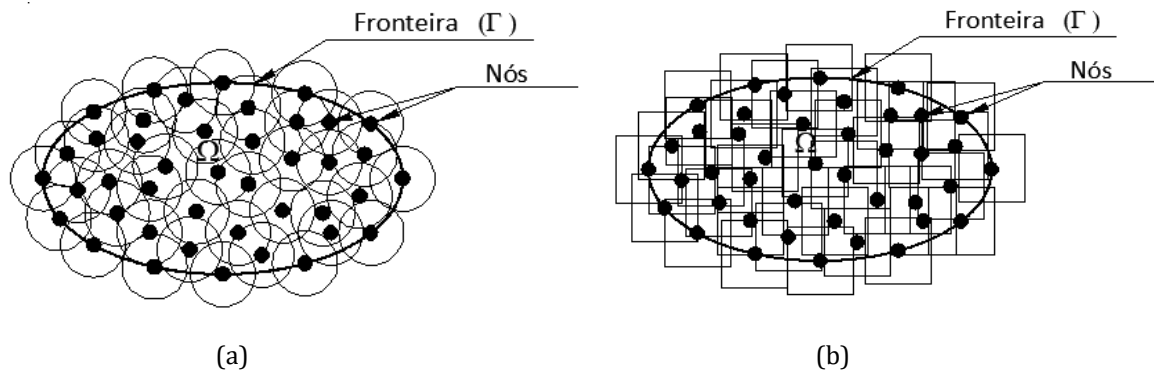


Figura 3-2 – (a) Representação dos domínios de influência circulares de cada nó.
(b) Representação dos domínios de influência retangulares de cada nó.

3.2. Método de Galerkin sem Elementos (EFGM)

O método de Galerkin apresentado em 1994 por (BELYTSCHKO, LU e GU) é um método recente em comparação com outras técnicas como o MEF e MoM, aplicados em problemas eletromagnéticos a partir de 1965.

O *Element-Free Galerkin Method* é considerado um método variacional, o qual pode fazer uso do *Moving Least Square* (MLS) ou do *Interpolation Moving Least Square* (IMLS), ambos necessários para a construção da função de forma. A forma fraca de Galerkin é aplicada para desenvolver o sistema de equações e a células utilizadas para a realização da integração numérica (REZENDE, COPOLLI e AFONSO, 2015), sendo este assunto tratado nos tópicos a seguir.

3.2.1. Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS)

O método EFG aplica o MLS para aproximar a função $u(\mathbf{x})$, com $u^h(\mathbf{x})$. Foi desenvolvido inicialmente por matemáticos para ajustes de superfícies e regressão de dados (LANCASTER e SALKAUSKAS, 1981). Atualmente é o método mais utilizado para construção de funções de forma de métodos sem malha. Possui como principais características uma função de aproximação contínua e suave em todo o domínio. (MESQUITA, 2010).

Dada uma função $u(\mathbf{x})$ definida em um domínio (Ω) , sua aproximação em um ponto $\mathbf{x}$ e pode ser dada por $u^h(\mathbf{x})$.

A aproximação por MLS se inicia com a equação (3.1) (LIU e GU, 2005):

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]$ é uma base polinomial completa, neste caso em duas dimensões, m é a quantidade de funções bases, $\mathbf{x}^T = (x, y)$ é o vetor posição em duas dimensões, e $\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}) \ a_2(\mathbf{x}) \ \dots \ a_m(\mathbf{x})\}$ são os vetores de coeficientes.

Como o vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ na equação (3.1) é uma função de $(\mathbf{x})$. Os coeficientes de $\mathbf{a}$ são minimizados fazendo uso da norma L_2 .

$$J = \sum_{l=1}^n W_l [u^h(x_l) - u_l]^2. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) é um funcional residual ponderado, o qual é construído através de valores aproximados e dos parâmetros nodais da função desconhecida. Onde n é a quantidade de nós dentro do domínio, associado a função peso $W_i = W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ($i=1, 2 \dots n$), e u_i é definido como o parâmetro nodal de u em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$.

Para a condição estacionária de J referente a $\mathbf{a}(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, j=1, 2 \dots m, \quad (3.3)$$

remete a conexão ao conjunto de relações lineares.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s, \quad (3.4)$$

$\mathbf{U}_s = (u_1 \ u_2 \ u_3 \dots u_n)^T$ é o vetor responsável por armazenar os parâmetros nodais da função de campo em todos os nós do domínio de suporte e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é conhecida como a matriz de momento definida por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n W_l \mathbf{p}(\mathbf{x}_l) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_l). \quad (3.5)$$

A matriz $\mathbf{B}$ representada na equação (3.4) é definida como:

$$\mathbf{B}_l(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_l) W_l, \quad (3.6)$$

onde:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_l) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$\mathbf{W}_i$ é uma matriz diagonal formada a partir das funções peso,

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} W_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & W_n \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Resolvendo a equação (3.4) em $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, obtém-se:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s, \quad (3.9)$$

substituindo a equação (3.9) na equação (3.1), tem-se:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i = \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x})\mathbf{U}_s, \quad (3.10)$$

onde $\Phi(\mathbf{x})$ é o vetor da função de forma do MLS correspondente aos n nós do domínio suporte do ponto $\mathbf{x}$ e pode ser reescrito como:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (3.11)$$

A função de forma é responsável por fazer a relação nodal, e é de grande importância para a precisão da solução do sistema, pois ela é a base para discretizar o espaço (PARREIRA, SILVA, *et al.*, 2006). Outro aspecto interessante da função de forma é possuir suporte compacto, permitindo que a matriz do sistema seja uma matriz banda e esparsa (COPPOLI, 2010).

Para obter as derivadas da função u^h , primeiramente devem ser encontradas as derivadas da função de forma, conforme descrito a seguir.

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \gamma^T \mathbf{B}, \quad (3.12)$$

em que:

$$\gamma^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}, \quad (3.13)$$

γ^T pode ser encontrado de acordo com a equação (3.13), desde que a matriz $\mathbf{A}$ seja simétrica.

As derivadas parciais de γ podem ser obtidas resolvendo as equações (3.14) e (3.15)

$$\mathbf{A} \gamma_{,i} = \mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \gamma \quad (3.14)$$

$$\Phi^T_{,i}(\mathbf{x}) = \gamma^T_{,i} \mathbf{B} + \gamma^T \mathbf{B}_{,i}, \quad (3.15)$$

onde i indica as coordenadas x ou y , e a vírgula corresponde a derivada parcial em relação as derivadas espaciais (LIU e GU, 2005).

Vale ressaltar que as funções de forma com o MLS não satisfazem o delta de Kronecker, ou seja, $\Phi_I(x_j) \neq \delta_{IJ}$, de modo que $U^h(x_I) \neq U_I$. Isto é, os parâmetros nodais $U(x)$ não são iguais aos valores de $U^h(x_I)$. A aproximação pelo MLS depende de todos os parâmetros nodais para o nó I , cujo domínio de influência envolvem o nó x_I . Portanto, para impor as condições de contorno no método EFG são necessárias técnicas especiais como os Multiplicadores de Lagrange ou IMLS, necessários para modificar a forma fraca (VIANA e MESQUITA, 1998) (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1998) (COPPOLI, 2010).

3.2.1.1. Suporte Compacto e a Função Peso

A função peso também conhecida como função janela $W(\mathbf{x})$ deve ser diferente de zero, apenas em uma região ao entorno de x_I , já apresentado como domínio de influência no nó I . Como pode ser observado na Figura 3-3 esta região é delimitada, e possui suporte compacto (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1998).

O suporte compacto é determinado através da distância normalizada entre dois pontos (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994):

$$W(\mathbf{x}) \begin{cases} W(x - x_I) \neq 0 \text{ se } 0 \leq r \leq 1 \\ W(x - x_I) = 0 \text{ se } r > 1 \end{cases} \quad \forall x_I \in \Omega, I = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

onde:

$$r = \frac{\|x - x_I\|}{d_I}. \quad (3.17)$$

O domínio de influência está diretamente relacionado ao tamanho do raio do suporte (d_I). Modificando este parâmetro a eficiência e precisão dos métodos sem malha sofre alteração, sendo possível aumentar ou diminuir o suporte da função, através de sua dilatação, como ilustrado na Figura 3-3.

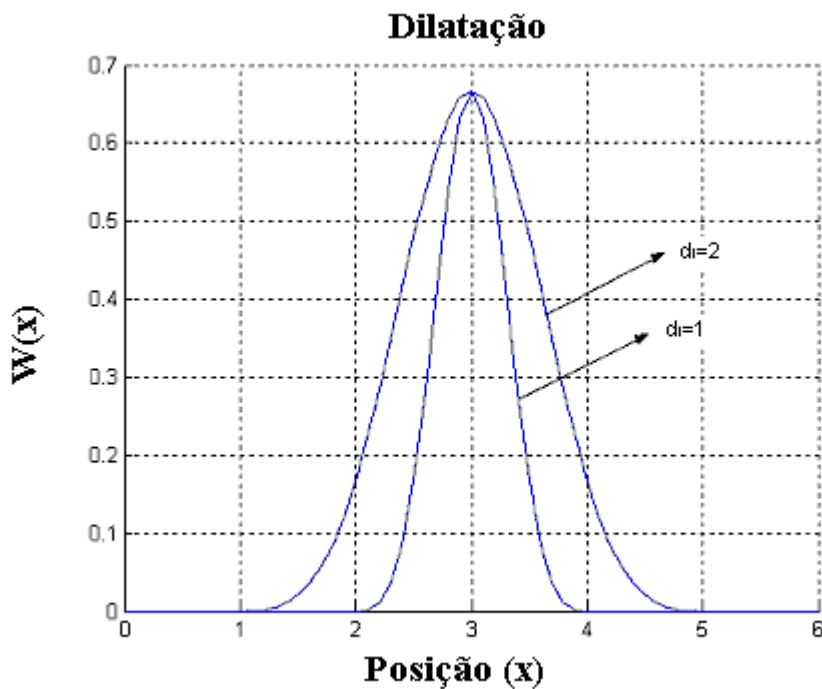


Figura 3-3 – Dilatação da função peso.

De acordo com (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1998), d_I pode ser encontrado como:

$$d_I = d_{max} C_I, \quad (3.18)$$

onde d_{max} é uma constante de proporcionalidade com valores entre $2 \leq d_{max} \leq 4$ e C_I é a distância nodal média entre os nós próximo ao nó de interesse (LIU, 2003).

De acordo com (LIU e GU, 2005) as funções pesos mais comuns, utilizadas no MLS são:

- Spline Cúbica

$$W(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0, & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

- Spline Quadrática

$$W(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0, & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

- Função Exponencial

$$W(r) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} & \text{para } r \leq 1 \\ 0, & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

3.2.2. Método dos Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes (IMLS)

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis Interpolantes (IMLS) é uma adaptação do MLS indicado no tópico 3.3.1, a fim de garantir a propriedade do delta de Kronecker.

Já que a formulação encontra-se no domínio discreto o delta de Kronecker pode ser definido como (MACEDO, 1988):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j \end{cases}, \forall i, j \in \mathbb{N} \quad i = 1, 2 \dots m, j = 1, 2 \dots m. \quad (3.22)$$

Associando-se o delta de Kronecker a uma função de aproximação:

$$U^b(x) = \begin{cases} U^b(x_i) = U^b(x_j) & \text{se } i = j \\ U^b(x_i) = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.23)$$

De acordo com (3.22) e (3.23):

$$\Phi(x_i, x) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.24)$$

As funções de forma apresentadas até agora não atendem o delta de Kronecker, e geram dificuldades na imposição das condições de contorno essenciais, impostas nas equações diferenciais. Nessa situação necessita-se substituir a função peso utilizada no MLS pela função peso ou função janela representada pela equação (3.25), para atender as propriedades do delta de Kronecker (MARINHO, 2012) (LOURO, 2014).

$$W(x_i) = \frac{1}{r^{2n} + \varepsilon}, \quad (3.25)$$

onde $W(x)$ é a função peso ou janela, n é um número inteiro positivo e ε deve ser um número real positivo. Essa função peso torna-se infinita no ponto x_i , garantindo assim que pontos próximos a este nó tenham algum valor e nos demais aproximam-se de zero (ROSA, 2015), (COPPOLI, 2010).

De acordo com (MARINHO, 2012) um valor sugerido para fornecer uma solução exata confiável é fazer $\varepsilon=10^{-6}$. Já o termo r é a distância normalizada entre dois pontos representado pela equação (3.17).

A função apresentada pela equação (3.25), possui uma característica interessante, a qual permite atuar na esparsidade da matriz. A função de forma associada a função peso dispõem de suporte compacto, uma vez que os domínios de influência de cada nó são restritos, mesmo esta função apresentando comportamento assintótico (COPPOLI, 2010).

A Figura 3-4 ilustra o comportamento da função MLS e IMLS.

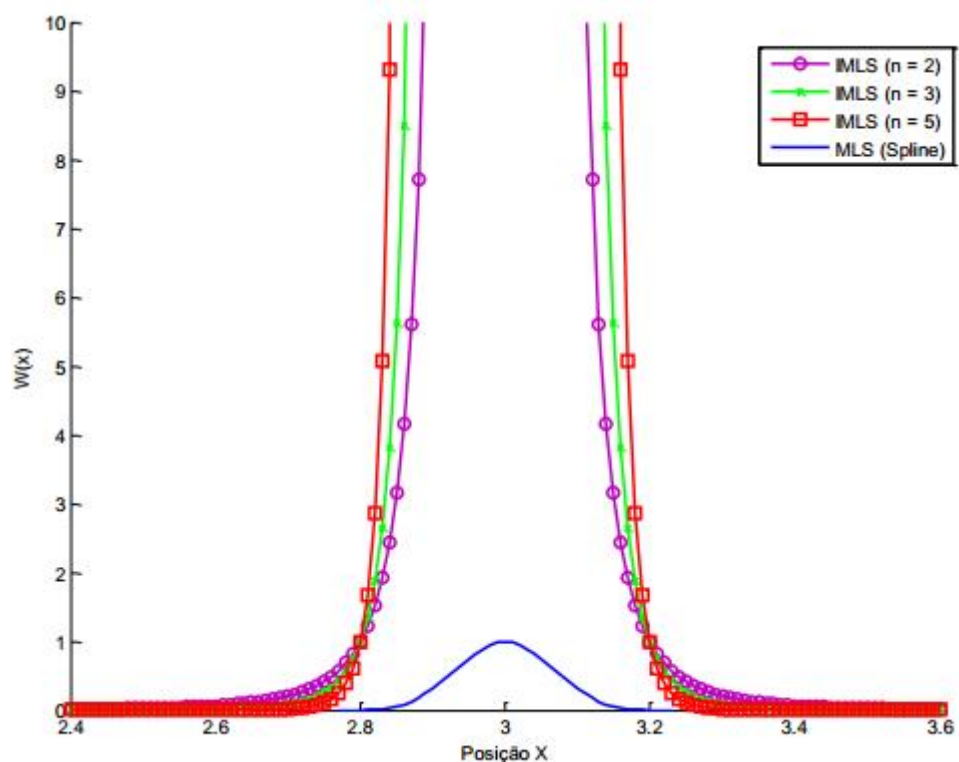


Figura 3-4 – Função Peso IMLS e MLS (ROSA, 2015).

A função peso ilustrada está centralizada no nó referente a posição $x=3$ e domínio de influência com $r=0,3$ e $\varepsilon=10^{-10}$. A curva representada pelo MLS emprega a função peso Spline Quadrática e contém um valor unitário sobre o nó 3, enquanto a função utilizando IMLS possui um valor tendendo ao infinito. Ambas as funções dirigem-se para zero, na região externa ao domínio de influência referente ao nó de interesse, satisfazendo a condição do delta de Kronecker. Destaque-se ainda que estas funções peso são de grande importância para elaboração da função de forma presente no método EFG, influenciando a convergência do método (ROSA, 2015).

3.2.3. Método de Galerkin

O método de Galerkin, proposto em 1915 pertence a uma classe conhecida como Método dos Resíduos Ponderados. Este método busca a solução por meio do resíduo ponderado da equação diferencial, através de funções testes (T^h) como funções de peso e funções admissíveis, sendo amplamente utilizado em métodos numéricos, como o MEF e o Método sem Malha (JIN, 2002). (LIU, 2003).

O Método de Galerkin, baseia-se em encontrar uma solução próxima em um espaço de dimensão finita $H_0^h(\bar{\Omega})$, tal que $H_0^h(\bar{\Omega}) \subset H_0^1(\bar{\Omega})$. Encontrar a forma fraca é uma tarefa relativamente difícil, uma vez que as classes de funções admissíveis pertencem a uma região de espaço infinito e linear. Sendo estas últimas, as duas propriedades fundamentais de H_0^1 (VIANA, 1998).

$H_0^h(\bar{\Omega})$ é o espaço que representa todas as combinações lineares como:

$$T^h = \sum_{I=1}^n \alpha_I a_I, \quad (3.26)$$

e

$$u^h = \sum_{J=1}^N \Phi_J u_J, \quad (3.27)$$

onde:

a_I , – constantes pré-definidas,

α_I – varia $I = 1, 2 \dots n$ são funções de forma pertencentes a classe de funções $H_0^h(\bar{\Omega})$,

Φ_J – funções de forma pertencentes a classe de funções $H_0^h(\bar{\Omega})$,

u_J – Coeficientes a serem encontrados.

Portanto o método de Galerkin é expresso como a procura de $u^h \in H_0^h(\bar{\Omega})$, transitando-se do domínio contínuo para o domínio discreto.

No método de Galerkin α_I é considerado igual Φ_J , resultando em um sistema linear, utilizando a bilinearidade de B e a linearidade de F conforme (VIANA, 1998), (ROSA, 2015)

$$K * U = F, \quad (3.28)$$

em que

$$K_{IJ} = B(\Phi_I, \Phi_J) = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_I \nabla \Phi_J) + (\nabla \Phi_I \nabla \Phi_J) d\Omega, \quad (3.29)$$

$$F_I = \int_{\Omega} b \Phi_I d\Omega, \quad (3.30)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde b pode ser identificado como uma excitação ou fonte.

O fato da matriz K do sistema linear obtida anteriormente ser simétrica é a principal vantagem do método de Galerkin.

No Apêndice C é apresentado um exemplo clássico da modelagem de um capacitor eletrostático para melhor compreensão do método e para comparar o uso da função peso do MLS com a função peso do IMLS.

3.2.4. Integração Numérica

Após a distribuição de nós no domínio de interesse, são inseridos pontos de integração sobre este domínio, incluindo a fronteira. Os pontos de integração são utilizados para a formação da função de forma, gerando uma relação com os nós do domínio e são utilizados nas integrais representadas nas equações em (3.29) e (3.30). Entretanto esta relação não elimina as características dos métodos sem malha, possuindo como finalidade a criação de pontos da quadratura.

O processo de integração consiste no uso de células de integração, onde através da quadratura de Gauss Legendre é realizado a integração ao longo de todo o domínio do problema. Caso algum ponto de integração esteja fora do domínio, o ponto de integração deve ser desconsiderado (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994).

O método proposto neste trabalho é o Método da Quadratura de Gauss-Legendre (FILHO, 2007). O processo de integração pode ser ajustado, alterando parâmetros como o número de pontos e consequentemente influenciando o desempenho do algoritmo em termos de velocidade e precisão. A partir de 4 pontos de integração já são obtidas soluções aceitáveis, pois produz um resultado mais exato do que utilizando 2 e 3 pontos de integração.

A Figura 3-5 ilustra o domínio de estudo, diante da utilização de células de integração com 4 pontos de integração para cada arranjo e com os nós espalhados pelo domínio.

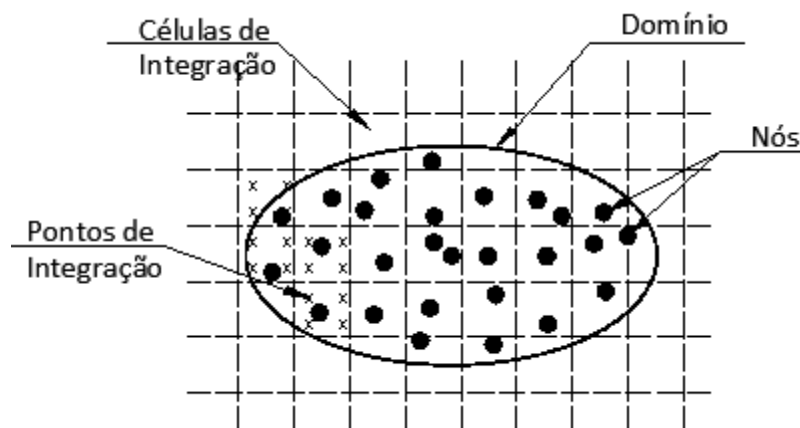


Figura 3-5 – Representação dos pontos de integração aplicados no processo de integração numérica.

3.2.5. Método da Visibilidade

Nesta abordagem, visa-se o tratamento de descontinuidades no domínio quando ocorre mudança entre meios de materiais diferentes, pois esta descontinuidade pode apresentar erros na função de aproximação. Para isso, é necessário realizar correções através do critério da visibilidade proposto por (BELYTSCHKO, LU e GU, 1994). Outras maneiras para resolver estes problemas são utilizando técnicas como: o método das Penalidades (LIU e GU, 2005), e a alteração da formulação variacional (CORDES e MORAN, 1996).

Através da aplicação da técnica IMLS já citada ao invés da técnica MLS é possível resolver o problema de oscilações espúrias provocadas pela descontinuidade de materiais (COPPOLI, 2010). Uma vez que o IMLS introduz descontinuidades na função de forma e na função peso.

O método da visibilidade trunca os domínios de influência na fronteira entre os meios. Para exemplificar esta situação é apresentada a Figura 3-6 a seguir.

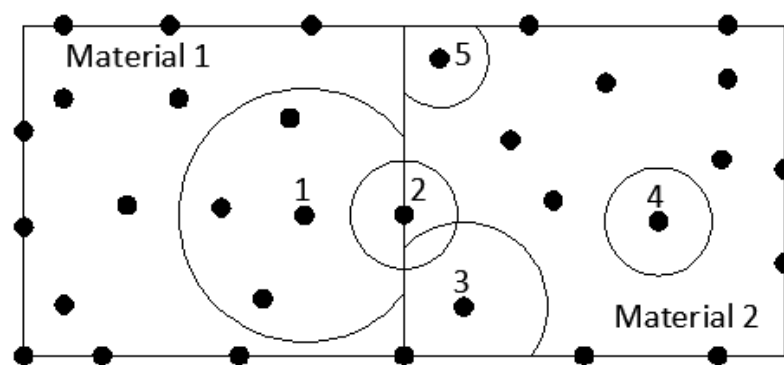


Figura 3-6 - Critério da Visibilidade

O nó 1 exerce influência do domínio representado pela circunferência referente ao material 1. O nó 2 sofre influência nos dois materiais, portanto deve ser contabilizado para os dois meios. Já os nós 3, 4 e 5 pertencentes ao material dois exercem influência apenas neste meio.

3.3. Modelagem Matemática do Problema

Nos subtópicos a seguir são apresentadas as formulações eletromagnéticas e variacional do modelo matemático para a linha de transmissão empregando o EFGM. Para isso, são utilizados as equações de Maxwell e as relações constitutivas diretamente, obtendo as equações diferenciais parciais (EDP), que retratam as distribuições dos potenciais magnéticos e elétricos próximos da LT.

O problema é apresentado pela Figura 3-7, onde A, B e C são os respectivos condutores de cada fase.

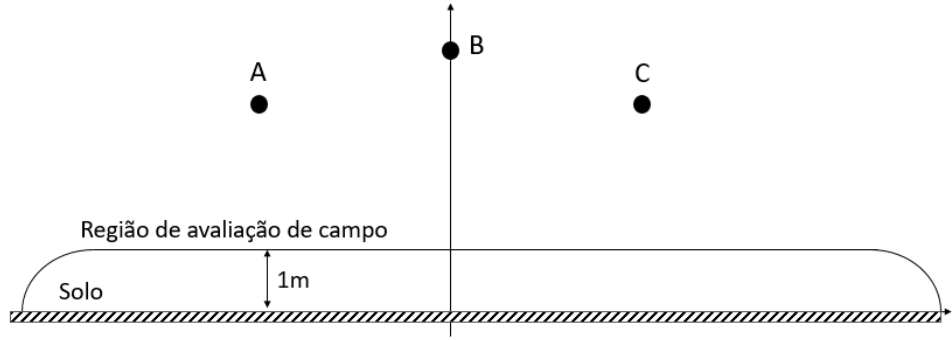


Figura 3-7 – Representação da Linha de Transmissão

3.3.1. Formulação para Determinação do Campo Magnético

O modelo matemático do campo magnético inicia-se a partir da equação de Ampère de Maxwell, dada por (3.32) na forma diferencial (JIN, 2002).

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_t + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.32)$$

Uma vez que a análise do campo magnético é realizado do ponto de vista quase-estático, a corrente de deslocamento $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = j\omega \mathbf{A}$ pode ser desprezada, pois a corrente de deslocamento é muito menor do que a corrente de condução ($j\omega \mathbf{A} \ll \mathbf{J}_t$) (FARAH, 2014).

Em um meio homogêneo (características do meio não variam com as coordenadas do domínio), linear (densidade de fluxo uniforme ao campo aplicado) e isotrópico (possui características físicas invariantes da direção observada), caracterizado por μ , ϵ e σ as relações constitutivas são válidas. Para o campo magnético faz-se necessário o uso da relação constitutiva (3.33) (SADIKU, 2004):

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}, \quad (3.33)$$

$\mathbf{B}$ é a indução magnética (weber/metro²), $\mathbf{H}$ é a intensidade de campo magnético (ampère/metro) e ν é a relutividade do material $\nu = \frac{1}{\mu}$ (ampère x metro/weber) (FARAH, 2014). (BALANIS, 2012) (COPPOLI, 2010).

Considerando $\mathbf{J}_t$ como a corrente total presente,

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e, \quad (3.34)$$

em que $\mathbf{J}_s$ é o vetor densidade de corrente (ampère/metro²) da LT e $\mathbf{J}_e$ é o vetor densidade de corrente induzida (ampère/metro²), neste caso não existe a parcela $\mathbf{J}_e$, ou seja, $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_s$ que consiste na densidade de corrente em cada condutor da LT.

Substituindo a equação (3.33) em (3.32) e aplicando o rotacional sabendo-se que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, onde $\mathbf{A}$ é o potencial vetor magnético, obtém-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_t, \quad (3.35)$$

fazendo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e sabendo que $\mathbf{J}_t$ e $\mathbf{A}$ são perpendiculares ao plano de interesse, então $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$ e $\mathbf{J} = J\mathbf{k}$.

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

ou,

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} = \frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{j}. \quad (3.37)$$

Substituindo a equação (3.37) na equação (3.35), resulta a equação de Poisson (MACEDO, 1988):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_t. \quad (3.38)$$

Recorrendo a (3.35)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s, \quad (3.39)$$

ou,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{J}_s = 0. \quad (3.40)$$

Como existe apenas a componente na direção z, o potencial vetor magnético $\mathbf{A}$ é tratado como escalar, como demonstrado em (3.36) e (3.37), portanto:

$$\nabla \cdot \nu \nabla A + J_s = 0, \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot \nu \nabla A = -J_s. \quad (3.42)$$

Aplicando as respectivas condições de contorno de Dirichlet (condição de contorno essencial) e Neumann (condição de contorno natural):

$$A = A_u \text{ em } \Gamma_u, \quad (3.43)$$

$$-\nu \frac{\partial A}{\partial n} = \tilde{t} \text{ em } \Gamma_t, \quad (3.44)$$

onde n é a orientação normal à fronteira de Neumann.

No cálculo da densidade de fluxo magnético a Figura 3-8a ilustra a fronteira de Dirichlet indicada na cor vermelha com valor igual a zero.

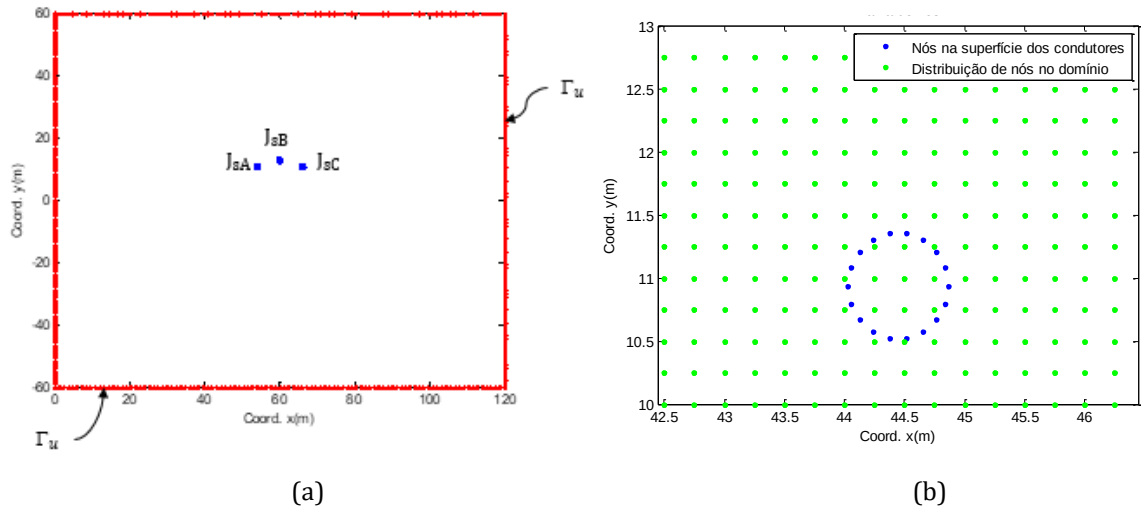


Figura 3-8 – (a) Condição de Dirichlet nula na fronteira do domínio. (b) Distribuição de nós em parte do domínio e em volta do condutor da fase A.

As equações (3.42), (3.43) e (3.44) representam a forma forte do problema. Uma vez que esta formulação apresenta uma difícil solução, é imprescindível a obtenção da forma fraca através do método de Galerkin.

Obtendo a solução variacional do problema pelo método de Galerkin:

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot v \nabla A - J_s(t)) \omega \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1, \quad (3.45)$$

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla A) \omega \partial \Omega - \int_{\Omega} J_s(t) \omega \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.46)$$

Manipulando a equação e fazendo uso das identidade vetoriais (COPPOLI, 2010):

$$\nabla \cdot (g \mathbf{v}) = (\nabla g) \mathbf{v} + g \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.47)$$

$$g \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (g \mathbf{v}) - (\nabla g) \mathbf{v}. \quad (3.48)$$

Substituindo $g = \omega$ e $\mathbf{v} = v \nabla A$ na equação (3.46)

$$\nabla \cdot (v \nabla A) \omega = \nabla \cdot (\omega v \nabla A) - \nabla \omega (v \nabla A). \quad (3.49)$$

Em seguida o resultado de (3.46) é modificado de acordo com (3.49)

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega v \nabla A) \partial \Omega + \int_{\Omega} (v \nabla \omega \nabla A) \partial \Omega - \int_{\Omega} J_s(t) \omega \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.50)$$

Empregando o teorema da divergência na primeira parcela da equação (3.50), de modo que $\frac{\partial A}{\partial n} = \nabla A \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário normal, indicando para fora da fronteira de Neumann que no problema não está presente, resultando em

$$\int_{\Gamma} \omega v \frac{\partial A}{\partial n} \partial \Gamma + \int_{\Omega} (v \nabla \omega \nabla A) \partial \Omega - \int_{\Omega} J_s(t) \omega \partial \Omega \quad \forall \omega \in H^1, \quad (3.51)$$

em que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, $\omega = 0$ em Γ_u e como $-v \frac{\partial A}{\partial n} = \tilde{f}$ em Γ_t , deseja-se agora determinar $A \in H^1$, de maneira que:

$$\int_{\Gamma_t} (\omega \check{t}) \partial \Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \nabla \omega \nabla A) \partial \Omega - \int_{\Omega} J_s(t) \omega \partial \Omega = 0, \quad (3.52)$$

$$\forall A \in H^1 \text{ e } \forall \omega \in H^1.$$

Baseando-se em uma solução aproximada, determinando: $A^h \in \hat{H}^1$:

$$\int_{\Gamma_t} (\omega^h \check{t}) \partial \Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \nabla \omega^h \nabla A^h) \partial \Omega - \int_{\Omega} J_s(t) \omega^h \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1, \quad (3.53)$$

dados que: $\hat{H}^1 \subset H^1$.

Sendo ainda que:

$$A^h = \sum_{i=1}^n A_i \phi_i, \quad (3.54)$$

e

$$\omega^h = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i. \quad (3.55)$$

Adicionando as equações (3.54) e (3.55) em (3.53)

$$- \int_{\Omega} \left(J_s(t) \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i \right) \partial \Omega + \int_{\Omega} \left(\mathbf{v} \nabla \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i \nabla \sum_{j=1}^n A_j \phi_j \right) \partial \Omega +$$

$$\int_{\Gamma_t} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i \check{t} \right) \partial \Gamma = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.56)$$

Rearranjando os termos

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} (\nabla \phi_j \mathbf{v} \nabla \phi_i A_j) \partial \Omega + \int_{\Gamma_t} (\phi_i \check{t}) \partial \Gamma - \int_{\Omega} J_s(t) \phi_i \partial \Omega \right] \right\} = 0 \quad (3.57)$$

$$\forall \omega \in H^1.$$

Fazendo:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i G_i = 0 \quad \forall \omega_i \in \hat{H}^1 \rightarrow G_i = 0, \quad (3.58)$$

na equação (3.57) e chamando

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega, \quad (3.59)$$

$$F_i = \int_{\Omega} J_s(t) \phi_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\phi_i \mathbf{n}) \, d\Gamma. \quad (3.60)$$

Chega-se no seguinte sistema linear, em que K e F são dados pelas respectivas equações (3.59) e (3.60).

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F}. \quad (3.61)$$

A partir da formulação é necessário a modelagem computacional através de um algoritmo para aplicar o EFGM. A ferramenta utilizada para elaborar a programação é o software MATLAB, devido a este possuir uma maior flexibilidade e facilidade em se trabalhar com matrizes, vetores e na geração de gráficos.

3.3.2. Formulação para Determinação do Campo Elétrico

A modelagem para obtenção do campo elétrico é similar a formulação do campo magnético, porém sem o termo da densidade de corrente, que neste caso é nulo, o que torna essa formulação um pouco mais simples.

Partindo de

$$\Delta U = 0, \quad (3.62)$$

expandindo a equação (3.62), onde U é vetor solução.

$$\nabla \beta \nabla U = 0, \quad (3.63)$$

ou seja, a equação resultante agora é equação de Laplace (MACEDO, 1988):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.64)$$

De acordo com (FARAH, 2014), aplicando o divergente em ambos os lados da equação de Ampère (3.32), juntamente com a equação (3.64) e utilizando as relações constitutivas $D=\epsilon E$ e $J=\sigma E$, obtém-se a seguinte EDP:

$$\nabla \cdot (\sigma + j\omega\epsilon) \nabla U = 0, \quad (3.65)$$

onde ϵ é a permissividade do meio, σ é condutividade elétrica, $\omega=2\pi f$, sendo f a frequência, E é o campo elétrico e D é o vetor deslocamento.

Fazendo $\beta = \sigma + j\omega\epsilon$ e aplicando as respectivas condições de contorno de Dirichlet e Neumann:

$$U = U_u \text{ em } \Gamma_u, \quad (3.66)$$

$$-\beta \frac{\partial U}{\partial n} = \tilde{t} \text{ em } \Gamma_t, \quad (3.67)$$

onde n é a orientação normal à fronteira Neumann.

As condições de fronteira essenciais (CFE) para o cômputo do campo elétrico possuem valor igual a zero no limite do problema e valor igual aos potenciais de tensão na superfícies dos condutores de cada fase (V_n) como representado na Figura 3-9.

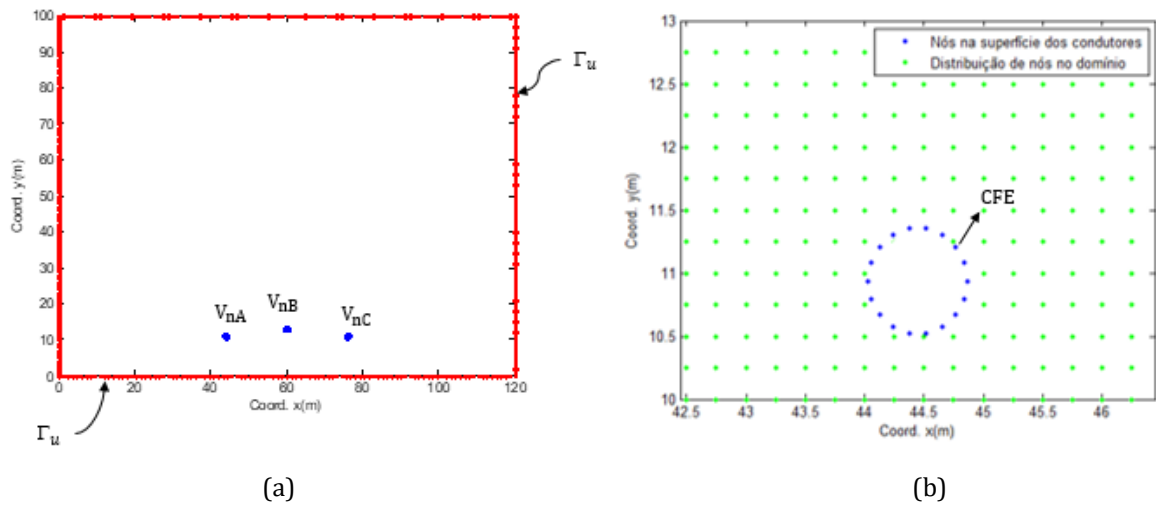


Figura 3-9 – (a) Condição de Dirichlet nula na fronteira do domínio. (b) Condição de Dirichlet na superfície do condutor com valor do potencial da fase A.

As equações (3.64), (3.66) e (3.67), representam a forma forte do problema. Uma vez que esta formulação apresenta uma difícil solução, é imprescindível a obtenção da forma fraca através do método de Galerkin.

Obtendo a solução variacional do problema pelo método de Galerkin:

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot \beta \nabla U) \omega \, d\Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1, \quad (3.68)$$

ou,

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta \nabla U) \omega \, d\Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.69)$$

Manipulando a equação e fazendo uso das identidade vetoriais (COPPOLI, 2010):

$$\nabla \cdot (g \mathbf{v}) = (\nabla g) \cdot \mathbf{v} + g \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.70)$$

$$g \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (g \mathbf{v}) - (\nabla g) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.71)$$

Substituindo $g = \omega$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v} \nabla A$ na equação (3.69)

$$\nabla \cdot (\beta \nabla U) \omega = \nabla \cdot (\omega \beta \nabla U) - \nabla \omega (\beta \nabla U). \quad (3.72)$$

Em seguida o resultado de (3.69). é modificado de acordo com (3.72)

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega \beta \nabla U) \partial \Omega + \int_{\Omega} (\beta \nabla \omega \nabla U) \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.73)$$

Empregando o teorema da divergência na primeira parcela da equação (3.73), de modo que $\frac{\partial U}{\partial n} = \nabla U \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário normal, indicando para fora da fronteira, resultando em

$$-\int_{\Gamma} \omega \beta \frac{\partial U}{\partial n} \partial \Gamma + \int_{\Omega} (\beta \nabla \omega \nabla U) \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1, \quad (3.74)$$

em que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, $\omega = 0$ em Γ_u e como $-\nu \frac{\partial U}{\partial n} = \tilde{t}$ em Γ_t , deseja-se agora determinar $A \in H^1$, de maneira que:

$$\int_{\Gamma_t} (\omega \tilde{t}) \partial \Gamma + \int_{\Omega} (\beta \nabla \omega \nabla U) \partial \Omega = 0 \quad \forall A \in H^1 \text{ e } \forall \omega \in H^1. \quad (3.75)$$

Baseando-se em uma solução aproximada, determinando: $U^h \in \hat{H}^1$:

$$\int_{\Gamma_t} (\omega^h \tilde{t}) \partial \Gamma + \int_{\Omega} (\beta \nabla \omega^h \nabla U^h) \partial \Omega = 0 \quad \forall \omega \in H^1, \quad (3.76)$$

dado que: $\hat{H}^1 \subset H^1$.

Sendo ainda que:

$$U^h = \sum_{i=1}^n U_i \phi_i, \quad (3.77)$$

$$\omega^h = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i. \quad (3.78)$$

Adicionando as equações (3.77) e (3.78) em (3.76)

$$\int_{\Omega} \left(\beta \nabla \sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i \cdot \nabla \sum_{j=1}^n A_j \phi_j \right) \partial \Omega + \int_{\Gamma_t} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \phi_i \check{t} \right) \partial \Gamma = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.79)$$

Rearranjando os termos

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} (\nabla \phi_j \beta \nabla \phi_i U_j) \partial \Omega + \int_{\Gamma_t} (\phi_i \check{t}) \partial \Gamma \right] \right\} = 0 \quad \forall \omega \in H^1. \quad (3.80)$$

Fazendo:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i G_i = 0 \quad \forall \omega_i \in \hat{H}^1 \rightarrow G_i = 0, \quad (3.81)$$

na equação (3.80)(3.57) e chamando

$$K'_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \beta \nabla \phi_i \partial \Omega, \quad (3.82)$$

$$F'_i = \int_{\Omega} \phi_i \check{t} \partial \Gamma = 0, \quad (3.83)$$

ou,

$$K'_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j (\sigma + j \bar{w} \varepsilon) \nabla \phi_i \partial \Omega. \quad (3.84)$$

Chega-se no seguinte sistema linear, em que K é dado pelas equações (3.84)

$$\mathbf{K}'\mathbf{U} = \mathbf{F}'. \quad (3.85)$$

3.3.3. Formulação Generalizada

Como visto nos subtópicos 3.3.1 e 3.3.2 os problemas de contorno aplicados em estudos eletromagnéticos podem possuir um contorno genérico, em razão das formulações serem similares. Assim sendo a EDP genérica é apresentada:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta \frac{\partial U}{\partial y}\right) = b, \quad (3.86)$$

os parâmetros da equação (3.86) são dados por:

U – função incógnita;

β – são os parâmetros físicos conhecidos do domínio;

b – pode ser dado com uma fonte ou excitação

As condições de contorno de Dirichlet e Neumann são impostas respectivamente por:

$$U = U_u \text{ em } \Gamma_u, \quad (3.87)$$

$$-\beta \frac{\partial U}{\partial n} = \tilde{t} \text{ em } \Gamma_t, \quad (3.88)$$

em que n é o vetor normal unitário indicado para fora da região do domínio do problema $\Omega \cup \Gamma$ e $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$.

A Tabela 3.1 representa a relação entre as grandezas globais e reais referente ao cômputo do campo magnético e elétrico analisados neste trabalho.

Tabela 3.1 –Unidades gerais para cálculo do campo elétrico e magnético.

Campos Eletromagnéticos	(U)	(β)	(b)
Magnético:	A	ν	J
Elétrico	V	$\sigma + j\omega\epsilon$	-

3.4. Fluxograma

Os passos do programa são descritos esquematicamente a seguir e representado através de um fluxograma indicado na Figura 3-10 referentes as equações esboçadas nas seções anteriores (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1998) para a solução do problema em 2D.

- 1) Primeiramente define-se a geometria do problema e suas características físicas.
- 2) Em seguida é necessário fazer a configuração das coordenadas nodais e gerar a malha.
- 3) Gera as células de integração.
- 4) Insere os pontos de integração, peso, jacobiano para cada célula.
- 5) Determina o domínio de influência de cada nó.
- 6) Loop sobre os pontos de integração.
 - a) Determina os nós da vizinha dos pontos de Gauss.
 - b) Determina a função de forma e suas derivadas.
 - c) Armazena a matriz B.
 - d) Adiciona a contribuição da matriz K.
- 7) Insere a condição de Dirichlet nas fronteiras.
- 8) Força as condições de Contorno.
- 9) Solução do sistema, resolvendo para os parâmetros nodais u_i .
- 10) Traçar os gráficos.

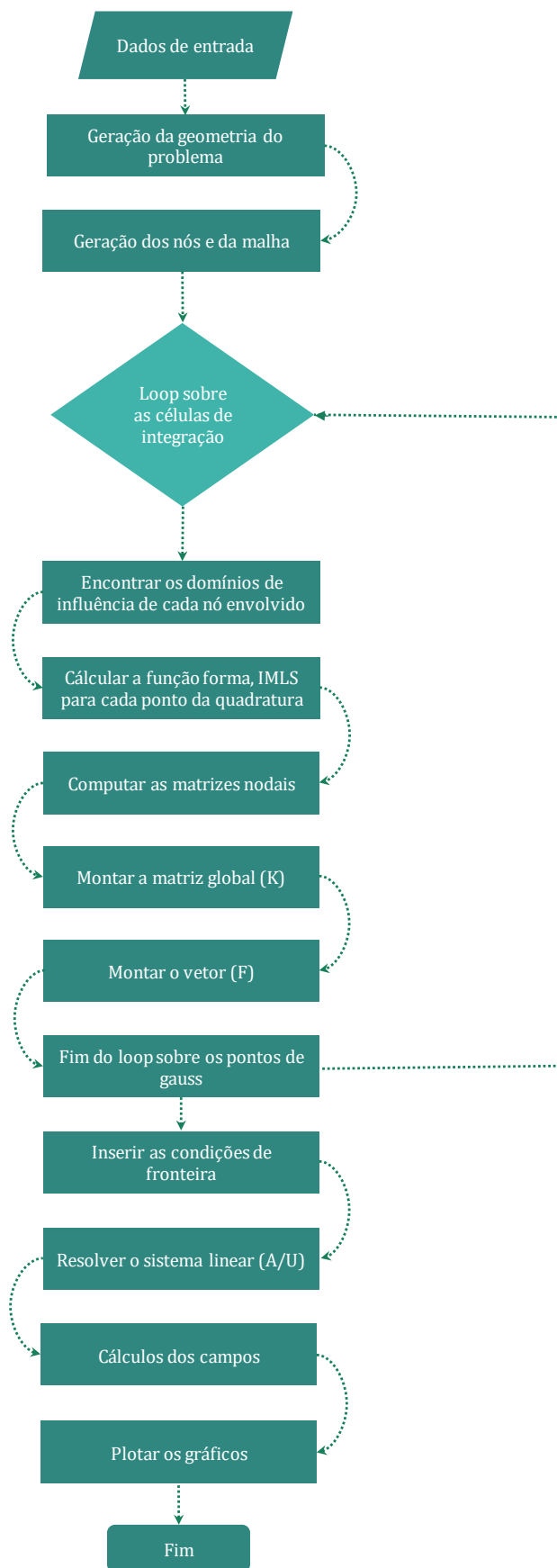


Figura 3-10 - Fluxograma do algoritmo EFGM.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo, são apresentadas as simulações dos campos eletromagnéticos, provenientes de casos reais de LTs, sendo as mesmas comparadas com a solução analítica e com outros métodos encontrados em trabalhos presentes na literatura. Para isso, devem ser conhecidos os valores de tensão, corrente e o RMG (Raio Médio Geométrico) dos condutores, por se tratarem de informações básicas imprescindíveis para o cômputo dos campos através da aplicação do EFGM.

De posse do modelo variacional apresentado no capítulo 3 é necessário resolver o problema através do método EFGM e validar os resultados através do MEF, e do cálculo analítico, fazendo as devidas comparações, análises e verificação das taxas de erros.

4.1. Parâmetros do Problema

Para o cômputo dos campos magnéticos e elétricos é necessário estabelecer as condições de fronteira de Dirichlet e Neumann.

No caso do campo magnético o valor do potencial é estabelecido nulo nas fronteiras que delimitam o problema. Cabe então entrar com os valores de densidades de correntes (J_0) dos condutores na forma fasorial polar de cada fase como:

$$J_0 = \frac{|I_N| \angle \phi}{S_a}, \quad (4.1)$$

onde I_N é a corrente de linha das fases de A, B, C, ϕ representa o ângulo de cada fase defasada de 120° como indicado na Figura 4-1 e S_a é área da seção transversal do condutor.

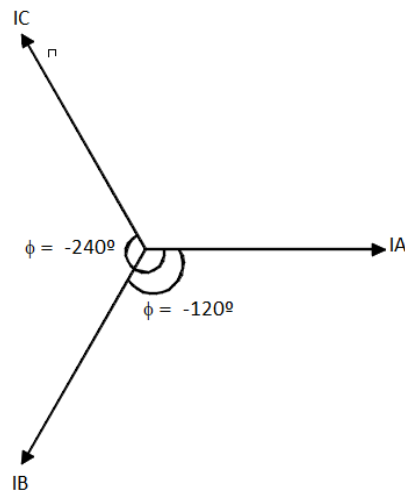


Figura 4-1 - Fases ABC em um sistema trifásico, simétrico e dispostas na sequência positiva.

A corrente I_N normalmente é variável ao longo do dia, uma vez que é em função das cargas conectadas à LT. Assim, a corrente I_N é calculada conforme a equação (4.2) (PEREIRA, 2012)

$$I_N = \frac{S_{3\phi}}{\sqrt{3}V_N \cos(\theta)}. \quad (4.2)$$

Para considerar as condições mais críticas, observando o atendimento as legislações vigentes, considera-se neste caso a máxima potência aparente trifásica ($S_{3\phi}$) da LT, fazendo o fator de potência igual a um ($\cos(\theta)=1$) (FUCHS, 1977)

$$I_N = \frac{S_{3\phi}}{\sqrt{3}V_N}. \quad (4.3)$$

Portanto as correntes finais são:

$$\begin{aligned} I_A &= I_N \angle 0^\circ, \\ I_B &= I_N \angle -120^\circ, \\ I_C &= I_N \angle 120^\circ. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Já no caso do cômputo do campo elétrico não deve ser considerado o interior dos condutores como domínio do problema. O potencial elétrico deve ser aplicado na condição de fronteira de essencial, ou seja, apenas na superfície dos condutores:

$$V_0 = \frac{|V_N| \angle \phi}{\sqrt{3}}, \quad (4.5)$$

onde V_N é a tensão nominal da linha referente as fases A, B e C, ϕ representa o ângulo de cada fase defasada de 120° .

Portanto as tensões finais são:

$$\begin{aligned} V_A &= V_0 \angle 0^\circ, \\ V_B &= V_0 \angle -120^\circ, \\ V_C &= V_0 \angle 120^\circ. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2. Raio Médio Geométrico - RMG

Nos modelos de linhas de transmissão que possuem múltiplos condutores, é empregado o conceito do Raio Médio Geométrico (RMG). O RMG define um novo condutor com raio equivalente ao feixe de condutores, de modo que o fluxo magnético produzido seja idêntico ao fluxo total gerado pelos subcondutores. A partir destas considerações, assume-se que as correntes distribuídas nos subcondutores sejam iguais e a altura é estabelecida do solo até o centro da circunferência do feixe (VIEIRA, 2013), (COSTA, 2009).

(STEVENSON, 1986) define as equações para obter o RMG para cabos com dois, três e quatro condutores respectivamente como:

$$\text{RMG} = \sqrt{D_s d}, \quad (4.7)$$

$$\text{RMG} = \sqrt[3]{D_s d^2}, \quad (4.8)$$

$$\text{RMG} = 1,09 \sqrt[4]{D_s d^3}, \quad (4.9)$$

Ds: é o raio dos condutores individuais, fornecido por meio de tabelas. Cada tipo de cabo possui um valor de correção específico pelo efeito pelicular. A Figura 4-3 indica a disposição de cabos múltiplos.

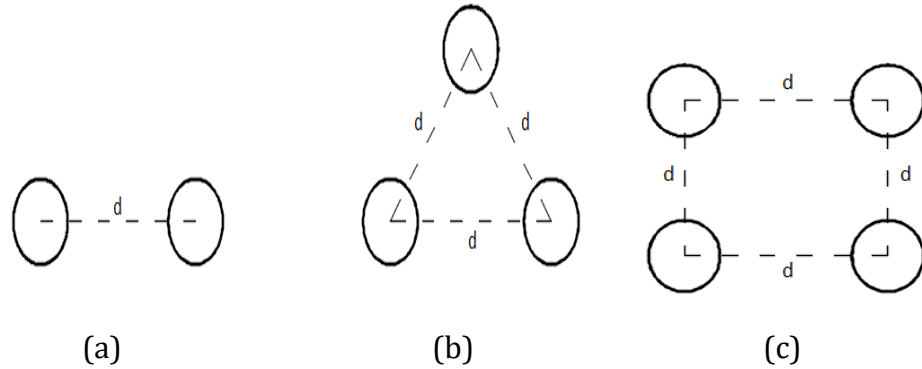


Figura 4-2 –Feixe de condutores: (a) dois condutores (b) três condutores e (c) quatro condutores adaptado de (STEVENSON, 1986).

Para LTs onde há múltiplos condutores como indicada na Figura 4-3 pode-se fazer uma consideração genérica.

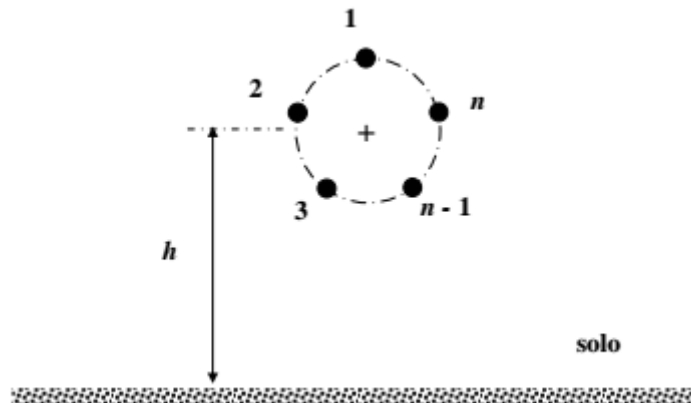


Figura 4-3 - Feixe de condutores igual ou superior a cinco (COSTA, 2009).

Para estabelecer o RMG da Figura 4-3 (FUCHS, 1977) representa a equação (4.10) para encontrar o RMG para múltiplos condutores simétricos,

$$\text{RMG} = \sqrt[n^2]{r_1 s_{12} s_{13} \dots s_{1n} \quad r_2 s_{21} s_{23} \dots s_{2n} \quad \dots r_n s_{n1} s_{n2} \dots s_{n(n-1)}}, \quad (4.10)$$

onde r_n trata-se do raio médio geométrico do n -ésimo subcondutor, s representa a distância entre dois subcondutores, e n o número total de multicondutores que constituem o feixe (COSTA, 2009).

4.3. Tratamento da Condição de Fronteira Externa

Em determinadas ocasiões envolvendo certos problemas de engenharia como em questões eletromagnéticas, há domínios de interesse com extensão infinita, caracterizadas por fronteiras fictícias abertas. Desde modo, ao aplicar o método sem malha é necessário definir um domínio discreto limitado, ou seja, deve haver uma condição de fronteira externa máxima à uma distância finita do centro da linha de transmissão. Desta forma é necessário aplicar técnicas especiais para representar este domínio. Dentre algumas técnicas usualmente aplicadas tem-se o truncamento, *Strategic Dual Image* e a Transformação Especial de Kelvin. (CHEN e KONRAD, 1997), (FARAH, 2014). Estudos como os de (CHEN e KONRAD, 1997), (EMSON, 1988) e (BETTESS, 1988) proporcionam outras alternativas para a realização destes tratamentos.

Neste contexto, trabalha-se inicialmente com a condição de truncamento, por esta ser uma abordagem mais simples e por possuir uma precisão aceitável para limites externos suficientemente distantes (CHEN e KONRAD, 1997).

4.3.1. Truncamento da Fronteira Externa

Esta abordagem trata-se de um pressuposto de que em um determinado limite o potencial ou a derivada normal do potencial é próxima de zero. Desta forma a equação (4.11) é válida para as condições de Dirichlet ou Neumann na fronteira fictícia, possuindo valores nulos (FARAH, 2014).

$$\phi = 0 \dots \text{ou} \dots \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em } \Gamma_{\text{ex}}, \quad (4.11)$$

(CHEN e KONRAD, 1997) estabelecem um modelo onde a distância (d) da fronteira externa deve ser no mínimo cinco vezes a distância ao centro do problema. No caso da LT

é tomada a altura da torre ao centro como a distância entre o solo e o condutor mais afastado na torre, conforme ilustrado na Figura 4-4.

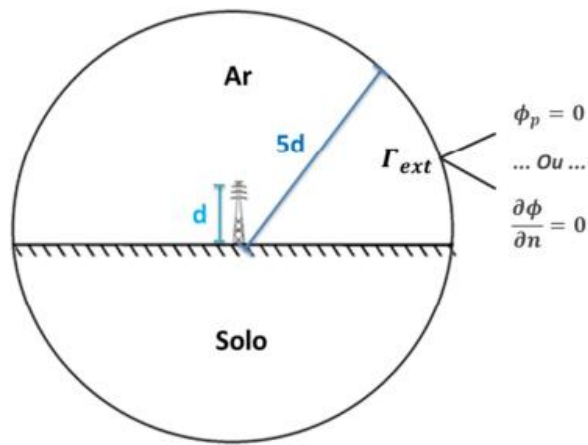


Figura 4-4 - Truncamento na fronteira (FARAH, 2014).

Em (EMSON, 1988) são sugeridas abordagens iterativas a fim de melhorar a precisão, transferindo a fronteira fictícia algumas vezes para uma distância maior do que os $5d$ para melhor representar uma fronteira localizada ao infinito. Esta alternativa implica um custo computacional muito superior, uma vez que o domínio aberto seria ainda maior, requerendo uma distribuição de nós mais elevada para representar o novo domínio.

4.4. Cálculos de Erros

As análises de erros para avaliar as consistências dos resultados obtidos pelo modelo numérico EFGM são comparados com os modelos de referência (analítico e MEF). Para isso, é utilizado a norma euclidiana (L_2), conforme descrita por (FARAH, 2014) e indicada pela equação (4.12). Outra avaliação também é realizada através do erro relativo indicado pela equação (4.13). Estas análises evitam a disparidade que os resultados encontrados sejam insignificantes ou excessivos e permite a análise em um dado ponto para averiguar o erro máximo cometido.

$$\text{Erro M\u00e9dio Global (\%)} = \left| \frac{\int_{\Omega} (S_{\text{ref}} - S_{\text{EFG}})^2}{\int_{\Omega} (S_{\text{ref}})^2} \right|^{\frac{1}{2}} * 100\%, \quad (4.12)$$

$$\text{Erro Relativo (\%)} = \left| \frac{(S_{\text{ref}} - S_{\text{EFG}})}{S_{\text{ref}}} \right| * 100\%, \quad (4.13)$$

sendo que S_{ref} corresponde a solu\u00e7\u00e3o de refer\u00eancia (solu\u00e7\u00e3o anal\u00edtica), S_{EFG} a solu\u00e7\u00e3o obtida pelo EFGM e n o n\u00famero total de pontos.

\u00c9 v\u00e1lido ressaltar que as averigua\u00e7\u00f5es dos erros s\u00e3o feitas para a regi\u00e3o de observa\u00e7\u00e3o dos campos eletromagn\u00e9ticos a 1 metro do n\u00edvel do solo.

4.5. Considera\u00e7\u00f5es Gerais

Para as an\u00e1lises nos pr\u00f3ximos subitens a regi\u00e3o de avalia\u00e7\u00e3o dos campos eletromagn\u00e9ticos adotada \u00e9 de 1 m acima do solo para compara\u00e7\u00e3o com outros m\u00e9todos. A dist\u00e2ncia da fronteira de Dirichlet implementada \u00e9 de aproximadamente cinco vezes a dist\u00e2ncia do condutor mais elevado at\u00e9 o solo, como descrito no t\u00f3picos 4.3.1. Os cabos para-raios n\u00e3o s\u00e3o considerados, pois possuem dimens\u00f5es reduzidas, o que implicaria em uma discretiza\u00e7\u00e3o de n\u00f3s absurdamente grande em virtude da dimens\u00e3o da faixa de servi\u00e7\u00e3o das LTs, o que no momento ainda \u00e9 invi\u00e1vel.

No campo magn\u00e9tico \u00e9 considerado um valor de resistividade padr\u00e3o para solos brasileiros homog\u00eaneos, uma vez que para valores de resistividade entre 100 a 1000 Ω .m n\u00e3o s\u00e3o notadas diferen\u00e7as significativas nos resultados dos campos.

Os valores da permeabilidade magn\u00e9tica do ar (v\u00e1cuo) e do solo s\u00e3o as mesmas, portanto n\u00e3o h\u00e1 altera\u00e7\u00e3o do campo magn\u00e9tico perante a mudan\u00e7a do meio, com isso n\u00e3o s\u00e3o utilizados imagens para a aproxima\u00e7\u00e3o do modelo. A corrente de retorno no solo neste caso n\u00e3o influencia de forma significativa a distribui\u00e7\u00e3o do campo magn\u00e9tico. Tal fato pode ser provado calculando a medida da profundidade (p) descrita no ap\u00eandice B. \u00c9 encontrado um valor muito elevado confirmando a teoria que as correntes induzidas pouco influenciam os campos.

Na implementação do campo elétrico o solo é considerado como um condutor elétrico perfeito (CEP). Para isso, é estabelecido neste caso a fronteira de Dirichlet igual a zero sobre o solo.

4.5.1. Validação do Campo Magnético

A validação do cômputo do campo magnético é realizada mediante avaliação da linha de transmissão de Hydro-Québec de 500 kV, com as seguintes configurações: circuito único de feixe expandidos, circulares e simétricos com cinco subcondutores por fase com disposição em delta. Os feixes de condutores são substituídos pelo valor do RMG. Os dados referentes à geometria e às características desta LT são representadas respectivamente pela Tabela 4.1 e pela Figura 4-5 (FARAH, 2014).

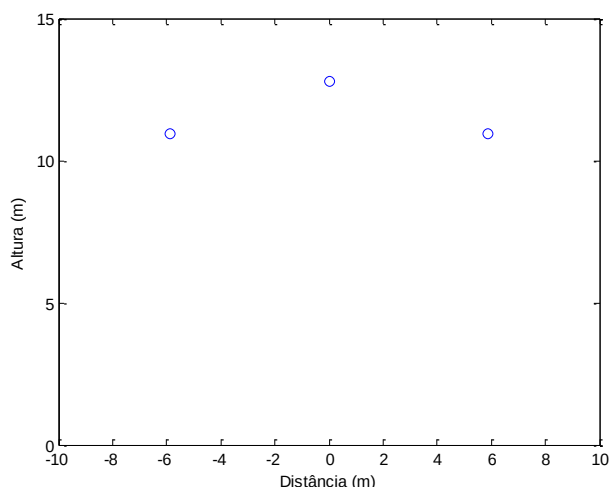


Figura 4-5 - Disposição dos Condutores (LT 500 kV Hydro-Québec).

Tabela 4.1 – Características geométricas (LT 500 kV Hydro-Québec).

Informações	LT - Hydro-Québec
Corrente Máxima	4.68 kA
Tensão de Operação	500 kV
Quantidade de fases	3
Número de condutores por fase	1
Raio dos Condutores (RMG)	0,4 m
Distância entre as fases	5,854 m
Altura da fase A	10,848 m
Altura da fase B	12,891 m
Altura da fase C	10,848 m
Região de avaliação do campo	1 m
Tipo dos condutores	CAA
Código dos condutores de fase	Grosbeak

Na Figura 4-6 é comparado à solução proposta neste trabalho pelo EFGM ao MEF desenvolvido por FARAH, e o modelo analítico descrito no apêndice B. O campo magnético é avaliado em uma região de interesse à um metro de altura do solo. No intuito de fornecer uma melhor análise, são indicados na Tabela 4.2 o erro médio global e erro relativo máximo.

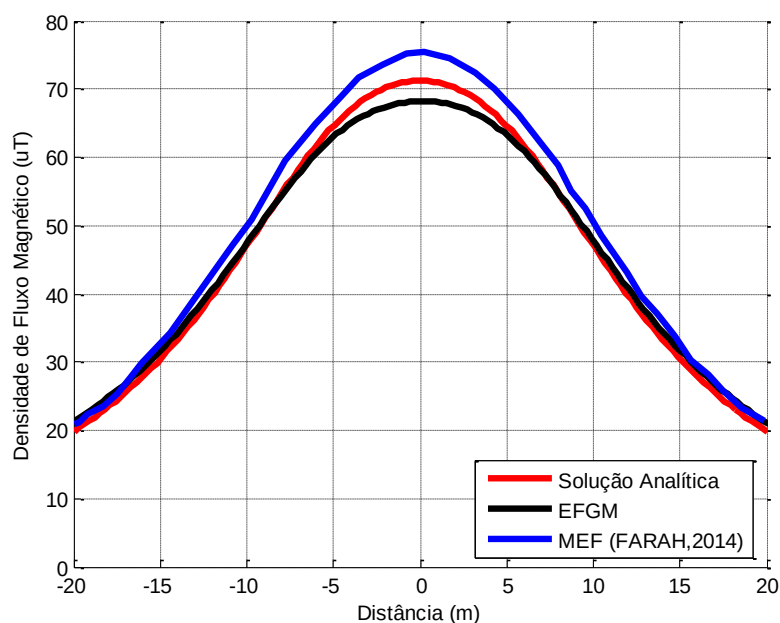


Figura 4-6 - Densidade de fluxo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).

Tabela 4.2 – Análises de erros do campo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).

Campo Magnético Máx. Analítico	Campo Magnético Máx. EFGM	Erro Global (%)	Erro Relativo (%)
7.12e-5 μT	6.838e-5 μT	1,47	4,2

Na Figura 4-7 é mostrada a indução magnética aproximada.

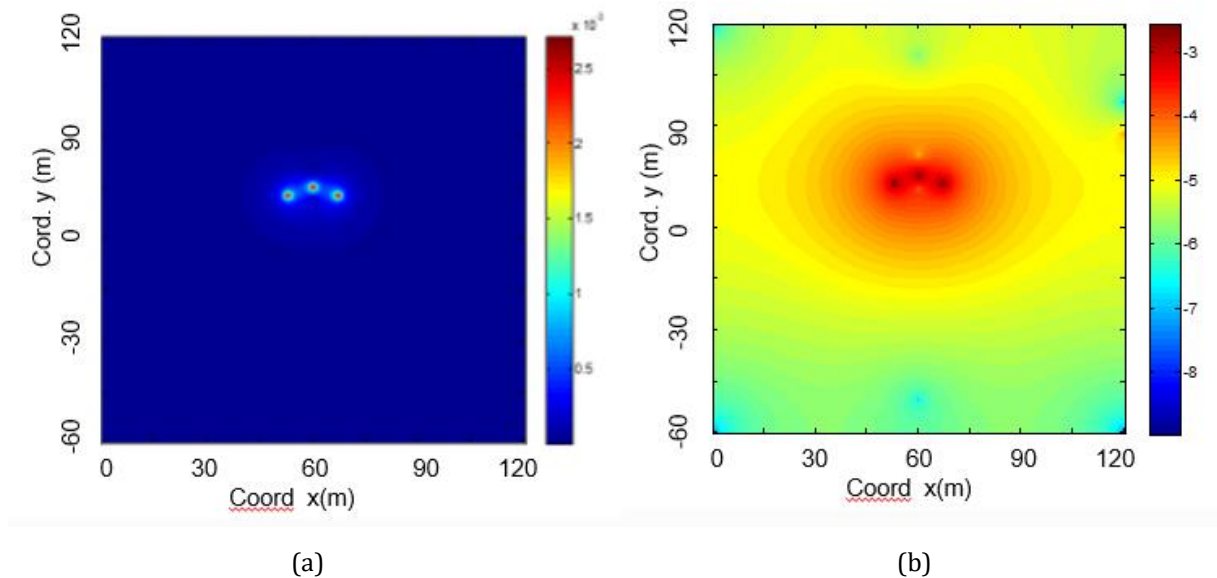


Figura 4-7 – (a) Distribuição de campo magnético (LT 500 kV Hydro-Québec). (b) Distribuição do campo magnético em escala logarítmica (LT 500 kV Hydro-Québec).

Analisando a Figura 4-6 e a Figura 4-7 é observado que os resultados encontrados pelo EFGM são satisfatórios. Observa-se que o valor da densidade de fluxo magnético máximo de 6.838e-5 μT , encontra-se dentro do limite adotado pela Comissão Internacional para Proteção Contra Radiações Não-Ionizantes (ICNIRP) indicada na Tabela A.2 no apêndice A.

Nos resultados expostos para o cômputo do campo magnético nas redondezas da LT Hydro-Québec são distribuídos 160801 nós, mais 90 nós em volta de cada condutor, o valor do domínio de influência utilizando é $d_{\text{max}}=2$. Para resolver as integrais da formulação indicadas no capítulo 3 são utilizados quatro pontos de Gauss por célula de integração. Quanto aos parâmetros do IMLS nesta simulação são adotados $n=10$ e $\varepsilon=0,1$.

4.5.1.1. Estudo de caso – Ligação NorteSul 500 kV

Para certificar o algoritmo do EFGM para o cálculo do campo magnético, é analisado mais um modelo de LT com as características descritas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Características geométricas da interligação Norte/Sul (LT 500 kV Tucuruí/Vila do Conde).

Informações	LT Norte/Sul
Corrente Máxima	1385,664 A
Máxima Tensão de Operação	500 kV
Quantidade de fases	3
Número de condutores por fase	1
Raio dos Condutores (RMG)	0,35 m
Distância entre as fases	5,5 m
Altura da fase A	22 m
Altura da fase B	22 m
Altura da fase C	22 m
Ponto de avaliação do campo	1 m
Tipo dos condutores	CAA
Código dos condutores de fase	Rail

A LT em questão trata-se uma torre estaiada Cross-Rope 500 kV de Tucuruí/Vila do Conde (MACHADO, FERNANDES, *et al.*, 2007). Os níveis de campo magnético são indicados na Figura 4-8 e os erros na Tabela 4.4.

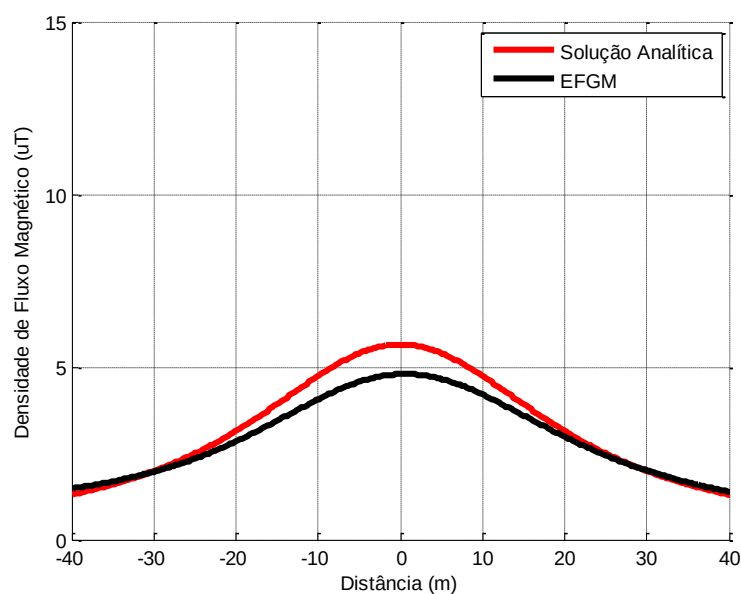


Figura 4-8 - Densidade de fluxo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Tucuruí/Vila do Conde).

Tabela 4.4 – Análises de erros do campo magnético a 1 m do solo (LT 500 kV Tucuruí/Vila do Conde).

Campo Magnético Máx. Analítico	Campo Magnético Máx. EFGM	Erro Global (%)	Erro Relativo (%)
5.65e-5 μT	4.79e-5 μT	3,16	15,1

O valor encontrado da densidade de fluxo máxima de 4.79e-5 μT , encontra-se dentro do limite adotado pela RN 398 da Anatel indicada na Tabela A.3 no apêndice A.

4.5.2. Validação do Campo Elétrico

A LT de 500 kV Hydro-Québec também é utilizada para validar o cômputo do campo elétrico, portanto as geometrias e características elétricas são as mesmas descritas anteriormente na Tabela 4.1.

Neste caso a solução do método sem malha é indicado na Figura 4-9 é comparada apenas com o modelo analítico uma vez que em (FARAH, 2014) não foi disponibilizado a solução pelo MEF.

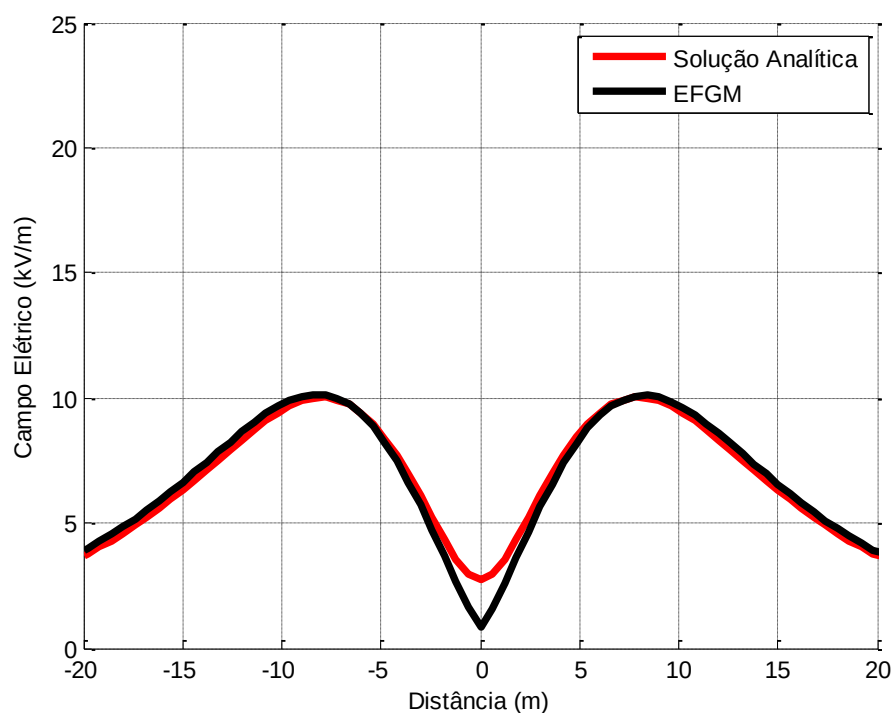


Figura 4-9 – Campo elétrico a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).

A distribuição do campo elétrico nas proximidades da LT é representada na Figura 4-10 utilizando escala logarítmica ($\log_{10}$) para melhor visualização, pois os campo decrescem rapidamente, conforme pode ser constatado (FARAH, 2014).

Tabela 4.5 – Análises de erros do campo elétrico a 1 m do solo (LT 500 kV Hydro-Québec).

Campo Elétrico Máx. Analítico	Campo Elétrico Máx. EFGM	Erro Global (%)	Erro Relativo (%)
1,00e+4 kV	1,05e+4 kV	0,9	1,3

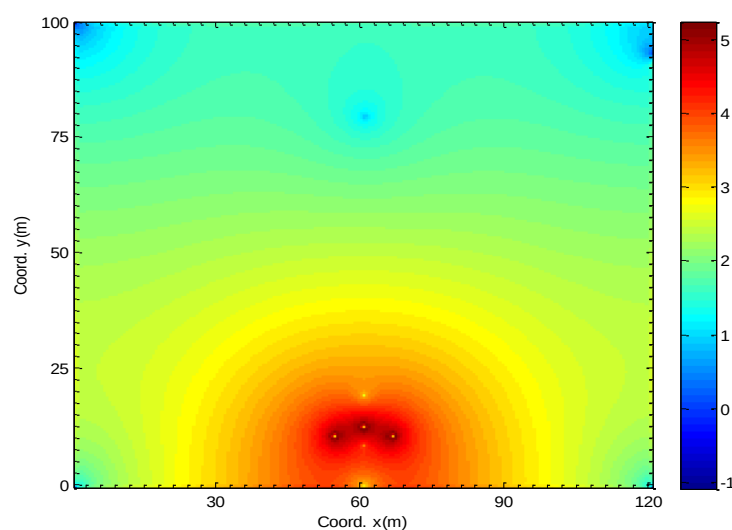


Figura 4-10 - Distribuição do campo elétrico ao longo da faixa de servidão em escala logarítmica (LT 500 kV Hydro-Québec).

Os erros indicados pela Tabela 4.5 encontram-se dentro de limites satisfatórios e conclui-se que o máximo valor do campo elétrico $1,05 \times 10^4$ kV, ultrapassa o limite adotado pela ICNIRP indicada na tabela A.2 no apêndice A, pois o valor do campo elétrico máximo é superior ao valor de referência imposto pela norma para o público em geral que é de 4,17 kV/m.

Para validação do campo elétrico os parâmetros aplicados pelo EFGM são um pouco diferentes quanto aos utilizados no cômputo do campo magnético. Nas proximidades da LT Hydro-Québec são distribuídos 40401 nós, 18 nós em volta de cada condutor aplicando a condição de contorno Dirichlet com o valor da tensão defasados de 120 graus para cada fase. O valor do domínio de influência utilizando é o mesmo do modelo do campo magnético e são utilizados dois de pontos de integração para solucionar as integrais. Já os parâmetros do IMLS nesta simulação utilizados são $n=20$ e $\varepsilon=0,4$.

4.5.2.1. Estudo de caso - LT Furnas

Um outro modelo de LT é analisado para a comparação do campo elétrico com as solução obtidas pelo MEF e modelo analítico. Esta LT é apresentada por (FARAH, 2014) e possui as característica indicadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Características geométricas (LT 525 kV Furnas).

Informações	LT - Furnas
Corrente Máxima	675,23 A
Máxima Tensão de Operação	525 kV
Quantidade de fases	3
Número de condutores por fase	1
Raio dos Condutores (RMG)	0,35 m
Distância entre as fases	7,5 m
Altura da fase A	17,975 m
Altura da fase B	25,475 m
Altura da fase C	17,975 m
Ponto de avaliação do campo	1 m
Tipo dos condutores	CAA
Código dos condutores de fase	Ruddy

Na Figura 4-11b são representadas as curvas calculadas por (FARAH, 2014), e pelo método EFG referente a LT de Furnas. Nota-se que todas as soluções são simétricas em relação ao eixo x entre -20 a 20 metros. Tal comportamento é indicado pelo fato das configurações geométricas da LT em estudo serem equilibradas.

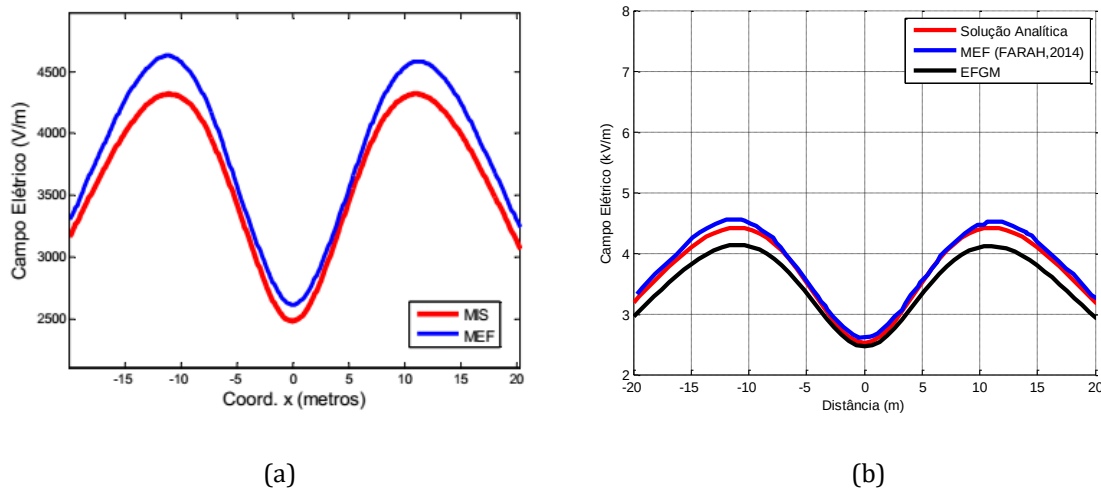


Figura 4-11 –(a) Curva do campo elétrico obtida por (FARAH,2014). (b) Campo elétrico a 1 m do solo (LT de 525 kV Furnas).

Tabela 4.7 – Análises de erros do campo elétrico a 1 m do solo (LT 525 kV Furnas).

Campo Elétrico Máx. Analítico	Campo Elétrico Máx. EFGM	Erro Global (%)	Erro Relativo (%)
4,42e+4 kV	4,14e+4 kV	4,79	6,3

4.5.2.2. Estudo de caso - LT Kuwait

Neste caso é considerado uma LT com circuito duplo de 275 kV, localizada no Kuwait. Esta LT é avaliada por (FARAH, 2014) utilizando o Método dos Elementos Finitos com o objetivo de investigar os campos eletromagnéticos com a presença de um oleoduto próximo à linha.

As características geométricas desta LT são apresentadas na Tabela 4.8 e na Figura 4-12.

Tabela 4.8 – Características geométricas (LT 275 kV Kuwait).

LT Kuwait		
Informações	Circuito1	Circuito2
Tensão de Operação	275 kV	275 kV
Quantidade de fases	3	3
Número de condutores por fase	1	1
Raio dos Condutores (RMG)	0,4 m	0,4 m
Altura das fases A e C'	26 m	26 m
Altura das fases B e B'	17 m	17 m
Altura das fases C e A'	8 m	8 m
Ponto de avaliação do campo	1 m	1 m

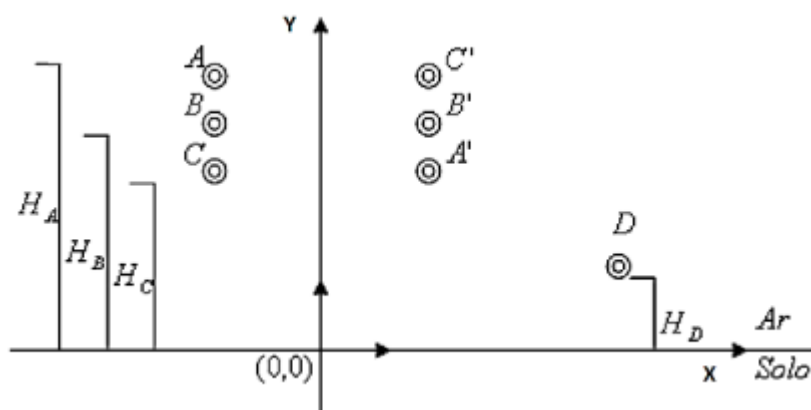


Figura 4-12 - Representação geométrica (LT 275 kV Kuwait) (FARAH, 2014).

As propriedades físicas do duto metálico segundo (AL-GAHTANI, 2009) são detalhados como: revestimento em polímero epóxi, resistividade (ρ)= $1.34.10^6 \Omega \text{ m}$, permissividade relativa $\epsilon_r = 1$ e Permeabilidade $\mu_r = 1$.

O valor máximo do campo elétrico encontrado utilizando EFGM é de 7,634 V/m, enquanto o valor encontrado por FARAH é 8,232 V/m, conforme na Figura 4-13. Já pelo Método de Simulação de Carga (MSC) de (ISMAIL, 1999) o campo elétrico máximo é de 9,779 V/m.

Nota-se que na região de proximidade do duto ocorre variação do campo elétrico, aumentando significativamente acima do duto e reduzindo abaixo oleoduto.

Os resultados do campo elétrico são exibidos nas Figura 4-13 e Figura 4-14.

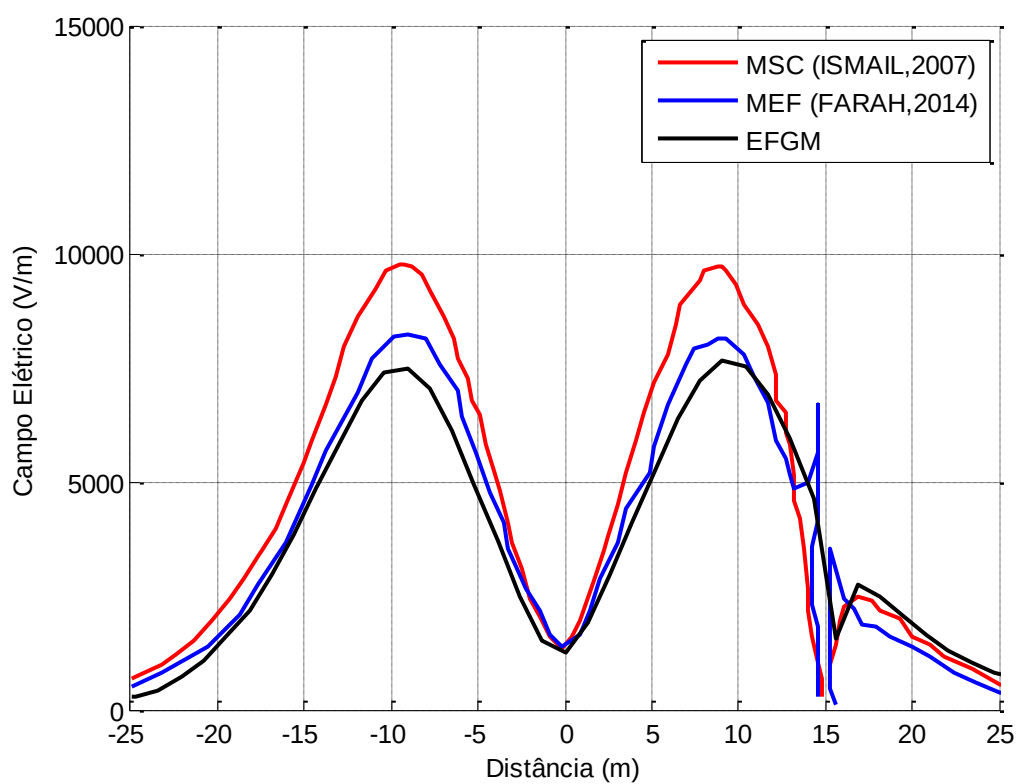


Figura 4-13 – Campo elétrico a 1 m do solo (LT 275 kV Kuwait).

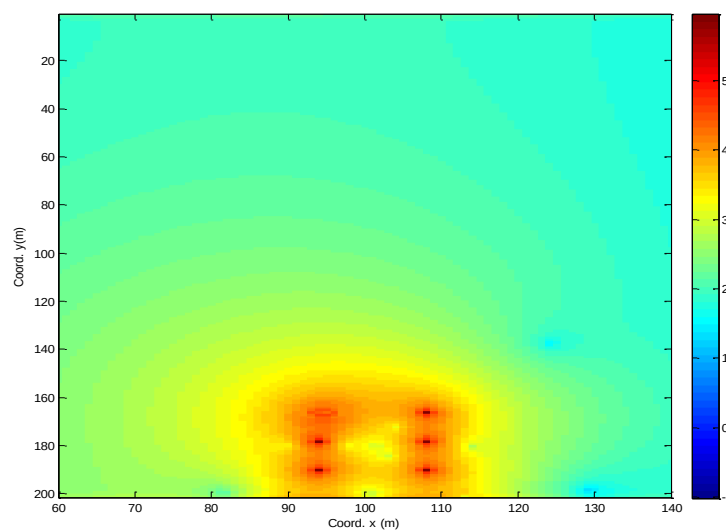


Figura 4-14 – Distribuição de campo elétrico em escala logarítmica (LT 275 kV Kuwait).

Como pode ser analisado, na vizinhança do duto metálico ocorre a variação da curva influenciada pelo potencial nulo do oleoduto aéreo percorrido por corrente induzidas as quais se opõem a variação de tempo no campo magnético original (FARAH, 2014). A solução pelo EFGM é próxima do MEF, apesar que em ambas as curvas o erro relativo é bastante alto, porém é notado uma boa concordância entre os delineamentos das curvas.

Destaca-se que o modelo do EFGM representa o feixe de condutores de acordo com RMG. Em (ISMAIL, 2007) também é representado em feixe único. Em ambos os casos não são considerados camadas de materiais diferentes no duto. Entretanto o método descrito em FARAH permite a implementação de várias camadas com materiais diferentes e cada feixe com quatro subcondutores.

Finaliza-se concluindo que o uso do método sem malha EFG encontra-se em estágio inicial e cabe melhorias como a identificação das várias camadas de materiais do duto, inserção de cabos para-raios, e subcondutores de cada fase permitindo tratar problemas físicos reais de maneira que não seja utilizando aproximações.

4.5.3. Análise de Sensibilidade

O EFGM possui vários parâmetros de configurações tais como: quantidade de pontos de pontos de Gauss para realizar a integração numérica, tamanho do domínio de

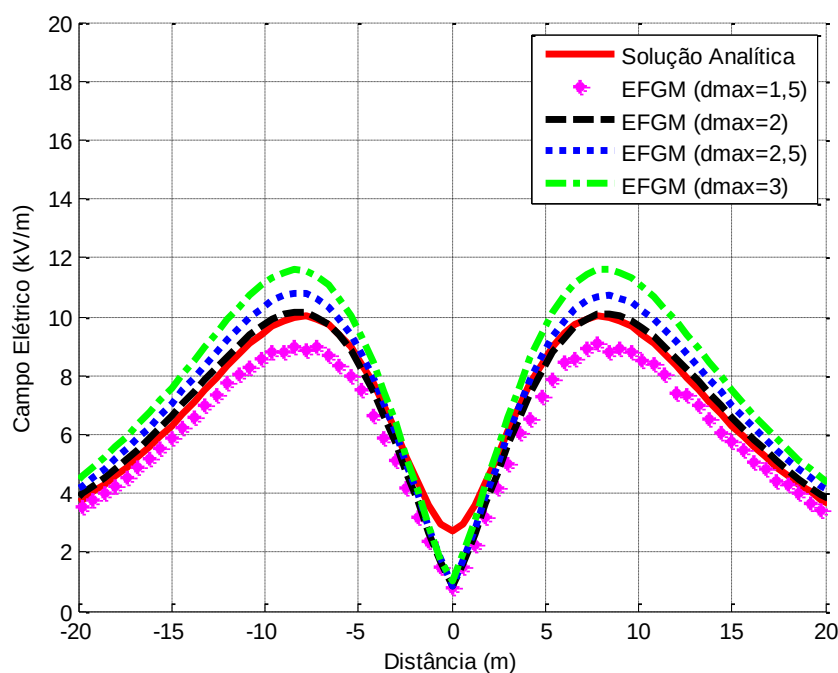
influência (d_{max}) e a quantidade de nós. Dessa forma são realizadas algumas simulações com o propósito de certificar tais parâmetros e identificar uma melhor configuração para a aplicação em LTs.

De acordo com (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1998) o tamanho do domínio de influência é representada novamente pela equação (4.14),

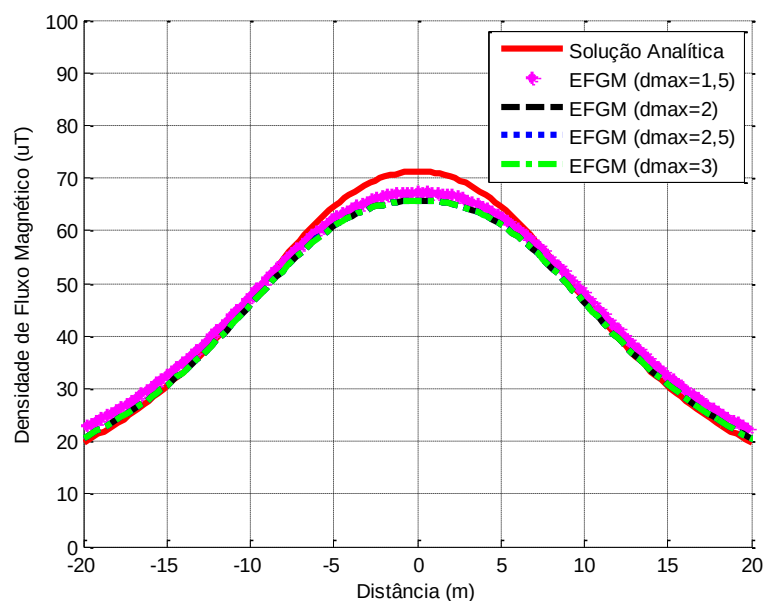
$$d_I = d_{max} C_I \quad (4.14)$$

onde d_{max} é uma constante de proporcionalidade com valores entre $2 \leq d_{max} \leq 4$ e C_I é a distância nodal média entre os nós próximo ao nó de interesse. Por exemplo, se $d_{max} = 2.0$, isto indica um domínio de influência cujo raio é 2,0 vezes o valor médio das distancias entre os nós (COPPOLI, 2010).

A Figura 4-15 evidencia que para aplicação em LTs os valores da faixa de d_{max} sugeridos por (DOLBOW e BELYTSCHKO, 1998) podem ser utilizados a fim de se obter uma melhor aproximação da solução.



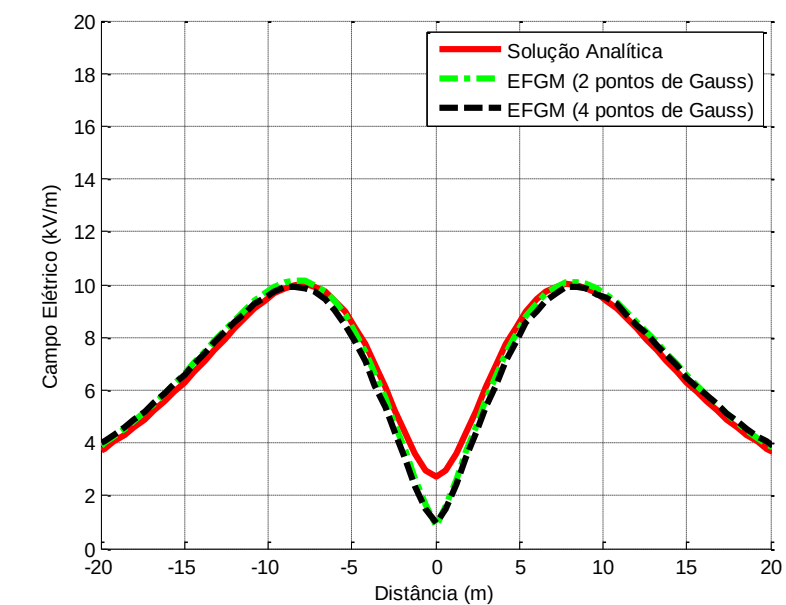
(a)



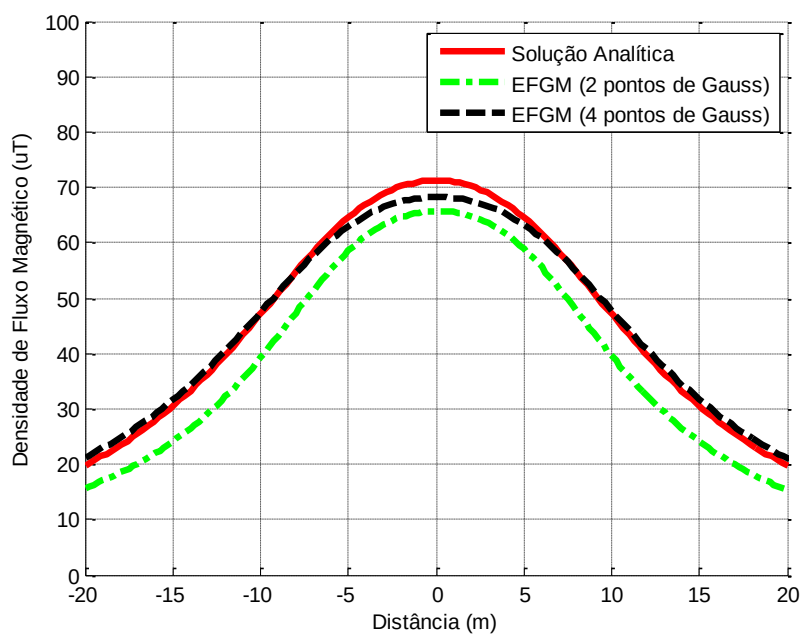
(b)

Figura 4-15 - (a) Análise da variação do tamanho do domínio de influência do campo elétrico (LT 500 kV Hydro-Québec). (b) Análise da variação do tamanho do domínio de influência do campo magnético (LT 500 kV Hydro-Québec).

Na Figura 4-16 pode ser verificado a aproximação da solução empregando 2 e 4 pontos de Gauss por célula na integração numérica. É verificado que ao se utilizar dois pontos de Gauss a precisão é satisfatória, sendo o custo computacional muito inferior, reduzido pela metade em comparação ao uso de quatro pontos de Gauss.



(a)



(b)

Figura 4-16 - (a) Análise da quantidade de pontos de integração gaussiana para o campo elétrico (LT 500 kV Hydro-Québec). (b) Análise da quantidade de pontos de integração gaussiana para o campo magnético (LT 500 kV Hydro-Québec).

Capítulo 5

Conclusão

A proposta apresentada teve como objetivo implementar um método sem malha aplicado a linhas de transmissão trifásicas reais. As grandezas analisadas referem-se aos campos magnéticos e elétricos nas proximidades da LT, operando em baixas frequências em regime permanente.

Por meio do *Element-Free Galerkin*, é aplicado uma forma fraca global, evitando-se com isso uma série de implicações encontradas em métodos que fazem uso de domínio local. O uso da forma fraca permite resolver problemas que seriam de difícil solução ou até mesmo impossíveis através da forma forte.

Deve ser destacado ainda que o uso do IMLS permite facilitar a imposição das condições de contorno essenciais no EFGM.

A aplicação da técnica sem malha em LTs é uma ferramenta promissora, pois não há a necessidade da geração de malhas como no Elementos Finitos, possibilitando assim uma maior flexibilidade para tratar problemas de geometrias complexas. Já em contra partida o *mesheless* possui uma complexidade envolvida na construção das funções de forma.

Os cálculos dos campos eletromagnéticos perante as proximidades da LT são de suma importância, uma vez que, este método permite avaliar se os campos eletromagnéticos estão de acordo com as normas e diretrizes nacionais.

Não são considerados os cabos para-raios devido a estes não afetarem significativamente os campos elétrico e magnético de LTs, como podem ser observados em pesquisas encontradas na literatura e indicadas no capítulo 2. A implementação dos cabos para-raios não acrescenta dificuldades no algoritmo EFGM, uma vez que seria necessário apenas inserir a posição dos cabos e colocar Dirichlet nulo, já que estão devidamente aterrados. Porém devido às dimensões destes cabos seria necessário uma discretização de nós muito mais elevada, aumentando consideravelmente o custo

computacional. Para tal implementação é indicada uma distribuição de células de integração de maneira não uniforme conforme indicado no item 5.2.

Apesar do surgimento do EFGM ser da década de 80, pode-se dizer que este método ainda se encontra em estágio inicial quando comparados a outros métodos já consolidados à mais tempo. Devido a este fato, os resultados encontrados não foram de fácil obtenção e muitas simulações foram necessárias até a validação do programa.

Por fim a metodologia retratada obteve resultados dentro de limites satisfatórios, através de uma forma simples e didática como vistos nos capítulos 3 e 4, porém, melhorias e aperfeiçoamentos são indicados nos próximos itens.

5.1. Principais Contribuições

Vale ressaltar as principais contribuições:

- 1 – Aplicação inédita do método EFGM, utilizando IMLS em LTs para o cômputo de campos eletromagnéticos.
- 2 – Estudos e ajustes de parâmetros e identificação dos melhores valores para esta aplicação.
- 3 – Emprego do truncamento na fronteira de Dirichlet, demonstrando que a partir de uma distância superior a 5 vezes a altura do condutor mais elevado é proporcionado soluções eficientes evitando o uso de domínios ainda maiores.
- 4 – Certificação da capacidade dos Métodos sem Malha para avaliação de campos eletromagnéticos gerados por LTs.

5.2. Propostas de Trabalhos Futuros

Os resultados apontados nesta pesquisa são os primeiros passos para o aprimoramento da técnica sem malha utilizando EFGM dedicado a LTs.

Portanto devido à própria natureza deste trabalho diversos aspectos relacionados ao EFGM poderiam ser estudos e/ou melhorados como os descritos a seguir:

- Distribuição de nós não uniforme através do pdetool do Matlab ou do software gmesh e adaptar ao método sem malha, com mais nós nas regiões de interesse, como nas

proximidades dos condutores e na região de avaliação do campo a 1 metro do nível do solo.

- Aplicar outras condições de contorno como por exemplo a transformação espacial de Kelvin, para conseguir fazer a estratificação do solo em camadas e demonstrar mais estudos referentes a interferências de dutos subterrâneos ou aéreos.
- Fazer o uso de funções de paralelização afim de diminuir o tempo de processamento e consequentemente um melhor desempenho.
- Comparar e testar o EFGM com outros métodos sem malha e implementar algoritmos de otimização em conjunto com o método.
- Estender esta metodologia para estudos em alta frequências.
- Desenvolver e adaptar para o cálculo de rádio interferência e ruído audível.
- Desenvolver os campos magnéticos e elétricos em 3D, ao longo de todo o percurso entre as torres.

5.3. Publicação/Apresentação em Eventos e Congressos

COPPOLI, E. H. R; ALIPIO, R; RIBEIRO, G. C; RESENDE, U. C; AFONSO, M. M. **The Element-Free Galerkin Method for Transmission Line Field Computation** In: IX European Conference on Numerical Methods in Eletromagnetics - NUMELEC 2017, Paris, France. 15-17 November 2017.

Apêndice A

Exposição a Campos Eletromagnéticos

Devido ao crescimento populacional, o número de pessoas que vivem próximos a LTs aumentou significativamente nos últimos anos. Diante deste fato surge o temor da população em relação aos possíveis efeitos dos campos eletromagnéticos de baixa frequência (ELF) a respeito da saúde. A fim de desenvolver e expandir o sistema de energia, as concessionárias estão dispostas a respeitar aos valores de limites de campos elétrico e magnético especificados pelas normas nacionais e internacionais. Inúmeras pesquisas vem ocorrendo nas últimas décadas com o propósito de analisar a relação entre os campos elétrico e magnético e possíveis efeitos que podem propiciar a saúde das pessoas expostas a tais campos e maneiras de reduzir ou limitar a intensidade destes campos. De forma mais específica, há uma maior preocupação em diminuir a intensidade dos campos magnéticos de baixa frequência, em razão destes campos possuir uma maior relação com alguns tipos de câncer, como a leucemia infantil (PINHO, 1994), (FELLOW, TURGEON e GOULET, 1995), (CARTENSEN, 1995), (HAVAS, 2004), (BECKER, 2008), (PELISSARI, 2009).

Segundo (BECKER, 2008) destaca-se as seguintes técnicas para redução de campos magnéticos: elevação da altura, compactação dos condutores, balanceamento das correntes de fase, otimização dos feixes de condutores, divisão dos condutores transmissão hexafásica e compensação ativa e passiva.

Em (SILVA, 2010) são apresentados os limites de exposição à campos elétrico e magnético estabelecidos por organizações internacionais, normas e recomendações brasileiras. Conforme a Associação Internacional de Proteção Contra Radiação (IRPA) é recomendado limites de exposição a campos elétrico e magnético (CEM) na faixa de 50 a 60 Hz descritos na Tabela A.1.

Tabela A.1 - Limites de exposição a campo elétrico e magnético estabelecidos pela IRPA.

Exposição Ocupacional		
Características de Exposição	Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μT)
Período de trabalho integral	10	500
Período curto	30 ⁽¹⁾	5000 ⁽²⁾
Partes do corpo	-	25000
Público Geral		
Características de Exposição	Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μT)
Até 24 horas/dia ⁽³⁾	5	100
Poucas horas/dia ⁽⁴⁾	10	1000

⁽¹⁾ – O intervalo de tempo máximo da exposição ao campo dentro de 10 a 30 kV pode ser calculada a partir da fórmula $t < 80/E$ em que:

t, é a duração em horas de trabalho;

E, é a intensidade do campo elétrico em kV/m;

⁽²⁾ – Maior período de tempo é de 2 horas por dia;

⁽³⁾ – Limite aplicado a intervalos de tempo, onde indivíduos passam parte do tempo durante o dia;

⁽⁴⁾ – Limites permitidos durante poucos minutos, desde que tomadas as medidas de segurança a induções indiretas.

Já a Comissão Internacional para Proteção Contra Radiações Não-Ionizantes (ICNIRP), estabelece os limites apresentados na Tabela A.2. Sendo estes limites aceitados pela Organização Mundial de Saúde (OMS).

Tabela A.2 - Limites de exposição a campo elétrico e magnético estabelecidos pela ICNIRP.

Características de Exposição - Limite para 60Hz	Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μT)
Exposição Ocupacional:	8,33	416,67
Público Geral	4,17	83,3

A ICNIRP investiga os perigos que as diferentes formas de radiações não ionizantes podem representar, e desenvolve diretrizes internacionais sobre a exposição a tais campos através de medidas de proteção.

A OMS em conjunto com a ICNIRP averiguam inúmeros estudos epidemiológicos a respeito de possíveis efeitos ao organismo humano, principalmente a relação entre câncer em pessoas adultas e leucemia em crianças ocasionados por campos elétrico e magnético, devido à proximidade de LTs das residências destes grupos em específico. De acordo com a OMS as demonstrações epidemiológicas nestas pesquisas não são conclusivas, uma vez que foram encontrados problemas metodológicos com por exemplo a seleção tendenciosa da amostra (SILVA, 2010). Portanto não há confirmações científicas relacionando a exposição a campos em baixa frequência com efeitos biológicos.

A resolução brasileira que refere-se aos limites à exposição humana a campos elétricos e magnéticos é a Resolução Normativa N°398, de 23 de maio de 2010, regulamenta a Lei nº 11.934. Esta Lei estabelece limites à exposição humana a campos elétricos, magnéticos e eletromagnéticos associados ao funcionamento de sistemas de energia, estações transmissoras de radiocomunicação e de terminais de usuário nas faixas de frequências até 300 GHz, visando garantir proteção da saúde e do meio ambiente. Essa resolução atribui à ANEEL a competência para regular os procedimentos a serem seguidos pelas concessionárias, permissionárias e autorizadas de serviço público de energia elétrica referente à medição e cômputo dos campos elétricos e magnéticos. Os níveis permitidos por esta legislação são apresentados na Tabela A.3 (ANEEL, 2010).

Tabela A.3 - Limites de exposição a campo elétrico e magnético estabelecidos pela RN 398.

Características de Exposição - Limite para 60Hz	Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μT)
Exposição Ocupacional:	8,33	1000,00
Público Geral	4,17	200,00

Apêndice B

Formulações Analíticas dos Campos Eletromagnéticos

Esta seção apresenta brevemente as equações analíticas do campo magnético e elétrico, partindo das equações de Maxwell e equações fundamentais utilizadas para plotar as curvas analíticas apresentadas no capítulo 4.

B-1 Equações de Maxwell

As quatro equações de Maxwell que fundamentam os problemas de eletromagnetismo são abordadas brevemente em sua forma diferencial e integral representadas na Tabela B.1, uma vez que as equações dos campos eletromagnéticos são demonstradas a partir de duas delas e das relações constitutivas indicadas na Tabela B.2 (BALANIS, 2012), (MACEDO, 1988).

Tabela B.1 - Equações de Maxwell.

Forma diferencial	Forma integral	Lei	Numeração
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_s (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s}$	Lei de Ampère	(B.1)
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_v \rho dV$	Lei de Gauss	(B.2)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	Lei de Faraday	(B.3)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	Lei de Gauss do Magnetismo	(B.4)

A Lei de Ampère (B.1) retrata as distribuições de campos magnéticos (**H**), através da densidade da corrente de condução simétrica (**J_c**) e da variação temporal da densidade de campo elétrico (**D**). A Lei de Gauss (B.2) é similar a Lei de Àmpere, estabelece que a densidade de campo elétrico (**D**) está relacionada com as cargas elétricas (ρ), ou seja, o fluxo total elétrico presente em uma superfície fechada é igual a carga total encerrada nesta superfície. Já Lei de Faraday (B.3) indica a distribuição espacial de campos elétricos (**E**), por meio das variações temporais da densidade de fluxo magnético (**B**). Finaliza-se com a Lei de Gauss do Magnetismo (B.4), certificando-se da preservação de (**B**), sugerindo que as linhas de campo magnético são sempre continuas (SADIKU, 2004).

Tabela B.2 - Equações Constitutivas.

Equações Constitutivas	Numeração
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	(B.5)
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	(B.6)
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	(B.7)

B-2 Campo Magnético Analítico

Através da Lei de Ampère apresentada em B.1, inicia-se a determinação do campo magnético tomando uma LT como infinita (PAUL, 2006):

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (\text{B.8})$$

Devido a simetria do campo magnético na direção ϕ ser constante ao longo de uma circunferência perpendicular à linha, a equação B. 8 facilmente resulta em:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{B.9})$$

Substituindo B.6 em B.9, obtém-se a densidade de fluxo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu \mathbf{I}}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{B.10})$$

Deve-se considerar nesta modelagem o método descrito por (DERI, TEVAN, *et al.*, 1981). A Figura B.1 representa esquematicamente este modelo, fazendo uso do método das imagens e de uma profundidade complexa (CDER) descrita em B.11.

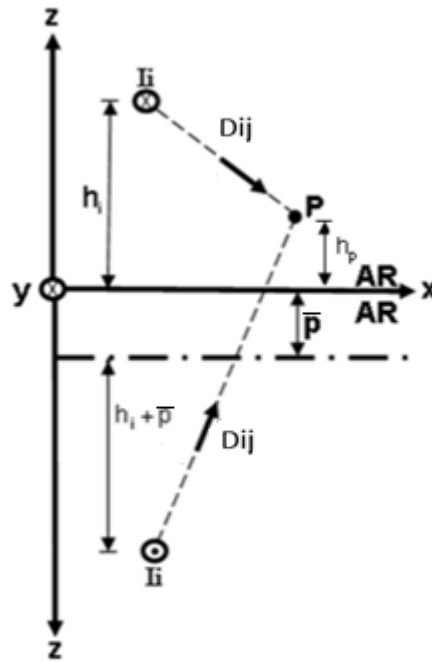


Figura B.1 - Sistema equivalente, utilizando método das imagens adaptado de (VIEIRA, 2013).

$$\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}}, \quad (\text{B.11})$$

sendo μ_0 a permeabilidade magnética do espaço livre igual $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, ω é a frequência angular igual a $2\pi f$ e σ representa a condutividade elétrica do solo.

O cômputo do campo magnético a 1 metro do solo pode ser descrito como nas Figuras B.1 e B.2. Onde $\rho=D$, e D_{ij} indicam as distâncias entre os condutores e D'_{ij} as distâncias entre os condutores e a imagem conforme:

$$D_{ij} = D_{ji} = D'_{ij} = D'_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (B.12)$$

Assim, a fórmula simplificada para o cômputo das componentes fasoriais da densidade de fluxo magnético em função da corrente é dada por (SANTOS, 2017):

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \frac{I\mu_0}{2\pi} \left(\frac{-(y - y_i)\mathbf{a}_x + (x - x_i)\mathbf{a}_y}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + \frac{(y + (2\bar{p} + y_i))\mathbf{a}_x + (x + x_i)\mathbf{a}_y}{(x - x_i)^2 + (y + (2\bar{p} + y_i))^2} \right), \quad (B.13)$$

onde n é número total de condutores da LT em questão.

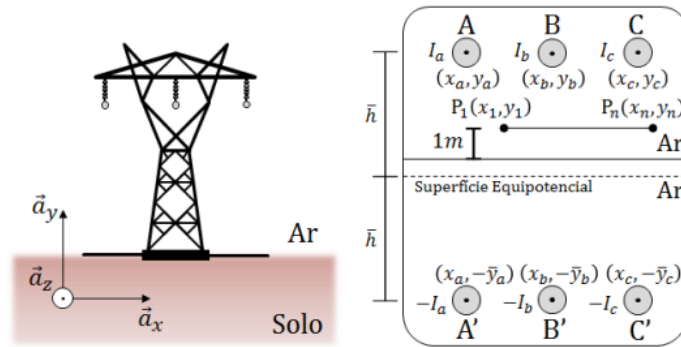


Figura B.2–Sistema equivalente para cálculo do campo elétrico a 1 m do solo. (SANTOS, 2017).

A equação final possui natureza complexa, portanto para escrever a densidade de fluxo do campo magnético de forma escalar deve ser retirado o módulo da equação B.13, de maneira que a densidade de campo magnético eficaz seja descrita por:

$$B_{rms} = \sqrt{(B_{xreal})^2 + (B_{ximag})^2 + (B_{yreal})^2 + (B_{yimag})^2}. \quad (B.14)$$

A modelagem da corrente I, é encontrada detalhadamente em, (JUNIOR, 1995), (VIEIRA, 2013), (SANTOS, 2017), (FILHO, 1993).

B-3 Campo Elétrico Analítico

A partir da Lei de Gauss dada por (B.2) e de acordo com (PAUL, 2006), o equacionamento do campo elétrico para uma linha infinita é iniciado por:

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_V \rho dV, \quad (\text{B.15})$$

$d\mathbf{s}$ é vetor diferencial de superfície igual à $\rho d\phi dz \cdot \mathbf{a}_\rho$

ρ é a densidade linear de carga elétrica;

L o comprimento da linha.

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \mathbf{D} \cdot \rho d\phi dz = q_{env}. \quad (\text{B.16})$$

Resolvendo as integrais obtém-se:

$$\mathbf{D} \rho 2\pi L = q_{env}. \quad (\text{B.17})$$

Substituindo B.5 em B.17 e desconsiderando L , pois nas extremidades do cilindro o campo é paralelo a esta superfície é infinita, portanto o comprimento não contribui, resultando em:

$$\mathbf{E} = \frac{q_{env}}{\rho 2\pi \epsilon_0} \mathbf{a}_\rho. \quad (\text{B.18})$$

Para determinar o valor da densidade linear de carga nos condutores, de acordo com (FUCHS, 1977) pode ser expresso por:

$$[q_i] = [P]^{-1} \cdot [V_i], \quad (\text{B.19})$$

onde $[q_i]$ é o vetor da densidade carga, $[P]$ é uma matriz quadrada simétrica das capacitâncias parciais proveniente do inverso da matriz de coeficientes de Maxwell e V_i são os potenciais.

Os elementos da matriz $[P]$, são representados por seus respectivos potenciais próprios e mútuos (FUCHS, 1977) como:

$$p_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2y_j}{r_i}, \quad (B.20)$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{ij}}{D'_{ij}}. \quad (B.21)$$

Na Figura B.3, onde $\rho = D$, e D_{ij} indicam as distâncias entre os condutores e D'_{ij} são as distâncias entre os condutores e a imagem conforme:

$$D_{ij} = D_{ji} = D'_{ij} = D'_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (B.22)$$

e r é o raio do i -ésimo condutor.

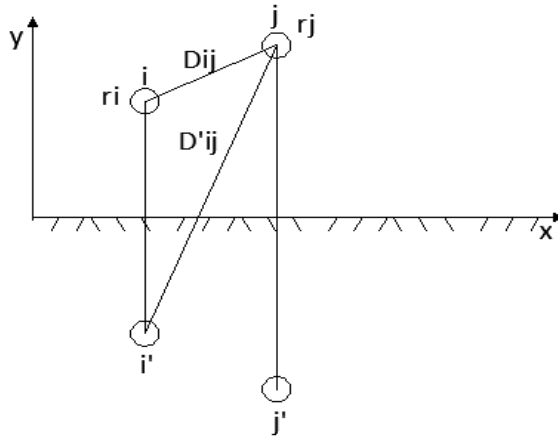


Figura B.3 –Sistema equivalente para cálculo dos coeficientes de potencial adaptado de (SILVA, 2010).

Considerando a Figura B.3 e de posse do valor da densidade de carga (B.19), a expressão simplificada para cômputo do campo elétrico fasorial resulta em:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_{env}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x - x_i)\mathbf{a}_x + (y - y_i)\mathbf{a}_y}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \frac{(x - x_i)\mathbf{a}_x + (y + y_i)\mathbf{a}_y}{(x - x_i)^2 + (y + y_i)^2} \right), \quad (B.23)$$

n é número total de condutores da LT em questão.

Analogamente ao campo magnético, deve ser retirado o módulo da equação B.23, portanto:

$$E_{rms} = \sqrt{(E_{xreal})^2 + (E_{ximag})^2 + (E_{yreal})^2 + (E_{yimag})^2}. \quad (B.24)$$

Apêndice C

Exemplo Clássico de um Capacitor Eletrostático

Para ilustrar a aplicação do EFGM é exemplificado um modelo de um capacitor eletrostático de dois materiais como representado na Figura C.1 em 2D, e comparado com a solução analítica dada por (5.1).

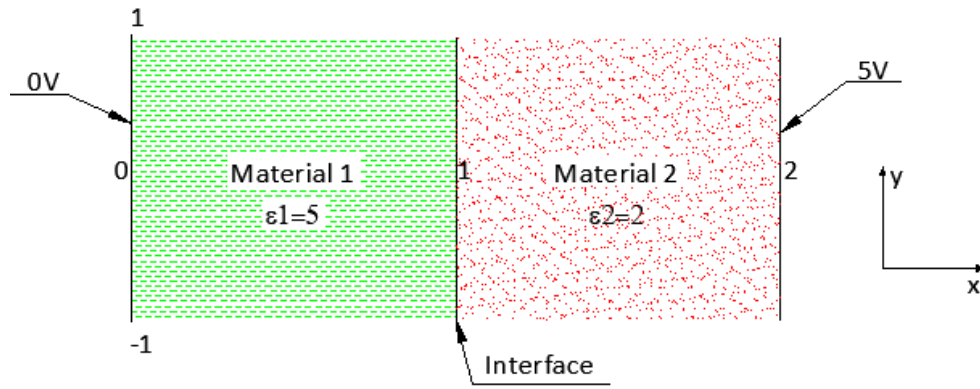


Figura C.1– Capacitor de placas planas com materiais distintos

$$\epsilon_1 E_1 d_1 + \epsilon_2 E_2 d_2 = V, \quad (5.1)$$

ϵ_1 e ϵ_2 indicam a permissividade dos respectivos materiais 1 e 2, E_1 e E_2 representam o módulo do campo elétrico nos distintos meios, já o termo V é a diferença de potencial (d.d.p) entre as placas paralelas do capacitor.

O modelo do capacitor de placas planas em estudo indicado na Figura C-1, possui para o meio um valor de $\epsilon_1=5$ e para o meio dois $\epsilon_2=2$. Portanto o problema é modelado inicialmente pela equação de Laplace indicada por (5.2):

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.2)$$

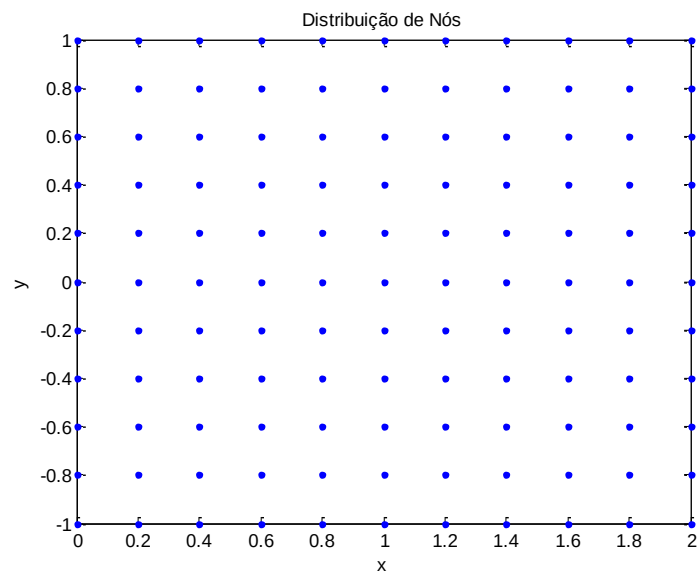
juntamente com as condições de contorno (cm): $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$,

aplicando em $x=0 \rightarrow V(x,y)=0V$ e em $x=2 \rightarrow V(x,y)=5V$

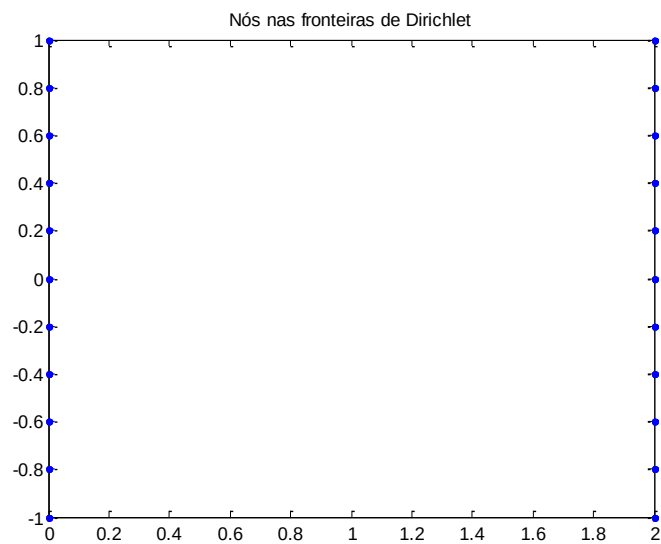
e pela condição de interface:

$$\left\| \varepsilon \left(\frac{\partial V(x,y)}{\partial n} \right) \right\| = 0. \quad (5.3)$$

As Figura C.2 apresenta a distribuição dos nós espalhados pelo capacitor, já a Figura C-3 demonstra os potenciais ao longo do capacitor, utilizando a função peso do IMLS, com $\varepsilon=0,1$.



(a)



(b)

Figura C -2 - (a) Distribuição de nós ao longo do capacitor. (b) Nós da fronteira de Dirichlet onde são inseridos os valores de tensão.

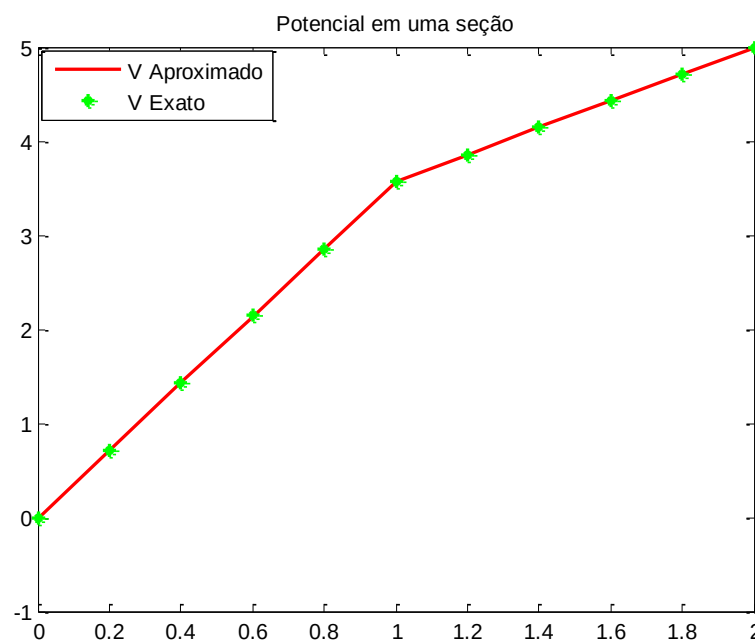
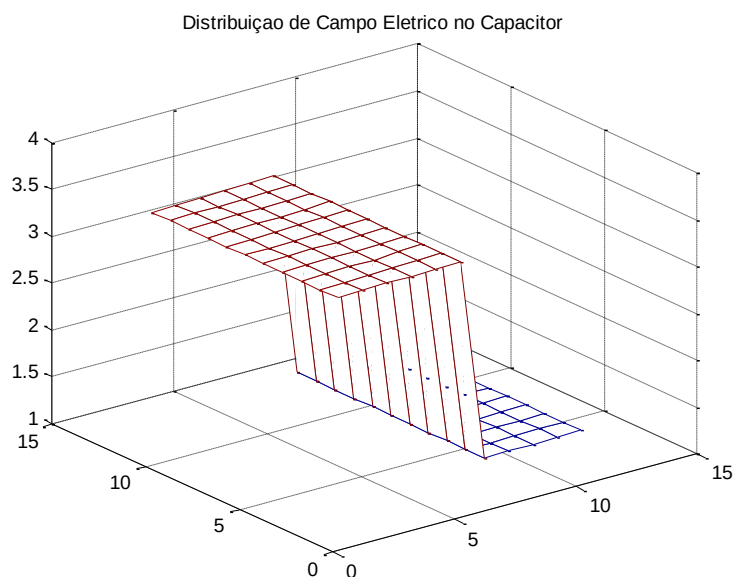
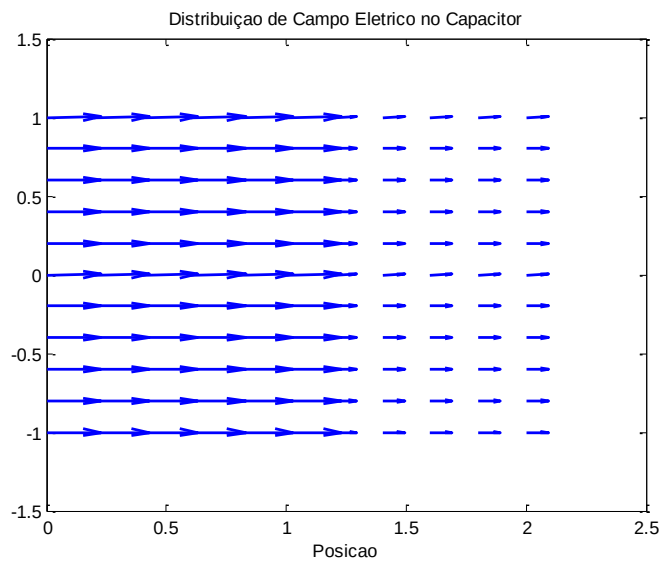


Figura C-3 - Potencial elétrico do Capacitor utilizando IMLS.

Na Figura C-4 é indicado a distribuição do campo elétrico e os vetores de campo elétrico partindo do meio com valor de permissividade mais elevado para o meio de permissividade mais baixo.



(a)



(b)

Figura C-4 –(a) Distribuição do campo elétrico. (b) Intensidade de campo elétrico.

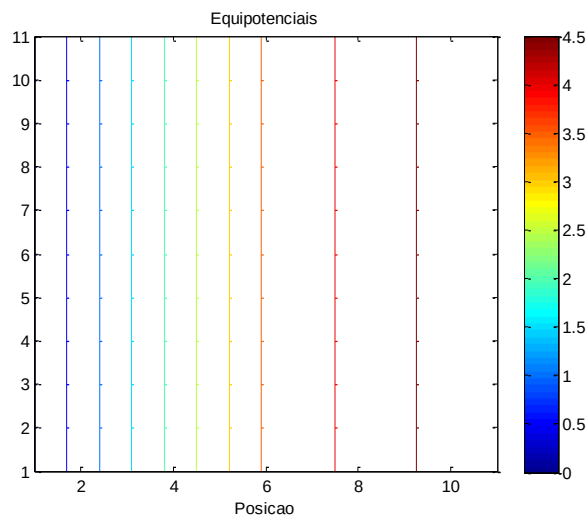


Figura C-5 - Linhas equipotenciais.

As figuras apresentadas verificam a validade da solução perante o modelo analítico, onde foi utilizado o critério da visibilidade, uma vez que o problema eletrostático envolve interfaces entre meios materiais distintos.

Finaliza-se o exemplo com uma comparação entre as soluções empregando a função peso Spline pelo MLS indicada na Figura C.6 e a função peso utilizando IMLS representado na Figura C-3. Vale destacar que a solução empregando IMLS é interpolante enquanto com o MLS é aproximante (COPPOLI, 2010).

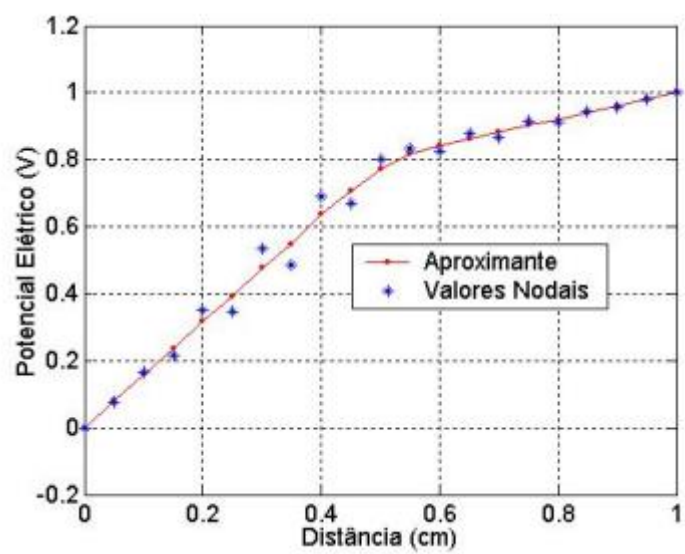


Figura C-6 –Potencial elétrico ao longo de um capacitor com dois materiais distintos utilizando a função peso Spline do MLS (COPPOLI, 2010).

Referências Bibliográficas

ADAMS, G. E. **Voltage Gradients on High-Voltage Transmission Lines**. [S.l.]: IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. 74, 1955. 5-11 p.

AL-GAHTANI, B. J. **Eletromagnetic Interference Caused by a High Voltage Transmission Network on Buried Pipelines & Communication Cables**. Dhahran,: Arabia Saudita: King Fahd University of Petroleum & Minerals.Master., 2009.

ANEEL. Resolução Normativa Nº 398, Março 2010.

ATLURI, S. N.; ZHU, T. **A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics**. [S.l.]: Computational Mechanics 22 (1998) 117–127. Springer-Verlag, v. 22, 1998. 117-127 p.

BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Eletromagnetics**. Second. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2012.

BECKER, W. D. **Estudo de Técnicas para a Redução de Campos Gerados por Linhas de Transmissão de Potência**. Florianópolis: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Dissertação., 2008.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. **Element-Free Galerkin Methods**. Evanston: International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, 229-256, John Wiley & Sons, Ltd. Technological Institute, Northwestern University, Evanston,USA., 1994.

BENKHAOUA, L.; BENHABILES, M. T.; RIABI, M. L. **Nonuniform Transmission Lines Analysis by Meshless Point Interpolation Methods**. Algeria: International Journal of Numerical Modelling Eletronic Networks, Devices and Field. 2016; 29:726–740, 2015.

BERNARD, P. S. **A Deterministic Vortex Sheet Method for Boundary Layer Flow**. Maryland: University of Maryland, College Park. 1995. p. 132-145.

BETTESS, P. **Finite Element Modelling of Exterior Electromagnetic Problems**. Newcastle: IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. I, January 1988, 1988.

CARTENSEN, E. L. **Magnetic Fields and Cancer**. [S.l.]: IEEE Engineering in Medicine and Biology, 1995.

CASACA, J. F. G. **Cálculo do Campo Electromagnético Originado por Linhas Áreas de Transmissão de Energia**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. (Dissertação), 2007.

CHEN, Q.; KONRAD, A. **A Review of Finite Element Open Boundary Techniques for Static and Quasi-Static Electromagnetic Field Problems**. [S.l.]: IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No. 1, January, 1997.

CHORIN, A. J. **Numerical Study of Slightly Viscous Flow**. J. of Fluid Mechanics. Great Britain : University of California, Berkeley. 1973. p. 785-796.

COPPOLI, E. H. D. R. **Modelagem de Dispositivos Eletromagnéticos Através de Métodos sem Malha**. Petrópolis: Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), 2010.

COPPOLI, E. H. et al. **The Element-Free Galerkin Method for Transmission Line Field Computation**. Paris: IX European Conference on Numerical Methods in Eletromagnetics - NUMELEC 2017, 2017.

CORDES, L. W.; MORAN, B. **Treatment of Material Discontinuity in the Element Free Galerkin Method**. Evanston, : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139(1):75-89, 1996., 1996.

COSTA, E. C. M. D. **Um Modelo para Condutores Múltiplos Considerando a Distribuição da Corrente nos Subcondutores**. Ilha Solteira: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP. Dissertação., 2009.

DART, F. C. et al. **Projeto de Linhas de Transmissão não Convencionais - Uma Alternativa a Ser Considerada no Planejamento da Expansão do Sistema Elétrico Brasileiro**. Curitiba: XVII SNPTEE. 2005, pp. 1-8, 2005.

DAWALIBI, F. P.; SOUTHEY, R. D. **Analysis of Electrical Interference From Power Lines to Gas Pipelines Part II - Parametric Analysis**. Long Beach: IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 5, No. 1, January, 1990.

DEBLECKER, O.; JACQUES, L.; BROCHE, C. **Novel Algorithm Based on Transmission-Line Modeling in the Finite-Element Method for Nonlinear Quasi-Static Field Analysis**. [S.l.]: IEEE Transactions on Magnetics, VOL. 39, NO. 1, January, 2003.

DENO, D. W. **Transmission Line Fields**. New York: IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-95, no. 5, September/October, 1976.

DENO, D. W.; ZAFFANELLA, L. E. **Transmission Line Reference Book 345 kV and Above - Field Effects of Overhead Transmission Lines and Stations**. Schenectady: Electric Power Research Institute. Second Edition., 1982.

DERI, A. et al. **The Complex Ground Return Plane a Simplified For Homogeneous and Multi-Layer Earth Return**. Atlanta: IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 8, August, 1981.

DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. **An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method**. Evaston: Vol.5, 3, 207-241. Archives of Computational Methods in Engineering, 1998.

EMSON, C. R. I. **Methods for the Solution of Open-Boundary Electromagnetic-Field Problems**. Oxfordshire: IEEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 3, March 1988, 1988.

FARAH, A. A. M. **Cálculos de Campos Elétricos e Magnéticos em Linhas de Transmissão pelo Método dos Elementos Finitos**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2014.

FARAH, A. A. M. **Cálculos de Campos Elétricos e Magnéticos em Linhas de Transmissão pelo Método dos Elementos Finitos**. Belo Horizonte: Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2014.

FELLOW, P. S. M.; TURGEON, A.; GOULET, D. L. **Study of Popuation Exposure to Magnetic Fields Due to Secondy Utilization of Transmission Line Corridors**. [S.l.]: IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 10. No. 3, July , 1995.

FILHO, A. L. S. **Avaliação de Ruído de Rádio Interferência Proveninte de Linhas de Transmissão de 500 kV**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). DISSERTAÇÃO, 2011.

FILHO, F. F. C. **Algoritmos Numéricos**. Belo Horizonte: LTC, 2007.

FILHO, J. C. S. **Otimização da Geometria dos Feixes de Condutores de Linhas de Transmissão**. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Tese., 1993.

FRASER, R. A.; JONES, W. P.; S.W, S. **Approximations to functions and to the solutions of Differential Equations**. London: Great Britain, Rep. e Memo, 1934. ISBN 1799.

FUCHS, R. D. **Transmissão de Energia Elétrica Linhas Aéreas**. Rio de Janeiro: LTC/EFEI, v. I, 1977. 10 p.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. **Smooth particle hydrodynamics: theory and applications to non spherical stars**. Melbourne: Institute of Astronomy, Cambridge. Royal Astronomical Society. Mon. Not. R. Astr. Soc. 181, 1977. 375-379 p.

GIRAULT, V. **Theory of a GDM on irregular networks**. [S.l.]: SIAM J. Numer. Anal. 11, 1974, 260-262, 1974. 260-262 p.

GU, Y. T.; LIU, G. R. **A boundary point interpolation method (BPIM) using radial function basis**. [S.l.]: MIT, 2001. 1590-1592 p.

GU, Y. T.; LIU, G. R. **A boundary point interpolation method for stress analysis of solids**. [S.l.]: Computational Mechanics, 47-54, Springer Verlag, Vol. 28, 2002. 47-54 p.

GU, Y. T.; LIU, G. R. **A boundary radial point interpolation method (BRPIM) for 2-D structural analyses**. [S.l.]: [s.n.], v. 15(5), 2003. 535-550 p.

GUIMARÃES, G. E. **Medições e Cálculos de Campos Elétricos e Magnéticos de uma Linha de Transmissão de 500 kV**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, 2005.

HART, F. X.; ANDREW, A. M. **Energy Flux Along High Voltage Transmission Line**. [S.l.]: IEEE Transactions on Biomedical Engineering, v. BME-24, No 5, 1977. 493-495 p.

HAVAS, M. **Biological Effects of Low Frequency Electromagnetic Fields**. [S.l.]: Electromagnetic Environments and Health in Buildings. Spon Press, London, 535 pp., 2004.

HUNT, J. R. **Computer Aided Analysis of Transmission Line Electric Field Strength**. Columbus. [S.l.]: The Ohio State University. Master., 1976.

ICNIRP. **International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection: Guidelines for Limiting Exposure to Time-Varying Electric, Magnetic and Electromagnetic fields**. [S.l.]: 494-522, vol. 74, April, 1998. 494-522, vol. 74, April p.

IEC.61786. **Measurement of Low-Frequency magnetic and electric fields with regard to exposure of human beings - Special requirements for instruments and guidance for measurement**. [S.l.]: [s.n.], 1998.

IEEE.STD.644-1994. IEEE Standard Procedures for Measurement of Power Frequency Electric and Magnetic Fields From AC Power Lines. **IEEE Standard Boards**, December 1994.

ISMAIL, H. **Shielding Design Methods for Kuwait High Voltage Double Circuits Electrical Networks**. Budapest: International Conference on Electric Power Engineering, 1999.

ISMAIL, H. **Effect of Oil Pipelines Existing in an HVTL Corridor on the Electric Field Distribution**. [S.l.]: IEEE Transaction on Power Delivery, v. 22, n. 4, p. 2466-2472. October, 2007.

IYYUNI, G. B.; SEBO, S. A. **Study of Transmission Line Magnetic Fields**. Ohio: IEEE. The Ohio State University. Columbus., 1990.

JAISWAL, V.; THOMAS, M. J. **Finite Element Modelling of Ionized Field Quantities Around a Monopolar HVDC transmission line**. Bangalore: J. Phys. D: Appl. Phys. 36 (2003) 3089–3094, 2003.

JEONG, J.; NEVELS, R. **Time-Domain Analysis of a Lossy Nonuniform Transmission Line**. [S.l.]: IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol 56, NO.2, February 2009, 2009.

JIN, J. **The Finite Element Method in Eletromagnetics**. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, Inc., 2002.

JUNIOR, S. G. **Otimização de Linhas Aéreas de Transmissão Considerando Novas Concepções Contrutivas para os Feixes de Condutores**. Rio de Janeiro: Programas de Pós-Graduação de Engenharias da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Tese, 1995.

JURIC-GRGIC, I.; BERNADIC, A.; LUCIC, R. **Time-Domain Finite Element Method Analysis of Frequency-Dependent Transmission Lines**. [S.l.]: IEEE Trasactions on Electromagnetic Compatibility, Vol. 58, No. 1, February, 2016.

JURIC-GRGIC, I.; LUCIC, R.; BERNADIC, A. **Transient Analysis of Coupled Non-Uniform Transmission Line Using Finite Element Method**. [S.l.]: International Journal of Circuit Theory and Applications; 43:1167–1174, 2015.

JURIC-GRGIC, I.; LUCIC, R.; DABRO, M. **A Coupled Nonuniform Transmission Line Analysis Using FEM**. [S.l.]: International Transactions on Electrical Energy Systems; 23:1365–1372, 2013.

KIM, Y. S. **Analysis of Magnetic Field for Power Transmission Line With Multiple AC Singular Currents by Coupling of Fourier Series Expansion and FEM**. [S.l.]: IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 49, No. 5, May , 2013.

KROK, J.; ORKISZ, J. **A Unified approach to the FE Generalized Variational FD Method for Nonlinear Mechanics**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989. 353-362 p.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. **Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods**. [S.l.]: Mathematics of Computation, Vol. 37, No. 155 (Jul., 1981), pp. 141-158, 1981.

LANCZOS, C. **Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions**. [S.l.]: J. Math. Phys. 17, 123-199, 1938.

LEÃO, R. M. **Rádio Interferência Provenientes de Linhas de Alta Tensão**. Porto Alegre: ediPUCRS., 2008.

LIMA, N. Z. **Métodos sem Malha Aplicados ao Eletromagnetismo: Formas Fracas Enfraquecidas e Funções de Forma Vetoriais**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Tese, 2016.

LISZKA, T.; ORKISZ, J. **Finite difference methods of arbitrary irregular meshes in non-linear problems of applied mechanics**. [S.l.]: Technical University of Cracow, Cracow, Poland. 1977.

LIU, G. R. **Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method**. 2^o Edition. ed. [S.l.]: CRC Press LLC, 2003.

LIU, G. R.; GU, Y. T. **A local radial point interpolation method (LR-PIM) for free vibration analyses of 2-D solids**. [S.l.]: Vol. 246, 29-46, 2001. 29-46 p.

LIU, G. R.; GU, Y. T. **A truly meshless method based on the strong-weak form**. Singapore: Proceeding of the 1st Asian Workshop in Meshfree Methods (Ed. Liu GR), 259-261, 2002. 259-261 p.

LIU, G. R.; GU, Y. T. **An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming**. [S.l.]: Springer, 2005.

LIU, W. K.; JUN, S.; F, Z. Y. **Reproducing kernel particle methods**. International Journal for Numerical Methods in Fluids. [S.l.]: Northwestern University, Evanston, USA. 1995. p. 1081-1106.

LOURO, R. B. B. **Método sem Malhas EFG Aplicado a um Espalhamento Eletromagnético por um Cilindro Dielétrico Infinito**. Belo Horizonte: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET/MG). Trabalho de Conclusão Curso, 2014.

LU, T. et al. **Analysis of the Electric Field and Ion Current Density Under Ultra High-Voltage Direct-Current Transmission Lines Based on Finite Element Method.** Hebei: IEEE Transactions on Mangetic, Vol. 43, No. 4, April, 2007.

LU, Y. Y.; BELYSTCHKO, T.; GU, L. **A New Implementation of the Element Free Galerkin Method.** [S.l.]: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 113 (1994) 397-414, 1994.

LÚCIO, S. M. M. **Parâmetros Longitudinais de Linhas de Transmissão - Análise dos Efeitos do Solo e da Frequência para Aplicações em Estudos de Transitórios Eletromagnéticos.** São João Del-Rei: Programa de Pós-Graduação em Engenharia. Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ). Dissertação, 2012.

MACEDO, A. **Eletromagnetismo.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.

MACHADO, V. G. et al. **LT 500kV Interligação Norte/Sul III - Trecho 2 Solução Estrutural com Torre Estaiada Monomastro e Feixe Expandido.** Rio de Janeiro: SNPTEE Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, 2007.

MARINHO, M. R. **Uma Contribuição ao Estudo do Ajuste Ótimo de Parâmetros para Cálculo de Campos Eletromagnéticos Descontínuos com o Método EFG.** São José do Rio Preto: Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Dissertação, 2012.

MESQUITA, R. C. **Soluções de Problemas do Eletromagnetismo Utilizando Métodos sem Malha.** [S.l.]: Departamento de Engenharia Elétrica – UFMG, 2010.

MONAGHAN, J. J. **Smoothed particle hydrodynamics.** [S.l.]: Monash University, Australia. 1992. p. 543-574.

MONAGHAN, J. J.; LATTANZIO, J. C. **A Refined Particle Method for Astrophysical Problems.** [S.l.]: 135-143, vol. 149, 1985. 135-143 p.

MUKHERJEE, Y. X. **Boundary Node Method for Potential Problems.** [S.l.]: Vol. 40, 797-815, 1997. 797-815 p.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; P, V. **Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements.** [S.l.]: Springer-Verlag, 307-318, vol. 10, 1992. 307-318 p.

NBR25415, A. **Métodos de medição e Níveis de Referência para Exposição de Campos Elétricos e Magnéticos na Frequência 50Hz e 60Hz.** [S.l.]: Norma Brasileira, Julho, 1ed., 2016.

NETO, M. T. D. M. **Rearranjo Otimizado dos Feixes de Condutores de Linhas de Transmissão com o Foco Centrado na Minimização de Impactos Eletromagnéticos.**

Recife: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco. Dissertação, 2007.

OLIVEIRA, L. V. F. D. **Otimização Metaheurística de Linhas de Transmissão pela Avaliação do Vetor de Poynting Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. Juiz de Fora : Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFSJ). Dissertação, 2011.

OLIVEIRA, M. L. D. F. **Estudo de Aterramento em Baixa Frequências Utilizando o Método sem Malha**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET-MG), 2016.

OLSEN, R. G.; WONG, P. S. **Characteristics of Low Frequency Electric and Magnetic Fields in the Vicinity of Electric Power Lines**. [S.l.]: IEEE Transactions on Power Delivery, v. VII, 4, 1992. 2046-2055 p.

PAGANOTTI, A. L. **Calculo e Minimização de Campo Elétrico de Linhas de Transmissão**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Dissertação, 2012.

PAO-LA-OR, P.; ISARAMONGKOLRAK, A.; KULWORAWANICHPONG, T. **Finite Element Analysis of Magnetic Field Distribution for 500-kV Power Transmission Systems**. [S.l.]: Engineering Letters, 18:1, EL_18_1_01, 2010.

PARREIRA, G. F. et al. **The Element-Free Galerkin Method in Three-Dimensional Electromagnetic Problems**. [S.l.]: IEEE Transactions on Magnetics, COMPUMAG, vol.42, Nº4, April, 2006.

PAUL, C. R. **Eletromagnetismo para Engenheiros com Aplicações**. [S.l.]: LTC, 2006. 255 p.

PAVLIN, V.; PERRONE, N. **Finite difference energy techniques for arbitrary meshes applied to linear plate problems**. Maryland, USA: University of Maryland,. 1975. p. 647-664.

PELISSARI, D. M. **Campos Eletromagnéticos e Leucemia Linfocítica aguda em crianças residentes na Região Metropolitana de São Paulo**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Saúde Pública da Universidade de São Paulo (USP). Dissertação, 2009.

PEREIRA, C. **REDES ELÉTRICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**. Belo Horizonte: Clever Pereira/UFGM, 2012. 1-5,408 p.

PINHO, A. C. **O Cálculo do Campo Elétrico em 2D Gerado por Linhas de Transmissão e o Efeito em Seres Vivos**. Florianópolis, Setembro: Programa de Pós-

Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Dissertação, 1994.

PIRES, L. F. D. A. **Gestão Ambiental da Implantação de Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica - Estudo de Caso: Interligação Norte/Sul I.** Niterói: Programa de Pós-Graduação em Ciência Ambiental. Universidade Federal Fluminense (UFF). Dissertação, 2005.

REZENDE, U. C.; COPOLLI, E. H. D. R.; AFONSO, M. M. **A Meshless Approach Using EFG Interpolating Moving Least-Squares Method in 2-D Electromagnetic Scattering Analysis.** [S.l.]: IEEE Transactions on Magnetics, v. 51, 2015. 1-4 p.

ROSA, C. K. **Desenvolvimento do Método Híbrido IEFGM-MOM Aplicado à Solução do Espalhamento Eletromagnético em Duas Dimensões.** Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET-MG). Dissertação, 2015.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de Eletromagnetismo.** 3ª. ed. [S.l.]: Bookman, 2004.

SANTOS, P. H. D. C. **Recapacitação Não Convencional de Linhas Aéreas de Transmissão.** Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET/MG). Dissertação, 2017.

SCHROEDER, M. A. D. O. **Modelo Eletromagnético para Descontaminação de Ondas de Corrente de Descargas Atmosféricas:** Aplicação às Medições da Estação do Morro de Cachimbo. [S.l.]: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Tese, 2001.

SEBESTYÉN, I. **Electric-Field Calculation for HV Insulators Using Domain-Decomposition Method.** [S.l.]: IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, March, 2002.

SILVA, R. M. **Método Numérico-Analítico Generalizado para Estimação do Campo Eletromagnético de Linhas de Transmissão de Energia Elétrica Utilizando a Teoria dos Elementos Finitos.** Ilha Solteira: Universidade Estadual Paulista (UNESP), Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Tese, 2010.

SLATER, J. C. **Electronic Energy Bands in Metals.** [S.l.]: Massachusetts Institute of Technology. 05 Abril 1934. p. 794-801.

SNELL, C.; VESEY, D. G. E. M. P. **The application of a general FFDM to some boundary value problems.** [S.l.]: [s.n.], v. 13, 1981. 547-552 p.

SOARES, V. S.; AFONSO, M. M.; PAGANOTTI, A. L. **Cálculo do Campo Magnético Originado por Linhas Aéreas de Transmissão de Energia**. Juiz de Fora: SIMMEC/EMMCOMP 2014. XI Simpósio de Mecânica Computacional. II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional, 2014.

STEVENSON, W. D. J. **Elementos de Análise de Sistemas de Potência**. São Paulo: MCGRAW-HILL, 1986. 9-10 p.

TAKUMA, T.; KAWAMOTO, T.; FUJINAMI, H. **Charge Simulation with Complex Fictitious Charges for Calculation Capacitive-Resistive Fields**. Japan: IEEE Transactions on Power Apparatus and System, v. PAS-100, 1981. 4665-4672 p. ISBN 11.

TANG, M.; MAO, J. **A Precise Time-Step Integration Method for Transient Analysis of Lossy Nonuniform Transmission Lines**. [S.l.]: IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol 50, NO 1. February 2008, 2008.

VIANA, S. A. **Estudo dos métodos sem malha na resolução de problemas eletromagnéticos**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 149. 1998.

VIANA, S. A. **Estudo dos Métodos sem Malha na Resolução de Problemas Eletromagnéticos**. Belo Horizonte: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Dissertação, 1998.

VIANA, S. A.; MESQUITA, R. C. **Método de Galerkin Sem Malha aplicado ao Cálculo de Campos Eletromagnéticos**. Belo Horizonte: Departamento de Eng. Elétrica, UFMG., 1998.

VIEIRA, H. R. **Acoplamento Magnético Entre Linhas de Transmissão Operando em Regime Permanente e Dutos Metálicos Aéreos**. São João Del-Rei: Programa de Pós-Graduação. Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ). Dissertação, 2013.

WANG, J. G.; LIU, G. R. **Radial point interpolation method for elastoplastic problems**. [S.l.]: Proc. of the 1st Int. Conf. On Structural Stability and Dynamics. 2000. p. 703-708.

WATANABE, K.; SEKINE, T.; TAKAHASHI, Y. **A FDTD method for Nonuniform Transmission Line Analysis Using Yee's-lattice and Wavelet Expansion**. [S.l.]: IEEE MTT-S International Microwave Workshop Series on Signal Integrity and High-Speed Interconnects, 2009.

YU, Y.; CHEN, Z. D. **Modeling, A 3-D Radial Point Interpolation Method for Meshless Time-Domain**. [S.l.]: IEEE Transactions on Microwave Theory and Techiques, Vol.57, NO 8. August, 2009.

ZHANG, B.; WANG, W.; HE, J. **Theoretical Study on Radio Interference of HVDC Transmission Line Based on Cage Tests.** [S.l.]: IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 32, No. 4, August, 2017.