

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
ASSOCIAÇÃO AMPLA ENTRE CEFET-MG E UFSJ

Carla de Souza

ROBUSTEZ NA ESTABILIDADE ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS DISCRETOS NO
TEMPO COM ATRASO NOS ESTADOS E SATURAÇÃO DE ATUADORES

Divinópolis
2017

Carla de Souza

ROBUSTEZ NA ESTABILIDADE ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS DISCRETOS NO
TEMPO COM ATRASO NOS ESTADOS E SATURAÇÃO DE ATUADORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza
Leite

Divinópolis
2017

S719r Souza, Carla de.

Robustez na estabilidade entrada-estado de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores. Carla de Souza. – Divinópolis, 2017.

108f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Modelagem. 2. Sistemas de controle. 3. Sistemas incertos. 4. Estabilidade robusta local. 5. Desigualdades matriciais lineares. 6. Estabilidade entrada-estado. 7. Saturação de atuadores. 8. Ação anti-windup. I. Leite, Valter Junior de Souza. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de São João del-Rei. IV. Título.

CDU: 681.511.4

(Catalogação - Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

Carla de Souza

ROBUSTEZ NA ESTABILIDADE ENTRADA-ESTADO DE SISTEMAS DISCRETOS NO
TEMPO COM ATRASO NOS ESTADOS E SATURAÇÃO DE ATUADORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Comissão Avaliadora:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG *Campus V* - PPGEL CEFET-MG/UFSJ

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
Universidade Federal de São João Del-Rei -
PPGEL CEFET-MG/UFSJ

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva
CEFET-MG *Campus V*

Divinópolis
2017

Agradecimentos

Agradeço,

A Deus, por ter me dado saúde e coragem para alcançar os meus objetivos.

Aos meus pais, pelo amor, apoio, incentivo e investimento. Saibam que todas as minhas conquistas são dedicadas a vocês.

Aos meus irmãos Cláudia, Mônica e Luiz Fernando e meu cunhado Rafael, pelo companheirismo, parceria, união e amizade.

Ao meu orientador, pela instrução, confiança, paciência, incentivo e, principalmente, pela amizade.

Aos amigos que fiz na UFSJ e meus antigos amigos do CEFET por dividirem comigo momentos de estudo e também de distração. Em especial, gostaria de agradecer a Samara e a Thaís, que gentilmente me hospedaram em suas casas quando precisei ficar em Divinópolis.

A persistência é o caminho do êxito.

“Charles Chaplin”

Resumo

Neste trabalho, aborda-se o problema de estabilização robusta entrada-estado de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores. São tratados, neste caso, os sistemas com incertezas e atraso variantes no tempo e, além disso, assume-se que a variação máxima do atraso possui taxas limitadas. Em particular, propõe-se condições para a síntese de controladores do tipo realimentação de estados, bem como para a síntese de compensadores *anti-windup* estáticos. Para isso, o sistema com atraso e incertezas politópicas é reescrito como um sistema incerto aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso. Assume-se que a saturação do atuador seja representada em termos de uma não-linearidade do tipo zona-morta, com a consequente aplicação da condição generalizada de setor. As condições propostas, que são dependentes do atraso, asseguram a estabilidade local do sistema para condições iniciais e sinais de perturbação admissíveis. Porém a lei de controle investigada não depende do valor do atraso, o que facilita sua implementação. A partir das condições determinadas, são formulados diferentes problemas de otimização convexa, que se diferem quanto ao objetivo de controle, sendo possível, por exemplo, maximizar o conjunto de condições iniciais admissíveis ou maximizar o limite superior da norma ℓ_2 das perturbações admissíveis. Por fim, são apresentados exemplos numéricos para demonstrar a eficiência dos métodos propostos e comparar com outros existentes na literatura.

Palavras-chave: Atraso nos estados. Sistemas incertos. Estabilidade robusta local. Desigualdades matriciais lineares. Estabilidade Entrada-Estado. Saturação de atuadores. Ação *anti-windup*.

Abstract

In this work, we address the problem of robust input-to-state stabilization of discrete time systems with delay in the states and saturation of actuators. In this case, systems with time-varying uncertainties and delays are considered, and in addition, it is assumed that maximum delay variation has limited rates. In particular, conditions for the synthesis of state feedback controllers are proposed, as well as for the synthesis of static anti-windup compensators. For this, the system with delay and polytopic uncertainties is rewritten as an uncertain augmented system and switched by the value of the delay. It is assumed that the saturation of the actuator is represented in terms of a non-linearity of the dead zone type, with the application of the generalized sector condition. The proposed conditions, which are delay dependent, ensure local stability of the system for admissible initial conditions and disturbance signals. However, the control law investigated does not depend on the value of the delay, which facilitates its implementation. From the determined conditions, different convex optimization problems are formulated, differing for the control objective, for example, it is possible to maximize the initial set of admissible conditions or maximize the upper limit of the ℓ_2 norm of the admissible perturbations. Finally, numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed methods and compare them with others in the literature.

Key-words: Delay in the states. Uncertain systems. Robust local stability. Linear matrix inequalities. Input-to-State Stability. Saturation of actuators. *Anti-windup* action.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Acrônimos e Notação	xiv
1 Introdução	1
1.1 Objetivo do Trabalho	5
1.2 Organização do Documento	5
2 Fundamentos	7
2.1 Estabilidade por Lyapunov	7
2.1.1 Estabilidade Quadrática	8
2.1.2 Estabilidade de sistemas com atraso nos estados	9
2.1.3 Função de Lyapunov-Krasovskii	10
2.1.4 Estabilidade Entrada-Estado	14
2.1.5 Estimativa do ganho ℓ_2	16
2.2 Incertezas	16
2.2.1 Descrição das Incertezas	17
2.3 Saturação nos atuadores	17
2.3.1 Modelagem	19
2.3.2 Problema de <i>Anti-windup</i>	22
2.4 Algoritmo de Frank-Wolfe	23
2.4.1 Comentários finais	25
3 Tolerância e atenuação à perturbação	27
3.1 Formulação do problema	27
3.2 Resultados Auxiliares	29
3.3 Projeto do controlador por realimentação de estados	31
3.3.1 Caso com incertezas	31
3.3.2 Caso precisamente conhecido	35
3.4 Procedimentos de Otimização	37
3.5 Experimentos numéricos	41
3.5.1 Caso escalar	41
3.5.2 Caso de dimensão 3	55
3.5.3 Comentários finais	66

4	Síntese de compensador <i>anti-windup</i> estático	67
4.1	Formulação do problema	67
4.2	Projeto do compensador <i>anti-windup</i>	69
4.2.1	Caso com incertezas	69
4.2.2	Caso precisamente conhecido	72
4.3	Procedimentos de Otimização	74
4.4	Experimentos numéricos	75
4.4.1	Caso escalar	75
4.4.2	Caso de dimensão 2	81
4.4.3	Comentários finais	87
5	Considerações Finais	88
5.1	Conclusões	88
5.2	Trabalhos para publicação	89
5.3	Propostas de continuidade	90
A	Desigualdades Matriciais Lineares	91
A.1	Definição	91
A.2	Complemento de Schur	91
A.3	<i>S-Procedure</i>	92
B	Soluções obtidas para os casos do item 3.5	93
	Referências	104

Lista de Figuras

2.1	Regiões $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_0$	15
2.2	Função saturação.	18
2.3	Regiões de saturação. Fonte: adaptado de (Paim, 2003)	22
2.4	Exemplo do algoritmo Frank-Wolfe	25
3.1	$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ e limites do conjunto $\mathbb{S}$ do sistema (3.55).	43
3.2	Interseções de $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ com os planos cartesianos - sistema (3.55).	44
3.3	$R_{\%} \times \Delta\tau_{\max}$ para $\bar{\tau} \in \{2,3,4,5,6\}$ - sistema (3.55)	45
3.4	Trajetória dos estados e $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ - sistema (3.55).	46
3.5	Resposta temporal do sistema representado por (3.55).	46
3.6	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{2,4,6,8\}$ - sistema (3.55)	47
3.7	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ com $\Delta\tau_{\max} = 2$ para $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ e $\mathbb{K}_3$ - sistema (3.55)	48
3.8	$\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{2,4,6,8\}$ - sistema representado por (3.55)	48
3.9	$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ e limites do conjunto $\mathbb{S}$ do sistema (3.62).	51
3.10	Interseções de $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ com os planos cartesianos - sistema (3.62).	51
3.11	$R_{\%} \times \Delta\tau_{\max}$ para $\bar{\tau} \in \{2,3,4,5,6\}$ - sistema (3.62)	52
3.12	Trajetoória dos estados e $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ do sistema (3.62).	53
3.13	Resposta temporal do sistema representado por (3.62).	54
3.14	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{2,4,6,8\}$ - sistema (3.62)	54
3.15	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ com $\Delta\tau_{\max} = 2$ para $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ e $\mathbb{K}_3$ - sistema (3.62)	55
3.16	$\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{2,4,6,8\}$ - sistema representado por (3.62).	56
3.17	Resposta temporal do sistema representado por (3.69).	59
3.18	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{1,3,5,7\}$ - sistema (3.69)	60
3.19	$\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{1,3,5,7\}$ - sistema representado por (3.69).	61
3.20	Resposta temporal do sistema representado por (3.76).	64
3.21	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{1,3,5,7\}$ - sistema (3.76)	65
3.22	$\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{1,3,5,7\}$ - sistema representado por (3.76).	66
4.1	Resposta temporal do sistema (4.30) com e sem <i>anti-windup</i>	77
4.2	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{2,4,6,8\}$ - sistema (4.30).	78
4.3	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem <i>anti-windup</i> - sistema (4.30).	78
4.4	Resposta temporal do sistema (4.32) com e sem <i>anti-windup</i>	80
4.5	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{2,4,6,8\}$ - sistema (4.32).	80
4.6	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem <i>anti-windup</i> - sistema (4.32)	81
4.7	Resposta temporal do sistema (4.33) com e sem <i>anti-windup</i>	83
4.8	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{2,4,6,8\}$ - sistema (4.33).	83

4.9	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem <i>anti-windup</i> - sistema (4.33).	84
4.10	Resposta temporal do sistema (4.35) com e sem <i>anti-windup</i> .	86
4.11	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} \in \{2,4,6,8\}$ - sistema (4.35).	87
4.12	$\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem <i>anti-windup</i> - sistema (4.35).	87

Lista de Tabelas

3.1	Valores de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ para as condições referentes ao cálculo de $\mathbb{K}$	40
3.2	Comparação das $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ do sistema (3.55).	43
3.3	Comparação das $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ do sistema (3.62).	50
3.4	Comparação das $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ do sistema (3.69).	58
3.5	Comparação das $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ do sistema (3.76).	63
4.1	Valores de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ para as condições referentes ao cálculo de E_c	75

Lista de Acrônimos e Notação

LMI	Linear Matrix Inequality (Desigualdade Matricial Linear)
SDTAE	Sistema Discreto no Tempo com Atraso nos Estados
FLK	Função de Lyapunov-Krasovskii
$\star$	denota os elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal nas LMIs
$L > 0$	indica que a matriz L é simétrica definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz L é simétrica semi-definida positiva
A^T	transposta da matriz A
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{m \times n}$	conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais (incluindo o zero)
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_+$	conjunto dos números inteiros não negativos
(ℓ)	ℓ -ésimo componente de um vetor
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão apropriada
$\text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$	matriz bloco diagonal com as matrizes $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ nos blocos diagonais
$\text{Co}(\cdot)$	envelope convexo
$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$	estimativa da região de atração
$\bar{\tau}$	valor máximo do atraso
$\Delta\tau_{\max}$	máxima variação da taxa de atraso
$\det(\cdot)$	determinante de uma matriz
$\ln$	logaritmo Natural
ℓ_2	espaço dos sinais limitados em energia
ℓ_∞	espaço dos sinais limitados em amplitude
$\ \cdot\ $	norma Euclidiana de um vetor ou de uma matriz
$x_{i,j}$	matriz de i linhas e j colunas composta inteiramente pelo elemento x .

Introdução

O atraso no tempo é uma característica comumente encontrada em diversos sistemas dinâmicos, tais como: processos químicos, mecânicos, biológicos, econômicos, etc. (Gu et al., 2003; MacDonald, 1989; Hu and Wang, 2013). A origem do atraso nesses sistemas, deve-se, de uma forma geral, a três razões distintas: ou é uma propriedade intrínseca do sistema, ou é uma consequência (não desejada) da ação de controle, ou advém da introdução intencional de atrasos no controle de sistemas. Sua presença, no entanto, pode induzir comportamentos indesejáveis, como por exemplo: oscilações, instabilidade e mal desempenho aos processos (Gu et al., 2003; Niculescu, 2001; Gomes da Silva Jr. and Leite, 2007).

Na literatura, podem ser encontrados diversos trabalhos que tratam dos sistemas contínuos no tempo com atraso nos estados. Já em relação aos sistemas discretos no tempo com atraso nos estados (SDTAE), esse número é menor, apesar de estar ocorrendo um aumento nos últimos anos. Em meados da década de 1990, uma das razões que justificava a carência de estudos relacionados a estabilidade dos SDTAE era a utilização de sistemas aumentados livre de atraso para representar tais sistemas (Åström and Wittenmark, 1984). Entretanto, essa técnica apresentava alguns inconvenientes relacionados com o estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atraso variante no tempo e, sobretudo, para a síntese de controladores robustos (Kapila and Haddad, 1998). Recentemente, Hetel et al. (2008) propuseram a reescrita dos sistemas com atraso variante no tempo como sistemas aumentados e chaveados pelo valor do atraso, inovando na representação matemática desses modelos que até então eram escritos como apresentado em (Miranda and Leite, 2011; Hao and Zhao, 2010).

Condições para análise de estabilidade e síntese de controladores para os SDTAE podem ser classificadas como independentes ou dependentes do atraso. No primeiro caso, a estabilidade é garantida para todos os valores do atraso. Em contrapartida, no segundo caso, a estabilidade é preservada apenas para alguns valores do atraso, sendo o sistema

instável para os demais (Niculescu, 2001). As técnicas mais usadas para investigar sistemas com atraso são as baseadas em funções de Lyapunov-Krasoviskii ou em funções de Razumikhin (Niculescu, 2001). Exemplos de aplicações de funções de Lypunov-Krasoviskii podem ser encontradas em (Miranda and Leite, 2011; Xu et al., 2014; Caldeira et al., 2011; Stojanović et al., 2007; Hetel et al., 2008). Hetel et al. (2008), inclusive, propuseram a utilização da forma mais geral dessa função, que foi usada como inspiração neste trabalho para tratar sistemas precisamente conhecidos.

Embora a alternativa proposta por Hetel et al. (2008) para descrever os SDTAE tenha tratado de forma inovadora a representação desse sistema, a mesma ainda foi pouco explorada na literatura. Realizando uma busca no portal www.scopus.com, em novembro de 2016, verificou-se que o trabalho de Hetel et al. (2008) possui 64 citações. Porém, em apenas 3 dessas, Sun and Chen (2012), Hu and Yuan (2009) e Zhang and Shi (2012), foram efetivamente empregadas a estrutura de representação aumentada chaveada pelo valor do atraso. Em Sun and Chen (2012) foram formuladas condições suficientes de estabilidade para sistemas precisamante conhecidos, com base em funções de Lyapunov dependente de parâmetros incertos. Além disso, uma lei de controle por realimentação de estados com ganho variando de acordo com o valor do atraso foi projetado. Em Hu and Yuan (2009) foram determinadas condições necessárias e suficientes de estabilidade para sistemas precisamente conhecidos, através de uma função de Lyapunov dependente do atraso, sendo esta estritamente similar a usada por Hetel et al. (2008). Além disso, foi realizado o projeto de um controlador por realimentação do estado atual que garante a atenuação do ganho ℓ_2 entre uma entrada exógena (de perturbação) e a saída controlada. Assumindo que o atraso possui ocorrência probabilística, Zhang and Shi (2012) estabeleceram condições suficientes para estabilidade exponencial quadrática média para sistemas precisamente conhecidos, baseado em uma função de Lyapunov independente de parâmetros. Neste caso, um controlador por realimentação de estados que depende tanto do estado atual quanto dos atrasados, cujos ganhos são dependentes do atraso, foi proposto.

A saturação dos atuadores em sistemas físicos, é uma restrição relacionada em geral aos limites físicos ou de segurança impostos pelos atuadores e, dessa forma, se traduz na possibilidade de aplicação de um sinal de controle com amplitude limitada entre um valor máximo e um valor mínimo. Quando o sinal de controle linear ultrapassa esses limites, ocorre a saturação e a diferença de sinal não aplicada pode implicar na degradação do desempenho, na ocorrência de ciclos-limite ou múltiplos pontos de equilíbrio e até mesmo na instabilidade do sistema controlado. A presença de atuadores saturantes torna a análise de estabilidade mais difícil pois, mesmo que o sistema seja Schur estável sob determinada lei de controle linear, sabe-se que o mesmo pode se tornar instável para certas condições iniciais (Tarbouriech et al., 2011; Hu and Lin, 2001). Portanto, uma questão fundamental

a ser considerada, refere-se a determinação da região de condições iniciais admissíveis ou, melhor dizendo, região de atração. Como esta é uma tarefa reconhecidamente desafiadora, então a estimação da região de atração é usualmente investigada (Tarbouriech et al., 2011; Hu and Lin, 2001). Alguns trabalhos que tratam de sistemas com saturação dos atuadores são (Henrion and Tarbouriech, 1999; Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 1997; Tarbouriech et al., 2006) para o caso contínuo no tempo, e (Gomes da Silva Jr. et al., 2001; Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2001; Gomes da Silva Jr. et al., 2008) para o caso discreto no tempo.

A saturação pode ocasionar problemas de desempenho em sistemas acionados por controladores dinâmicos. Em particular, a presença da ação integral combinada com a saturação do atuador pode resultar no crescimento excessivo do valor do sinal de controle. Esse crescimento é conhecido na literatura como *windup* (Åström and Rundqwist, 1989). Uma das maneiras práticas de reverter essa situação é adicionar um compensador *anti-windup* à malha fechada do sistema. O princípio básico dessa estratégia consiste em determinar a diferença entre o sinal de controle computado e o sinal efetivamente aplicado na planta e, então, realimentar uma proporção desse sinal no controlador através de uma estrutura estática ou dinâmica. Com isso, pode-se assegurar um desempenho satisfatório da malha fechada na presença de saturação e, em sua ausência, a mesma permanece inalterada (Zaccarian and Teel, 2011). É interessante notar que embora a compensação *anti-windup* esteja relacionada principalmente à melhoria do desempenho, ela pode ser usada também para aumentar a região de atração (ou sua estimativa) do sistema saturado (Tarbouriech et al., 2011). Na literatura, um número razoável de trabalhos tratando da síntese de compensadores *anti-windup* para sistemas contínuos no tempo com atraso nos estados são encontrados, veja por exemplo (Gomes da Silva Jr. et al., 2009; Ghiggi et al., 2008; Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005). Porém, muito menos atenção tem sido dada aos SDTAE. Em (Negi et al., 2012) são estabelecidas condições dependentes do atraso para a síntese de compensadores *anti-windup* para sistemas com atraso variante no tempo, porém a abordagem proposta limita-se aos casos em que o sistema é precisamente conhecido.

Em aplicações reais é inevitável a presença de sinais exógenos como, por exemplo, perturbações e sinais de referência. Nesses casos, é, em geral, impossível garantir que as trajetórias do sistema sejam limitadas para qualquer sinal de perturbação. Portanto, é importante caracterizar conjuntos de sinais de perturbação admissíveis, bem como de condições iniciais, para os quais as trajetórias são garantidamente restritas. Os primeiros são, em geral, caracterizados com relação aos limites de amplitude (ℓ_∞) e/ou de energia (ℓ_2) do sinal de perturbação. Esse tipo de problema é denominado análise de estabilidade entrada-estado (Tarbouriech et al., 2011). Nesse contexto, se a perturbação é cessada, a

convergência para a origem (ponto de equilíbrio de interesse) deve ser garantida. Em outras palavras, para sinais de perturbação e condições iniciais admissíveis, as trajetórias correspondentes nunca devem deixar a região de atração do sistema (Tarbouriech et al., 2011).

Motivados por todas essas questões, alguns trabalhos abordando o problema de análise de estabilidade e estabilização de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores, podem ser encontrados na literatura. Em (Ghiggi, 2008; Chen and Fei, 2014; Lin, 2012) é utilizada a abordagem de Lyapunov-Krasovskii para fornecer condições dependentes do atraso para a síntese de controladores estáticos por realimentação de estados. Em (Ghiggi, 2008) são tratados o caso com atraso variante no tempo, no qual é possível obter uma lei de controle que realimenta todos os estados, inclusive os atrasados, ou apenas o estado atual, e o caso com atraso incerto invariante no tempo em sistemas precisamente conhecidos. Já em (Chen and Fei, 2014) é considerado apenas o caso com atraso variante no tempo em sistemas precisamente conhecidos. O desempenho da malha fechada é investigado em (Lin, 2012) considerando a taxa de convergência (exponencial) dos estados para a origem também para sistemas precisamente conhecidos. Mais recentemente, e ainda considerando sistemas precisamente conhecidos, Pal et al. (2017) propuseram condições dependentes do atraso para a síntese de controladores estabilizantes baseados em observadores com garantia de atenuação do ganho ℓ_2 entre uma entrada exógena (de perturbação) e a saída controlada. Com base na abordagem proposta por Hetel et al. (2008), Binotti (2015) e Silva (2016) reescrevem o sistema com atraso como um sistema aumentado e chaveado pelo valor do atraso. Ressalta-se que ambas as referências não constavam no portal citado anteriormente. Em (Binotti, 2015), é usada também a forma mais geral do funcional de Lyapunov-Krasovskii proposta por Hetel et al. (2008) para tratar sistemas precisamente conhecidos com atraso variante no tempo. Já em (Silva, 2016), uma versão modificada desse funcional é usado para tratar sistemas incertos com atraso variante no tempo. Além disso, neste último são consideradas taxas de variação máxima do atraso, o que resulta em condições menos conservadoras. No contexto de sistemas não-lineares, Silva et al. (2014) e Xiao-Na et al. (2012) reescrevem o sistema através da representação fuzzy Takagi-Sugeno. Em (Silva et al., 2014) são estabelecidas condições convexas para a síntese de um controlador por realimentação de estados fuzzy, através de uma função de Lyapunov-Krasovskii Fuzzy. Já em (Xiao-Na et al., 2012) são projetados controladores *anti-windup* fuzzy estáticos e dinâmicos que garantem a convergência de um conjunto de condições iniciais admissíveis.

Neste trabalho aborda-se o problema de estabilização robusta entrada-estado de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados, saturação de atuadores e sujeitos a perturbações limitadas em energia (ℓ_2). São tratados, neste caso, os sistemas com in-

certezas e atraso variantes no tempo e, além disso, assume-se que variação máxima do atraso possui taxas limitadas. Em particular, propõe-se condições para a síntese de controladores do tipo realimentação de estados, bem como para a síntese de compensadores de *anti-windup* estáticos. Estendendo a proposta de Hetel et al. (2008), o sistema com atraso e incertezas politópicas é reescrito como um sistema incerto aumentado livre de atraso e chaveado pelo valor do atraso. E, com a ajuda da Condição de setor generalizada (Tarbouriech et al., 2011), a saturação é expressa em termos de uma não-linearidade do tipo zona-morta. As condições propostas, que são dependentes do atraso, asseguram a estabilidade local do sistema para condições iniciais e sinais de perturbação admissíveis. Porém, a lei de controle investigada não depende do valor do atraso, o que facilita sua implementação. A partir das condições determinadas, são formulados diferentes problemas de otimização convexa, que se diferem quanto ao objetivo de controle, sendo possível maximizar o conjunto de condições iniciais admissíveis ou maximizar o limite de energia das perturbações admissíveis. Por fim, serão apresentados exemplos numéricos para demonstrar a eficiência dos métodos propostos e comparar com outros existentes na literatura.

1.1 Objetivo do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer condições para síntese de controladores do tipo realimentação de estados, bem como para a síntese de compensadores *anti-windup* estáticos, que garantam para um conjunto de condições iniciais e um conjunto de sinais de perturbação admissíveis a estabilidade entrada-estado de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores.

1.2 Organização do Documento

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O presente capítulo apresenta uma introdução do tema a ser abordado, o objetivo principal e a organização do documento.

No segundo capítulo são abordados os principais conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho, dentre eles: estabilidade no sentido de Lyapunov, incertezas politópicas, saturação de atuadores e algoritmo de Frank-Wolfe.

No terceiro capítulo, nomeado Tolerância e atenuação a perturbação, são apresentados os resultados relacionados com a síntese de controladores do tipo realimentação de estados. No início são apresentadas as condições de estabilização estabelecidas, em seguida, são abordados alguns possíveis problemas de otimização a serem investigados, e no final dois exemplos de dimensões diferentes são usados para consolidar o método proposto.

No quarto capítulo, nomeado Síntese de compensadores *anti-windup* estático, são mostrados os resultados relacionados, como o próprio nome sugere, a síntese de compensadores

de *anti-windup* estáticos. A estrutura adotada é a mesma do capítulo anterior.

Por fim, no quinto capítulo, são feitas as considerações finais e as propostas de trabalhos futuros.

Além disso, o trabalho tem dois apêndices. No primeiro são apresentadas algumas ferramentas utilizadas ao longo do trabalho e, no segundo as matrizes encontradas na resolução de alguns dos problemas de otimização tratados no terceiro capítulo.

Fundamentos

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e fundamental matemático básico para o desenvolvimento dos resultados principais deste trabalho.

2.1 Estabilidade por Lyapunov

A estabilidade de um sistema pode ser caracterizada por sua energia interna: se a energia do sistema tende a zero à medida que o tempo tende ao infinito, então o sistema é dito assintoticamente estável. O método de Lyapunov utiliza uma função escalar que representa a quantidade de energia do sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio. Se esta função for positiva e decrescente, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável, sendo chamada de Função de Lyapunov. A verificação da estabilidade de um sistema pode ser realizada através dos métodos indireto ou direto. Este último, conhecido também como segundo método de Lyapunov (Khalil, 1996), é utilizado neste trabalho, sendo apresentado a seguir de forma especializada para o caso linear discreto no tempo.

Considere o seguinte sistema linear discreto no tempo:

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (2.1)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k do sistema cuja matriz dinâmica é dada por $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Teorema 2.1 (Estabilidade Global por Lyapunov(Adaptado de Khalil (1996)))

Se existir uma função contínua $V(x_k)$, denominada função de Lyapunov, tal que:

1. $V(x_k) > 0 \ \forall x_k \neq \mathbf{0}$ e $V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$,
2. $\|x_k\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x_k) \rightarrow \infty$,
3. $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \ \forall x_k \neq \mathbf{0}$ e $\Delta V(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \mathbf{0}$.

então o sistema (2.1) é dito globalmente assintoticamente estável.

A interpretação geométrica do Teorema 2.1 pode ser dada a partir da noção de superfície de Lyapunov definida a seguir.

Definição 2.1 (Tarbouriech et al. (2011)) *Considere a função de Lyapunov $V(x_k)$. A superfície de nível definida no espaço de estados por:*

$$\mathcal{L}_V(V,c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; V(x_k) = c, c > 0\}, \quad (2.2)$$

é chamada superfície de Lyapunov.

Associado à Definição 2.1 pode-se definir o conjunto $\mathcal{S}(V,c)$ como segue:

Definição 2.2 *Considere a superfície de nível $\mathcal{L}_V(V,c)$. Associado a essa superfície defini-se o conjunto*

$$\mathcal{S}(V,c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; V(x_k) \leq c, c > 0\}, \quad (2.3)$$

cujas fronteira é dada por $\mathcal{L}_V(V,c)$.

Portanto, a condição $\Delta V(x_k) < 0$ implica que quando a trajetória do sistema cruza a superfície de Lyapunov $\mathcal{L}_V(V,c)$, ela se move para dentro do conjunto $\mathcal{S}(V,c)$ e nunca mais o deixa novamente. Observe que a medida que c diminui, a superfície de Lyapunov encolhe em direção a origem. Então, quando $\Delta V(x_k) < 0$ a trajetória do sistema entra na superfície de Lyapunov que encolhe em direção a origem a medida que o tempo aumenta, resultando na convergência das trajetórias para a origem.

Nos casos em que a estabilidade global não pode ser determinada, o que se faz é estimar uma região que contenha condições iniciais de trajetórias convergentes. É nesse sentido que surge a definição de região de atração.

Definição 2.3 (Tarbouriech et al. (2011)) *A região de atração $\mathcal{R}_A$ da origem do sistema (2.1) é definida como o conjunto de todas as condições iniciais x_0 , cujas respectivas trajetórias convergem assintoticamente para a origem. Em outras palavras, se $x_0 \in \mathcal{R}_A$ então $x_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.*

2.1.1 Estabilidade Quadrática

Uma das funções candidatas a função de Lyapunov mais utilizadas é a função quadrática definida da seguinte forma:

$$V(x_k) = x_k^T P x_k, \quad (2.4)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Essa função é necessária e suficiente para avaliar a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo (Chen, 1999).

Para que $V(x_k)$ seja positiva, é necessário que a matriz P seja simétrica e definida positiva ($P = P^T > \mathbf{0}$), ou seja, todos os autovalores de P devem ser reais e maiores que zero. Já para $V(x_k)$ ser decrescente, sua variação temporal, representada por $\Delta V(x_k)$, deve ser negativa ao longo das trajetórias do sistema.

A variação temporal de $V(x_k)$ ao longo das trajetórias do sistema (2.1) é dada por:

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0, \quad (2.5)$$

que, usando (2.4), equivale a:

$$\Delta V(x_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k < 0. \quad (2.6)$$

De acordo com (2.1), substituindo x_{k+1} por Ax_k , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= (Ax_k)^T P (Ax_k) - x_k^T P x_k < 0, \\ &= x_k^T A^T P A x_k - x_k^T P x_k, \\ &= x_k^T (A^T P A - P) x_k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Logo, para garantir a estabilidade do sistema, é necessário que:

$$A^T P A - P < \mathbf{0}, \quad P > \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Aplicando o complemento de Schur, ver Apêndice A, à inequação (2.8), obtém-se

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Dessa forma, pode-se reescrever o Teorema 2.1, de forma equivalente, como:

Teorema 2.2 *O sistema discreto no tempo (2.1) é dito globalmente assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz $P = P^T > \mathbf{0}$ tal que a desigualdade matricial (2.9) seja satisfeita.*

2.1.2 Estabilidade de sistemas com atraso nos estados

Como visto anteriormente, a análise de estabilidade de sistemas sem a presença do atraso pode ser realizada de forma eficiente utilizando o método de Lyapunov. Este se resume em buscar uma função de Lyapunov $V(x_k)$, que quantifica o desvio dos estados em relação ao ponto de equilíbrio $x_k = \mathbf{0}$. Para sistemas com a presença do atraso nos estados, a análise de estabilidade segue o mesmo princípio, porém o conceito de estado inicial é caracterizado por uma sequência inicial $x(\tau)$ no intervalo $\tau \in \{-\bar{\tau}, \dots, 0\}$, representada neste trabalho por $\varphi(\bar{\tau}, 0)$. Portanto, $\varphi(\bar{\tau}, 0) = \{x_{k-\bar{\tau}}, \dots, x_k\}$. Logo, para sistemas com

atraso, busca-se uma função $V(\varphi_{(\bar{\tau},k)})$ dependente de $\varphi_{(\bar{\tau},k)}$, medindo assim o desvio dos estados em relação ao ponto de equilíbrio $x_k = \mathbf{0}$. Essa dependência dos estados passados (e não apenas de x_k) foi proposta por Kolmanovskii and Myshkis (1992) e a função $V(\varphi_{(\bar{\tau},k)})$ é denominada função candidata de Lyapunov-Krasovskii.

Portanto, o método de Lyapunov-Krasovskii pode ser usado para investigar a estabilidade assintótica de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados dados por:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-\tau_k}, \quad (2.10)$$

em que $x_{k-\tau_k}$ é o vetor de estados atrasados do sistema, $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz que representa a dinâmica do atraso, τ_k é um número inteiro positivo representando o atraso variante no tempo tal que $\tau_k \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$, sendo $\bar{\tau}$ o atraso máximo.

A seguir é apresentado o Teorema de Lyapunov-Krasovskii, que foi adaptado de (Gu et al., 2003).

Teorema 2.3 (Lyapunov-Krasovskii) *Se existir um funcional $V(\varphi_{(\bar{\tau},k)})$ contínuo e funções ϵ_1, ϵ_2 e $\epsilon_3: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\epsilon_1(r) > 0$, $\epsilon_2(r) > 0$ e $\epsilon_3(r) > 0$, $\forall r > 0$, tais que:*

1. $\epsilon_1 \|\varphi_{(\bar{\tau},0)}\|^2 \leq V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) \leq \epsilon_2 \|\varphi_{(\bar{\tau},k)}\|_{\tau}^2$,
2. $\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) \leq -\epsilon_3 \|\varphi_{(\bar{\tau},0)}\|^2$,

em que

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = V(\varphi_{(\bar{\tau},k+1)}) - V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}),$$

então o sistema (2.10) é assintoticamente estável.

2.1.3 Função de Lyapunov-Krasovskii

A estabilidade de sistemas com atraso pode ser caracterizada de duas maneiras: independente ou dependente do atraso. No primeiro caso, a estabilidade é garantida para todos os valores finitos do atraso. Em contrapartida, no segundo caso, a estabilidade é preservada apenas para alguns valores do atraso, não sendo assegurada para os demais (Niculescu, 2001).

Estabilidade Independente do Atraso

Para estabelecer as condições de análise de estabilidade, que são independentes do atraso, será considerado aqui a função de Lyapunov-Krasovskii (FLK) (Leite and Miranda, 2008; Leite et al., 2011) dada por:

$$V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = \sum_{v=1}^3 V_v(\varphi_{(\bar{\tau},k)}), \quad (2.11)$$

em que

$$V_1(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = x_k^T P x_k, \quad (2.12)$$

$$V_2(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} x_j^T Q x_j, \quad (2.13)$$

$$V_3(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = \sum_{l=2-\bar{\tau}}^{1-\underline{\tau}} \sum_{j=k+l-1}^{k-1} x_j^T Q x_j,$$

com P e Q sendo matrizes simétricas definidas positivas a serem determinadas. Neste caso, considera-se o atraso variante no tempo pertencente ao intervalo $\tau_k \in \{\underline{\tau}, \dots, \bar{\tau}\}$, sendo o $\underline{\tau}$ o atraso mínimo.

A variação de $V(\varphi_{(\bar{\tau},k)})$ é determinada através da seguinte relação

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = \sum_{v=1}^3 \Delta V_v(\varphi_{(\bar{\tau},k)}), \quad (2.14)$$

em que

$$\Delta V_1(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) &= x_k^T Q x_k - x_{k-\tau_k}^T Q x_{k-\tau_k} \\ &+ \sum_{i=k+1-\tau_{k+1}}^{k-1} x_i^T Q x_i - \sum_{i=k+1-\tau_k}^{k-1} x_i^T Q x_i, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\Delta V_3(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) = (\bar{\tau} - \underline{\tau}) x_k^T Q x_k - \sum_{i=k+1-\bar{\tau}}^{k-\underline{\tau}} x_i^T Q x_i. \quad (2.17)$$

Note que o terceiro termo em (2.16) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv \sum_{i=k+1-\tau_{k+1}}^{k-1} x_i^T Q x_i = \sum_{i=k+1-\underline{\tau}}^{k-1} x_i^T Q x_i + \sum_{i=k+1-\tau_{k+1}}^{k-\underline{\tau}} x_i^T Q x_i \\ &\leq \sum_{i=k+1-\tau_k}^{k-1} x_i^T Q x_i + \sum_{i=k+1-\bar{\tau}}^{k-\underline{\tau}} x_i^T Q x_i. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando a relação (2.18) em (2.16), tem-se que:

$$\Delta V_2(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) \leq x_k^T Q x_k - x_{k-\tau_k}^T Q x_{k-\tau_k} + \sum_{i=k+1-\bar{\tau}}^{k-\underline{\tau}} x_i^T Q x_i. \quad (2.19)$$

Então, a diferença da FLK fica na forma:

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) \leq x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T (\beta Q - P) x_k - x_{k-\tau_k}^T Q x_{k-\tau_k}, \quad (2.20)$$

em que $\beta = \bar{\tau} - \underline{\tau} + 1$.

De acordo com (2.10), substituindo x_{k+1} por $Ax_k + A_d x_{k-\tau_k}$, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) \leq (x_k^T A^T + x_{k-\tau_k}^T A_d^T) P (Ax_k + A_d x_{k-\tau_k}) + x_k^T (\beta Q - P) x_k - x_{k-\tau_k}^T Q x_{k-\tau_k}, \quad (2.21)$$

ou ainda

$$\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) \leq \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-\tau_k} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P A + \beta Q - P & A^T P A_d \\ \star & A_d^T P A_d - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-\tau_k} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Logo, para garantir a estabilidade do sistema, é suficiente que

$$\begin{bmatrix} A^T P A + \beta Q - P & A^T P A_d \\ \star & A_d^T P A_d - Q \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Aplicando o Complemento de Schur, ver Apêndice A, à inequação (2.23), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -P & P A & P A_d \\ \star & \beta Q - P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Dessa forma, pode-se reescrever o Teorema 2.3, de forma equivalente, como:

Teorema 2.4 *O sistema discreto no tempo com atraso nos estados (2.10) é dito globalmente assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz $P = P^T > \mathbf{0}$ tal que a desigualdade matricial (2.24) seja satisfeita.*

Condições semelhantes desenvolvidas a partir do Lema de Finsler podem ser encontradas em (Leite et al., 2011).

Estabilidade Dependente do Atraso

De forma semelhante ao que foi feito para obtenção do Teorema 2.4, pode-se escolher uma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii mais completa, como feito, por exemplo, em (Caldeira et al., 2011) para obter condições LMI que sejam dependentes do valor do atraso.

Uma outra abordagem, que utiliza uma versão em espaço aumentado da representação (2.10) foi introduzida em (Hetel et al., 2008). Para estabelecer as condições de análise de estabilidade, que são dependentes do atraso, será mostrado aqui então a abordagem feita por Hetel et al. (2008), na qual é utilizada uma versão mais geral dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii, sendo esta dada por:

$$V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \tau_k) = \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} \sum_{j=0}^{\bar{\tau}} x_{k-i}^T P_{\tau_k}^{i,j} x_{k-j}. \quad (2.25)$$

Neste caso, considera-se o atraso variante no tempo pertencente ao intervalo $\tau_k \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$.

Nota-se que a função envolve todas as combinações de estados atrasos

$$x_{k-i}^T P_{\tau_k}^{i,j} x_{k-j}, \quad i, j \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}.$$

Cada termo quadrático apresenta uma matriz de Lyapunov diferente $P_{\tau_k}^{i,j}$, que muda de acordo com o atraso no conjunto

$$\mathcal{P}^{i,j} = \{P_1^{i,j}, P_2^{i,j}, \dots, P_{\bar{\tau}}^{i,j}\}.$$

As matrizes $P_{\tau}^{i,j}$, $i, j \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$, $\tau \in \{1, \dots, \bar{\tau}\}$, são definidas de tal forma que a função $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k)$ seja sempre definida positiva, isto é

$$V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \tau_k) > 0,$$

ou ainda

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} P_{\tau}^{0,0} & P_{\tau}^{0,1} & \dots & P_{\tau}^{0,\bar{\tau}} \\ \star & P_{\tau}^{1,1} & \ddots & P_{\tau}^{1,\bar{\tau}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \dots & P_{\tau}^{\bar{\tau},\bar{\tau}} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.26)$$

para qualquer atraso τ no conjunto $\{1, \dots, \bar{\tau}\}$. Sem perda de generalidade, pode-se considerar que $P_{\tau}^{i,j} = P_{\tau}^{j,i^T}$.

A seguir são apresentadas as condições propostas por Hetel et al. (2008), que foram estabelecidas com base no seguinte sistema aumentado, livre de atraso e chaveado, cujo chaveamento é dado pelo valor do atraso:

$$\bar{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\tau_k) \bar{x}_k, \quad (2.27)$$

em que

$$\bar{x}_k = [x_k^T \quad x_{k-1}^T \quad \dots \quad x_{k-\bar{\tau}}^T]^T$$

e

$$\mathbb{A}(\tau_k) = \begin{bmatrix} A & \Xi_1(\tau_k) & \Xi_2(\tau_k) & \dots & \Xi_{\bar{\tau}}(\tau_k) \\ I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\Xi_i(\tau_k) = \begin{cases} A_d, & i = \tau_k \\ \mathbf{0}, & i \neq \tau_k \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, \bar{\tau},$$

para todo $\tau_k \in \{1, \dots, \bar{\tau}\}$.

Teorema 2.5 (Hetel et al. (2008)) *As declarações a seguir são equivalentes:*

- Existe $\bar{\tau}(\bar{\tau}+1)^2$ matrizes $P_{\tau}^{i,j}$, $\tau = 1, \dots, \bar{\tau}$, $i, j = 0, \dots, \bar{\tau}$, tal que $\Phi(\tau)$, $\tau = 1, \dots, \bar{\tau}$ definido em (2.26) satisfaz a LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tau_1) & \mathbb{A}^T(\tau_1)\Phi(\tau_2) \\ \Phi(\tau_2)\mathbb{A}(\tau_1) & \Phi(\tau_2) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.28)$$

para todo $\tau_1, \tau_2 \in \{1, \dots, \bar{\tau}\}$.

- Existe uma função de Lyapunov-Krasovskii dependente do atraso (2.25) cuja diferença é definida estritamente negativa ao longo das soluções do sistema (2.10).

A prova completa do Teorema pode ser encontrada em (Hetel et al., 2008).

Cabe salientar, que apesar de Hetel et al. (2008) não considerarem o atraso nulo, a formulação permite a inclusão de tal caso.

2.1.4 Estabilidade Entrada-Estado

Considere que o sistema (2.10) esteja sujeito a uma perturbação externa, de forma que:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-\tau_k} + B_w \omega_k, \quad (2.29)$$

em que $\omega_k \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de perturbação e $B_w \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Quando um sistema de controle está sujeito à ação de perturbações, não se pode esperar que as trajetórias do mesmo convirjam para a origem à medida que o tempo aumenta e enquanto as perturbações não são nulas. O melhor que se pode fazer é minimizar a influência desta perturbação sobre o sistema. Neste caso, a idéia é garantir que qualquer trajetória x_k seja limitada para perturbações ω_k também limitadas.

Em particular, neste trabalho, interessa-se por perturbações limitadas em energia, ou seja, considera-se que o sinal ω_k tem norma ℓ_2 menor que δ^{-1} , isto é, a relação

$$\mathcal{W} \triangleq \{\omega_k \in \mathbb{R}^m : \|\omega_k\|_2^2 \leq \delta^{-1}\} \quad (2.30)$$

se verifica com $\|\omega_k\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k}$.

A fim de garantir que as trajetórias do sistema (2.29) sejam limitadas, considera-se a seguinte função

$$\mathcal{J}_k \triangleq \Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) - \omega_k^T \omega_k,$$

sendo $V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) > 0$ uma candidata a função de Lyapunov-Krasovskii. A partir disso, segue que:

$$\sum_{i=0}^k \mathcal{J}_k = V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) - V(\varphi_{(\bar{\tau},0)}) - \sum_{i=0}^k \omega_i^T \omega_i. \quad (2.31)$$

Definindo os seguintes conjuntos associados a $V(\varphi_{(\bar{\tau},k)})$:

$$\mathcal{R}_0 \triangleq \{x_0 \in \mathbb{R}^n : V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) \leq \beta^{-1}\}, \quad (2.32)$$

$$\mathcal{R} \triangleq \{x_k \in \mathbb{R}^n : V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) \leq \mu^{-1}\}, \quad (2.33)$$

com $\mu^{-1} = \beta^{-1} + \delta^{-1}$. Então, se $J_k < 0$, tem-se $\forall x_0 \in \mathcal{R}_0$ e $\omega_k \in \mathcal{W}$ que:

- se $\omega_k \neq 0$, então

$$V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) < V(\varphi_{(\bar{\tau},0)}) + \|\omega_k\|_2^2 \leq \beta^{-1} + \delta^{-1} = \mu^{-1},$$

o que implica que as trajetórias do sistema não saem do conjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_A$;

- se $\omega_k = 0$ para todo $k \geq \bar{k} \geq 0$, então $\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) < 0$, o qual garante que $x_k \rightarrow 0$ a medida que $k \rightarrow \infty$.

Percebe-se que $J_k < 0$ assegura que $\mathcal{R}$ é uma região de estados atingíveis considerando que $x_0 \in \mathcal{R}_0$ e que $\omega_k \in \mathcal{W}$, com $\mathcal{W}$ definido em (2.30). Além disso, para $\omega_k = 0$, se $J_k < 0$, segue que $\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau},k)}) < 0$, $\forall x_k \in \mathcal{R}$, o que significa que $\mathcal{R}$ está contido na região de atração do sistema ($\mathcal{R}_A$) e pode ser vista como uma estimativa da mesma. (Veja uma versão para o caso contínuo em Tarbouriech et al. (2011)).

Na Figura 2.1 está ilustrada a relação descrita anteriormente. Inicialmente, supõe-se que no instante k_0 o sinal ω_k comece a atuar e que a condição inicial pertence a $\mathcal{R}_0$. Neste caso, as trajetórias estão limitadas a uma estimativa da região de atração $\mathcal{R}$ (—), onde há garantia de estabilidade ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_A$). Considerando que a perturbação desapareça em k_1 , garante-se que as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem quando $k \rightarrow \infty$.

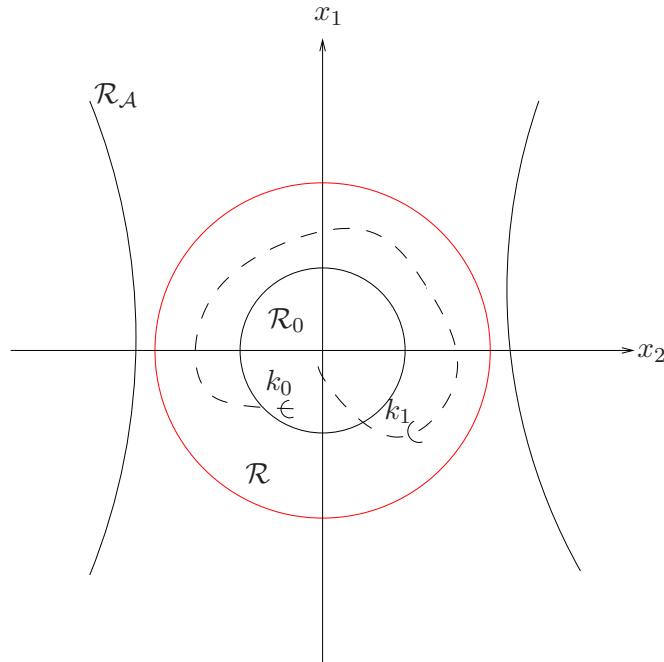


Figura 2.1: Regiões $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_0$

2.1.5 Estimativa do ganho ℓ_2

Considere o seguinte sistema não-linear em tempo discreto sujeito a perturbação:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + A_d x_{k-\tau_k} + B_w \omega_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que $z \in \mathbb{R}^p$ é o sinal de saída mensurável e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Definindo $\tilde{\mathcal{J}}_k = \Delta V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) - \omega_k^T z_k + \gamma^{-1} z_k^T z_k, \forall k > 0$, sendo $V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) > 0$ uma candidata a função de Lyapunov-Krasoviskii, segue que

$$\sum_{i=0}^k \tilde{\mathcal{J}}_k = V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) - V(\varphi_{(\bar{\tau}, 0)}) - \sum_{i=0}^k \omega_i^T \omega_i + \gamma^{-1} \sum_{i=0}^k z_i^T z_i. \quad (2.35)$$

Então, se $\tilde{\mathcal{J}}_k < 0$, conclui-se que:

- se $\omega_k = 0$, então $\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) < -\gamma^{-1} z_k^T z_k \leq 0$, o que garante $x_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$.
- se $\omega_k \neq 0$, com ω_k satisfazendo (2.30):
 - se $x_0 \in \mathcal{R}_0$, isto é, x_0 pertence a região de condições iniciais, $V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) < V(\varphi_{(\bar{\tau}, 0)}) + \|\omega_k\|_2^2 \leq \delta^{-1}$, o que implica que as trajetórias do sistema não saem do conjunto $\mathcal{R}$;
 - para $k \rightarrow \infty$, $\|z_k\|_2^2 < \gamma \|\omega_k\|_2^2 + \gamma V(\varphi_{(\bar{\tau}, 0)})$. Desta forma, se $x_0 = 0$, segue que $\|z_k\|_2^2 < \gamma \|\omega_k\|_2^2$, ou seja, γ é um limitante para o chamado ganho ℓ_2 .

Tem-se novamente que $\tilde{\mathcal{J}}_k < 0$ assegura que $\mathcal{R}$ é uma região de estados atingíveis considerando que $x_0 \in \mathcal{R}_0$ e $\omega_k \in \mathcal{W}$, com $\mathcal{W}$ definido em (2.30). Além disso, no caso em que $\omega_k = 0$, se $\tilde{\mathcal{J}}_k < 0$, segue que $\Delta V(\varphi_{(\bar{\tau}, k)}) < 0, \forall x_k \in \mathcal{R}$, o que significa que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_A$. (Veja uma versão para o caso contínuo em Tarbouriech et al. (2011)).

2.2 Incertezas

Todo modelo matemático é considerado na prática uma aproximação da dinâmica do processo físico real. Portanto, este deve considerar os diferentes tipos de incertezas, como por exemplo, decorrentes das dinâmicas não modeladas, variações paramétricas, presença de ruídos ou até mesmo erros decorrentes da etapa de linearização.

Sendo assim, é de grande importância que as incertezas sejam levadas em conta na análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas sujeitos a variações paramétricas. Sendo assim, é conveniente representar o modelo físico por um sistema incerto, constituído do modelo matemático (sistema nominal) mais incertezas.

2.2.1 Descrição das Incertezas

Um grande problema ao se trabalhar com sistemas incertos é como tratar a incerteza na formulação final do problema, pois dependendo do tipo de incerteza, pode-se inserir mais restrição na busca de uma solução.

Existem diversas formas de representar as incertezas do sistema, sendo uma delas a representação por incertezas politópicas, cuja descrição será dada em sequência.

Supondo que o sistema (2.1) esteja sujeito a incertezas no modelo, isto é,

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k. \quad (2.36)$$

A matriz $A(\alpha)$, em (2.36), é representada pela combinação convexa descrita por

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i,$$

sendo $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$ o vetor que parametriza o politopo de incertezas. Este pertence ao simplex unitário dado por:

$$\Xi \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, \ i = 1, \dots, N \right\}.$$

O número de vértices N do politopo de incertezas do sistema varia de 1 a 2^q , sendo q a quantidade de parâmetros incertos do modelo.

A seguir é apresentada uma descrição formal da representação politópica

Definição 2.4 *A classe de matrizes Λ com incertezas na forma politópica pode ser descrita pelo conjunto*

$$\Lambda = \left\{ A : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \ \alpha \in \Xi, \ i = 1, \dots, N \right\}, \quad (2.37)$$

em que o conjunto Λ é convexo, fechado e as matrizes A_i são conhecidas.

Uma característica importante deste tipo de abordagem diz respeito a convexidade do conjunto resultante, isto é, tem-se pela propriedade de convexidade que, na maioria dos casos, se as condições de estabilidade e estabilização são satisfeitas nos vértices do politopo, então garante-se que as mesmas também serão para todos os pontos no interior do politopo.

2.3 Saturação nos atuadores

Considere o seguinte sistema discreto no tempo, sujeito à restrição de amplitude no atuador:

$$x_{k+1} = Ax_k + B\text{sat}(v_k), \quad (2.38)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. A e B são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas. $\text{sat}(\cdot)$ é uma função vetorial tal que para cada $\ell = 1, \dots, m$ defini-se:

$$\text{sat}(v_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \bar{v}_{(\ell)}, & \text{se } v_{k(\ell)} > \bar{v}_{(\ell)}, \\ v_{k(\ell)}, & \text{se } \underline{v}_{(\ell)} \leq v_{k(\ell)} \leq \bar{v}_{(\ell)}, \\ \underline{v}_{(\ell)}, & \text{se } v_{k(\ell)} < \underline{v}_{(\ell)}, \end{cases} \quad (2.39)$$

sendo $\underline{v}_{(\ell)}$ e $\bar{v}_{(\ell)}$ os limites mínimo e máximo que podem ser aplicados pelo ℓ^{th} atuador. A Figura (2.2) ilustra essa função.

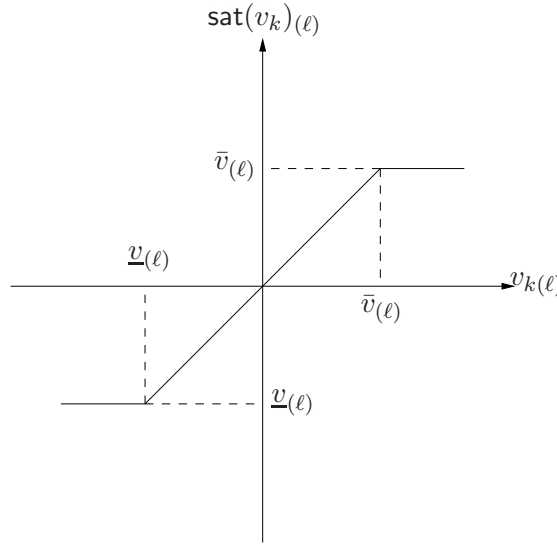


Figura 2.2: Função saturação.

Devido à saturação, o sistema em malha-fechada (2.38) é não-linear. Portanto, a convergência das trajetórias dos estados para a origem vai depender da condição inicial do sistema, mesmo se o sistema em malha-fechada não-saturado for Schur estável. Sendo assim, é necessário determinar o conjunto de todas as condições iniciais cujas respectivas trajetórias convergem assintoticamente para origem, ou seja, determinar a região de atração (ou sua estimativa) da origem do sistema, definida no início deste capítulo. Quando essa região abrange todo o espaço de estados, isto é, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^n$, garante-se a estabilidade global assintótica do sistema. No entanto, de uma forma geral, a convergência para a origem não é garantida para qualquer condição no espaço $\mathbb{R}^n$, mas para um determinado conjunto, dessa forma, garante-se apenas a estabilidade local assintótica do sistema.

A determinação exata da região de atração da origem de um sistema, porém, é uma questão bastante desafiadora, visto que a mesma pode ser não convexa, aberta ou ilimitada (Tarbouriech et al., 2011). A idéia, portanto, é obter uma estimativa dessa região, portanto, subconjuntos da região de atração, com representação analítica bem definida, tais como conjuntos elipsoidais e poliedrais.

2.3.1 Modelagem

Embora a saturação pareça uma simples não-linearidade, em um primeiro momento, seu tratamento matemático para obtenção de condições de estabilidade e estabilização é bastante complicado (Tarbouriech et al., 2011). A fim de determinar condições que sejam tratáveis, utilizou-se neste trabalho a modelagem por não-linearidade de setor, descrita a seguir, para representar o termo saturação. Além disso, apenas para informar o leitor mais curioso, são apresentadas outras possíveis alternativas de modelagem encontradas na literatura.

Modelagem por não-linearidade de setor

A modelagem por não-linearidade de setor se baseia em tratar o sistema (2.38) como um problema de L'ure. Para isso, define-se a função zona morta, dada por:

$$\Psi(v_k) = v_k - \text{sat}(v_k), \quad (2.40)$$

ou seja, $\Psi(v_k) = [\psi(v_{k(1)}) \ \dots \ \psi(v_{k(m)})]^T$, em que

$$\psi(v_{k(\ell)}) = \begin{cases} v_{k(\ell)} - \bar{v}_{(\ell)}, & \text{se } v_{k(\ell)} > \bar{v}_{(\ell)}, \\ 0 & \text{se } \underline{v}_{(\ell)} \leq v_{k(\ell)} \leq \bar{v}_{(\ell)}, \\ v_{k(\ell)} - \underline{v}_{(\ell)}, & \text{se } v_{k(\ell)} < \underline{v}_{(\ell)}, \end{cases}$$

para todo $\ell = 1, \dots, m$.

Substituindo o termo de saturação em (2.38) pela função anterior, resulta em:

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k - B\Psi(Kx_k). \quad (2.41)$$

É através da equação (2.41) que pode-se inferir sobre a estabilidade do sistema saturado usando a condição de setor generalizada.

Considere a matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e o conjunto poliedral

$$\mathbb{S} \triangleq \{x_k \in \mathbb{R}^n : |(K - G)x_k| \leq u_0\}. \quad (2.42)$$

Então, o seguinte lema pode ser enunciado:

Lema 2.1 (Condição Generalizada de Setor) *Considere a função $\Psi(Kx_k)$ definida em (2.40). Se $x_k \in \mathbb{S}$, a relação:*

$$\Psi(Kx_k)^T T [\Psi(Kx_k) - Gx_k] \leq 0 \quad (2.43)$$

é válida para qualquer matriz T diagonal definida positiva.

Modelagem politópica

A modelagem politópica é baseada no uso de inclusões diferenciais politópicas. Isso envolve uma descrição local do sistema em malha-fechada saturado por meio de um modelo politópico. Dessa forma, seguindo o apresentado em (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2001), tem-se que o termo de saturação pode ser escrito como:

$$\text{sat}(v_{k(\ell)}) = \text{sat}(K_{(\ell)}x_k) = \alpha_{(\ell)}(x_k)K_{(\ell)}x_k, \quad (2.44)$$

em que

$$\alpha_{(\ell)}(x_k) \triangleq \begin{cases} \frac{\underline{v}_{(\ell)}}{K_{(\ell)}x_k}, & \text{se } K_{(\ell)}x_k < \underline{v}_{(\ell)}, \\ 1, & \text{se } \underline{v}_{(\ell)} \leq K_{(\ell)}x_k \leq \bar{v}_{(\ell)}, \\ \frac{\bar{v}_{(\ell)}}{K_{(\ell)}x_k}, & \text{se } K_{(\ell)}x_k > \bar{v}_{(\ell)}, \end{cases} \quad (2.45)$$

com $0 < \alpha_{(\ell)}(x_k) \leq 1, \forall \ell = 1, \dots, m, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

O coeficiente $\alpha_{(\ell)}(x_k)$ pode ser visto como um indicador do nível de saturação da ℓ -ésima entrada do sinal de controle. Note que $\alpha_{(\ell)}(x_k)$ é uma função de x_k . Por uma questão de simplicidade, na sequência, $\alpha_{(\ell)}(x_k)$ será expressado como $\alpha_{(\ell)}(k)$.

Definindo, a partir do vetor $\alpha(k) \in \mathbb{R}^m$, uma matriz diagonal $D(\alpha(k)) \triangleq \text{diag}(\alpha(k))$, o sistema (2.38) pode ser reescrito como

$$x_{k+1} = (A + BD(\alpha(k))K)x_k = A_k x_k, \quad (2.46)$$

no qual a cada instante k a matriz A_k é uma função de $\alpha(k)$ e, conseqüentemente, de x_k .

Assumindo que $0 < \alpha_{s(\ell)} \leq 1$ seja o limite inferior de $\alpha_{(\ell)}(k)$ e definindo o vetor $\alpha_s \triangleq [\alpha_{s(1)}, \dots, \alpha_{s(m)}]^T$. O vetor α_l esta associado a seguinte região do espaço de estados:

$$S(K, \underline{v}^\alpha, \bar{v}^\alpha) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{v}^\alpha \leq Kx \leq \bar{v}^\alpha\}, \quad (2.47)$$

com

$$\underline{v}_{(\ell)}^\alpha = \frac{\underline{v}_{(\ell)}}{\alpha_{s(\ell)}} \quad \text{e} \quad \bar{v}_{(\ell)}^\alpha = \frac{\bar{v}_{(\ell)}}{\alpha_{s(\ell)}}.$$

De fato, para todo $x_k \in (K, \underline{v}^\alpha, \bar{v}^\alpha)$, segue que $0 < \alpha_{s(\ell)} \leq \alpha_{(\ell)} \leq 1$.

Considerando agora todos os possíveis vetores de ordem m tal que a ℓ -ésima entrada assuma o valor 1 ou $\alpha_{s(\ell)}$. Então, existe um total de 2^m vetores diferentes. Denotando cada um desses vetores por $\gamma_j, j = 1, \dots, 2^m$, pode-se definir as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} D_j(\alpha_l) &= D(\gamma_j) = \text{diag}(\gamma_j), \\ \mathbb{A}_j &= A + BD_j(\alpha)K. \end{aligned} \quad (2.48)$$

A partir da definição das matrizes $\mathbb{A}_j$, segue que $\forall x_k \in S(K, \underline{v}^\alpha, \bar{v}^\alpha)$, $A_k \in \text{Co}\{\mathbb{A}_j, j = 1, \dots, 2^m\}$. Portanto, o sistema descrito pela equação (2.38) pode ser localmente representado pelo modelo politópico

$$x_{k+1} = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} \mathbb{A}_j x_k, \quad (2.49)$$

com $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_{j,k} = 1$, $\lambda_{j,k} \geq 0$. Em outras palavras, a cada instante k a matriz A_k pode ser obtida através de uma combinação linear convexa das matrizes A_j . Deve-se destacar que o modelo (2.49) representa o sistema apenas em $S(K, \underline{v}^\alpha, \bar{v}^\alpha)$.

Em (Hu and Lin, 2001) é apresentada uma outra versão da modelagem politópica, que pode ser vista como uma generalização da descrita acima, capaz de conduzir a condições de análise e síntese de controladores cujos resultados são menos conservadores.

Modelagem por regiões de saturação

A modelagem por regiões de saturação consiste em dividir o espaço de estados em diferentes regiões, onde o sistema se comportará como um sistema linear com uma perturbação aditiva.

Considerando o sistema descrito pela equação (2.38), pode-se definir o seguinte vetor $\xi_{(\ell)}$, $\ell = 1, \dots, m$, em que $\xi_{(\ell)}$ atende as seguintes condições:

- se $v_{k(\ell)}$ está saturado no limite superior, isto é, $K_{(\ell)}x_k > \bar{v}_{(\ell)}$, então $\xi_{(\ell)} = 1$;
- se $v_{k(\ell)}$ está na região linear, isto é, $\underline{v}_{(\ell)} \leq K_{(\ell)}x_k \leq \bar{v}_{(\ell)}$, então $\xi_{(\ell)} = 0$;
- se $v_{k(\ell)}$ está saturado no limite inferior, isto é, $K_{(\ell)}x_k < \underline{v}_{(\ell)}$, então $\xi_{(\ell)} = -1$;

Cada vetor ξ representa uma combinação possível entre as entradas saturadas e não-saturadas. Logo, é possível contruir 3^m vetores ξ . Denotando por $\xi_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, 3^m$, cada um destes vetores, o vetor de estados pertence a uma região bem definida em $\mathbb{R}^n$, que será chamada de região de saturação. Cada região de saturação é, portanto, determinada pela intersecção de semi-planos do tipo $K_{(\ell)}x_k \leq d_{(\ell)}$ ou $-K_{(\ell)}x_k \leq d_{(\ell)}$, $d_{(\ell)}$ podendo assumir os valores $\underline{v}$ e $\bar{v}$.

Por exemplo, para um sistema com dois estados ($n = 2$) e duas entradas ($m = 2$), tem-se $3^m = 9$ regiões de saturação, como pode ser visto na Figura 2.3.

De uma maneira geral, cada ξ_j está associado a uma região poliedral do tipo

$$S(R_j, d_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : R_j x \leq d_j\}, \quad (2.50)$$

em que d_j é um vetor definido pelas entradas $\underline{v}$ e $\bar{v}$, e R_j é uma matriz formada a partir das linhas de K e $-K$.

Assim, em cada região de saturação, a evolução das trajetórias do sistema (2.38) pode ser determinada por:

$$x_{k+1} = (A + B \text{diag}(1_m - |\xi_j|)K)x_k + Bv(\xi_j), \quad (2.51)$$

em que

$$v_{(\ell)}(\xi_{(j)}) = \begin{cases} \underline{v}_{(\ell)}, & \text{se } \xi_{j(\ell)} = -1, \\ 0, & \text{se } \xi_{j(\ell)} = 0, \\ \bar{v}_{(\ell)} & \text{se } \xi_{j(\ell)} = 1, \end{cases} \quad (2.52)$$

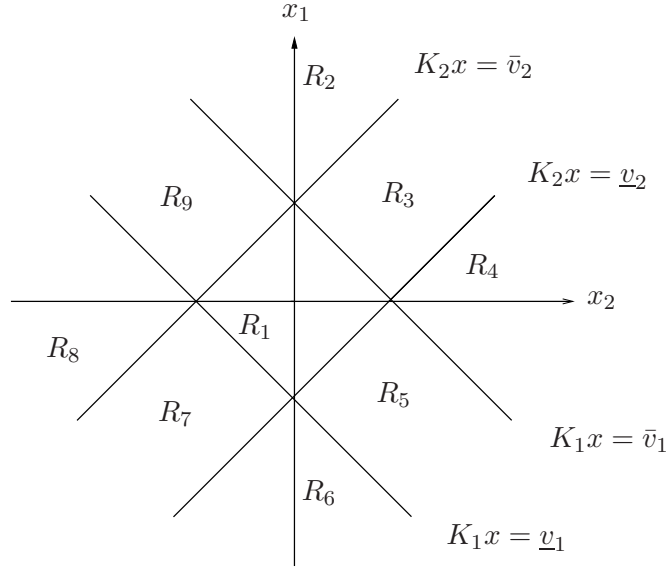


Figura 2.3: Regiões de saturação. Fonte: adaptado de (Paim, 2003)

para $j = 1, \dots, 3^m$ e $\ell = 1, \dots, m$

Para todo $x_k \in S(R_j, d_j)$, a dinâmica do sistema saturado pode ser dada, de uma forma genérica, por um sistema linear com uma perturbação aditiva:

$$x_{k+1} = \bar{A}_j x_k + p_j, \quad (2.53)$$

em que $\bar{A}_j \triangleq A + B \text{diag}(1_m - |\xi_{j(\ell)}|)K$ e $p_j \triangleq Bv(\xi_j)$.

Cabe salientar que na fronteira entre duas regiões de saturação os modelos locais são idênticos, podendo haver a comutação entre eles sem que ocorra saltos na trajetória dos estados.

2.3.2 Problema de *Anti-windup*

Considere o sistema com saturação nos atuadores dado em (2.38). Além disso, assuma que o compensador de estabilização dinâmica da saída de ordem n_c dado por:

$$\begin{aligned} x_{c(k+1)} &= A_c x_{c(k)} + B_c y_{(k)}, \\ v_{c(k)} &= C_c x_{c(k)} + D_c C x_{(k)}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

foi projetado para garantir a estabilidade e o desempenho desse sistema na ausência da saturação do atuador, sendo: $x_{c(k)} \in \mathbb{R}^{n_c}$ o estado e $v_{c(k)}$ a saída do controlador.

Com intuito de amenizar os efeitos de *windup* causados pela saturação, adiciona-se um compensador *anti-windup*, da forma $E_c(\text{sat}(v_{c(k)}) - v_{c(k)})$, com $E_c \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$, a dinâmica do controlador, obtendo

$$\begin{aligned} x_{c(k+1)} &= A_c x_{c(k)} + B_c C x_{(k)} + E_c(\text{sat}(v_{c(k)}) - v_{c(k)}), \\ v_{c(k)} &= C_c x_{c(k)} + D_c C x_{(k)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Definindo o vetor de estados aumentado

$$\xi_k = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ x_{c(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_c} \quad (2.56)$$

e as seguintes matrizes

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_c} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} D_cC & C_c \end{bmatrix}.$$

O sistema de malha fechada pode ser reescrito como

$$\xi_{k+1} = \tilde{A}\xi_k - (\tilde{B} + RE_c)\Psi(v_c), \quad (2.57)$$

em que $v_c = K\xi_k$ e $\Psi(v_c) = v_c - \text{sat}(v_c)$. Nota-se que, $\Psi(v_c)$ corresponde a uma não-linearidade do tipo zona-morta.

Sendo assim, com base nesta representação, é possível utilizar a condição de setor generalizada (Vide Lema 2.1) para síntese de compensadores *anti-windup*.

2.4 Algoritmo de Frank-Wolfe

Para tratar alguns problemas de otimização convexa que são propostos neste trabalho, utilizou-se o algoritmo de Frank-Wolfe. Sua origem e descrição são apresentados a seguir.

Em 1956, Frank and Wolfe (1956) desenvolveram um algoritmo para resolver problemas de programação quadrática com restrições lineares. Esse algoritmo pode ser aplicado a problemas de programação não-linear com funções objetivas convexas, cuja formulação é apresentada a seguir.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in S. \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma região poligonal limitada e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e convexa.

O algoritmo de Frank-Wolfe é apresentado na sequência, em cada um de seus passos é explicado:

0. Determine uma solução inicial, $x_0 \in S$. Faça $k := 0$.

Nesta etapa, escolhe-se uma solução factível básica arbitrária, isto é, um ponto de extremo.

1. Determine uma direção de busca, p_k .

No algoritmo de Frank-Wolfe, determina-se p_k através da solução de um problema

“próximo” ao (2.58), no qual substitui-se a função f por sua expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno de x_k . Portanto, resolve-se o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \min & z_k(y) := f(x_k) + \nabla f(x_k)^T(y - x_k) \\ \text{sujeito a} & y \in S. \end{array} \quad (2.59)$$

Isso é um problema de programação linear e fornece o ponto extremo y_k como solução ótima. Sendo assim, a direção de busca é dada por $p_k := y_k - x_k$. Observe que esta é uma direção factível, já que x_k e y_k pertencem a S e S é convexo.

2. Determine o passo, α_k , tal que

$$f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k). \quad (2.60)$$

Aqui, deve-se limitar o tamanho do passo para no máximo 1, pois para $\alpha > 1$ a solução torna-se infactível.

$$\min_{\alpha \in [0,1]} f(x_k + \alpha p_k). \quad (2.61)$$

3. Realize uma nova iteração:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k. \quad (2.62)$$

4. Se o critério de parada for satisfeito $\rightarrow$ Pare! x_{k+1} é uma aproximação de x_* . Caso contrário, faça $k := k + 1$, e volte para 1.

Para ilustrar o método segue o exemplo retirado de (Bradley et al., 1977):

$$\begin{array}{ll} \max & 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0. \end{array} \quad (2.63)$$

A derivada parcial da função objetivo em relação a qualquer ponto $x = (x_1, x_2)$ é dada por:

$$\begin{aligned} c_1 &= 20 - 4x_1 - 2(x_1 + x_2) = 20 - 6x_1 - 2x_2, \\ c_2 &= 16 - 2x_2 - 2(x_1 + x_2) = 16 - 2x_1 - 4x_2. \end{aligned}$$

Supondo que o ponto inicial seja $x^0 = (0,0)$, tem-se $c_1 = 20$ e $c_2 = 16$, e a função objetivo aproximada é, portanto, $20x_1 + 16x_2$. Resolvendo esse problema de programação linear, encontra-se $y_1 = 5$ e $y_2 = 0$, o que resulta na direção de busca dada pelo segmento de reta que une os pontos $x^0 = (0,0)$ e $y = (5,0)$, isto é, com $0 \leq x_1 \leq 5$ e $x_2 = 0$. A partir disso, a solução ótima pode então ser determinada como sendo $x_1 = 3\frac{1}{3}$ e $x_2 = 0$, de modo que repetimos o procedimento para $x^1 = (3\frac{1}{3}, 0)$.

A derivada parcial é agora $c_1 = 0$ e $c_2 = 9\frac{1}{3}$, e o resultado do problema de programação linear, que consiste em maximizar $0x_1 + 9\frac{1}{3}x_2$, é $y_1 = 0$ e $y_2 = 5$. O segmento de reta que une os pontos x^1 e y é então dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + (1 - \alpha)x_1^1 = 3\frac{1}{3}(1 - \alpha), \\ x_2 &= \alpha y_2 + (1 - \alpha)x_2^1 = 5\alpha, \end{aligned}$$

com α variando entre 0 e 1. O valor ótimo de α sobre o segmento de reta é $\alpha = \frac{7}{15}$, de modo que o próximo ponto é $x_1^2 = 1\frac{7}{9}$ e $x_2^2 = 2\frac{1}{3}$.

A Figura 2.4 ilustra esses dois passos do algoritmo e indica os próximos pontos x^4 , x^5 e x^6 (solução ótima) que são gerados.

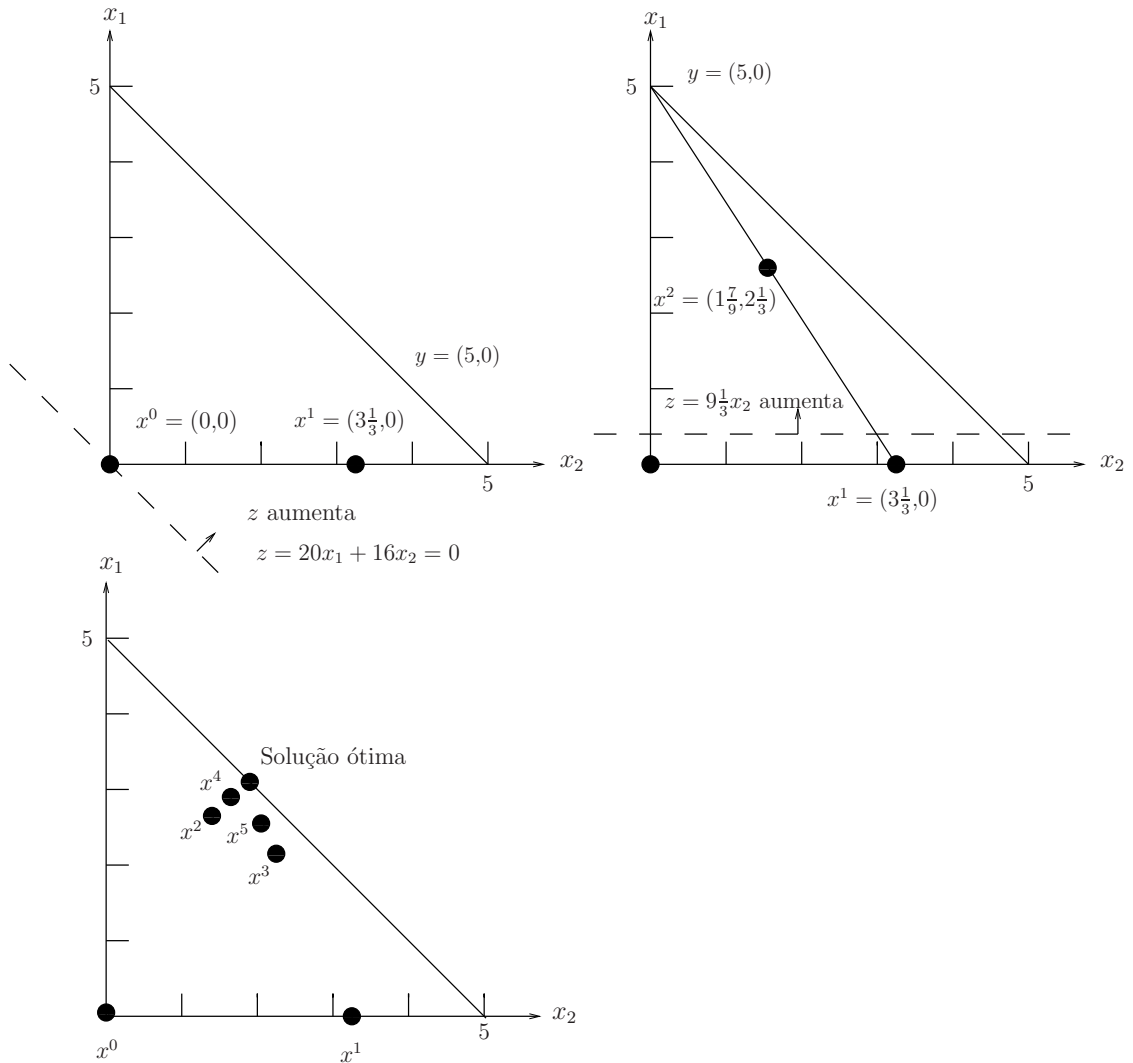


Figura 2.4: Exemplo do algoritmo Frank-Wolfe

2.4.1 Comentários finais

Neste capítulo foram abordados os principais conceitos teóricos e fundamental matemático básicos necessários para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho, dentre

eles: estabilidade no sentido de Lyapunov, mais especificamente: estabilidade quadrática, estabilidade de sistemas com atraso nos estados, função de Lyapunov-Krasovskii, estabilidade entrada-estado e estimativa do ganho ℓ_2 ; incertezas politópicas; saturação de atuadores, mais especificamente: modelagem e problema de *anti-windup* e algoritmo de Frank-Wolfe.

Tolerância e atenuação à perturbação

Neste capítulo são apresentados os resultados relacionados com a síntese de controladores do tipo realimentação de estados.

3.1 Formulação do problema

Seja o sistema incerto discreto no tempo com atraso presente nos estados e entradas saturantes, dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-\tau_k} + B(\alpha_k)\text{sat}(v_k) + B_w(\alpha_k)\omega_k, \\ y_k &= C_y x_k, \\ z_k &= C_z x_k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

sujeito à condição inicial $\varphi_{\bar{\tau},0} = \{x_{-\bar{\tau}}, x_{-\bar{\tau}+1}, \dots, x_0\}$. Nesse sistema, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados no instante k , $v_k \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle no instante k , $\text{sat}(v_k)$ é uma função saturação vetorial descentralizada clássica, dada por:

$$\text{sat}(v_k)_{(\ell)} = \begin{cases} \bar{v}_{(\ell)}, & \text{se } v_{k(\ell)} > \bar{v}_{(\ell)} \\ v_{k(\ell)}, & \text{se } \underline{v}_{(\ell)} \leq v_{k(\ell)} \leq \bar{v}_{(\ell)} \\ \underline{v}_{(\ell)}, & \text{se } v_{k(\ell)} < \underline{v}_{(\ell)} \end{cases} \tag{3.2}$$

sendo $\underline{v}_{(\ell)}$ e $\bar{v}_{(\ell)}$, $\ell = 1, \dots, m$, os limites mínimo e máximo que podem ser aplicados pelo ℓ^{th} atuador, $\omega_k \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de perturbação no instante k , pertencente ao conjunto $\mathcal{W}$ dado em (2.30), e repetido aqui por conveniência

$$\mathcal{W} = \{\omega_k \in \mathbb{R}^q : \|\omega_k\|_2^2 \leq \delta^{-1}\}, \tag{3.3}$$

com $\delta^{-1} \in R_+$ representando o limite de energia da perturbação, e $y_k \in \mathbb{R}^p$ e $z_k \in \mathbb{R}^l$ são as saídas regulável e mensurável. O atraso τ_k é variante no tempo e assume valores no intervalo $0 \leq \tau_k \leq \bar{\tau}$. As matrizes $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_d(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_y(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $C_z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ são incertas e pertencentes a um conjunto

politópico dado pela combinação convexa de N vertices conhecidos, isto é,

$$M(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} M_i \quad (3.4)$$

em que α_k é um vetor de parâmetros variante no tempo, pertencente ao simplex unitário:

$$\Xi \triangleq \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} = 1 \text{ e } \alpha_{k,(i)} \geq 0, \ i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3.5)$$

Neste trabalho, não foram impostos limites na taxa de variação de α_k , como visto, por exemplo, em (Oliveira and Peres, 2009).

Para a estabilização do sistema representado por (3.1)-(3.5), foi investigada a seguinte lei de controle independente do atraso:

$$v_k = \mathbb{K} \bar{x}_k, \quad (3.6)$$

em que $\bar{x}_k$ é o vetor de estados aumentado dado por:

$$\bar{x}_k = [x_k^T \ x_{k-1}^T \ \dots \ x_{k-\bar{\tau}}^T]^T \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n} \quad (3.7)$$

e $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{m \times (\bar{\tau}+1)n}$ é uma matriz de ganho estático, que pode assumir as seguintes configurações:

$$\mathbb{K} = [K_0 \ 0 \ \dots \ 0], \quad (3.8a)$$

$$\mathbb{K} = [K_0 \ 0 \ \dots \ K_{\bar{\tau}}], \quad (3.8b)$$

$$\mathbb{K} = [K_0 \ K_1 \ \dots \ K_{\bar{\tau}}], \quad (3.8c)$$

em que $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 0, \dots, \bar{\tau}$.

Substituindo os ganhos (3.8a)-(3.8c) em (3.6) pode-se obter as seguintes leis de controle:

$$\begin{aligned} v_k &= K_0 x_k, \\ v_k &= K_0 x_k + K_{\bar{\tau}} x_{k-\bar{\tau}}, \\ v_k &= \sum_{i=0}^{\bar{\tau}} K_i x_{k-i}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Essas formas distintas descartam o conhecimento em tempo real de τ_k e, assim, são chamadas de independentes do atraso. Além disso, sua aplicação em processos reais é mais fácil do que as leis de controle dependentes do atraso, como por exemplo: $v_k = K_0 x_k + K_{\bar{\tau}} x_{k-\tau_k}$, que requer o conhecimento em tempo real do valor de τ_k .

Sendo assim, um dos problemas a ser investigado neste trabalho é descrito como:

Problema 3.1 *Dado o sistema representado por (3.1)-(3.5), determine o ganho de controle robusto $\mathbb{K}$, que garanta para um conjunto de condições iniciais $\mathcal{R}_0$ e um conjunto de*

sinais de perturbação $\mathcal{W}$ admissíveis a estabilidade entrada-estado do sistema em malha-fechada. Adicionalmente, o controlador por realimentação de estados deve garantir um certo limite superior do ganho ℓ_2 entre a perturbação ω_k e a saída regulada z_k .

É importante destacar, que uma questão inerente ao Problema 3.1 é a estimação e maximização do domínio de atração da origem do sistema em malha-fechada.

3.2 Resultados Auxiliares

Seguindo a abordagem proposta por Hetel et al. (2008), o sistema representado por (3.1)-(3.5) sob a lei de controle (3.6), pode ser reescrito, através de (3.7), como o seguinte sistema incerto aumentado e chaveado pelo valor do atraso τ_k :

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1} &= \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) \text{sat}(v_k) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k, \\ y_k &= \mathbb{C}_y \bar{x}_k, \\ z_k &= \mathbb{C}_z \bar{x}_k,\end{aligned}\tag{3.10}$$

em que

$$\mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A(\alpha_k) + \Gamma_0(\alpha_k, \tau_k)}{\mathbf{I}_{n\bar{\tau}}} & \begin{array}{c} \Gamma_1(\alpha_k, \tau_k) \quad \cdots \quad \Gamma_{\bar{\tau}-1}(\alpha_k, \tau_k) \end{array} \\ \hline \mathbf{0}_{n\bar{\tau} \times n} & \Gamma_{\bar{\tau}}(\alpha_k, \tau_k) \end{array} \right],$$

com

$$\Gamma_i(\alpha_k, \tau_k) = \begin{cases} A_d(\alpha_k), & i = \tau_k \\ \mathbf{0}_{n \times n}, & i \neq \tau_k \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, \bar{\tau},$$

$$\mathbb{B}(\alpha_k) = [B^T(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{m \times n\bar{\tau}}]^T, \text{ e } \mathbb{B}_w(\alpha_k) = [B_w^T(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{p \times n\bar{\tau}}]^T, \mathbb{C}_y(\alpha_k) = [C_y(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{p \times n\bar{\tau}}] \text{ e } \mathbb{C}_z(\alpha_k) = [C_z(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{l \times n\bar{\tau}}].$$

Considere a lei de controle (3.6)-(3.8) aplicada ao sistema representado por (3.10), de forma que

$$\bar{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) \text{sat}(\mathbb{K} \bar{x}_k) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k,\tag{3.11}$$

Somando e subtraindo $\mathbb{B}(\alpha_k) \mathbb{K}(\alpha_k) \bar{x}_k$ ao lado direito da equação acima, tem-se que

$$\bar{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) \text{sat}(\mathbb{K} \bar{x}_k) + \mathbb{B}(\alpha_k) \mathbb{K} \bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha_k) \mathbb{K} \bar{x}_k + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k,\tag{3.12}$$

ou ainda

$$\bar{x}_{k+1} = (\mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) \mathbb{K} \bar{x}_k) - \mathbb{B}(\alpha_k) (\mathbb{K} \bar{x}_k - \text{sat}(\mathbb{K} \bar{x}_k)) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k,\tag{3.13}$$

Com o auxílio da não-linearidade do tipo zona-morta, descrita na Seção 2.3.1 e repetida aqui por conveniência,

$$\Psi(v_k) = \Psi(\mathbb{K} \bar{x}_k) = \mathbb{K} \bar{x}_k - \text{sat}(\mathbb{K} \bar{x}_k),\tag{3.14}$$

(3.13) resulta em

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha_k) \Psi(\mathbb{K}(\alpha_k) \bar{x}_k) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k, \quad (3.15)$$

com $\bar{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau_k) = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) + \mathbb{B}(\alpha_k) \mathbb{K}(\alpha_k)$.

A condição de setor generalizada, proposta em (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 2005) e enunciada no Lema 2.1, é utilizada para obtenção dos principais resultados desse trabalho. Assim, se $\bar{x}_k \in \mathbb{S}$, com

$$\mathbb{S} \triangleq \{ \bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n} : |(\mathbb{K} - G) \bar{x}_k| \leq v_0 \}, \quad (3.16)$$

$\bar{v} = -\underline{v} = v_0 > 0$ e matriz $G \in \mathbb{R}^{p \times (\bar{\tau}+1)n}$, então a relação

$$\Psi(\mathbb{K} \bar{x}_k)^T \mathbb{T} [\Psi(\mathbb{K} \bar{x}_k) - G \bar{x}_k] \leq 0. \quad (3.17)$$

é verificada para qualquer matriz diagonal definida positiva $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

A estabilidade entrada-estado do sistema representado por (3.1)-(3.5) sob a lei de controle (3.6)-(3.8), é investigada aqui com o auxílio da teoria de Lyapunov-Krasovskii, sendo utilizada para isso a candidata à função de Lyapunov

$$\left. \begin{aligned} V(\varphi(\bar{\tau}, k), \alpha_k, \tau_k) &: \mathbb{R}^{n(\tau+1)} \times \Xi \times \{0, \dots, \bar{\tau}\} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ V(\varphi(\bar{\tau}, 0), \alpha_k, \tau_k) &= 0 \quad \forall \alpha_k \in \Xi, \text{ e } \tau_k \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

associada ao respectivo conjunto de nível, para $0 < \mu < \infty$, definido por:

$$\mathcal{L}_V(\mu) = \{ \bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1)} : V(\varphi(\bar{\tau}, k), \alpha_k, \tau_k) \leq \mu^{-1}, \quad \forall \alpha_k \in \Xi, \quad \forall \tau_k \in \{0, \dots, \bar{\tau}\} \}. \quad (3.19)$$

No caso, considerou-se (3.18) igual a:

$$V(\varphi(\bar{\tau}, k), \alpha_k, \tau_k) = \bar{x}_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k, \quad (3.20)$$

em que

$$W(\alpha_k, \tau_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,(i)} W_{i\tau_k}, \quad \alpha_k \in \Xi, \quad \tau_k \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}. \quad (3.21)$$

com $W_{i\tau_k} = W_{i\tau_k}^T \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)} > \mathbf{0}$. Cabe ressaltar aqui, que a candidata à função de Lyapunov (3.20)-(3.21) difere da utilizada por Hetel et al. (2008), dada em (2.26), mapeando, portanto, de forma diferente os estados em $\mathbb{R}^+$.

O cálculo do conjunto de nível $\mathcal{L}_V(\mu)$ para a função (3.20)-(3.21) pode ser feito como exposto no seguinte Lema adaptado de (Jungers and Castelan, 2011, Lemma 4).

Lema 3.1 *O conjunto de nível $\mathcal{L}_V(\mu)$ para (3.20)-(3.21) pode ser calculado como*

$$\mathcal{L}_V(\mu) = \bigcap_{\substack{\tau_k \in \{0, \dots, \bar{\tau}\} \\ \alpha_k \in \Xi}} \mathcal{E}(W(\alpha_k, \tau_k)^{-1}, \mu) = \bigcap_{\substack{\tau \in \{0, \dots, \bar{\tau}\} \\ i \in \{1, \dots, N\}}} \mathcal{E}(W_{i\tau}^{-1}, \mu), \quad (3.22)$$

em que $\mathcal{E}(W_{i\tau}^{-1}, \mu)$ são conjuntos elipsoidais definidos por

$$\mathcal{E}(W_{i\tau}^{-1}, \mu) = \{\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{(\bar{\tau}+1)n}; \bar{x}_k^T W_{i\tau}^{-1} \bar{x}_k \leq \mu^{-1}\}, \quad (3.23)$$

para $i = \{1, \dots, N\}$ e $\tau \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$.

Os conjuntos de nível serão calculados, com o auxílio do Lema 3.1, para fornecer as estimativas da região de atração e da região de condições iniciais admissíveis do sistema (3.15), denominadas $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{R}_{\mathcal{E}0} \subset \mathcal{R}_0$, respectivamente.

3.3 Projeto do controlador por realimentação de estados

Nesta Seção são apresentadas as condições desenvolvidas para tratar o Problema 3.1, no qual são considerados tanto o caso com incertezas quanto o caso precisamente conhecido.

3.3.1 Caso com incertezas

De forma semelhante à desenvolvida por Silva (2016), será considerado aqui o tratamento de taxas limitadas para a variação do atraso. Com isso, espera-se, por exemplo, obter uma maior região de atração $\mathcal{E}(W_{i\tau}, 1)$.

Assumindo, portanto, que a variação do atraso em amostras consecutivas seja limitada por:

$$|\tau_{k+1} - \tau_k| \leq \Delta\tau_{\max}. \quad (3.24)$$

Tem-se a partir de (3.24) que se $\tau_k = \tau$, então o valor do atraso no próximo instante é limitado por $\tau^+ = \tau_k \pm \Delta\tau_{\max}$, sendo $\Delta\tau_{\max}$ o módulo da máxima variação do atraso. Em outros termos:

$$0 \leq \tau - \Delta\tau_{\max} \leq \tau_{k+1} \leq \tau + \Delta\tau_{\max} \leq \bar{\tau}.$$

Portanto, pode-se generalizar essa idéia definindo o conjunto $\mathcal{C}_{\tau_k}(\tau)$ que contém todos os possíveis valores que o atraso pode assumir no próximo instante dado o seu valor no instante atual $\tau_k = \tau$:

$$\mathcal{C}_{\tau_k}(\tau) = \{\tau^+ \in \mathbb{I} : \max(0, \tau - \Delta\tau_{\max}) \leq \tau^+ \leq \min(\bar{\tau}, \tau + \Delta\tau_{\max})\}. \quad (3.25)$$

em que τ^+ representa τ_{k+1} . Por exemplo, se $\bar{\tau} = 5$, $\tau_k = 1$, e $\Delta\tau_{\max} = 2$, tem-se que $\mathcal{C}_{\tau_k}(1) = \{0, 1, 2, 3\}$. É interessante notar as possibilidades impostas pela formulação do conjunto $\mathcal{C}_{\tau_k}(\tau)$: se $\Delta\tau_{\max} = 0$, recupera-se o caso incerto e com atraso invariante no tempo, enquanto que $\Delta\tau_{\max} = \bar{\tau}$ recupera-se o caso usualmente tratado na literatura em

que o atraso pode assumir qualquer valor entre seu valor mínimo (usualmente 1) e máximo ($\bar{\tau}$).

Posto isso, para sintetizar um controlador por realimentação de estados da forma (3.6)-(3.8), que garanta que as trajetórias do sistema representado por (3.15) sejam limitadas para qualquer perturbação pertencente a (3.3) e, em adição, garanta um certo limite superior do ganho ℓ_2 entre a perturbação ω_k e a saída regulada z_k , ou seja, a solução do Problema 3.1, segue o seguinte Teorema:

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_{i,\tau} \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $i = 1, \dots, N$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, e escalares positivos μ , δ e γ , tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{j,\tau^+} & \mathbb{A}_{i,\tau}U + \mathbb{B}_iY & -\mathbb{B}_iS & \mathbb{B}_{wi} & \mathbf{0} \\ \star & W_{i,\tau} - U^T - U & Z^T & \mathbf{0} & (\mathbb{C}_{zi}U)^T \\ \star & \star & -2S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

$i, j = 1, \dots, N; \quad \tau = 1, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

$$\begin{bmatrix} W_{i,\tau} - U^T - U & Y_{(\ell)}^T - Z_{(\ell)}^T \\ \star & -\mu v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

$i = 1, \dots, N; \quad \tau = 1, \dots, \bar{\tau}; \quad \ell = 1, \dots, m,$

e

$$\mu - \delta < 0. \quad (3.28)$$

são factíveis, então o ganho da lei de controle (3.6), calculado a partir

$$\mathbb{K} = YU^{-1}, \quad (3.29)$$

é tal que

1. Para $\omega_k \neq 0$, com $\omega_k \in \mathcal{W}$,

(a) as trajetórias do sistema (3.15) não deixam o conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, para todo $\bar{x}_0$ pertencente ao conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{E}0} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\beta) \subset \mathcal{R}_0$, com $\beta = (\mu^{-1} - \delta^{-1})^{-1}$, para todo $k \geq 0$;

(b) $\|z_k\|_2^2 < \gamma(\|\omega_k\|_2^2 + V(\varphi_{\bar{\tau},0}, \alpha_0, \tau_0))$;

2. Para $\omega_k = 0$, o conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (3.15), para todo $k \geq 0$.

Prova: Se (3.26) é verificado, então a positividade de W_{i,τ^+} é garantida e, assim, através de (3.20)-(3.21), tem-se que $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \alpha_k, \tau_k) > 0$ para $\bar{x}_0 \neq 0$. Além disso, U é regular, isto é, possui inversa. Desta forma, multiplicando o lado esquerdo de (3.26) por $\alpha_{k,(i)}$ e somando

para $i = 1, \dots, N$, e, também, substituindo Y e Z por $\mathbb{K}U$ e GU , respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha_k^+, \tau^+) & \mathbb{A}(\alpha_k, \tau)U + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K}U & -\mathbb{B}(\alpha_k)S & \mathbb{B}_w(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & W(\alpha_k, \tau) - U^T - U & (GU)^T & \mathbf{0} & (\mathbb{C}_z(\alpha_k)U)^T \\ \star & \star & -2S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

em que α^+ representa α_{k+1} .

Usando o fato de que $-U^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)U \leq W(\alpha_k, \tau) - U^T - U$, veja (Geromel et al., 2007), e considerando a regularidade de U , pode-se pré- e pós-multiplicar a inequação resultante por

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & S^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e sua transposta para obter

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha_k^+, \tau^+) & \mathbb{A}(\alpha_k, \tau) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K} & -\mathbb{B}(\alpha_k) & \mathbb{B}_w(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & -W^{-1}(\alpha_k, \tau) & G^T S^{-1} & \mathbf{0} & \mathbb{C}_z(\alpha_k)^T \\ \star & \star & -2S^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se que

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha_k^+, \tau^+) & \mathbb{A}(\alpha_k, \tau) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K} & -\mathbb{B}(\alpha_k) & \mathbb{B}_w(\alpha_k) \\ \star & -W^{-1}(\alpha_k, \tau) + \gamma^{-1}\mathbb{C}_z(\alpha_k)^T \mathbb{C}_z(\alpha_k) & G^T S^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -2S^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Aplicando, novamente, o complemento de Schur e fazendo $\tilde{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau) = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau) + \mathbb{B}(\alpha_k)\mathbb{K}$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}(\alpha_k, \tau) + \gamma^{-1}\mathbb{C}_z(\alpha_k)^T \mathbb{C}_z(\alpha_k) & G^T S^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & -2S^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau)^T \\ -\mathbb{B}(\alpha_k)^T \\ \mathbb{B}_w(\alpha_k)^T \end{bmatrix} W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+) \\ \times [\tilde{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau) \quad -\mathbb{B}(\alpha_k) \quad \mathbb{B}_w(\alpha_k)] < \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

Pré- e pós-multiplicando (3.30) por $X_k^T = [\bar{x}_k^T \quad \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T \quad \omega_k^T]^T$ e X_k , respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} & -\bar{x}_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)\bar{x}_k + \gamma^{-1}\bar{x}_k^T \mathbb{C}_z(\alpha_k)^T \mathbb{C}_z(\alpha_k)\bar{x}_k + 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1}G\bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1}\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) \\ & - \omega_k^T \omega_k + [\bar{x}_k^T \tilde{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau)^T \quad -\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T \mathbb{B}(\alpha_k)^T \quad \omega_k^T \mathbb{B}_w(\alpha_k)^T] W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+) \\ & \times [\tilde{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau)\bar{x}_k \quad -\mathbb{B}(\alpha_k)\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) \quad \mathbb{B}_w(\alpha_k)\omega_k] < \mathbf{0}. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Considerando $2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1} G\bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1} \Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) = -2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1} (\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k)$, e substituindo $\tilde{\mathbb{A}}(\alpha_k, \tau)\bar{x}_k - \mathbb{B}(\alpha_k)\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) + \mathbb{B}_w(\alpha_k)\omega_k$ e $\mathbb{C}_z(\alpha_k)\bar{x}_k$ por $\bar{x}_{k+1}$ e z_k , respectivamente, de acordo com (3.15), pode-se reescrever (3.31) como

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1}^T W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+) \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau) \bar{x}_k - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T S^{-1} (\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) \\ - \omega_k^T \omega_k + \gamma^{-1} z_k^T z_k < 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Chamando $T = S^{-1}$, assumindo que $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k) = \bar{x}_{k+1}^T W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+) \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau) \bar{x}_k$, ver (3.20)-(3.21), e que $x_k \in \mathbb{S}$, então tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k) - \omega_k^T \omega_k + \gamma^{-1} z_k^T z_k \leq \\ \Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k) - 2\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k)^T T (\Psi(\mathbb{K}\bar{x}_k) - G\bar{x}_k) - \omega_k^T \omega_k + \gamma^{-1} z_k^T z_k < 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Portanto, conclui-se que a factibilidade de (3.26) garante a positividade de (3.20)-(3.21), a negatividade de $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k)$ e pelo Lema 2.1, que $\bar{x}_k \in \mathbb{S}$. Assim, através de Lyapunov-Krasovskii, é garantido que as trajetórias do sistema (3.15) em malha-fechada sobre a lei de controle (3.6)-(3.8) sejam limitadas para qualquer perturbação satisfazendo (2.8) e, em adição, tem-se um limite superior para o ganho ℓ_2 entre a perturbação e a saída regulada.

Se (3.27) também é verificada, então multiplicando (3.27) por $\alpha_{k(i)}$ e somando para $i = 1, \dots, N$, substituindo Y e Z por $\mathbb{K}U$ e GU , respectivamente e, novamente, usando o fato de que $-U^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)U \leq W(\alpha_k, \tau) - U^T - U$, veja (Geromel et al., 2007), tem-se que (3.27) é um majorante de

$$\begin{bmatrix} -U^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)U & (\mathbb{K}_{(\ell)}U - G_{(\ell)}U)^T \\ \star & -\mu v_0^2(\ell) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

Pré- e pós-multiplicando (3.34) por $\text{diag}\{U^{-T}, 1\}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}(\alpha_k, \tau) & (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T \\ \star & -\mu v_0^2(\ell) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Aplicando o completo de Schur e pré- e pós-multiplicando (3.35) por $\bar{x}_k^T$ e $\bar{x}_k$, conclui-se que

$$-\bar{x}_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \bar{x}_k^T (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T (\mu v_0^2(\ell))^{-1} (\mathbb{K}_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \bar{x}_k \leq 0. \quad (3.36)$$

Portanto, a inequação (3.27) garante que $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \subseteq \mathbb{S}$, assim, qualquer trajetória do sistema em malha-fechada partindo de $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ permanece em $\mathbb{S}$. $\blacksquare$

Considere que o sistema (3.15) não esteja sujeito a nenhuma perturbação externa, ou seja, $\omega_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Dessa forma, o seguinte Corolário segue como uma particularidade do Teorema 3.1.

Corolário 3.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_{i,\tau} \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $i = 1, \dots, N$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, e escalar positivo μ , tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{j,\tau^+} & \mathbb{A}_{i,\tau}U + \mathbb{B}_iY & -\mathbb{B}_iS \\ \star & W_{i,\tau} - U^T - U & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

$i, j = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

e (3.27) são factíveis, então o ganho da lei de controle (3.6), calculado a partir de (3.29), garante que a origem do sistema em malha-fechada (3.15) é robustamente assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\bar{x}_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

A prova do Corolário 3.1 segue as mesmas etapas da prova do Teorema 3.1, porém deve-se omitir os termos referentes a perturbação.

Além disso, o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 ainda podem ser reescritos de forma a não considerar a taxa de variação do atraso. Neste caso, basta apenas considerar que $\tau^+ \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$ nas condições estabelecidas.

É importante destacar aqui que as diferentes configurações assumidas pela matriz de ganho (3.8) podem ser recuperadas a partir de (3.29) impondo certas restrições as matrizes Y e U . Com relação à matriz de ganho $[K_0 \ K_1 \ \dots \ K_{\bar{\tau}}]$, equação (3.8c), tem-se que a mesma é obtida diretamente do Teorema 3.1. Já para encontrar a matriz de ganho $[K_0 \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]$, equação (3.8a), deve-se considerar que

$$\begin{aligned} Y &= [Y_{0,p \times n} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}], \\ U &= \text{diag}\{U_{0,n \times n}, U_{1,n\bar{\tau} \times n\bar{\tau}}\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por fim, para calcular a matriz de ganho $[K_0 \ \mathbf{0} \ \dots \ K_{\bar{\tau}}]$, equação (3.8b), estabelece-se que

$$\begin{aligned} Y &= [Y_{0,p \times n} \ \mathbf{0} \ \dots \ Y_{\bar{\tau},p \times n}], \\ U &= \text{diag}\{U_{0,n \times n}, U_{1,n(\bar{\tau}-1) \times n(\bar{\tau}-1)}, U_{2,n \times n}\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.3.2 Caso precisamente conhecido

O problema tratado anteriormente pode ser simplificado se substituirmos o sistema incerto por um sistema precisamente conhecido.

Corolário 3.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_{\tau} \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$,*

$Z \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, e escalares positivos μ e δ , tal que

$$\begin{bmatrix} -W_{\tau^+} & \mathbb{A}_\tau U + \mathbb{B}Y & -\mathbb{B}S & \mathbb{B}_w & Z \\ \star & W_\tau - U^T - U & Z^T & \mathbf{0} & (\mathbb{C}_z U)^T \\ \star & \star & -2S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

$\tau = 1, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

$$\begin{bmatrix} W_\tau - U^T - U & Y_{(\ell)}^T - Z_{(\ell)}^T \\ \star & -\mu v_{0(\ell)}^2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.41)$$

$\tau = 1, \dots, \bar{\tau}; \quad \ell = 1, \dots, m,$

e

$$\mu - \delta < 0. \quad (3.42)$$

são factíveis, então o ganho da lei de controle (3.6), calculado a partir

$$\mathbb{K} = YU^{-1}, \quad (3.43)$$

é tal que

1. Para $\omega_k \neq 0$, com $\omega_k \in \mathcal{W}$,

(a) as trajetórias do sistema (3.15) não deixam o conjunto $\mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(\mu) \subset \mathcal{R}_\mathcal{A}$, para todo $\bar{x}_0$ pertencente ao conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{E}0} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(\beta) \subset \mathcal{R}_0$, com $\beta = (\mu^{-1} - \delta^{-1})^{-1}$, para todo $k \geq 0$;

(b) $\|z_k\|_2^2 < \gamma(\|\omega_k\|_2^2 + V(\varphi_{\bar{\tau},0}, \alpha_0, \tau_0))$;

2. Para $\omega_k = 0$, o conjunto $\mathcal{R}_\mathcal{E}$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (3.15), para todo $k \geq 0$.

Considere, novamente, que o sistema (3.15) não esteja sujeito a nenhuma perturbação externa, ou seja, $\omega_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Assim sendo, o seguinte Corolário segue como uma particularidade do Corolário 3.2 para o caso precisamente conhecido.

Corolário 3.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W_\tau \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{n(\bar{\tau}+1) \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{\tau}+1)}$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, e escalar positivo μ , tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{\tau^+} & \mathbb{A}_\tau U + \mathbb{B}Y & -\mathbb{B}S \\ \star & W_\tau - U^T - U & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.44)$$

$\tau = 1, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

e (3.41) são factíveis, então o ganho da lei de controle (3.6), calculado a partir de (3.43), garante que a origem do sistema em malha-fechada (3.15) é robustamente assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\bar{x}_0 \in \mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_\mathcal{V}(\mu) \subset \mathcal{R}_\mathcal{A}$.

Além disso, tem-se que os Corolários 3.2 e 3.3 ainda podem ser reescritos de forma a não considerar a taxa de variação do atraso. Neste caso, basta apenas considerar que $\tau^+ \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$ nas condições estabelecidas.

3.4 Procedimentos de Otimização

Os problemas de síntese de controladores e estimação da região de atração apresentados anteriormente, podem ser investigados sob diferentes procedimentos de otimização. Algumas dessas possibilidades são abordadas em sequência. Embora alguns deles possuem objetivos convencionalmente usados em sistemas de controle com saturação, melhorias relevantes serão evidenciadas como forma de alcançar melhores estimativas dos conjuntos $\mathcal{R}_{\mathcal{E}_0}$ e $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$.

Maximização da estimativa da região de atração: Considere que o sistema representado por (3.15) não esteja sujeito a nenhuma perturbação externa, ou seja, $\omega_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Assim sendo, o interesse está em determinar o ganho de controle (3.8) que maximiza a estimativa da região de atração, $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Diferentes propostas de investigação podem ser formuladas. Nos estudos realizados neste trabalho foram selecionadas as três propostas que seguem.

1. Propõe-se maximizar o volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(R^{-1}, 1)$, como definido em (3.23), tal que $\mathcal{E}(R^{-1}, 1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu)$, cuja inclusão pode ser garantida por:

$$\mu - 1 \leq 0, \text{ e } \begin{bmatrix} R & R \\ \star & W_{i,\tau} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}. \quad (3.45)$$

De acordo com Boyd et al. (1994), o volume de $\mathcal{E}(R^{-1}, 1)$ é proporcional a $(\det(R))^{1/2}$; então o problema de maximização da estimativa da região de atração pode ser posto como $\max \ln \det(R)$, uma vez que a função $\ln(\cdot)$ é côncava e crescente com seu argumento. Esse problema é, portanto, reformulado como o seguinte problema de minimização:

$$\mathcal{J}_{1,1} : \begin{cases} \min & -\ln \det(R) \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.27), (3.37), e (3.45).} \end{cases} \quad (3.46)$$

2. Propõe-se maximizar o volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(R, 1)$, como definido em (3.23), tal que $\mathcal{E}(R, 1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu)$, cuja inclusão pode ser assegurada por:

$$\mu - 1 \leq 0, \text{ e } \begin{bmatrix} R & \mathbf{I} \\ \star & W_{i,\tau} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}. \quad (3.47)$$

Como o volume de $\mathcal{E}(R, 1)$ é proporcional a $-\ln \det(R)$, veja (Boyd et al., 1994), então o problema de maximização da estimativa da região de atração se torna:

$$\mathcal{J}_{1,2} : \begin{cases} \min & \ln \det(R) \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.27), (3.37), e (3.47).} \end{cases} \quad (3.48)$$

É possível perceber, que a principal diferença entre os procedimentos de otimização detalhados nos tópicos anteriores (1 e 2) está na definição do conjunto elipsoidal criado. Essa diferença implica diretamente na convexidade da função objetivo determinada, sendo que no primeiro caso tem-se uma função convexa e no segundo uma função côncava.

3. Propõe-se minimizar o volume de $W_{i,\tau}$, o que significa maximizar o volume de $W_{i,\tau}^{-1}$ e, por consequência, o volume da interseção. Como há várias matrizes $W_{i,\tau}$, então o problema de maximização da estimativa da região de atração pode ser tratado como:

$$\mathcal{J}_{1,3} : \begin{cases} \min & \sum_{i=1, \dots, N} -\ln \det(W_{i,\tau}) \\ & \tau = 1, \dots, \bar{\tau} \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.27) e (3.37).} \end{cases} \quad (3.49)$$

Maximização da tolerância à perturbação: Para um dado conjunto de estados iniciais admissíveis, o interesse está em determinar o ganho de controle (3.8) que maximiza o conjunto de perturbações admissíveis $\mathcal{W}$, definido em (3.3), para o qual as trajetórias do sistema em malha-fechada são garantidamente limitadas.

Em particular, se $\bar{x}_0 = \mathbf{0}$, isto é o sistema está em equilíbrio, segue que $\delta^{-1} = \mu^{-1}$, e o problema de maximização do conjunto $\mathcal{W}$ pode ser resolvido através de:

$$\mathcal{J}_2 : \begin{cases} \min & \mu \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.26) e (3.27).} \end{cases} \quad (3.50)$$

Em (Tarbouriech et al., 2011, pp. 73), por exemplo, podem ser encontrados procedimentos de otimização similares.

Minimização do ganho ℓ_2 : Para um dado limite de energia das perturbações, δ^{-1} , o interesse está em determinar o ganho de controle (3.8) que minimiza o limite superior do ganho ℓ_2 de ω_k em relação a z_k .

Considerando que a condição inicial do sistema é nula ($\bar{x}_0 = \mathbf{0}$), o problema de minimização do ganho ℓ_2 pode ser solucionado por meio de:

$$\mathcal{J}_3 : \begin{cases} \min & \gamma \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.26) e (3.27).} \end{cases} \quad (3.51)$$

Minimização do conjunto alcançável: Outro caso interessante ocorre quando o limite de energia da perturbação, δ^{-1} , é fornecido e o objetivo é encontrar o ganho de controle (3.8) que minimiza o volume do conjunto alcançável $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu)$ do sistema perturbado a partir de uma condição inicial $\bar{x}_0 = \mathbf{0}$. Para isso, propõe-se minimizar o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(R^{-1}, 1) \supseteq \mathcal{E}(W^{-1}(\alpha_k, \tau_k), \mu)$, de modo que $R^{-1} - W^{-1}(\alpha_k, \tau_k) \leq \mathbf{0}$ e $1 - \mu \leq 0$. Usando o fato de que para qualquer $X(\alpha_k, \tau_k)$, de dimensões adequadas, é verificado que

$X^T(\alpha_k, \tau_k)W^{-1}(\alpha_k, \tau_k)X^T(\alpha_k, \tau_k) \leq X(\alpha_k, \tau_k) + X^T(\alpha_k, \tau_k) - W(\alpha_k, \tau_k)$ e aplicando o completo de Schur, $R^{-1} - W^{-1}(\alpha_k, \tau_k) \leq \mathbf{0}$ pode ser reescrito como:

$$1 - \mu \leq 0 \text{ e } \begin{bmatrix} W_{i,\tau} - X_{i,\tau} - X_{i,\tau}^T & X_{i,\tau}^T \\ \star & -R \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}. \quad (3.52)$$

em que assume-se que $X(\alpha_k, \tau_k)$ possui a mesma estrutura de $W(\alpha_k, \tau_k)$, dada em (3.21). Portanto, o problema de minimização do conjunto alcançável pode ser investigado por meio de:

$$\mathcal{J}_4 : \begin{cases} \min & \ln(\det(R)) \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.26), (3.28) e (3.52).} \end{cases} \quad (3.53)$$

Observa-se que nos problemas de maximização da tolerância a perturbação e minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_2$ em (3.50) e $\mathcal{J}_3$ em (3.51), todas as variáveis aparecem linearmente nas matrizes e o objetivo é a minimização de um escalar, sendo assim, estes podem ser resolvidas de forma convencional, no qual considera-se a minimização ou maximização direta da função objetivo.

Em contrapartida, os problemas de otimização $\mathcal{J}_{1,\bullet}$ em (3.46) e $\mathcal{J}_4$ em (3.53), que tratam da maximização da estimativa da região de atração e da minimização do conjunto alcançável, respectivamente, envolvem a maximização e minimização de conjuntos elipsoidais. Para resolver esses problemas, são propostas duas formas resolução, sendo a primeira delas a forma convencional e a segunda utilizando o algoritmo de Frank-Wolfe, abordado na Seção 2.4. Com base em (Deaecto and Geromel, 2017), é apresentado em sequência o algoritmo de Frank-Wolfe aplicado ao procedimento $\mathcal{J}_{1,1}$, em que cada um de seus passos é explicado:

ALGORITMO 1: FRANK-WOLFE APLICADO AO PROCEDIMENTO $\mathcal{J}_{1,1}$

- 1. Inicialize as variáveis ϵ (resolução) e $g_{\max}$ (máximo número de iterações), e faça $g = 0$ (índice de iterações) e $R_g = \mathbf{I}$.**
- 2. Resolva o procedimento no passo 3 e faça $R_g = H_g$.**
Nesta etapa, determina-se uma solução inicial.
- 3. Resolva o procedimento de otimização convexa:**

$$\begin{cases} \inf_{W_{i,\tau}, Y, Z, U, S, H_g} & f_g = -\text{trace}\{R_g^{-1}H_g\} \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (3.27), (3.37), } \mu - 1 \leq 0, \text{ e} \\ & \begin{bmatrix} H_g & H_g \\ \star & W_{i,\tau} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \\ & i = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}. \end{cases} \quad (3.54)$$

e determine a solução ótima H_g .

Nesta etapa, determina-se a direção de busca, H_g . Como dito na Seção 2.4, isso é feito através da solução de um problema "próximo" ao $\mathcal{J}_{1,1}$, no qual substituí-se a função

objetivo $\ln \det(R)$ por sua expansão em série de Taylor de primeiro ordem que, segundo Bernstein (2009), é R^{-1} .

4. Através de uma busca unidimensional determine

$$\xi_g = \arg \max_{\xi \in [0,1]} \ln(\det(\xi H_g + (1 - \xi)R_g)),$$

e faça $R_{g+1} = \xi_g H_g + (1 - \xi_g)R_g$, $g = g + 1$.

Nesta etapa, determina-se o passo ξ_g . E em seguida, é realizada uma nova iteração.

5. Repita os passos 3 e 4 até $|f_g - f_{g-1}| \leq \epsilon$ ou $g > g_{\max}$.

Nesta etapa, verifica-se se a condição de parada foi satisfeita ou não. Em caso afirmativo, o algoritmo é finalizado. Caso contrário, repete-se os passos indicados.

Como dito na Seção 2.4, o algoritmo de Frank-Wolfe é aplicado a problemas de programação não-linear com funções convexas. Sendo assim, para tratar o procedimento de otimização $J_{1,2}$, cuja função objetivo é côncava, fez-se uma modificação no algoritmo apresentado. Esta consistia basicamente em considerar $\xi_g = 1$ e, conseqüentemente, $R_{g+1} = H_g$ no passo 4.

Cabe ressaltar, que os procedimentos apresentados anteriormente foram programados em Python na interface Spyder utilizando o pacote PICOS (G. Sagnol, 2012) e o *solver* MOSEK (E. D. Andersen and K. D. Andersen, 1997). Esta escolha se baseou no custo computacional desse *solver*, que é reconhecidamente menor em relação a outros normalmente usados, embora não se encontre comprovação teórica disso (E. D. Andersen, 2013). Além disso, os casos de maior dimensão (aqueles que consideram limites variáveis de taxas de variação do atraso) foram executados no cluster do CEFET-MG, cujo acesso pode ser obtido através do site <https://goo.gl/ZqxHxh>.

Apesar de não se ter um método teórico disponível para o cálculo do custo computacional das condições estabelecidas, na Tabela 3.1 segue a relação do número de variáveis escalares ($\mathcal{K}$) e de linhas de LMIs ($\mathcal{L}$) de cada uma delas.

Tabela 3.1: Valores de $\mathcal{K}$ (variáveis escalares) e $\mathcal{L}$ (linhas de LMIs) para as condições referentes ao cálculo de $\mathbb{K}$.

	$\mathcal{K}$	$\mathcal{L}$
Teorema 3.1	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_1$
Corolário 3.1	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_2$
Corolário 3.2	$\mathcal{K}_2$	$\mathcal{L}_3$
Corolário 3.3	$\mathcal{K}_2$	$\mathcal{L}_4$

com

$$\mathcal{K}_1 = n^2(\bar{\tau} + 1)^2(\bar{\tau}N + 1) + m(2n(\bar{\tau} + 1) + m) + 2;$$

$$\mathcal{K}_2 = n^2(\bar{\tau} + 1)^2(\bar{\tau} + 1) + m(2n(\bar{\tau} + 1) + m) + 1;$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= [2n(\bar{\tau}+1)+m+q+l]N^2[(\bar{\tau}+1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [n(\bar{\tau}+1)+m]N^2\bar{\tau} + 1; \\ \mathcal{L}_2 &= [2n(\bar{\tau}+1)+m]N^2[(\bar{\tau}+1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [n(\bar{\tau}+1)+m]N^2\bar{\tau} + 1; \\ \mathcal{L}_3 &= [2n(\bar{\tau}+1)+m+q+l][(\bar{\tau}+1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [n(\bar{\tau}+1)+m]\bar{\tau} + 1; \\ \mathcal{L}_4 &= [2n(\bar{\tau}+1)+m][(\bar{\tau}+1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [n(\bar{\tau}+1)+m]\bar{\tau} + 1;\end{aligned}$$

em que n é a ordem do sistema, m e l são o número de entradas e entradas exógenas do sistema, respectivamente, q é o número de saídas mensuráveis do sistema, $\bar{\tau}$ é o atraso máximo, N é o número de vértices do politopo e $\Delta\tau_{\max}$ é a taxa de variação máxima entre atrasos de amostragens consecutivas.

3.5 Experimentos numéricos

Nesta Seção as condições desenvolvidas e discutidas ao longo deste capítulo são aplicadas em exemplos. Inicialmente, foi explorado o caso escalar, devido a simplicidade na visualização das restrições. Além disso, mesmo sendo um caso escalar, o exemplo apresentado é suficiente para esclarecer aspectos das técnicas propostas. Em seguida, foi analisado um caso de dimensão 3.

3.5.1 Caso escalar

Considere o seguinte sistema escalar precisamente conhecido:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 2x_k - 0,1x_{k-\bar{\tau}} + 1\text{sat}(v_k) + 0,1\omega_k, \\ z_k &= 0,1x_k,\end{aligned}\tag{3.55}$$

com τ_k pertencente ao intervalo $0 \leq \tau_k \leq 2$ e $|v_k| \leq v_0 = 0,7$.

Maximização da estimativa da região de atração:

Com relação ao procedimento de maximização da estimativa da região de atração $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \mathcal{J}_{1,\bullet}$, existem três opções a serem investigadas, como descrito na Seção 3.4. Para cada uma delas, são mostrados os resultados alcançados usando tanto a forma convencional, enunciada na Seção 3.4, quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-las.

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$ dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,2628 \quad 0,0333 \quad 0,0284],\tag{3.56}$$

logo, $v_k = -1,2628x_k + 0,0333x_{k-1} + 0,0284x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), o método convencional não se aplica, pois trata-se de um problema não-convexo.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,2639 \quad 0,03426 \quad 0,0289], \quad (3.57)$$

logo, $v_k = -1,2639x_k + 0,0342x_{k-1} + 0,0289x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.49) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,2628 \quad 0,0333 \quad 0,0284], \quad (3.58)$$

logo, $v_k = -1,2628x_k + 0,0333x_{k-1} + 0,0284x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,2628 \quad 0,0333 \quad 0,0284], \quad (3.59)$$

logo, $v_k = -1,2628x_k + 0,0333x_{k-1} + 0,0284x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.48) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,2709 \quad 0,0325 \quad 0,0297], \quad (3.60)$$

logo, $v_k = -1,2709x_k + 0,0325x_{k-1} + 0,0297x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.49) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

A fim de comparar as estimativas das regiões de atrações obtidas em cada opção do procedimento $\mathcal{J}_{1,\bullet}$ considerando tanto o método convencional quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-las, utilizou-se uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^3$ para calcular a porcentagem de volume que cada região possui em relação ao volume da maior região entre elas, ou seja, $\mathcal{L}_v/\mathcal{L}_{v_{max}} \times 100\%$.

Por meio dos dados da Tabela 3.2, percebe-se que o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,3}$ solucionado a partir do Algoritmo de Frank-Wolfe obteve a maior estimativa da região de atração do sistema representado por (3.55), sendo esta mostrada na Figura 3.1 juntamente com os limites do conjunto $\mathbb{S}$, definido em (3.16). Ressalta-se que a Figura 3.1 (a) é um *zoom* da 3.1 (b). Além disso, observa-se que os demais apresentaram porcentagens de

Tabela 3.2: Comparação das estimativas das regiões de atrações do sistema representado por (3.55).

Algoritmo	$\mathcal{J}_{1,1}$	$\mathcal{J}_{1,2}$	$\mathcal{J}_{1,3}$
Convencional	94,53%	—	94,37%
Frank-Wolfe	94,52%	94,53%	100%

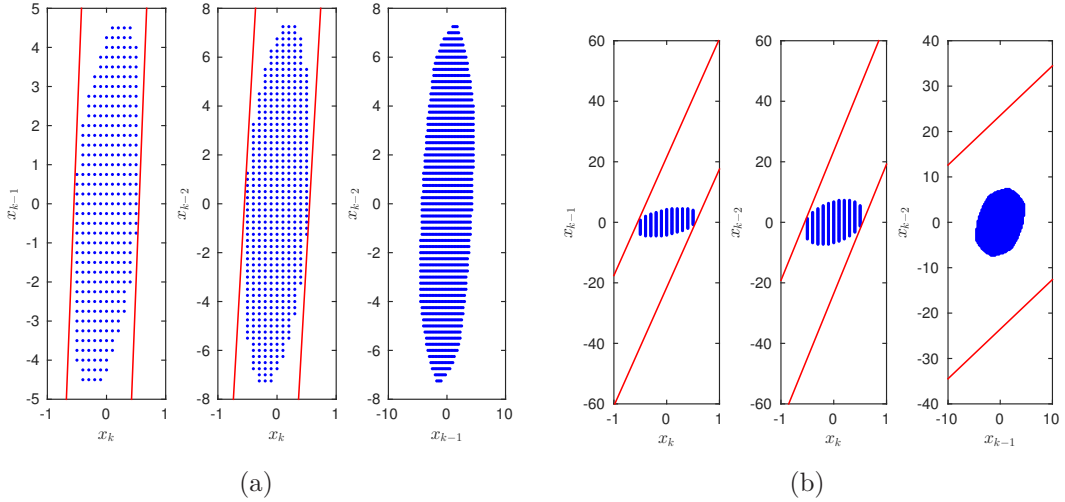


Figura 3.1: Estimativa da região de atração ($\cdot$) e limites do conjunto $\mathbb{S}$ ($-$) do sistema representado por (3.55).

volume bastante próximas. Essa pequena diferença entre elas pode estar relacionada, por exemplo, a grade de pontos escolhida.

Em (Silva, 2016) é proposta a maximização da estimativa da região de atração através da solução de um procedimento de otimização semelhante ao $\mathcal{J}_{1,2}$, no qual tem-se basicamente as mesmas restrições, porém a função objetivo consiste na minimização do traço da matriz R . Resolvendo, através do método convencional, o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,2}$ com a função objetivo utilizada por Silva (2016), a porcentagem de volume da estimativa da região de atração obtida em relação ao caso com maior volume é de 41,17%.

Com base no procedimento que obteve o melhor resultado, investigou-se também a influência da mudança de dois parâmetros do sistema na maximização da estimativa da região de atração.

Primeiro, investigou-se a influência das três configurações que podem ser assumidas pelo ganho do controlador (3.8) na estimativa da região de atração do sistema representado por (3.55). Denominando $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ as estimativas das regiões de atração obtidas considerando os ganho de controle dados em (3.8a), (3.8b) e (3.8c), respectivamente. Na Figura 3.2 são apresentados as interseções de $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ com os planos $x_k \times x_{k-1}$, $x_k \times x_{k-2}$ e $x_{k-1} \times x_{k-2}$. Visualmente, percebe-se que a maior região corresponde ao ganho

$\mathbb{K}_3$, cuja estrutura realimenta todos os estados do sistema, e a menor região ao ganho $\mathbb{K}_1$, cuja estrutura realimenta apenas o estado atual, o que já era esperado. Calculando as razões entre os volumes tem-se que: $\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_3)}/\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_2)} = 1,6236$, $\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_3)}/\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_1)} = 1,9159$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_2)}/\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_1)} = 1,1800$.

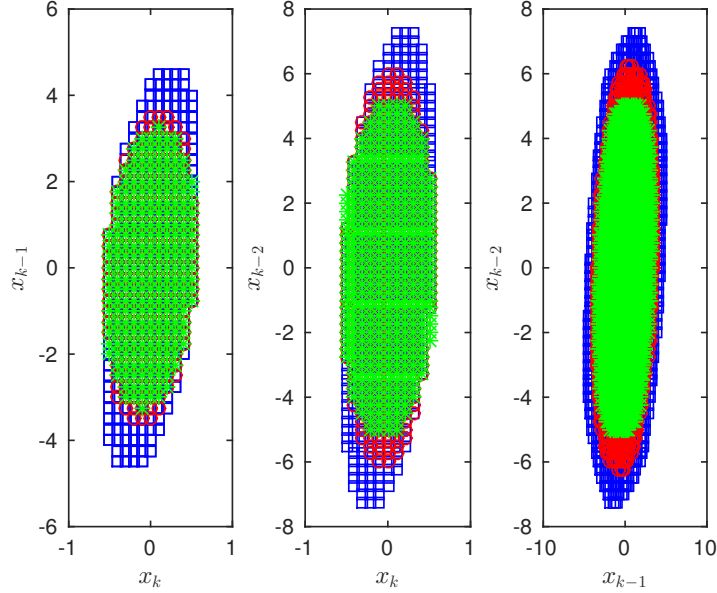


Figura 3.2: Interseções das regiões $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$ (*), $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ (○), e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ (□) do sistema representado por (3.55) com os planos $x_k \times x_{k-1}$, $x_k \times x_{k-2}$ e $x_{k-1} \times x_{k-2}$.

Segundo, investigou-se a influência da limitação da taxa de variação do atraso τ_k na estimativa da região de atração do sistema representado por (3.55) para diferentes valores do atraso máximo. Então, para cada valor de $\bar{\tau} \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, variou-se $\Delta\tau_{\max}$ de 0 a $\bar{\tau}$. Para cada estimativa $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ obtida, calculou-se o aumento percentual de seu volume em relação ao caso de máxima taxa de variação do atraso ($\Delta\tau_{\max} = \bar{\tau}$), ou seja, $R_{\%} = (\mathcal{L}_{\mathcal{V} \Delta\tau_{\max}}/\mathcal{L}_{\mathcal{V} \Delta\tau_{\max}=\bar{\tau}} - 1) \times 100\%$, sendo $\mathcal{L}_{\mathcal{V} \bullet}$ obtido a partir do Lema 3.1. Os resultados são mostrados na Figura 3.3, onde fica evidente que quanto menor $\Delta\tau_{\max}$ maior é a estimativa da região de atração.

Devido à dificuldade de visualização, não foi incluído na Figura 3.3 o aumento percentual na estimativa da região de atração do caso com menor taxa de limitação possível, ou seja, $\Delta\tau_{\max} = 0$. Para este caso, no qual o atraso é incerto, porém invariante no tempo, os valores de $R_{\%}$ obtidos foram 10,55%, 46,34%, 122,66%, 304,90% e 664,20% para $\bar{\tau} = 2$, $\bar{\tau} = 3$, $\bar{\tau} = 4$, $\bar{\tau} = 5$ e $\bar{\tau} = 6$, respectivamente. Isso mostra claramente a relevância de considerar limites na taxa de variação do atraso para obter estimativas da região de atração menos conservadoras.

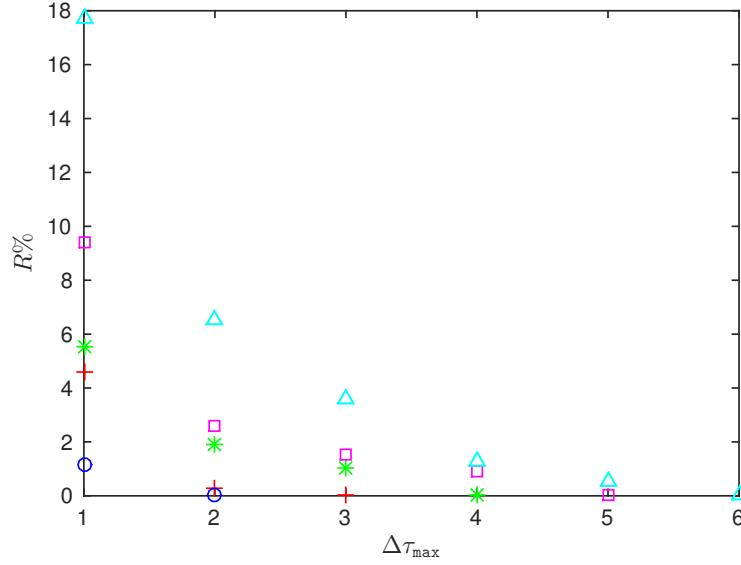


Figura 3.3: Porcentagem de aumento das estimativas das regiões de atração do sistema representado por (3.55) em função da máxima taxa de variação do atraso, para $\bar{\tau} = 2(\circ)$, $\bar{\tau} = 3(+)$, $\bar{\tau} = 4(*)$, $\bar{\tau} = 5(\square)$ e $\bar{\tau} = 6(\triangle)$.

Maximização da tolerância à perturbação:

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se $\mu = 0,0591$, com o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,6161 \quad 0,0177 \quad 0,0480], \quad (3.61)$$

logo, $v_k = -1,6191x_k + 0,0177x_{k-1} + 0,0480x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.50) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Para uma condição inicial nula, isto é, $\bar{x}(0) = \mathbf{0}$, a partir de $\mathcal{J}_2$, assegura-se um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 4,1119$. Na Figura 3.4 são mostradas as projeções da estimativa da região de atração resultante com os planos $x_k \times x_{k-1}$, $x_k \times x_{k-2}$ e $x_{k-1} \times x_{k-2}$, assim como a trajetória dos estados para o sinal de perturbação $\omega_k = [0,9698 \quad 3,9959 \quad \mathbf{0}_{1,18}]$, que está no limite da tolerância admissível. Ressalta-se que esse sinal de perturbação resultou de uma busca pelo pior caso, visto que um mesmo valor de energia compreende infinitos sinais. Essa busca consistiu basicamente em encontrar um sinal de perturbação que provocasse um maior esforço de controle.

Analisando a Figura 3.4, é possível perceber que as trajetórias estão contidas no interior de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não chegam a atingir o limite da região. Para o sistema representado por (3.55), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [1,0571 \quad 4,3555 \quad \mathbf{0}_{1,18}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 4,4819$. Ainda assim, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo procedimento de otimização $\mathcal{J}_2$

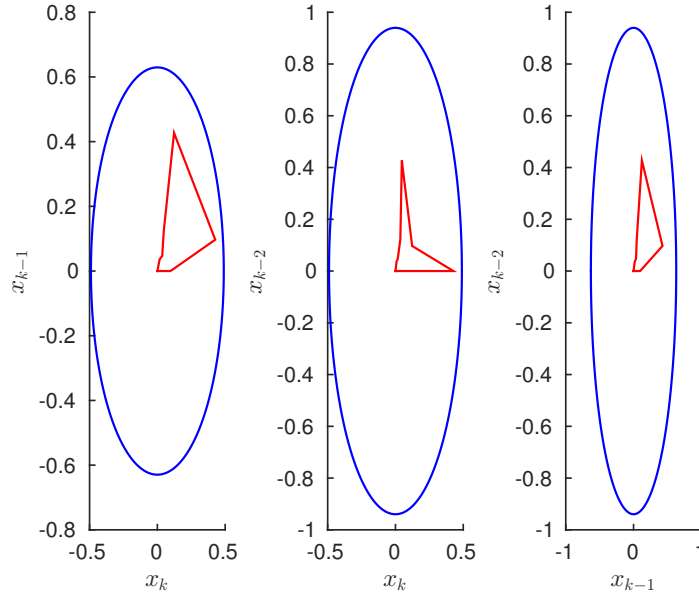


Figura 3.4: Trajetória dos estados (—) e estimativa da região de atração (—) do sistema representado por (3.55) com $\omega_k = [0,9698 \ 3,9959 \ \mathbf{0}_{1,18}]$.

de modo que o sistema representado por (3.55) permaneça estável, embora suas trajetórias deixem a região $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Considerando, por exemplo, o sinal $\omega_k = [1,7650 \ 7,2725 \ \mathbf{0}_{1,18}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 7,4836$. Na Figura 3.5 são mostradas a saída e o sinal de controle do sistema em malha-fechada, onde pode-se observar que as trajetórias dos estados convergem assintoticamente para origem.

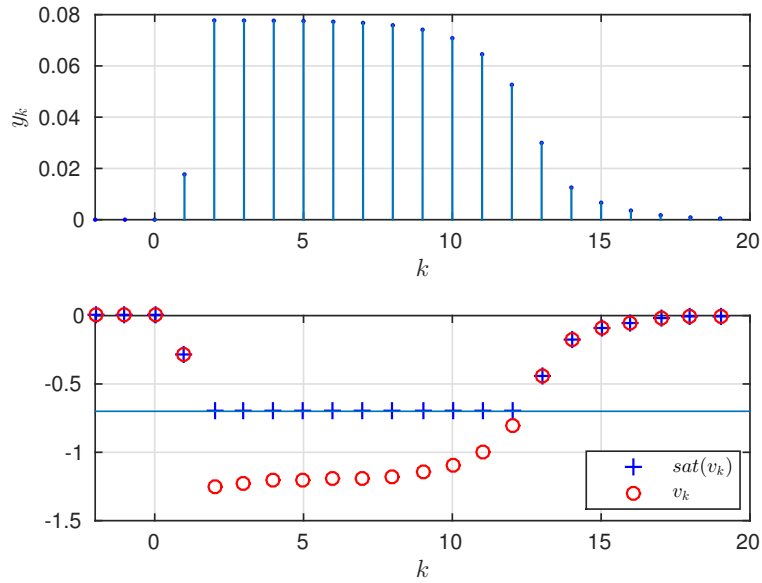


Figura 3.5: Resposta temporal do sistema representado por (3.55).

Com base nisso, pode-se concluir que, para o sistema representado por (3.55), o pro-

cedimento de otimização $\mathcal{J}_2$ forneceu uma boa estimativa da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 9% acima da estimada. Entretanto, como o sistema ainda permaneceu estável com a aplicação de sinais de perturbação com energia 82% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem utilizada é conservadora.

Minimização do ganho ℓ_2 :

A partir do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_3$ dado em (3.51), determinaram-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.6 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} \in \{2, 4, 6, 8\}$. Percebe-se que quanto menor a máxima taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$, maior é o limite de energia à perturbação e menor é o ganho ℓ_2 . Porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante.

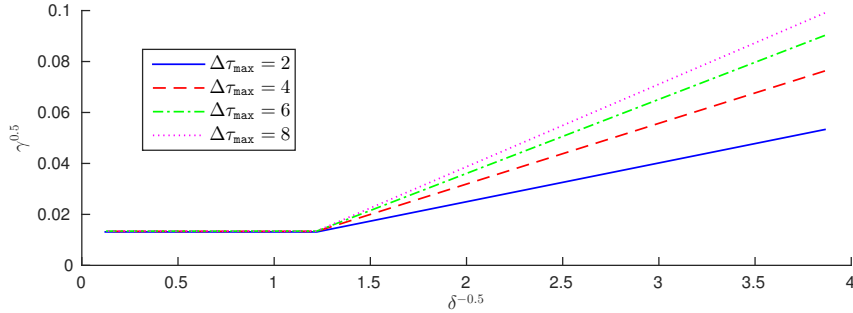


Figura 3.6: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ (—), $\Delta\tau_{\max} = 4$ (- -), $\Delta\tau_{\max} = 6$ (- .) e $\Delta\tau_{\max} = 8$ (.) - sistema representado por (3.55).

Além disso, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, estabeleceu-se esta mesma relação considerando as três configurações que podem ser assumidas pelo ganho do controlador (3.8). Na Figura 3.7 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para $\Delta\tau_{\max} = 2$, considerando os ganhos de controle $\mathbb{K}_1$ (3.8a), $\mathbb{K}_2$ (3.8b) e $\mathbb{K}_3$ (3.8c). Percebe-se, de forma evidente, que considerando o ganho $\mathbb{K}_3$, cuja configuração realimenta todos os estados do sistema, são alcançados maiores limites de energia à perturbação e menores ganhos ℓ_2 .

Minimização do conjunto alcançável:

Por fim, através do procedimento de minimização do conjunto alcançável, $\mathcal{J}_4$ dado em (3.52), determinaram-se os valores da função $\ln \det(R)$, que segundo Boyd et al. (1994) é proporcional ao volume de $\mathcal{E}(R^{-1}, 1)$, para valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites

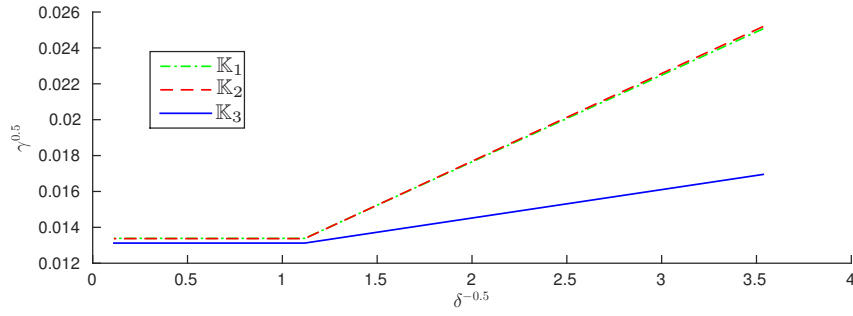


Figura 3.7: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ com $\Delta\tau_{\max} = 2$ para $\mathbb{K}_1$ (—), $\mathbb{K}_2$ (—) e $\mathbb{K}_3$ (—) - sistema representado por (3.55).

variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.8 é mostrada a curva que relaciona a função $\ln \det(R)$ e a máxima energia dos sinais de perturbação δ^{-1} para $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$, em que percebe-se que com o aumento da energia dos sinais de perturbação, houve apenas uma pequena variação da função $\ln \det(R)$, consequentemente, do volume da estimativa da região de atração. Essa característica prevaleceu para valores de energia menores do que o apresentado, e para valores maiores a condição tornou-se infactível. Isso mostra um certo conservadorismo da abordagem utilizada.

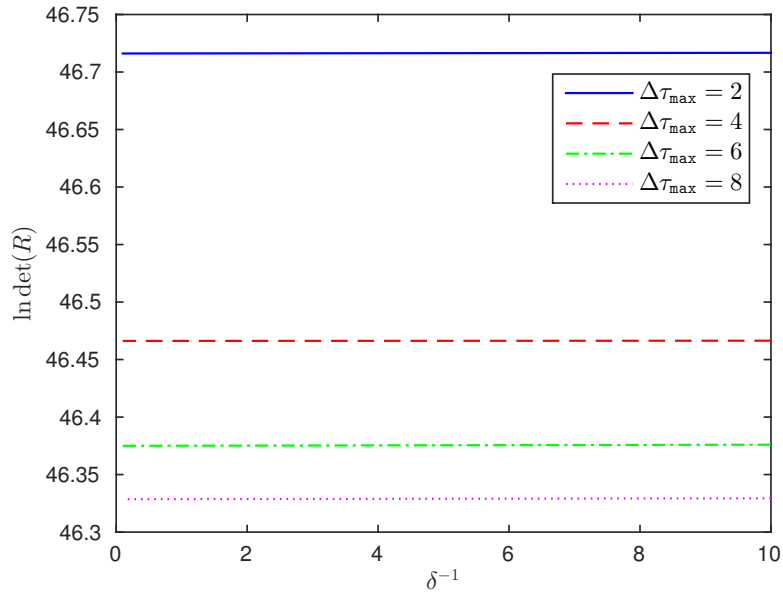


Figura 3.8: $\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$ - sistema representado por (3.55)

Caso escalar com incertezas

Assumindo que o sistema representado por (3.55) esteja sujeito a uma incerteza de $\pm 10\%$ em cada um dos valores de A , A_d , B , B_w e C_y . Para aplicar a abordagem proposta neste trabalho foram criados dois vértices (supostos conhecidos), sendo eles formados pelas

seguintes matrizes

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0,90A = 1,80, & A_2 &= 1,10A = 2,20, \\
A_{d,1} &= 0,90A_d = -0,09, & A_{d,2} &= 1,10A_d = -0,11, \\
B_1 &= 0,90B = 0,90, & B_2 &= 1,10B = 1,10, \\
B_{w,1} &= 0,90B_w = 0,09, & B_{w,2} &= 1,10B_w = 0,11, \\
C_{y,1} &= 0,90C_y = 0,09, & C_{y,2} &= 1,10C_y = 0,11.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Maximização da estimativa da região de atração:

Com relação ao procedimento de maximização da estimativa da região de atração $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{J}_{1,\bullet}$, foram investigadas as três opções descritas na Seção 3.4, sendo que para cada uma delas utilizou-se tanto a forma convencional quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-las.

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$ dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,3706 \quad 0,0353 \quad 0,0307], \tag{3.63}$$

logo, $v_k = -1,3706x_k + 0,0353x_{k-1} + 0,0307x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.62). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), o método convencional não se aplica, pois, como dito anteriormente, trata-se de um problema não-convexo.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,3727 \quad 0,0356 \quad 0,0312], \tag{3.64}$$

logo, $v_k = -1,3727x_k + 0,0356x_{k-1} + 0,0312x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.62). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,3706 \quad 0,0352 \quad 0,0307], \tag{3.65}$$

logo, $v_k = -1,3706x_k + 0,0352x_{k-1} + 0,0307x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.62). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,3712 \quad 0,0353 \quad 0,0307], \tag{3.66}$$

logo, $v_k = -1,3712x_k + 0,0353x_{k-1} + 0,0307x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.62). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,3640 \quad 0,0343 \quad 0,0322], \quad (3.67)$$

logo, $v_k = -1,3640x_k + 0,0343x_{k-1} + 0,0322x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.62). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Na Tabela 3.3 são apresentadas as porcentagens de volume que cada região possui em relação ao volume da maior região entre elas, ou seja, $\mathcal{L}_v/\mathcal{L}_{v_{max}} \times 100\%$, sendo utilizado nesse caso a mesma grade de pontos do caso precisamente conhecido.

Tabela 3.3: Comparação das estimativas das regiões de atrações do sistema representado por (3.62).

Algoritmo	$\mathcal{J}_{1,1}$	$\mathcal{J}_{1,2}$	$\mathcal{J}_{1,3}$
Convencional	99,99%	—	99,81%
Frank-Wolfe	100%	99,99%	95,05%

Por meio dos dados da Tabela 3.3, percebe-se que o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,1}$ solucionado a partir do algoritmo de Frank-Wolfe obteve a maior estimativa da região de atração do sistema representado por (3.62), sendo esta mostrada na Figura 3.9 juntamente com os limites do conjunto $\mathbb{S}$, definido em (3.16). Ressalta-se que a Figura 3.1 (a) é um *zoom* da 3.1 (b). Além disso, observa-se, novamente, uma pequena diferença de porcentagem entre quatro dos procedimentos, podendo esta estar relacionada, por exemplo, a grade de pontos escolhida. E, também, que o procedimento com maior volume no caso precisamente conhecido foi o que obteve a menor porcentagem no caso com incertezas.

Como no caso precisamente conhecido, resolvendo, através do método convencional, o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,2}$ com a função objetivo utilizada por Silva (2016), a porcentagem de volume da estimativa da região de atração obtida em relação ao caso com maior volume é de 45,28%.

Com base no procedimento que obteve o melhor resultado, investigou-se novamente a influência da mudança de dois parâmetros do sistema na maximização da estimativa da região de atração, sendo eles: a configuração assumida pelo ganho de controle e a máxima taxa de variação do atraso.

Na Figura 3.10, são mostradas as interseções de $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ com os planos $x_k \times x_{k-1}$, $x_k \times x_{k-2}$ e $x_{k-1} \times x_{k-2}$. Lembrando que $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}$ e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}$ correspondem as

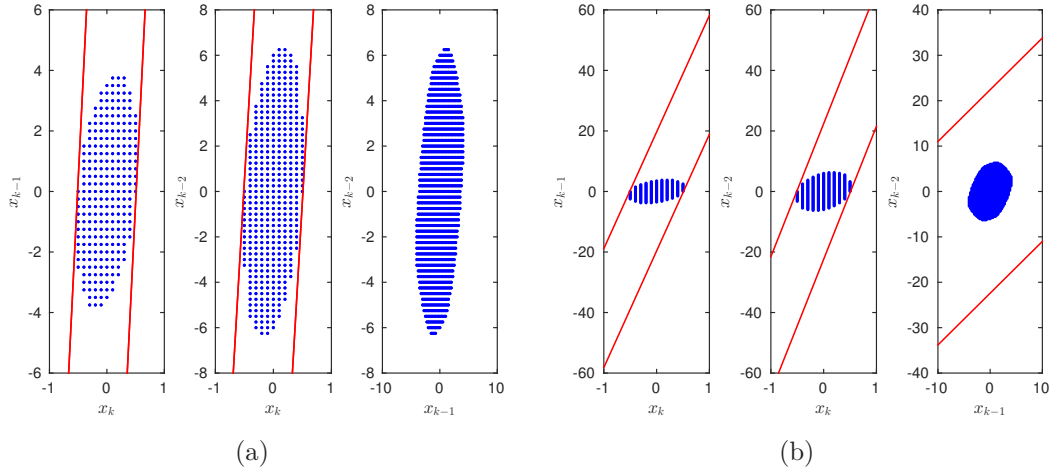


Figura 3.9: Estimativa da região de atração $(\cdot)$ e limites do conjunto $\mathbb{S}(-)$ do sistema representado por (3.62).

estimativas das regiões de atração obtidas considerando os ganho de controle dados em (3.8a), (3.8b) e (3.8c), respectivamente. Percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que a maior região corresponde ao ganho $\mathbb{K}_3$, cuja estrutura realimenta todos os estados do sistema, e a menor região ao ganho $\mathbb{K}_1$, cuja estrutura realimenta apenas o estado atual, o que já era esperado. Calculando as razões entre os volumes tem-se que: $\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_3)}/\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_2)} = 1,4690$, $\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_3)}/\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_1)} = 1,7607$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_2)}/\mathcal{L}_{\mathcal{V}(\mathbb{K}_1)} = 1,1986$.

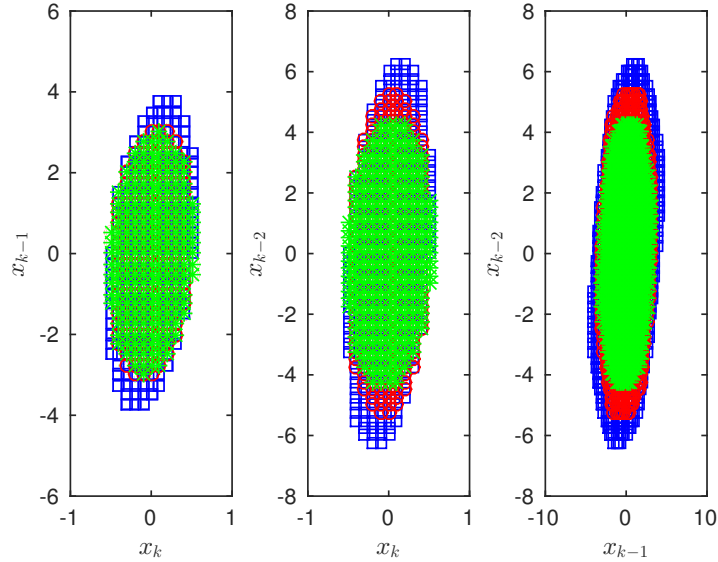


Figura 3.10: Interseções das regiões $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_1)}(\ast)$, $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_2)}(\circ)$, e $\mathcal{E}_{(\mathbb{K}_3)}(\square)$ do sistema representado por (3.62) com os planos $x_k \times x_{k-1}$, $x_k \times x_{k-2}$ e $x_{k-1} \times x_{k-2}$.

Já na Figura 3.11 são mostrados, para $\bar{\tau} = \{2,3,4,5,6\}$, os aumentos percentuais nas estimativas das regiões de atração em relação ao caso com máxima taxa de variação do atraso ($\Delta\tau_{\max} = \bar{\tau}$), ou seja, $R_{\%} = (\mathcal{L}_{\mathcal{V} \Delta\tau_{\max}}/\mathcal{L}_{\mathcal{V} \Delta\tau_{\max}=\bar{\tau}} - 1) \times 100\%$ em função da máxima

taxa de variação do atraso. Percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que quanto menor $\Delta\tau_{\max}$ maior é a estimativa da região de atração.

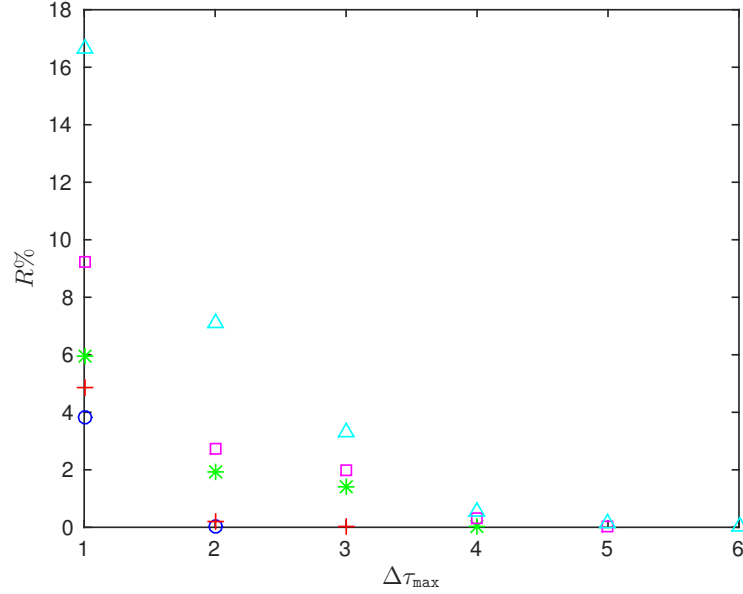


Figura 3.11: Porcentagem de aumento das estimativas das regiões de atração do sistema representado por (3.62) em função da máxima taxa de variação do atraso, para $\bar{\tau} = 2$ (○), $\bar{\tau} = 3$ (+), $\bar{\tau} = 4$ (*), $\bar{\tau} = 5$ (□) e $\bar{\tau} = 6$ (△).

Devido à dificuldade de visualização, não foi incluído na Figura 3.11 o aumento percentual na estimativa da região de atração em relação ao caso com menor taxa de limitação possível, ou seja, $\Delta\tau_{\max} = 0$. Para este caso, os valores de $R\%$ obtidos foram 11,08%, 41,25%, 116,62%, 273,76% e 601,47% para $\bar{\tau} = 2$, $\bar{\tau} = 3$, $\bar{\tau} = 4$, $\bar{\tau} = 5$ e $\bar{\tau} = 6$, respectivamente.

Maximização da tolerância à perturbação:

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se $\mu = 0,0763$, com o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-1,6199 \quad 0,0238 \quad 0,0444], \quad (3.68)$$

logo, $v_k = -1,6199x_k + 0,0238x_{k-1} + 0,0444x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.62). Além disso, do procedimento de otimização (3.50) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Para uma condição inicial nula, isto é, $\bar{x}(0) = \mathbf{0}$, a partir de $\mathcal{J}_2$, assegura-se um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 3,6264$. Considerando o sistema representado por (3.62), com parâmetro α_k igual 1 para todo $k > 0$, na Figura 3.12 são mostradas as projeções da estimativa da região de atração resultante com os planos $x_k \times x_{k-1}$, $x_k \times x_{k-2}$

e $x_{k-1} \times x_{k-2}$, assim como a trajetória dos estados para o sinal de perturbação $\omega_k = [0,5983 \ 3,5706 \ \mathbf{0}_{1,18}]$, que está no limite da tolerância admissível. Ressalta-se que esse sinal de perturbação foi obtido da mesma forma que no caso precisamente conhecido.

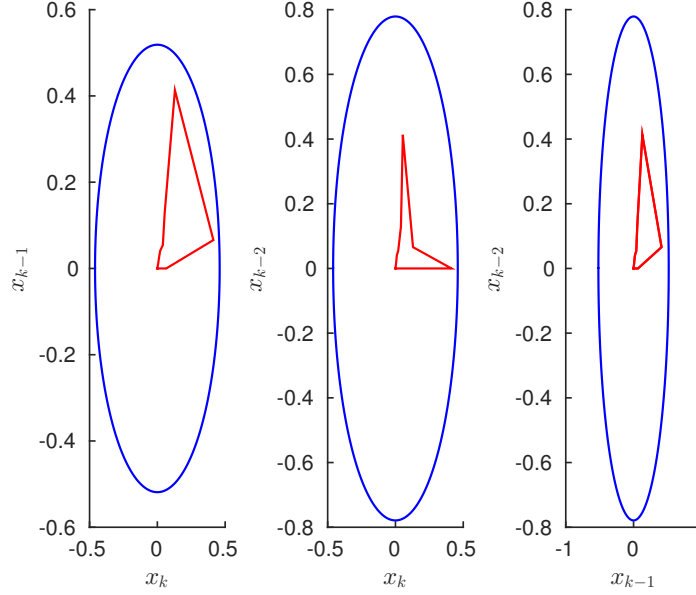


Figura 3.12: Trajetória dos estados (—) e estimativa da região de atração (—) do sistema representado por (3.62) com $\omega_k = [0,5983 \ 3,5706 \ \mathbf{0}_{1,18}]$.

Analisando a Figura 3.12, é possível perceber, como no caso precisamente conhecido, que as trajetórias estão contidas no interior de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não chegam a atingir o limite da região. Para o sistema representado por (3.55), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [0,6264 \ 3,7634 \ \mathbf{0}_{1,18}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 3,7384$. Ainda assim, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo problema de otimização $\mathcal{J}_2$ de modo que o sistema representado por (3.62) permaneça estável, embora suas trajetórias deixem a região $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Considerando, por exemplo, o sinal $\omega_k = [1,2325 \ 7,3554 \ \mathbf{0}_{1,18}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 7,4579$. Na Figura 3.13 são mostradas a saída e o sinal de controle do sistema em malha-fechada, em que pode-se observar que as trajetórias dos estados convergem assintoticamente para origem.

Com base nisso, pode-se concluir que para o sistema representado por (3.62), o procedimento de otimização $\mathcal{J}_2$ forneceu uma boa estimativa da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 4,53% acima da estimada. Entretanto, como o sistema ainda permanece estável considerando sinais de perturbação com energia 105,66% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem utilizada é conservadora.

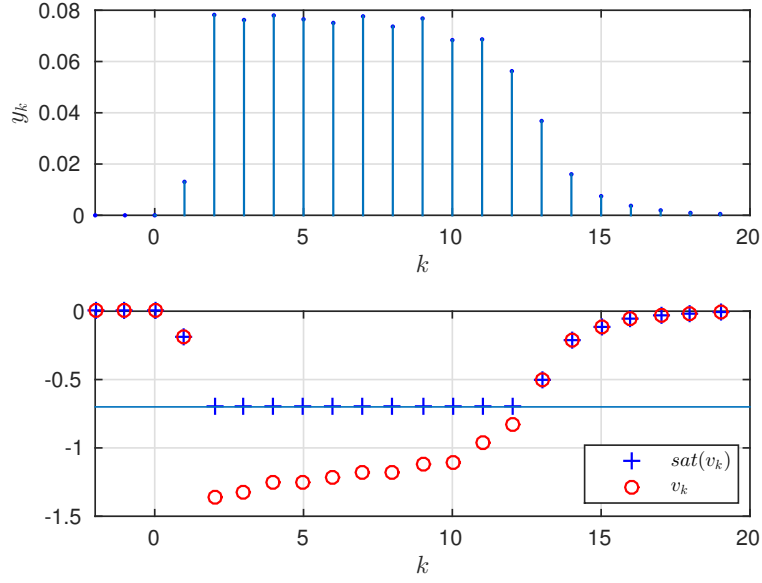


Figura 3.13: Resposta temporal do sistema representado por (3.62).

Minimização do ganho ℓ_2 :

A partir do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_3$ dado em (3.51), determinaram-se, novamente, os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.14 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$. Percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que quanto menor a máxima taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$, maior é o limite de energia à perturbação e menor é o ganho ℓ_2 . Porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante.

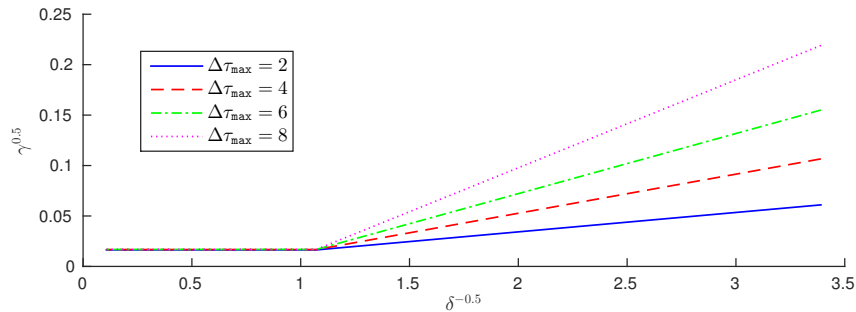


Figura 3.14: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2(-)$, $\Delta\tau_{\max} = 4(- -)$, $\Delta\tau_{\max} = 6(- \cdot)$ e $\Delta\tau_{\max} = 8(\cdot \cdot)$ - sistema representado por (3.62).

Além disso, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, estabeleceu-se esta mesma relação considerando as três configurações que podem ser assumidas pelo ganho

do controlador (3.8). Na Figura 3.15 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para $\Delta\tau_{\max} = 2$, considerando os ganhos de controle $\mathbb{K}_1$ (3.8a), $\mathbb{K}_2$ (3.8b) e $\mathbb{K}_3$ (3.8c). Percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que considerando o ganho $\mathbb{K}_3$, cuja configuração realimenta todos os estados do sistema, são alcançados maiores limites de energia à perturbação e menores ganhos ℓ_2 .

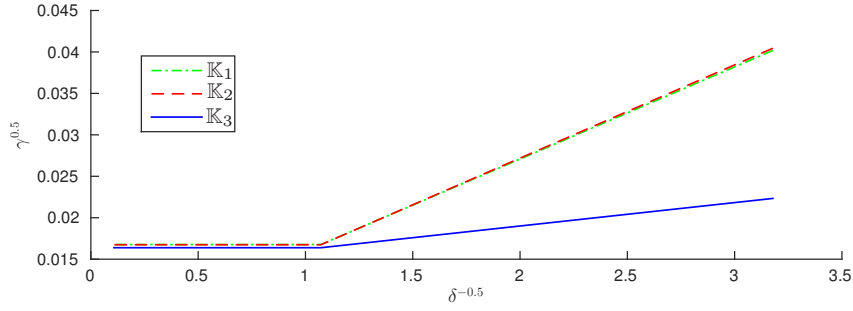


Figura 3.15: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ com $\Delta\tau_{\max} = 2$ para $\mathbb{K}_1$ (—), $\mathbb{K}_2$ (—) e $\mathbb{K}_3$ (—) - sistema representado por (3.62).

Minimização do conjunto alcançável:

Por fim, acerca do procedimento de minimização do conjunto alcançável, $\mathcal{J}_4$ dado em (3.52), determinaram-se os valores da função $\ln \det(R)$, que segundo Boyd et al. (1994) é proporcional ao volume de $\mathcal{E}(R^{-1}, 1)$, para valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.16 é mostrada a curva que relaciona a função $\ln \det(R)$ e a máxima energia dos sinais de perturbação δ^{-1} para $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$, em que percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que com o aumento da energia dos sinais de perturbação, houve apenas uma pequena variação da função $\ln \det(R)$, conseqüentemente, do volume da estimativa da região de atração. Essa característica prevaleceu para valores de energia menores do que o apresentado, e para valores maiores a condição tornou-se infactível. Isso mostra um certo conservadorismo da abordagem utilizada.

3.5.2 Caso de dimensão 3

Considerando agora o sistema de dimensão 3 precisamente conhecido:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1,05 & -0,10 \\ 0,02 & 0,05 & 0,95 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,06 & 0,04 \\ 0,01 & 0 & -0,05 \end{bmatrix} x_{k-\bar{\tau}} \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{bmatrix} \text{sat}(v_k) + \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,10 \\ 0,10 \end{bmatrix} \omega_k, \\
 z_k = & [1 \quad 0 \quad 1] x_k,
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

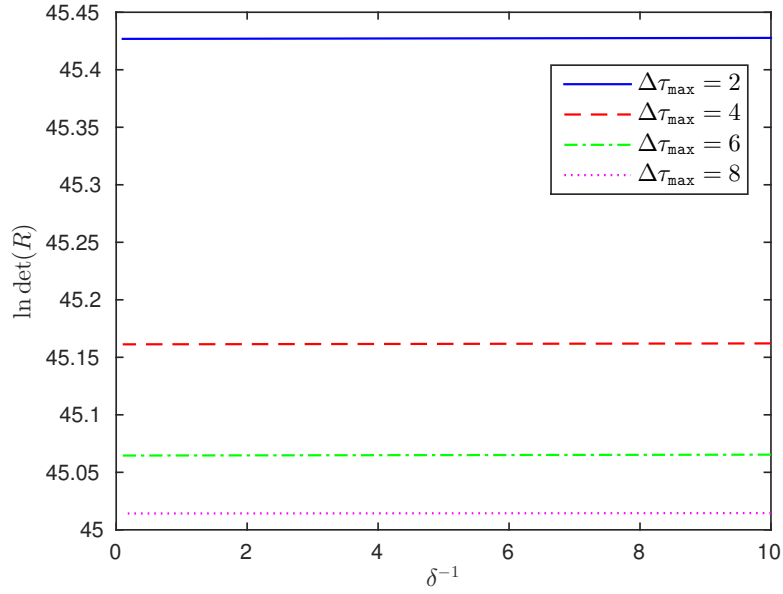


Figura 3.16: $\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$ - sistema representado por (3.62).

com τ_k pertencente ao intervalo $0 \leq \tau_k \leq 1$ e saturação do atuador dada por $|v_k| \leq v_0 = 0,7$.

Maximização da estimativa da região de atração:

Com relação ao procedimento de maximização da estimativa da região de atração $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \mathcal{J}_{1,\bullet}$, foram investigadas as três opções descritas na Seção 3.4, sendo que para cada uma delas utilizou-se tanto a forma convencional quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-las.

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,4174 & 0,9481 & -0,3092 & 0,0359 & 0,0261 & 0,0245 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Logo,

$$v_k = -1,4174x_{1,k} + 0,9481x_{2,k} - 0,3092x_{3,k} + 0,0359x_{1,k-1} + 0,0261x_{2,k-1} + 0,0245x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.69). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$, dado em (3.48), o método convencional não se aplica, como dito anteriormente, pois trata-se de um problema não-convexo.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$, dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,4085 & 0,9193 & -0,3065 & 0,0444 & 0,0302 & 0,0283 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Logo,

$$v_k = -1,4085x_{1,k} + 0,9193x_{2,k} - 0,3065x_{3,k} + 0,0444x_{1,k-1} + 0,0302x_{2,k-1} + 0,0283x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.69). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,4169 & 0,9456 & -0,3084 & 0,0358 & 0,0260 & 0,0244 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Logo,

$$v_k = -1,4169x_{1,k} + 0,9456x_{2,k} - 0,3084x_{3,k} + 0,0358x_{1,k-1} + 0,0260x_{2,k-1} + 0,0244x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.69). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,4173 & 0,9480 & -0,3092 & 0,0359 & 0,0261 & 0,0245 \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Logo,

$$v_k = -1,4173x_{1,k} + 0,9480x_{2,k} - 0,3092x_{3,k} + 0,0359x_{1,k-1} + 0,0261x_{2,k-1} + 0,0245x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.69). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,3697 & 0,8627 & -0,2818 & 0,0355 & 0,0240 & 0,0226 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Logo,

$$v_k = -1,3697x_{1,k} + 0,8627x_{2,k} - 0,2818x_{3,k} + 0,0355x_{1,k-1} + 0,0240x_{2,k-1} + 0,0226x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.69). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

A fim de comparar as estimativas das regiões de atrações obtidas em cada opção do procedimento $\mathcal{J}_{1,\bullet}$, considerando tanto o método convencional quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-las, utilizou-se uma grade de pontos igualmente espaçados em $\mathbb{R}^6$ para calcular a porcentagem de volume que cada região possui em relação ao volume da maior região entre elas, ou seja, $\mathcal{L}_v/\mathcal{L}_{v_{max}} \times 100\%$.

Por meio dos dados da Tabela 3.4, percebe-se que o procedimento de otimização $J_{1,2}$ solucionado a partir do Algoritmo de Frank-Wolfe obteve a maior estimativa da região de atração do sistema representado por (3.69). Além disso, observa-se que os problemas de otimização $J_{1,1}$ e $J_{1,2}$ apresentaram porcentagens de volumes bastante próximas e maiores

Tabela 3.4: Comparação das estimativas das regiões de atrações do sistema representado por (3.69).

Algoritmo	$\mathcal{J}_{1,1}$	$\mathcal{J}_{1,2}$	$\mathcal{J}_{1,3}$
Convencional	99,99%	—	89,87%
Frank-Wolfe	99,74%	100%	97,90%

do que os do $J_{1,3}$, considerando tanto o método convencional quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-los. É importante destacar que a grade de pontos utilizada influencia bastante nos resultados apresentados, principalmente, nos casos em que a diferença entre as regiões é relativamente pequena. Por último, vê-se que o procedimento de otimização $J_{1,3}$ apresentou melhores resultados quando resolvido utilizando o algoritmo de Frank-Wolfe.

Resolvendo, através do método convencional, o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,2}$ com a função objetivo utilizada por Silva (2016), a porcentagem de volume da estimativa da região de atração obtida em relação ao caso com maior volume é de apenas 2,02%.

Para esse exemplo, não foi possível investigar a influência da configuração assumida pelo ganho de controle e, também, da máxima taxa de variação do atraso na maximização da estimativa da região de atração. No primeiro caso, isso ocorreu devido as condições propostas no procedimento de otimização (3.46) serem ineficazes para os ganhos (3.8a) e (3.8b). Já no segundo caso, a dimensão do sistema (6×6) exigiria um custo computacional elevado para obter resultados confiáveis.

Maximização da tolerância à perturbação:

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se $\mu = 0,3536$, com o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = [-2,2222 \quad 2,5048 \quad -0,8142 \quad 0,0975 \quad 0,0322 \quad 0,0307]. \quad (3.75)$$

Logo,

$$v_k = -2,2222x_{1,k} + 2,5048x_{2,k} - 0,8142x_{3,k} + 0,0975x_{1,k-1} + 0,0322x_{2,k-1} + 0,0307x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.69). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Para uma condição inicial nula, isto é, $\bar{x}(0) = \mathbf{0}$, a partir de $\mathcal{J}_2$, assegura-se um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 1,6817$. Embora não seja possível plotar a estimativa da região de atração resultante juntamente com as trajetórias dos estados, já que a dimensão do sistema (6×6) torna essa tarefa complicada, tem-se que para uma perturbação $\omega_k =$

$[0,5946_{1,8} \quad \mathbf{0}_{1,47}]$, que está no limite da tolerância admissível, as trajetórias dos estados estão contidas no interior de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não chegam a atingir o limite da região. Ressalta-se que esse sinal de perturbação foi obtido da mesma forma que no exemplo anterior.

Para o sistema representado por (3.55), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [0,7100_{1,8} \quad \mathbf{0}_{1,47}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 2,0080$. Ainda assim, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo procedimento de otimização $\mathcal{J}_2$ de modo que o sistema representado por (3.55) permaneça estável, embora suas trajetórias deixem a região $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Considerando, por exemplo, o sinal $\omega_k = [0,7777_{1,8} \quad \mathbf{0}_{1,47}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 2,1998$. Na Figura 3.17 são mostradas a saída e o sinal de controle do sistema em malha-fechada, onde pode-se observar que as trajetórias dos estados convergem assintoticamente para origem.

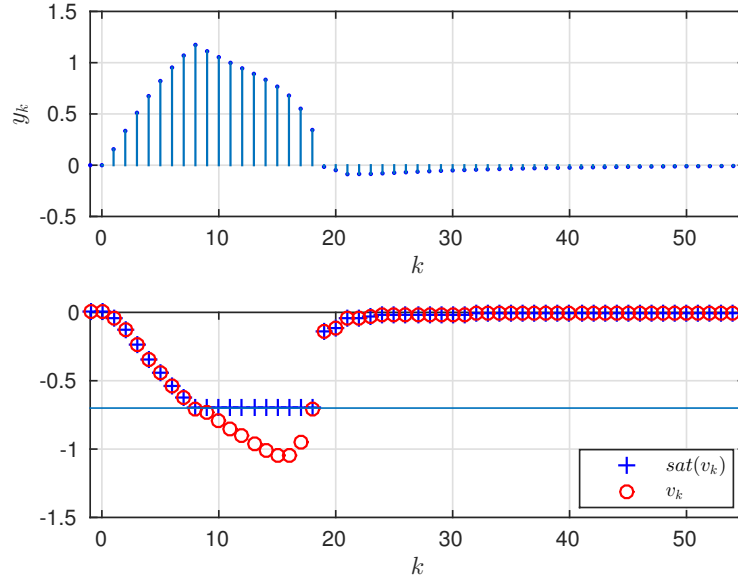


Figura 3.17: Resposta temporal do sistema representado por (3.69).

Com base nisso, pode-se concluir que, para o sistema representado por (3.69), o procedimento de otimização $\mathcal{J}_2$ forneceu uma estimativa razoável da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 19,40% acima da estimada. Além disso, como o sistema ainda permaneceu estável considerando sinais de perturbação com energia 30,81% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem utilizada é pouco conservadora.

Minimização do ganho ℓ_2 :

A partir do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_3$ dado em (3.51), determinaram-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis

de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.18 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{1, 3, 5, 7\}$. Percebe-se que quanto menor a máxima taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$, maior é o limite de perturbações admissíveis e menor é o limite do ganho ℓ_2 . Porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante.

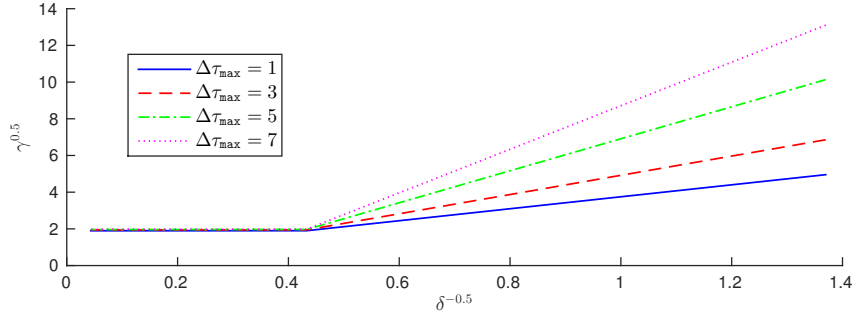


Figura 3.18: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 1(-)$, $\Delta\tau_{\max} = 3(- -)$, $\Delta\tau_{\max} = 5(- \cdot)$ e $\Delta\tau_{\max} = 7(\cdot \cdot)$ - sistema representado por (3.69).

Para esse exemplo, também não foi possível obter a relação $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, considerando as diferentes configurações que podem ser assumidas pelo ganho do controlador, pois para os ganhos (3.8a) e (3.8b) as condições propostas no procedimento de otimização (3.51) são infactíveis.

Minimização do conjunto alcançável:

Por fim, através do procedimento de minimização do conjunto alcançável, $\mathcal{J}_4$ dado em (3.52), determinaram-se os valores da função $\ln(\det(R))$, que segundo Boyd et al. (1994) é proporcional ao volume de $\mathcal{E}(R^{-1}, 1)$, para valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.19 é mostrada a curva que relaciona a função $\ln \det(R)$ e a máxima energia dos sinais de perturbação δ^{-1} para $\Delta\tau_{\max} = \{1, 3, 5, 7\}$, em que percebe-se que com o aumento da energia dos sinais de perturbação, houve apenas uma pequena variação da função $\ln \det(R)$, consequentemente, do volume da estimativa da região de atração. Essa característica prevaleceu para valores de energia menores do que o apresentado, e para valores maiores a condição tornou-se infactível. Isso mostra um certo conservadorismo da abordagem utilizada.

Caso de dimensão 3 com incertezas

Assumindo que o sistema representado por (3.69) esteja sujeito a uma incerteza de $\pm 5\%$ em cada um dos valores de A , A_d , B , B_w e C_y . Para aplicar a abordagem proposta neste trabalho foram criados dois vértices (supostos conhecidos), sendo eles formados pelas

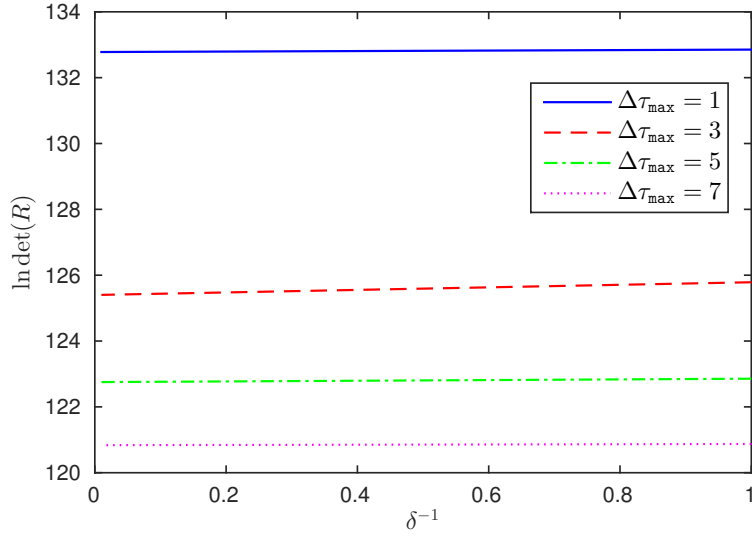


Figura 3.19: $\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ para $\Delta\tau_{\max} = \{1, 3, 5, 7\}$ - sistema representado por (3.69).

seguintes matrizes

$$\begin{aligned}
 A_1 = 0,95A &= \begin{bmatrix} 1,900 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9975 & -0,0950 \\ 0,0190 & 0,0475 & 0,9025 \end{bmatrix}, \\
 A_2 = 1,05A &= \begin{bmatrix} 2,1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1025 & -0,1050 \\ 0,0210 & 0,0525 & 0,9975 \end{bmatrix}, \\
 A_{d,1} = 0,95A_d &= \begin{bmatrix} -0,0950 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0570 & 0,0380 \\ 0,0095 & 0 & -0,0475 \end{bmatrix}, \\
 A_{d,2} = 1,05A_d &= \begin{bmatrix} -0,1050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0630 & 0,0420 \\ 0,0105 & 0 & -0,0525 \end{bmatrix}, \\
 B_1 = 0,95B &= \begin{bmatrix} 0,9500 \\ 0,0950 \\ 0,0950 \end{bmatrix}, \quad B_2 = 1,05B = \begin{bmatrix} 1,0500 \\ 0,1050 \\ 0,1050 \end{bmatrix}, \\
 B_{w,1} = 0,95B_w &= \begin{bmatrix} 0,0950 \\ 0,0950 \\ 0,0950 \end{bmatrix}, \quad B_{w,2} = 1,050B_w = \begin{bmatrix} 1,0500 \\ 0,1050 \\ 0,1050 \end{bmatrix}, \\
 C_1 = 0,95C_z &= [0,9500 \quad 0 \quad 0,9500], \quad C_2 = 1,05C_z = [1,0500 \quad 0 \quad 1,0500].
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Maximização da estimativa da região de atração:

Com relação ao procedimento de maximização da estimativa da região de atração $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, foram investigadas as três opções descritas na Seção 3.4, sendo que para cada uma delas utilizou-se tanto a forma convencional quanto o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-las.

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,5776 & 1,5294 & -0,5132 & 0,0406 & 0,0476 & 0,0449 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Logo,

$$v_k = -1,5776x_{1,k} + 1,5294x_{2,k} - 0,5132x_{3,k} + 0,0406x_{1,k-1} + 0,0476x_{2,k-1} + 0,0449x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.76). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$, dado em (3.48), o método convencional não se aplica, pois trata-se de um problema não-convexo.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$, dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,5761 & 1,5129 & -0,5130 & 0,0489 & 0,0513 & 0,0485 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Logo,

$$v_k = -1,5761x_{1,k} + 1,5129x_{2,k} - 0,5130x_{3,k} + 0,0489x_{1,k-1} + 0,0513x_{2,k-1} + 0,0485x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.76). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,5771 & 1,5270 & -0,5124 & 0,0406 & 0,0476 & 0,0448 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Logo,

$$v_k = -1,5771x_{1,k} + 1,5270x_{2,k} - 0,5124x_{3,k} + 0,0406x_{1,k-1} + 0,0476x_{2,k-1} + 0,0448x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.76). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,5761 & 1,5250 & -0,5117 & 0,0405 & 0,0475 & 0,0447 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Logo,

$$v_k = -1,5761x_{1,k} + 1,5250x_{2,k} - 0,5117x_{3,k} + 0,0405x_{1,k-1} + 0,0475x_{2,k-1} + 0,0447x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.76). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -1,5541 & 1,4753 & -0,4951 & 0,04190 & 0,0465 & 0,0440 \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Logo,

$$v_k = -1,5541x_{1,k} + 1,4753x_{2,k} - 0,4951x_{3,k} + 0,0419x_{1,k-1} + 0,0465x_{2,k-1} + 0,0440x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.76). Além disso, do problema de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Na Tabela 3.5 são apresentadas as porcentagens de volume que cada região possui em relação ao volume da maior região entre elas, ou seja, $\mathcal{L}_v/\mathcal{L}_{v_{max}} \times 100\%$, sendo utilizado nesse caso a mesma grade de pontos do caso precisamente conhecido.

Tabela 3.5: Comparação das estimativas das regiões de atrações do sistema representado por (3.76).

Algoritmo	$\mathcal{J}_{1,1}$	$\mathcal{J}_{1,2}$	$\mathcal{J}_{1,3}$
Convencional	99,95%	—	83,66%
Frank-Wolfe	99,78%	100%	92,75%

Por meio dos dados da Tabela 3.5, percebe-se que os resultados do sistema incerto representado por (3.76) são consistentes com o do sistema precisamente conhecido representado por (3.69). Sendo assim, vale evidenciar apenas que o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,2}$ solucionado a partir do algoritmo de Frank-Wolfe obteve a maior estimativa da região de atração do sistema representado por (3.76).

Como no caso precisamente conhecido, resolvendo, através do método convencional, o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{1,2}$ com a função objetivo utilizada por Silva (2016), a porcentagem de volume da estimativa da região de atração obtida em relação ao caso com maior volume é de 2,11%. Percebe-se, novamente, uma redução significativa do volume neste caso.

Para o caso incerto, também não foi possível investigar a influência da configuração assumida pelo ganho de controle e, também, da máxima taxa de variação do atraso na maximização da estimativa da região de atração. As razões são as mesmas discutidas anteriormente.

Maximização da tolerância à perturbação:

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se $\mu = 0,7238$, com o seguinte ganho estático:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -2,2661 & 3,3073 & -1,0777 & 0,0887 & 0,0432 & 0,0424 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Logo,

$$v_k = -2,2661x_{1,k} + 3,3073x_{2,k} - 1,0777x_{3,k} + 0,0887x_{1,k-1} + 0,0432x_{2,k-1} + 0,0424x_{3,k-1}$$

estabiliza o sistema representado por (3.76). Além disso, do procedimento de otimização (3.46) obteve-se também as matrizes que estão inseridas no Apêndice B.

Para uma condição inicial nula, isto é, $\bar{x}(0) = \mathbf{0}$, a partir de $\mathcal{J}_2$, assegura-se um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 1,1754$. Considerando o sistema representado por (3.76), com parâmetro α_k igual 1 para todo $k > 0$, apesar de não ser possível plotar a estimativa da região de atração resultante juntamente com as trajetórias dos estados, já que a dimensão do sistema (6×6) torna essa tarefa complicada, tem-se que para uma perturbação $\omega_k = [0,3918_{1,9} \quad \mathbf{0}_{1,46}]$, que está no limite da tolerância admissível, as trajetórias dos estados estão contidas no interior de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não para a atingir o limite da região. Ressalta-se que esse sinal de perturbação foi obtido da mesmo forma que no exemplo anterior.

Para o sistema representado por (3.55), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [0,5054_{1,9} \quad \mathbf{0}_{1,46}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 1,5162$. Ainda assim, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo problema de otimização $\mathcal{J}_2$ de modo que o sistema representado por (3.55) permaneça estável, embora suas trajetórias deixem a região $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Considerando, por exemplo, o sinal $\omega_k = [0,5826_{1,9} \quad \mathbf{0}_{1,46}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 = 1,7478$. Na Figura 3.20 são mostradas a saída e o sinal de controle do sistema em malha-fechada, onde pode-se observar que as trajetórias dos estados convergem assintoticamente para origem.

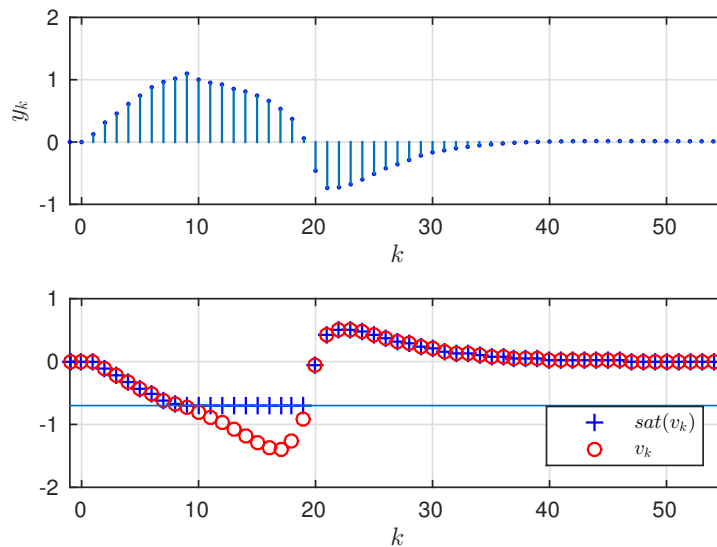


Figura 3.20: Resposta temporal do sistema representado por (3.76).

Com base nisso, pode-se concluir que, para o sistema representado por (3.76), o pro-

blema de otimização $\mathcal{J}_2$ não forneceu uma estimativa muito boa da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 29,00% acima da estimada. Além disso, como o sistema ainda permaneceu estável considerando sinais de perturbação com energia 48,70% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem utilizada é razoavelmente conservadora.

Minimização do ganho ℓ_2 :

A partir do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_3$ dado em (3.51), determinaram-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.21 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{1, 3, 5, 7\}$. Percebe-se que quanto menor a máxima taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$, maior é o limite de perturbações admissíveis e menor é o limite do ganho ℓ_2 . Porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante.

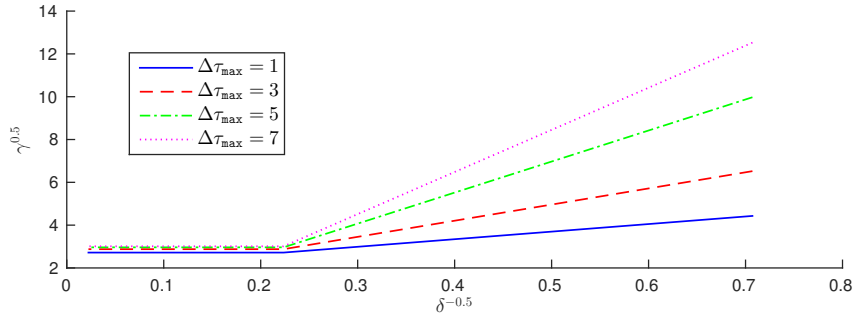


Figura 3.21: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 1$ (—), $\Delta\tau_{\max} = 3$ (- -), $\Delta\tau_{\max} = 5$ (- .) e $\Delta\tau_{\max} = 7$ (.) - sistema representado por (3.76).

Para o caso com incertezas, também não foi possível obter a relação $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, considerando as diferentes configurações que podem ser assumidas pelo ganho do controlador. As razões são as mesmas discutidas anteriormente.

Minimização do conjunto alcançável:

Por fim, através do procedimento de minimização do conjunto alcançável, $\mathcal{J}_4$ dado em (3.52), determinaram-se os valores da função $\ln \det(R)$, que segundo Boyd et al. (1994) é proporcional ao volume de $\mathcal{E}(R^{-1}, 1)$, para valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 3.22 é mostrada a curva que relaciona a função $\ln \det(R)$ e a máxima energia dos sinais de perturbação δ^{-1} para $\Delta\tau_{\max} = \{1, 3, 5, 7\}$, em que percebe-se, como no caso precisamente conhecido, percebe-se que com

o aumento da energia dos sinais de perturbação, houve apenas uma pequena variação da função $\ln \det(R)$, conseqüentemente, do volume da estimativa da região de atração. Essa característica prevaleceu para valores de energia menores do que o apresentado, e para valores maiores a condição tornou-se infactível. Isso mostra um certo conservadorismo da abordagem utilizada.

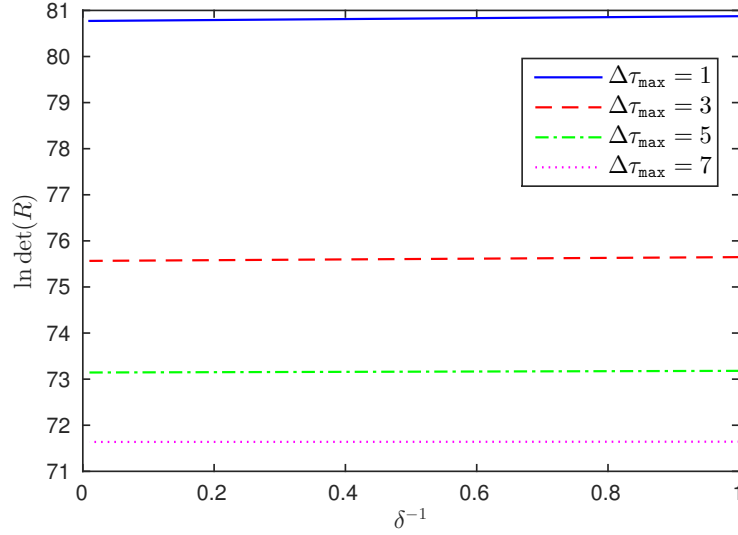


Figura 3.22: $\ln \det(R) \times \delta^{-1}$ $\Delta \tau_{\max} = \{1, 3, 5, 7\}$ - sistema representado por (3.76).

3.5.3 Comentários finais

Neste capítulo foram apresentados os resultados relacionados com a síntese de controladores do tipo realimentação de estados. Inicialmente, formalizou-se o problema a ser investigado, bem como apresentou-se alguns resultados auxiliares presentes na literatura. Em seguida, foram estabelecidas as condições de estabilização tanto para o caso com incertezas politópicas quanto para o caso precisamente conhecido. A partir dessas condições, propuseram-se procedimentos de otimização que tinham por objetivo minimizar a estimativa da região de atração, maximizar a tolerância à perturbação, minimizar o ganho ℓ_2 e minimizar o conjunto alcançável. Por fim, testou-se a eficiência das condições propostas através de suas aplicações em um exemplo escalar e outro de dimensão 3.

Síntese de compensador *anti-windup* estático

Neste capítulo são mostrados os resultados relacionados com a síntese de compensadores *anti-windup* estáticos. Assume-se que o controlador do sistema foi previamente projetado. Um dos interesses da abordagem apresentada é que não são feitas alterações em um controlador em operação; ainda assim, a introdução do compensador estático pode melhorar o desempenho do sistema controlado.

4.1 Formulação do problema

Considere o sistema incerto aumentado e chaveado pelo valor do atraso τ_k representado por (3.10), repetido aqui por conveniência:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1} &= \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) \text{sat}(u_k) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k, \\ y_k &= \mathbb{C}_y \bar{x}_k, \\ z_k &= \mathbb{C}_z \bar{x}_k,\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A(\alpha_k) + \Gamma_0(\alpha_k, \tau_k)}{\mathbf{I}_{n\bar{\tau}}} & \begin{array}{c} \cdots \quad \Gamma_{\bar{\tau}-1}(\alpha_k, \tau_k) \\ \Gamma_{\bar{\tau}}(\alpha_k, \tau_k) \end{array} \\ \hline & \mathbf{0}_{n\bar{\tau} \times n} \end{array} \right],$$

com

$$\Gamma_i(\alpha_k, \tau_k) = \begin{cases} A_d(\alpha_k), & i = \tau_k \\ \mathbf{0}_{n \times n}, & i \neq \tau_k \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, \bar{\tau},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(\alpha_k) &= [B^T(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{m \times n\bar{\tau}}]^T, \quad \mathbb{B}_w(\alpha_k) = [B_w^T(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{q \times n\bar{\tau}}]^T, \\ \mathbb{C}_y(\alpha_k) &= [C_y(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{p \times n\bar{\tau}}] \text{ e} \\ \mathbb{C}_z(\alpha_k) &= [C_z(\alpha_k) \quad \mathbf{0}_{l \times n\bar{\tau}}].\end{aligned}$$

Seja o compensador de estabilização dinâmica da saída dado por:

$$\begin{aligned}x_{c,k+1} &= A_c x_{c,k} + B_c y_k, \\ v_{c,k} &= C_c x_{c,k} + D_c y_k,\end{aligned}\tag{4.2}$$

em que $x_{c,k} \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o estado do controlador e $v_{c,k}$ é a saída do controlador. Assume-se que (4.2) foi projetado para garantir a estabilidade e algum índice de desempenho do sistema representado por (4.1) na ausência de saturação dos atuadores.

Afim de amenizar os possíveis e indesejáveis efeitos causados pela saturação, propõe-se a adição de um compensador *anti-windup*, da forma $E_c(\text{sat}(v_{c,k}) - v_{c,k})$, à dinâmica do controlador, obtendo

$$x_{c,k+1} = A_c x_{c,k} + B_c \mathbb{C}_y \bar{x}_k + E_c(\text{sat}(v_{c,k}) - v_{c,k}), \quad (4.3)$$

em que E_c precisa ser projetado.

Substituindo-se (4.2) em (4.1), obtém-se

$$\bar{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) \text{sat}(v_{c,k}) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k. \quad (4.4)$$

Somando e subtraindo $\mathbb{B}(\alpha_k) v_{c,k}$ ao lado direito da equação acima, tem-se que

$$\bar{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) v_{c,k} - \mathbb{B}(\alpha_k) (v_{c,k} - \text{sat}(v_{c,k})) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k. \quad (4.5)$$

Com o auxílio da não-linearidade do tipo zona-morta, descrita na Seção 2.3.1 e repetida aqui por conveniência,

$$\Psi(v_{c,k}) = v_{c,k} - \text{sat}(v_{c,k}), \quad (4.6)$$

o sistema representado por (4.5) torna-se

$$\bar{x}_{k+1} = \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) \bar{x}_k + \mathbb{B}(\alpha_k) v_{c,k} - \mathbb{B}(\alpha_k) \Psi(v_{c,k}) + \mathbb{B}_w(\alpha_k) \omega_k. \quad (4.7)$$

Definindo o novo vetor de estados aumentado

$$\xi_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ x_{c,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c)} \quad (4.8)$$

e as seguintes matrizes

$$\tilde{A}(\alpha_k, \tau_k) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\alpha_k, \tau_k) + \mathbb{B}(\alpha_k) D_c \mathbb{C} & \mathbb{B}(\alpha_k) C_c \\ B_c \mathbb{C}_y(\alpha_k) & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} \mathbb{B}(\alpha_k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w(\alpha_k) = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_w(\alpha_k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_y(\alpha_k) = [\mathbb{C}_y(\alpha_k) \quad \mathbf{0}], \quad \tilde{C}_z(\alpha_k) = [\mathbb{C}_z(\alpha_k) \quad \mathbf{0}], \quad R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I_{n_c} \end{bmatrix}, \quad K(\alpha_k) = [D_c \mathbb{C}_y(\alpha_k) \quad C_c],$$

O sistema de malha fechada pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \tilde{A}(\alpha_k, \tau_k) \xi_k - (\tilde{B}(\alpha_k) + R E_c) \Psi(v_{c,k}) + \tilde{B}_w(\alpha_k) \omega_k, \\ z_k &= \tilde{C}_z(\alpha_k) \xi_k, \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo

$$v_{c,k} = K(\alpha_k) \xi_k. \quad (4.10)$$

Neste sentido, propõe-se tratar o seguinte problema de *anti-windup*:

Problema 4.1 (*Anti-windup*) Dado um controlador, para o qual o sistema em malha-fechada é assintoticamente estável na ausência de saturação, determine o ganho E_c do compensador *anti-windup*, que garanta para um conjunto de condições iniciais $\mathcal{R}_0$ e um conjunto de sinais de perturbação $\mathcal{W}$ admissíveis a estabilidade entrada-estado desse sistema. Adicionalmente, o compensador *anti-windup* deve garantir um certo limite superior do ganho ℓ_2 entre a perturbação ω_k e a saída regulada z_k .

As condições de estabilidade e estabilização do sistema representado por (4.9) serão investigadas aqui com o auxílio da função de Lyapunov-Krasovskii mostrada em (3.20)-(3.21).

4.2 Projeto do compensador *anti-windup*

Nesta Seção são apresentadas as condições desenvolvidas para tratar o Problema 4.1, no qual são considerados tanto o caso com incertezas quanto o caso precisamente conhecido.

4.2.1 Caso com incertezas

Para sintetizar um compensador de *anti-windup* estático, que garanta que as trajetórias do sistema (4.1) sejam limitadas em energia para qualquer perturbação pertencente a $\mathcal{W}$, descrito em (3.3) e, adicionalmente, garanta um certo limite superior do ganho ℓ_2 entre a perturbação e a saída regulada, ou seja, a solução do Problema 4.1, propõem-se o seguinte teorema:

Teorema 4.1 Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\mathbf{0} < W_{i,\tau} = W_{i,\tau}^T \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $i = 1, \dots, N$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, uma matriz diagonal definida positiva $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $Z \in \mathbb{R}^{p \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, e escalares positivos μ , δ e γ , tais que

$$\begin{bmatrix} -W_{j,\tau^+} & \tilde{A}_{i,\tau}U & -(\tilde{B}_iS + RY) & \tilde{B}_{wi} & \mathbf{0} \\ \star & W_{i,\tau} - U^T - U & Z^T & \mathbf{0} & (\tilde{C}_{zi}U)^T \\ \star & \star & -2S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.11)$$

$i, j = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

$$\begin{bmatrix} W_{i,\tau} - U^T - U & (K_{(l)}U - Z_{(l)})^T \\ \star & -\mu v_{c(l)}^2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

$i = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}; \quad \ell = 1, \dots, m,$

e

$$\mu - \delta < 0, \quad (4.13)$$

são factíveis, então o ganho de *anti-windup*, calculado a partir

$$E_c = YS^{-1}, \quad (4.14)$$

é tal que

1. Para $\omega_k \neq 0$, com $\omega_k \in \mathcal{W}$,
 - (a) as trajetórias do sistema representado por (4.9) não deixam o conjunto $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{L}_V(\mu) \subset \mathcal{R}_A$, para todo $\bar{x}_0$ pertencente ao conjunto $\mathcal{R}_{\varepsilon_0} = \mathcal{L}_V(\beta) \subset \mathcal{R}_0$, com $\beta = (\mu^{-1} - \delta^{-1})^{-1}$, para todo $k \geq 0$;
 - (b) $\|z_k\|_2^2 < \gamma(\|\omega_k\|_2^2 + V(\varphi_{\bar{\tau},0}, \alpha_0, \tau_0))$;
2. Para $\omega_k = 0$, o conjunto $\mathcal{R}_\varepsilon$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (4.9), para todo $k \geq 0$.

Prova: Se (4.11) é verificado, então a positividade de W_{j,τ^+} é garantida e, assim, através de (3.20)-(3.21), tem-se que $V(\varphi_{\bar{\tau},k}, \alpha_k, \tau_k) > 0$ para $\xi_0 \neq \mathbf{0}$. Além disso, S e U são regulares, isto é, possuem inversa. Desta forma, multiplicando o lado esquerdo de (4.11) por $\alpha_{k,(i)}$ e somando para $i = 1, \dots, N$, e, também, substituindo Y e Z por $E_c S$ e GU , respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha_k^+, \tau^+) & \tilde{A}(\alpha_k, \tau)U & -(\tilde{B}(\alpha_k)S + RE_c S) & \tilde{B}_w(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & W(\alpha_k, \tau) - U^T - U & (GU)^T & \mathbf{0} & (\tilde{C}_z(\alpha_k)U)^T \\ \star & \star & -2S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

em que α^+ representa α_{k+1} .

Usando o fato de que $-U^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)U \leq W(\alpha_k, \tau) - U^T - U$, veja (Geromel et al., 2007), e considerando a regularidade de U , pode-se pré- e pós-multiplicar a inequação resultante por

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & S^{-T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e sua transposta para obter

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha_k^+, \tau^+) & \tilde{A}(\alpha_k, \tau) & -(\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c) & \tilde{B}_w(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & -W^{-1}(\alpha_k, \tau) & G^T S^{-1} & \mathbf{0} & \tilde{C}_z(\alpha_k)^T \\ \star & \star & -2S^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha_k^+, \tau^+) & \tilde{A}(\alpha_k, \tau) & -(\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c) & \tilde{B}_w(\alpha_k) \\ \star & -W^{-1}(\alpha_k, \tau) + \gamma^{-1}\tilde{C}_z(\alpha_k)^T\tilde{C}_z(\alpha_k) & G^TS^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -2S^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}.$$

Aplicando, novamente, o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}(\alpha_k, \tau) + \gamma^{-1}\tilde{C}_z(\alpha_k)^T\tilde{C}_z(\alpha_k) & G^TS^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & -2S^{-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha_k, \tau)^T \\ -(\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c)^T \\ \tilde{B}_w(\alpha_k)^T \end{bmatrix} W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+) \\ \times [\tilde{A}(\alpha_k, \tau) \quad -(\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c) \quad \tilde{B}_w(\alpha_k)] < \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

Pré- e pós-multiplicando (4.15) por $X_k^T = [\xi_k^T \quad \Psi(K\xi_k)^T \quad \omega_k^T]^T$ e X_k , respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} & -\xi_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)\xi_k + \gamma^{-1}\xi_k^T \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \xi_k + 2\Psi(K\xi_k)^T S^{-1}G\xi_k - 2\Psi(K\xi_k)^T S^{-1}\Psi(K\xi_k) - \omega_k^T \omega_k \\ & + [\xi_k^T \tilde{A}(\alpha_k, \tau)^T \quad -\Psi(K\xi_k)^T (\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c)^T \quad \omega_k^T \tilde{B}_w(\alpha_k)^T] W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+) \\ & \times [\tilde{A}(\alpha_k, \tau)\xi_k \quad -(\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c)\Psi(K\xi_k) \quad \tilde{B}_w(\alpha_k)\omega_k] < \mathbf{0}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Considerando $2\Psi(K\xi_k)^T S^{-1}G\xi_k - 2\Psi(K\xi_k)^T S^{-1}\Psi(K\xi_k) = -2\Psi(K\xi_k)^T S^{-1}(\Psi(K\xi_k) - G\xi_k)$, e substituindo $\tilde{A}(\alpha_k, \tau)\xi_k - (\tilde{B}(\alpha_k) + RE_c)\Psi(K\xi_k) + \mathbb{B}_w(\alpha_k)\omega_k$ e $\tilde{C}_z\xi_k$ por ξ_{k+1} e z_k , respectivamente, de acordo com (4.9), pode-se reescrever (4.16) como

$$\begin{aligned} & \xi_{k+1}^T W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+)\xi_{k+1} - \xi_k^T W(\alpha_k, \tau)^{-1}\xi_k - 2\Psi(K\xi_k)^T S^{-1}(\Psi(K\xi_k) - G\xi_k) \\ & - \omega_k^T \omega_k + \gamma^{-1}z_k^T z_k < 0. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Chamando $T = S^{-1}$, assumindo que $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k) = \xi_{k+1}^T W^{-1}(\alpha_k^+, \tau^+)\xi_{k+1} - \xi_k^T W^{-1}(\alpha_{k+1}, \tau)\xi_k$, ver (3.20)-(3.21), e que $\xi_k \in \mathbb{S}$, então tem-se que

$$\begin{aligned} & \Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k) - \omega_k^T \omega_k + \gamma^{-1}z_k^T z_k \leq \\ & \Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k) - 2\Psi(K\xi_k)^T T(\Psi(K\xi_k) - G\xi_k) - \omega_k^T \omega_k + \gamma^{-1}z_k^T z_k < 0. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que a factibilidade de (4.11) garante a positividade de (3.20)-(3.21), a negatividade de $\Delta V(\varphi_{\bar{\tau}, k}, \alpha_k, \tau_k)$ e pelo Lema 2.1, que $\xi_k \in \mathbb{S}$. Assim, através de Lyapunov-Krasovskii, é garantido que as trajetórias do sistema representado por (4.9) em malha-fechada sobre a lei de controle (4.10) sejam limitadas para qualquer perturbação satisfazendo (3.3) e, em adição, tem-se um limite superior para o ganho ℓ_2 entre a perturbação e a saída regulada.

Se (4.12) também é verificada, então multiplicando (4.12) por $\alpha_{k,(i)}$ e somando para $i = 1, \dots, N$, substituindo Z por GU e, novamente, usando o fato de que $-U^T W^{-1}(\alpha_k, \tau)U \leq$

$W(\alpha_k, \tau) - U^T - U$, veja (Geromel et al., 2007), tem-se que (4.12) é um majorante de

$$\begin{bmatrix} -U^T W^{-1}(\alpha_k, \tau) U & (K_{(\ell)} U - G_{(\ell)} U)^T \\ \star & -\mu \bar{v}_{c(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

Pré- e pós-multiplicando (4.19) por $\text{diag}\{U^{-T}, \mathbf{1}\}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -W^{-1}(\alpha_k, \tau) & (K_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T \\ \star & -\mu \bar{v}_{c(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Aplicando o completo de Schur e pré- e pós-multiplicando (4.20) por ξ_k^T e ξ_k , conclui-se que

$$-\xi_k^T W^{-1}(\alpha_k, \tau_k) \xi_k + \xi_k^T (K_{(\ell)} - G_{(\ell)})^T (\mu \bar{v}_{c(\ell)}^2)^{-1} (K_{(\ell)} - G_{(\ell)}) \xi_k \leq 0. \quad (4.21)$$

Portanto, a inequação (4.12) garante que $\mathcal{L}_V(\mu) \subseteq \mathbb{S}$, assim, qualquer trajetória do sistema em malha-fechada partindo de $\mathcal{L}_V(\mu)$ permanece em $\mathbb{S}$. ■

Considere agora que o sistema representado por (4.9) não esteja sujeito a nenhuma perturbação externa, ou seja, $\omega_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Dessa forma, o seguinte Corolário segue como uma particularidade do Teorema 3.1.

Corolário 4.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\mathbf{0} < W_{i,\tau} = W_{i,\tau}^T \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $i = 1, \dots, N$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, uma matriz diagonal definida positiva $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $Z \in \mathbb{R}^{p \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, e escalares positivos μ e δ , tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{j,\tau^+} & \tilde{A}_{i,\tau} U & -(\tilde{B}_i S + RY) \\ \star & W_{i,\tau} - U^T - U & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

$i, j = 1, \dots, N; \quad \tau = 0, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

e (4.12) são factíveis, então o ganho de anti-windup, calculado a partir (4.14), garante que a origem do sistema em malha-fechada (4.9) é robustamente assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\xi_0 \in \mathcal{R}_\mathcal{E} = \mathcal{L}_V(\mu) \subset \mathcal{R}_\mathcal{A}$.

A prova do Corolário 4.1 segue as mesmas etapas da prova do Teorema 4.1, porém deve-se omitir os termos referentes a perturbação.

Além disso, o Teorema 4.1 e o Corolário 4.1 ainda podem ser reescritos de forma a não considerar a taxa de variação do atraso. Neste caso, basta apenas considerar que $\tau^+ \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$ nas condições estabelecidas.

4.2.2 Caso precisamente conhecido

O problema tratado anteriormente pode ser simplificado se substituirmos o sistema incerto por um sistema precisamente conhecido.

Teorema 4.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\mathbf{0} < W_\tau = W_\tau^T \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, matriz diagonal definida positiva $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $Z \in \mathbb{R}^{p \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, e escalares positivos μ , δ e γ , tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{\tau^+} & \tilde{A}_\tau U & -(\tilde{B}S + RY) & \tilde{B}_w & \mathbf{0} \\ \star & W_\tau - U^T - U & Z^T & \mathbf{0} & (\tilde{C}_z U)^T \\ \star & \star & -2S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

$\tau = 1, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

$$\begin{bmatrix} W_\tau - U^T - U & (K_{(l)}U - Z_{(l)})^T \\ \star & -\mu v_{c(l)}^2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

$\tau = 0, \dots, \bar{\tau}; \quad \ell = 1, \dots, m,$

e

$$\mu - \delta < 0, \quad (4.25)$$

são factíveis, então o ganho de anti-windup, calculado a partir

$$E_c = YS^{-1}, \quad (4.26)$$

é tal que

1. Para $\omega_k \neq 0$, com $\omega_k \in \mathcal{W}$,

(a) as trajetórias do sistema (4.9) não deixam o conjunto $\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{L}_V(\mu) \subset \mathcal{R}_A$, para todo $\bar{x}_0$ pertencente ao conjunto $\mathcal{R}_{\varepsilon_0} = \mathcal{L}_V(\beta) \subset \mathcal{R}_0$, com $\beta = (\mu^{-1} - \delta^{-1})^{-1}$, para todo $k \geq 0$;

(b) $\|z_k\|_2^2 < \gamma(\|\omega_k\|_2^2 + V(\xi_0, \alpha_0, \tau_0))$;

2. Para $\omega_k = 0$, o conjunto $\mathcal{R}_\varepsilon$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (4.9), para todo $k \geq 0$.

Considere agora que o sistema (4.9) não esteja sujeito a nenhuma perturbação externa, ou seja, $\omega_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Dessa forma, o seguinte Corolário segue como uma particularidade do Teorema 4.1.

Corolário 4.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\mathbf{0} < W_\tau = W_\tau^T \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $\tau = 0, \dots, \bar{\tau}$, uma matriz diagonal definida positiva $\mathbf{0} < S \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $U \in \mathbb{R}^{((\bar{\tau}+1)n+n_c) \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$, $Z \in \mathbb{R}^{p \times ((\bar{\tau}+1)n+n_c)}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, e escalares positivos μ e δ , tais que*

$$\begin{bmatrix} -W_{\tau^+} & \tilde{A}_\tau U & -(\tilde{B}S + RY) \\ \star & W_\tau - U^T - U & Z^T \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.27)$$

$\tau = 0, \dots, \bar{\tau}; \quad \tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau),$

e (4.24) são factíveis, então o ganho de *anti-windup*, calculado a partir (4.26), garante que a origem do sistema em malha-fechada (4.9) é robustamente assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\xi_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mu) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

Além disso, o Teorema 4.2 e o Corolário 4.2 ainda podem ser reescritos de forma a não considerar a taxa de variação do atraso. Neste caso, basta apenas considerar que $\tau^+ \in \{0, \dots, \bar{\tau}\}$ nas condições estabelecidas, em vez de usar $\tau^+ \in \mathcal{C}_{\tau_k}(\tau)$.

4.3 Procedimentos de Otimização

Os resultados apresentados anteriormente, permitem que sejam investigados diferentes procedimentos de otimização, sendo estes abordados em sequência.

Maximização da tolerância a perturbação: Para um dado conjunto de estados iniciais admissíveis, o interesse está em determinar o ganho E_c do compensador *anti-windup* que maximiza o conjunto de perturbações admissíveis $\mathcal{W}$, definido em (3.3), para o qual as trajetórias do sistema em malha-fechada são garantidamente limitadas.

Em particular, se $\xi_0 = \mathbf{0}$, isto é o sistema está em equilíbrio, segue que $\delta^{-1} = \mu^{-1}$, e o problema de maximização do conjunto $\mathcal{W}$ pode ser resolvido através de:

$$\mathcal{J}_{w1} : \begin{cases} \min & \mu \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (4.11) e (4.12).} \end{cases} \quad (4.28)$$

Em (Tarbouriech et al., 2011, pp. 73), por exemplo, podem ser encontrados procedimentos de otimização similares.

Minimização do ganho ℓ_2 : Para um dado limite de energia das perturbações, δ^{-1} , o interesse está em determinar o ganho E_c do compensador *anti-windup* que minimiza o limite superior do ganho ℓ_2 de ω_k em relação a z_k .

Considerando que a condição inicial do sistema é nula ($\xi_0 = \mathbf{0}$), o procedimento de minimização do ganho ℓ_2 pode ser solucionado por meio de:

$$\mathcal{J}_{w2} : \begin{cases} \min & \gamma \\ \text{sujeito às} & \text{LMIs (4.11) e (4.12).} \end{cases} \quad (4.29)$$

Cabe ressaltar, que os procedimentos apresentados anteriormente foram programados em Python na interface Spyder utilizando o pacote PICOS (G. Sagnol, 2012) e o *solver* MOSEK (E. D. Andersen and K. D. Andersen, 1997), e executados no cluster do CEFET-MG.

Como dito no capítulo anterior, apesar de não se ter um método teórico disponível para o cálculo do custo computacional das condições estabelecidas, na Tabela 4.1 segue a relação do número de variáveis escalares ($\mathcal{K}$) e de linhas de LMIs ($\mathcal{L}$) de cada uma delas.

Tabela 4.1: Valores de $\mathcal{K}$ (variáveis escalares) e $\mathcal{L}$ (linhas de LMIs) para as condições referentes ao cálculo de E_c .

	$\mathcal{K}$	$\mathcal{L}$
Teorema 4.1	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_1$
Corolário 4.1	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{L}_2$
Corolário 4.2	$\mathcal{K}_2$	$\mathcal{L}_3$
Corolário 4.2	$\mathcal{K}_2$	$\mathcal{L}_4$

com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1 &= \bar{n}^2(\bar{\tau} + 1)^2(\bar{\tau}N + 1) + m(\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m + n_c) + 2; \\
 \mathcal{K}_2 &= \bar{n}^2(\bar{\tau} + 1)^2(\bar{\tau} + 1) + m(\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m + n_c) + 1; \\
 \mathcal{L}_1 &= [2\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m + q + l]N^2[(\bar{\tau} + 1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m]N^2\bar{\tau} + 1; \\
 \mathcal{L}_2 &= [2(\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m)N^2[(\bar{\tau} + 1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m]N^2\bar{\tau} + 1; \\
 \mathcal{L}_3 &= [2\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m + q + l][(\bar{\tau} + 1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m]\bar{\tau} + 1; \\
 \mathcal{L}_4 &= [2\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m][(\bar{\tau} + 1)^2 - (\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max})(\bar{\tau} - \Delta\tau_{\max} + 1)] + [\bar{n}(\bar{\tau} + 1) + m]\bar{\tau} + 1;
 \end{aligned}$$

em que $\bar{n} = n + n_c$, sendo n a ordem do sistema e n_c do controlador, m e l são o número de entradas e entradas exógenas do sistema, respectivamente, q é o número de saídas mensuráveis do sistema, $\bar{\tau}$ é o atraso máximo, N é o número de vértices do politopo e $\Delta\tau_{\max}$ é a taxa de variação máxima entre atrasos de amostragens consecutivas.

4.4 Experimentos numéricos

Nesta Seção as condições desenvolvidas e discutidas ao longo desse capítulo são aplicadas em exemplos. Inicialmente, foi explorado o caso escalar e, em seguida, o caso de dimensão 2×2 .

4.4.1 Caso escalar

Considere o sistema escalar precisamente conhecido dado por:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= 0,99x_k + 0,01x_{k-\tau_k} + 0,10\text{sat}(v_k) + 0,01\omega_k, \\
 y_k &= x_k, \\
 z_k &= x_k,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

em que $\tau_k \in \{0, \dots, 10\}$, $\Delta\tau_{\max} = 10$ e $\bar{v} = 1$.

Para o sistema representado por (4.30) admite-se o seguinte compensador de estabili-

zação dinâmica da saída:

$$\begin{aligned}x_{c,k+1} &= x_{c,k} - 0,02y_k, \\v_k &= x_{c,k} - 2x_k.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Maximização da tolerância a perturbação

Sem a compensação *anti-windup*, tem-se que $\delta = 1,5643 \times 10^{-4}$, o que corresponde a um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 79,9539$. A fim de maximizar a tolerância à perturbação pela adição do compensador *anti-windup*, resolveu-se o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{w1}$, dado em (4.28), obtendo-se $Ec = 0,1203$ com $\delta = 1,6308 \times 10^{-6}$. Portanto, assegurou-se um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 783,0683$, aumentando-se em 9,79 vezes a tolerância da malha fechada a energia dos sinais que perturbam o sistema em relação ao sistema sem o compensador *anti-windup*.

O sistema representado por (4.30) é a versão discretizada, com tempo de amostragem $T_s = 0,1s$, do sistema usado por Ghiggi et al. (2008) para investigar a utilização da compensação *anti-windup* nas suas formas estática e dinâmica. Desta forma, os valores encontrados anteriormente podem ser comparados com os alcançados na abordagem contínua no tempo proposta em (Ghiggi et al., 2008) em que foram obtidos: a) $\delta = 7,7256 \times 10^{-5}$, considerando a síntese de um compensador *anti-windup* dinâmico e b) $\delta = 1,5473 \times 10^{-4}$ de um compensador *anti-windup* estático. Os limites de energia para ω_k são, consequentemente, de $\|\omega_k\|_2 \leq 113,7717$ no caso dinâmico e $\|\omega_k\|_2 \leq 80,3909$ no caso estático. Portanto, os limites de tolerância à perturbação desenvolvidos no domínio contínuo no tempo com a técnica proposta por Ghiggi et al. (2008) resultam em uma malha fechada que suporta 6,88 (caso dinâmico) e 9,74 (caso estático) vezes menos energia admissível em relação a abordagem proposta neste trabalho.

Assumindo que $\xi_0 = \mathbf{0}$, na Figura 4.1 são mostradas a saída e o sinal de controle considerando o sistema com e sem compensador *anti-windup*, para uma perturbação $\omega_k = [391,53_{1,4} \quad \mathbf{0}_{1,76}]$, que está no limite da tolerância admissível. Ressalta-se que esse sinal de perturbação resultou de uma busca pelo pior caso, visto que um mesmo valor de energia compreende infinitos sinais. Essa busca consistiu basicamente em encontrar um sinal de perturbação que provocasse um maior esforço de controle. Pode-se observar, na Figura 4.1, que após a aplicação da perturbação os estados convergem para a origem nos dois casos.

Com base nessa simulação, realizou-se o cálculo da energia do erro e verificou-se que essa é 32,40% maior no caso sem o compensador *anti-windup*. Além disso, a energia do sinal de entrada, $\sum_{k=0}^{80} \text{sat}(v_k)^T \text{sat}(v_k)$, é 152,15% maior no caso sem o compensador *anti-windup*, o que evidencia a vantagem do uso desse compensador.

É importante destacar que como no problema de otimização (4.28) assume-se que a condição inicial do sistema é zero e, portanto, $\delta^{-1} = \mu^{-1}$, então pode-se dizer que a adição

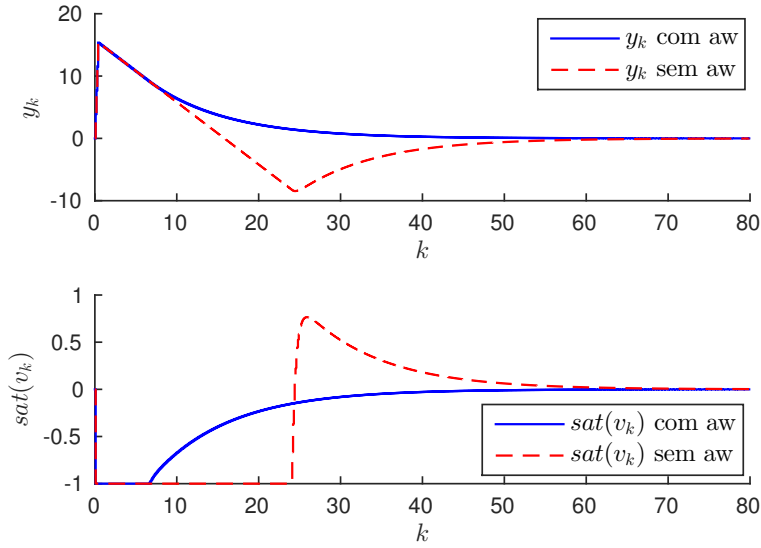


Figura 4.1: Resposta temporal do sistema representado por (4.30) com (—) e sem (---) compensador *anti-windup*.

do compensador *anti-windup* também proporcionou um aumento da estimativa da região de atração do sistema.

Minimização do ganho ℓ_2 :

Através do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_{w2}$ dado em (4.29), determinaram-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 4.2 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{2,4,6,8\}$. Percebe-se que quanto maior for a energia do sinal de perturbação maior será o limite do ganho ℓ_2 , porém, apesar de não estar evidente na figura, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante. Além disso, observa-se, neste caso, que essas curvas ficaram sobrepostas com a mudança da taxa máxima do atraso, uma vez que a diferença entre as mesmas é imperceptível.

Além disso, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, estabeleceu-se esta mesma relação considerando o sistema em malha-fechada com e sem adição do compensador *anti-windup*. Na Figura 4.3 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para $\Delta\tau_{\max} = 2$, considerando o sistema com e sem *anti-windup*. Percebe-se que com a adição do compensador *anti-windup* ao sistema em malha-fechada são alcançados maiores limites de perturbações admissíveis e menores limites para o ganho ℓ_2 .

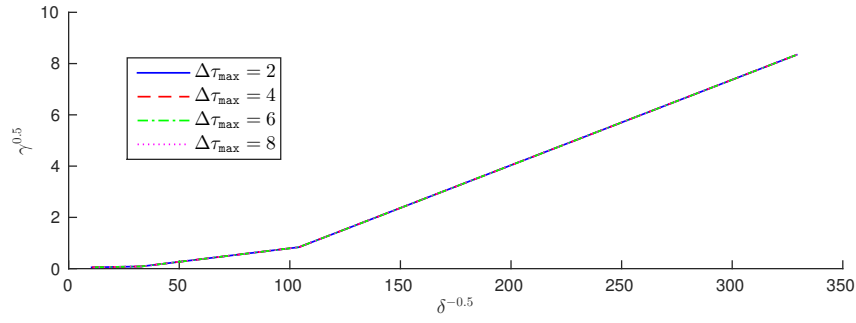


Figura 4.2: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ (—), $\Delta\tau_{\max} = 4$ (- -), $\Delta\tau_{\max} = 6$ (- .) e $\Delta\tau_{\max} = 8$ (...) - sistema representado por (4.30).

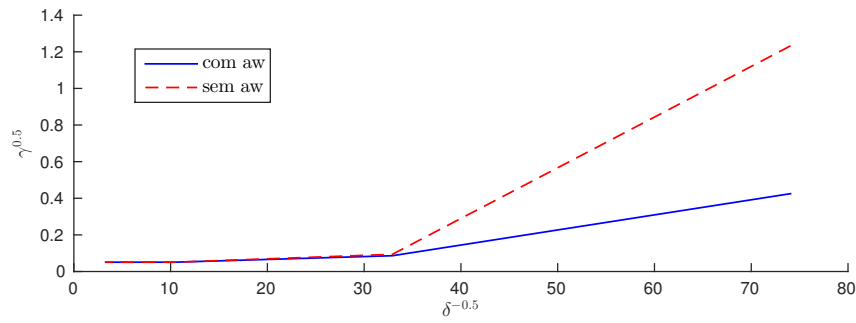


Figura 4.3: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem o compensador *anti-windup* - sistema representado por (4.30).

Caso escalar com incertezas

Assumindo que o sistema representado por (4.30) esteja sujeito a uma incerteza de $\pm 5\%$ em cada um dos valores de A , A_d , B , B_w , C_y e C_z . Neste caso, o método proposto em (Ghiggi et al., 2008) não é aplicável pois esse não trata o caso incerto. Para aplicar a abordagem proposta neste trabalho foram criados dois vértices (supostos conhecidos), sendo eles formados pelas seguintes matrizes

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0,95A = 0,9405, & A_2 &= 1,05A = 1,0395, \\
 A_{d,1} &= 0,95A_d = 0,0095, & A_{d,2} &= 1,05A_d = 0,0105, \\
 B_1 &= 0,95B = 0,0950, & B_2 &= 1,05B = 0,1050, \\
 B_{w,1} &= 0,95B_w = 0,0095, & B_{w,2} &= 1,05B_w = 0,0105, \\
 C_{y,1} &= 0,95C_y = 0,9500, & C_{y,2} &= 1,05C_y = 1,0500, \\
 C_{z,1} &= 0,95C_z = 0,9500 & C_{z,2} &= 1,05C_z = 1,0500,
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Maximização da tolerância a perturbação:

Sem a compensação *anti-windup* tem-se que $\delta = 1,16 \times 10^{-3}$ ($\|\omega_k\|_2 \leq 29,39$). Ao projetar a compensação para esse caso incerto, usando o procedimento de otimização (4.28), obteve-se $E_c = 0,0977$ com $\delta = 1,0360 \times 10^{-3}$ ($\|\omega_k\|_2 \leq 31,0678$). Observa-se a

redução significativa dos níveis de energia toleráveis pelo sistema incerto em relação ao precisamente conhecido. Porém, a introdução do compensador *anti-windup* melhora essa tolerância em relação ao caso sem o compensador em 5,7%.

Considerando o sistema representado por (4.32), com parâmetro α_k igual 1 para todo $k > 0$, $\xi_0 = \mathbf{0}$, isto é, condições iniciais nulas, e sinal de perturbação $\omega_k = [9,7205_{1,7} \quad \mathbf{0}_{1,93}]$, que está no limite da tolerância admissível, tem-se que as trajetórias dos estados estão contidas no interior de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não chegam a atingir o limite da região. Ressalta-se que esse sinal de perturbação foi obtido da mesma forma que no caso precisamente conhecido. Para o sistema representado por (4.32), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [18,7605_{1,7} \quad \mathbf{0}_{1,93}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 49,6356$. Entretanto, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo procedimentos de otimização $\mathcal{J}_{w1}$, por exemplo, $\omega_k = [32,4663_{1,7} \quad \mathbf{0}_{1,93}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 85,8979$, de modo que o sistema representado por (4.32) permaneça estável, ainda que suas trajetórias deixem a região $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Ressalta-se que as considerações feitas são em relação ao sistema com compensador *anti-windup*, e no último caso, o sinal mostrado instabiliza o sistema sem o compensador *anti-windup*.

A partir disso, pode-se concluir que, para o sistema representado por (4.32), o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{w2}$ não forneceu uma estimativa muito boa da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 59,77% acima da estimada. Além disso, como o sistema ainda permaneceu estável considerando sinais de perturbação com energia 174,83% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem utilizada é conservadora.

A fim de comparar o desempenho do sistema representado por (4.32) com e sem o compensador *anti-windup*, considerou-se então o sinal de perturbação $\omega_k = [32,2719_{1,7} \quad \mathbf{0}_{1,93}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 85,3835$. Na Figura 4.4 são mostradas a saída e o sinal de controle do sistema em malha-fechada, onde pode-se observar a melhoria na resposta do sistema com a utilização da compensação *anti-windup*. Com base nessa simulação, realizou-se o cálculo da energia do erro e verificou-se que essa é 55,86% maior no caso sem o compensador *anti-windup*. Além disso, a energia do sinal de entrada, $\sum_{k=0}^{100} \mathbf{sat}(v_k)^T \mathbf{sat}(v_k)$, é 61,13% maior no caso sem o compensador *anti-windup*, o que evidencia a vantagem do uso desse compensador.

Minimização do ganho ℓ_2 :

Através do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_{w2}$ dado em (4.29), determinaram-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 4.5 são mostradas as curvas que relacio-

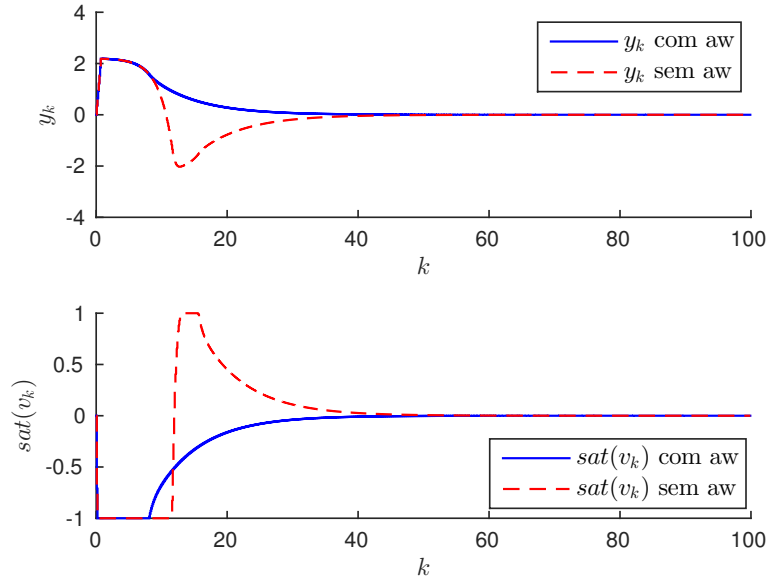


Figura 4.4: Resposta temporal do sistema representado por (4.32) com (—) e sem (---) compensador *anti-windup*.

nam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$. Percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que quanto maior for a energia do sinal de perturbação maior será o limite do ganho ℓ_2 , porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante. Além disso, observa-se que essas curvas ficaram sobrepostas com a mudança da taxa máxima de variação do atraso, uma vez que a diferença entre as mesmas é imperceptível.

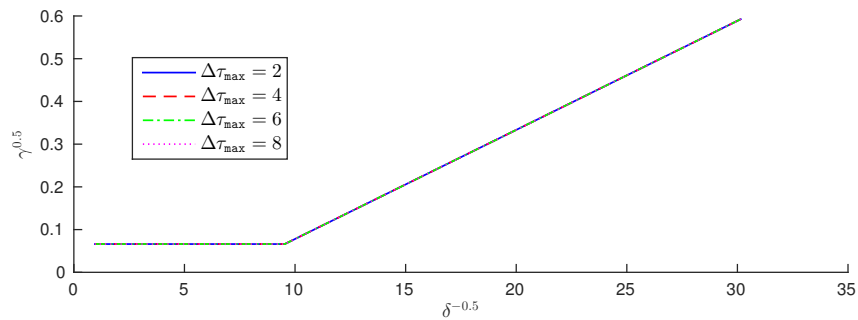


Figura 4.5: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ (—), $\Delta\tau_{\max} = 4$ (---), $\Delta\tau_{\max} = 6$ (-.) e $\Delta\tau_{\max} = 8$ (.) - sistema representado por (4.32).

Além disso, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, estabeleceu-se esta mesma relação considerando o sistema em malha-fechada com e sem adiação do compensador *anti-windup*. Na Figura 4.6 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para $\Delta\tau_{\max} = 2$, considerando o sistema com e sem *anti-windup*. Percebe-se, como no caso precisamente conhecido, que

com a adição do compensador *anti-windup* ao sistema em malha-fechada com incertezas politópicas são alcançados maiores limites de perturbações admissíveis e menores limites para o ganho ℓ_2 .

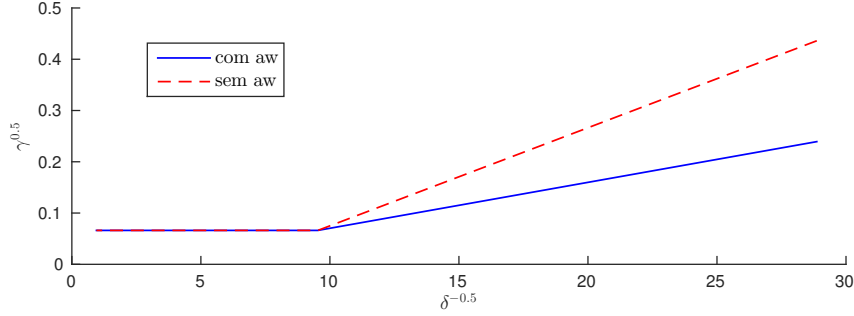


Figura 4.6: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem o compensador *anti-windup* - sistema (4.32).

4.4.2 Caso de dimensão 2

Considere o sistema de dimensão 2 precisamente conhecido dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0,85 & 0,1 \\ 0,1 & 1,0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0 \end{bmatrix} x_{k-\tau_k} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(v_k) + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_k, \\ y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k, \\ z_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k, \end{aligned} \quad (4.33)$$

com $\tau_k \in \{0, \dots, 10\}$, $\Delta\tau_{\max} = 10$ e $\bar{v} = 1$.

Para o sistema representado por (4.33) tem-se o seguinte compensador de estabilização dinâmica da saída:

$$\begin{aligned} x_{c,k+1} &= x_{c,k} - 0,1y_k, \\ v_k &= 0,15x_{c,k} - 3x_k. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Maximização da tolerância a perturbação:

Sem a compensação *anti-windup*, tem-se que $\delta = 2,0052$, o que corresponde a um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 0,7062$. A fim de maximizar a tolerância à perturbação pela adição do compensador *anti-windup*, resolveu-se o procedimento de otimização, $\mathcal{J}_{w1}$ dado em (4.28), obtendo-se $E_c = 0,3217$ com $\delta = 1,6830$. Portanto, assegurou-se um limite ℓ_2 para o sinal ω_k de $\|\omega_k\|_2 \leq 0,7708$, aumentando-se em 9,16% a tolerância da malha fechada a energia dos sinais que perturbam o sistema em relação ao sistema sem o compensador *anti-windup*.

O sistema representado por (4.33) é a versão discretizada, com tempo de amostragem $T_s = 0,1s$, do sistema usado por Gomes da Silva Jr. et al. (2009) para investigar

a utilização da compensação *anti-windup* nas suas formas estática e dinâmica. Desta forma, os valores encontrados anteriormente podem ser comparados com os alcançados na abordagem contínua no tempo proposta em (Gomes da Silva Jr. et al., 2009) em que foram obtidos: a) $\delta = 14,03$, considerando-se a síntese de um compensador *anti-windup* dinâmico e b) $\delta = 15,71$ via um compensador *anti-windup* estático. Os limites de energia para ω_k são, consequentemente, de $\|\omega_k\|_2 \leq 0,2670$ no caso dinâmico e $\|\omega_k\|_2 \leq 0,2523$ no caso estático. Portanto, os limites de tolerância à energia de sinais de perturbação desenvolvidos no domínio contínuo no tempo com a técnica propostas por Gomes da Silva Jr. et al. (2009) resultam em uma malha fechada que tolera aproximadamente um terço (32,73%, caso estático, e 34,64%, caso dinâmico) da energia admissível com a abordagem proposta neste trabalho.

Considerando $\xi_0 = \mathbf{0}$, isto é, condições iniciais nulas, e sinal de perturbação $\omega_k = [0,18_{1,18} \quad \mathbf{0}_{1,52}]$, que está no limite da tolerância admissível, tem-se que as trajetórias dos estados estão contidas no interior $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não chegam a atingir o limite da região. Ressalta-se que esse sinal de perturbação foi obtido da mesma forma que no exemplo anterior. Para o sistema representado por (4.33), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [0,3622_{1,15} \quad \mathbf{0}_{1,55}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 1,4028$. Entretanto, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo problema de otimização $\mathcal{J}_{w1}$, por exemplo, $\omega_k = [0,6150_{1,15} \quad \mathbf{0}_{1,55}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 2,3819$, de modo que o sistema representado por (4.33) permaneça estável, ainda que suas trajetórias deixem $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Ressalta-se que as considerações feitas são em relação ao sistema com compensador *anti-windup*, e no último caso, o sinal mostrado instabiliza o sistema sem o compensador *anti-windup*.

A partir disso, pode-se concluir que, para o sistema representado por (4.33), o problema de otimização $\mathcal{J}_{w1}$ não forneceu uma boa estimativa da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 81,99% acima da estimada. Além disso, como o sistema ainda permaneceu estável considerando sinais de perturbação com energia 209,02% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem é bastante conservadora.

A fim de comparar o desempenho do sistema representado por (4.33) com e sem o compensador *anti-windup*, assumiu-se então que $\omega_k = [0,6110_{1,15} \quad \mathbf{0}_{1,55}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 2,3665$. Na Figura 4.7 são mostradas a saída o sinal de controle do sistema em malha fechada, onde pode-se observar a melhoria na resposta do sistema com a utilização do compensador *anti-windup*.

Com base nessa simulação, realizou-se o cálculo da energia do erro e verificou-se que essa é 15,17% maior no caso sem o compensador *anti-windup*. Além disso, a energia do

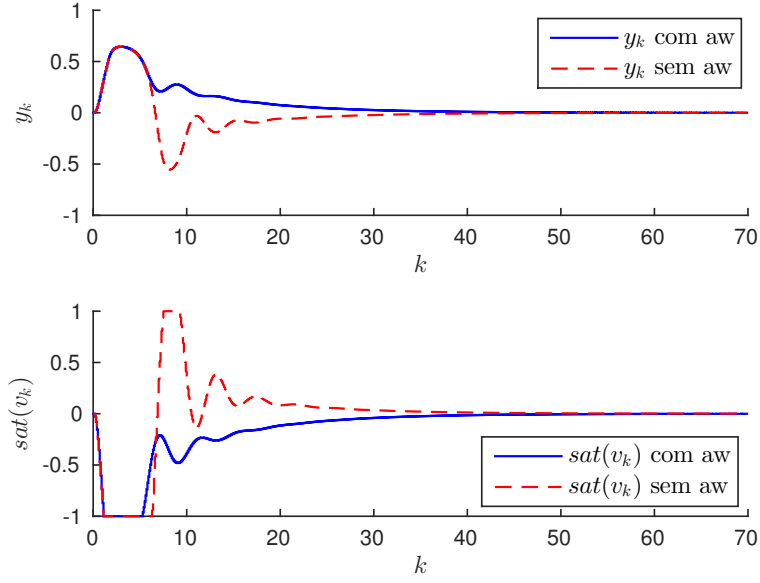


Figura 4.7: Resposta temporal do sistema representado por (4.33) com (—) e sem (---) compensador *anti-windup*.

sinal de entrada, $\sum_{k=0}^{70} \text{sat}(v_k)^T \text{sat}(v_k)$, é 40,63% maior no caso sem o compensador *anti-windup*, o que evidencia a vantagem do uso desse compensador.

Minimização do ganho ℓ_2 :

Através do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_{w2}$ dado em (4.29), determinou-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 4.8 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$. Percebe-se que quanto menor a máxima taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$, maior é o limite de perturbações admissíveis e menor é o limite do ganho ℓ_2 . Porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante.

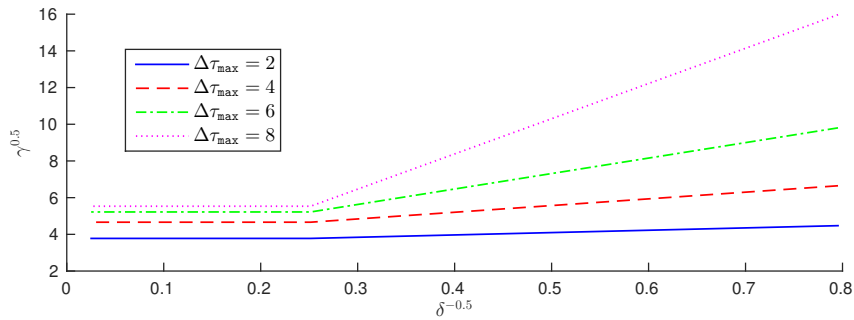


Figura 4.8: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ (—), $\Delta\tau_{\max} = 4$ (---), $\Delta\tau_{\max} = 6$ (-.) e $\Delta\tau_{\max} = 8$ (.) - sistema representado por (4.33).

Além disso, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, estabeleceu-se esta mesma relação considerando o sistema em malha-fechada com e sem adiação do compensador *anti-windup*. Na Figura 4.9 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para $\Delta\tau_{\max} = 2$, considerando o sistema com e sem *anti-windup*. Percebe-se que com a adiação do compensador *anti-windup* ao sistema em malha-fechada com incertezas politópicas são alcançados maiores limites de perturbações admissíveis e menores limites para o ganho ℓ_2 .

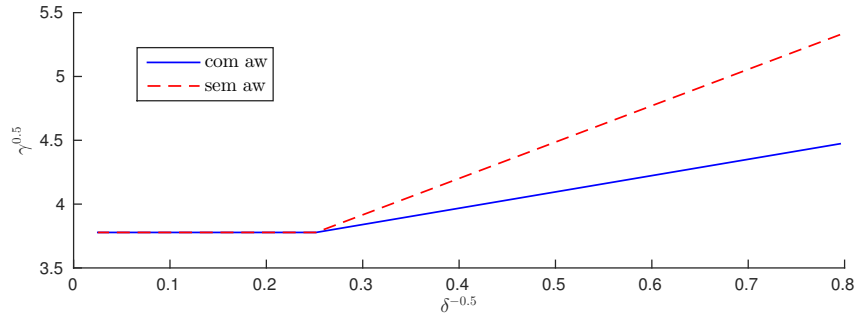


Figura 4.9: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem o compensador *anti-windup* - sistema representado por (4.33).

Caso de dimensão 2 com incertezas

No caso incerto, assumiu-se uma incerteza de $\pm 0,5\%$ em cada um dos valores de A , A_d , B , B_w , C_y e C_z . Neste caso, o método proposto em (Gomes da Silva Jr. et al., 2009) não é aplicável pois esse não trata o caso incerto. Para aplicar a abordagem proposta neste trabalho foram criados dois vértices (supostos conhecidos) sendo eles formados pelas matrizes

$$A_1 = 0,995A = \begin{bmatrix} 0,8458 & 0,0995 \\ 0,0995 & 0,9950 \end{bmatrix}, \quad A_2 = 1,005A = \begin{bmatrix} 0,8542 & 0,1005 \\ 0,1005 & 1,0050 \end{bmatrix},$$

$$A_{d,1} = 0,995A_d = \begin{bmatrix} 0,0498 & 0,0498 \\ 0,0498 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2} = 1,005A_d = \begin{bmatrix} 0,0502 & 0,0502 \\ 0,0502 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_1 = 0,995B &= \begin{bmatrix} 0,0995 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_2 = 1,005B &= \begin{bmatrix} 0,1005 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
B_{w,1} = 0,995B_w &= \begin{bmatrix} 0,0995 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_{w,2} = 1,005B_w &= \begin{bmatrix} 0,1005 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
C_{y,1} = 0,995C_y &= [0 \quad 0,9950], & C_{y,2} = 1,005C_y &= [0 \quad 1,0050], \\
C_{z,1} = 0,995C_z &= [0 \quad 0,9950] & C_{z,2} = 1,005C_z &= [0 \quad 1,0050].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Maximização da tolerância à perturbação:

Sem a compensação *anti-windup* tem-se $\delta = 5,9014$ ($\|\omega_k\|_2 \leq 0,4116$). Ao projetar a compensação para esse caso incerto, usando o procedimento de otimização $\mathcal{J}_{w1}$, dado em (4.28), obteve-se $E_c = 0,3470$, $\delta = 4,9976$ ($\|\omega_k\|_2 \leq 0,4473$). Observa-se uma redução significativa dos níveis de energia toleráveis pelo sistema incerto em relação ao precisamente conhecido. Porém a introdução do compensador *anti-windup* melhora essa tolerância em relação ao caso sem o compensador em 8,67%.

Considerando o sistema representado por (4.35), com parâmetro α_k igual 1 para todo $k > 0$, $\xi_0 = \mathbf{0}$, isto é, condições iniciais nulas, e sinal de perturbação $\omega_k = [0,181,18 \quad \mathbf{0}_{1,52}]$, que está no limite da tolerância admissível, tem-se que as trajetórias dos estados estão contidas no interior $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, porém não chegam a atingir o limite da região. Ressalta-se que esse sinal de perturbação foi obtido da mesma forma que no exemplo anterior. Para o sistema representado por (4.35), os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ são atingidos, por exemplo, aplicando o sinal de perturbação $\omega_k = [0,3199_{1,15} \quad \mathbf{0}_{1,55}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 1,2391$. Entretanto, podem ser aplicados sinais de perturbação com energia superior a fornecida pelo problema de otimização $\mathcal{J}_{w1}$, por exemplo, $\omega_k = [0,5740_{1,15} \quad \mathbf{0}_{1,55}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 2,2232$, de modo que o sistema representado por (4.35) permaneça estável, ainda que suas trajetórias deixem $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Ressalta-se que as considerações feitas são em relação ao sistema com compensador *anti-windup*, e no último caso, o sinal mostrado instabiliza o sistema sem o compensador *anti-windup*.

A partir disso, pode-se concluir que, para o sistema representado por (4.35), o problema de otimização $\mathcal{J}_{w1}$ não forneceu uma boa estimativa da máxima energia do sinal de perturbação para o qual as trajetórias do sistema permanecem limitadas, já que os limites de $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ foram atingidos com a aplicação de sinais de perturbação com energia 177,02% acima da estimada. Além disso, como o sistema ainda permaneceu estável considerando sinais de perturbação com energia 397,03% acima da estimada, tem-se que para esse caso a abordagem é bastante conservadora.

A fim de comparar o desempenho do sistema representado por (4.35) com e sem o compensador *anti-windup*, assumiu-se então que $\omega_k = [0,5717_{1,15} \quad \mathbf{0}_{1,55}]$, no qual $\|\omega_k\|_2 \leq 2,2142$. Na Figura 4.10 são mostradas a saída o sinal de controle do sistema em malha

fechada, onde pode-se observar a melhoria na resposta do sistema com a utilização do compensador *anti-windup*.

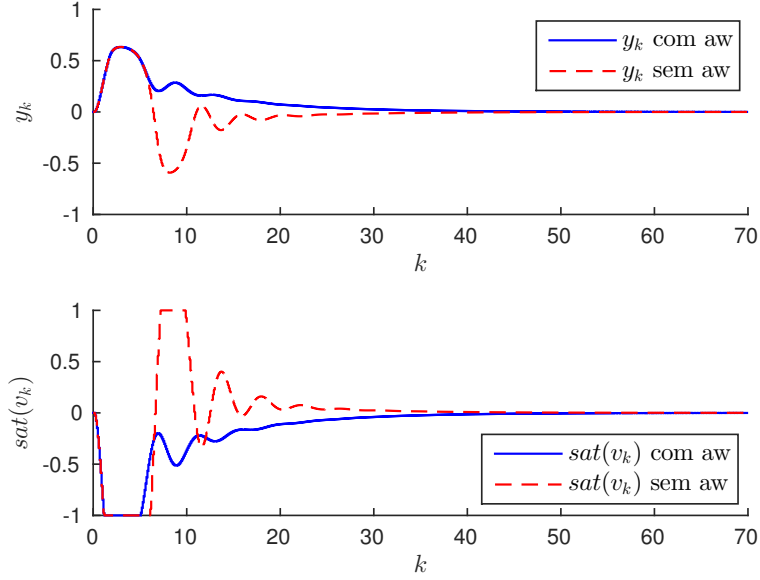


Figura 4.10: Resposta temporal do sistema representado por (4.33) com (—) e sem (---) compensador *anti-windup*.

Com base nessa simulação, realizou-se o cálculo da energia do erro e verificou-se que essa é 19,28% maior no caso sem o compensador *anti-windup*. Além disso, a energia do sinal de entrada, $\sum_{k=0}^{70} \mathbf{sat}(v_k)^T \mathbf{sat}(v_k)$, é 53,93% maior no caso sem o compensador *anti-windup*, o que evidencia a vantagem do uso desse compensador.

Minimização do ganho ℓ_2 :

Através do procedimento de minimização do ganho ℓ_2 , $\mathcal{J}_{w2}$ dado em (4.29), determinou-se os ganhos ℓ_2 para diferentes valores de δ^{-1} fornecidos considerando limites variáveis de taxas de variação do atraso. Na Figura 4.11 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para valores de $\Delta\tau_{\max} = \{2, 4, 6, 8\}$. Percebe-se que quanto menor a máxima taxa de variação do atraso, $\Delta\tau_{\max}$, maior é o limite de perturbações admissíveis e menor é o limite do ganho ℓ_2 . Porém, para valores menores que um determinado $\delta^{-0,5}$, $\gamma^{0,5}$ é praticamente constante.

Além disso, para um limite de taxa de variação do atraso fixo, estabeleceu-se esta mesma relação considerando o sistema em malha-fechada com e sem adição do compensador *anti-windup*. Na Figura 4.3 são mostradas as curvas que relacionam a energia da perturbação, $\delta^{-0,5}$, e o ganho ℓ_2 entre ω_k e z_k , $\gamma^{0,5}$, para $\Delta\tau_{\max} = 2$, considerando o sistema com e sem *anti-windup*. Percebe-se que com a adição do compensador *anti-windup*

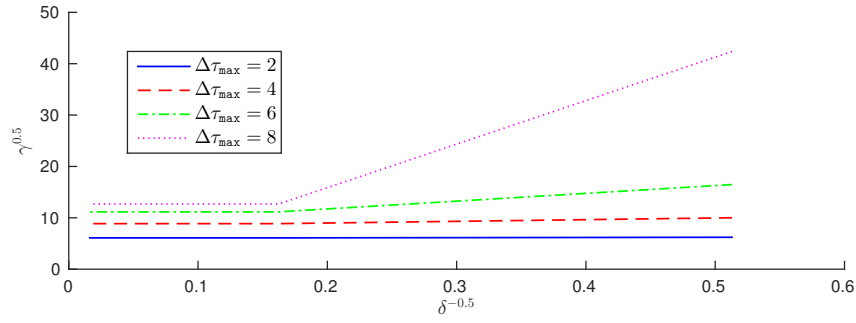


Figura 4.11: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ (—), $\Delta\tau_{\max} = 4$ (- -), $\Delta\tau_{\max} = 6$ (- .) e $\Delta\tau_{\max} = 8$ (...) - sistema representado por (4.35).

ao sistema em malha-fechada com incertezas politópicas são alcançados maiores limites de perturbações admissíveis e menores limites para o ganho ℓ_2 .

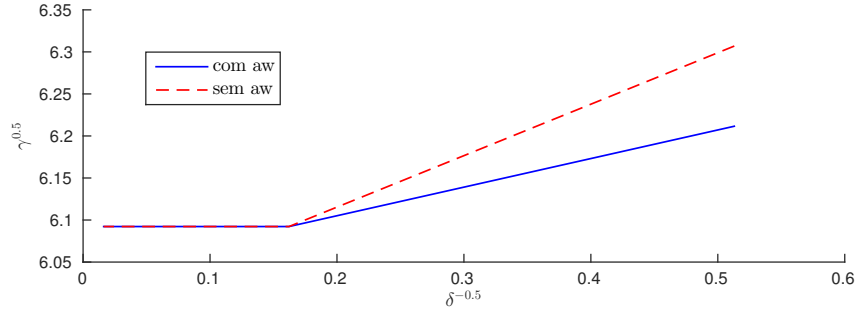


Figura 4.12: $\delta^{-0,5} \times \gamma^{0,5}$ para $\Delta\tau_{\max} = 2$ com e sem o compensador *anti-windup* - sistema representado por (4.35).

4.4.3 Comentários finais

Neste capítulo foram apresentados os resultados relacionados com a síntese de controladores *anti-windup* estáticos. Inicialmente, formalizou-se o problema a ser investigado. Em seguida, foram estabelecidas as condições de estabilização tanto para o caso com incertezas politópicas quanto para o caso precisamente conhecido. A partir dessas condições, propuseram-se dois procedimentos de otimização que tinham por objetivo maximizar a tolerância à perturbação e minimizar o ganho ℓ_2 . Por fim, testou-se a eficiência das condições propostas através de suas aplicações em um exemplo escalar e outro de dimensão 2.

Considerações Finais

5.1 Conclusões

Neste trabalho foram desenvolvidas condições para a síntese de controladores robustos do tipo realimentação de estados, bem como para a síntese de compensadores *anti-windup* estáticos que garantem a estabilidade entrada-estado de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados e saturação de atuadores, cuja incerteza e atraso são variantes no tempo. Em ambos os casos, assumiu-se que a variação máxima do atraso poderia assumir taxas limitadas.

Com base nessas condições, diferentes problemas de otimização foram formulados, sendo seus principais objetivos: maximizar a estimativa da região de atração, maximizar a tolerância ao distúrbio, minimizar o ganho ℓ_2 entre o sinal de perturbação e a saída mensurável e minimizar o conjunto alcançável. Nos problemas em que a função objetivo não envolvia a minimização ou maximização de um escalar, foi possível utilizar além da forma convencional o algoritmo de Frank-Wolfe para resolvê-los.

Para mostrar a eficiência da abordagem utilizada, no caso do projeto de controladores do tipo realimentação de estados, os resultados obtidos referentes ao procedimento de maximização da região de atração foram comparados com os alcançados seguindo o proposto por (Silva, 2016). Em ambos os exemplos sugeridos, a região obtida foi maior utilizando as condições estabelecidas neste trabalho.

Destaca-se, neste caso, a dificuldade de comparação das regiões obtidas com outras da literatura, por causa dos diferentes métodos de estimação das $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ que são utilizados.

Além disso, ainda sobre o procedimento de maximização da região de atração, percebeu-se, uma inconstância em relação ao melhor método adotado (procedimento de otimização e algoritmo) quando comparados os resultados do exemplo escalar com os do exemplo de dimensão 3. Essa mesma característica foi observada quando comparados os resultados do exemplo escalar precisamente conhecido com os do exemplo escalar com incertezas. Já o exemplo de dimensão 3 precisamente conhecido e o com incertezas apresentaram

resultados semelhantes.

Para mostrar a eficiência da abordagem utilizada, no caso do projeto de compensadores *anti-windup* estáticos, os resultados obtidos foram comparados com as abordagens contínuas no tempo propostas em (Ghiggi et al., 2008) e (Gomes da Silva Jr. et al., 2009), sendo feita para isso a discretização dos exemplos utilizados pelos mesmos. Em ambos os exemplos, ocorreu um significativo aumento do conjunto de sinais de perturbação admissíveis.

Além disso, percebeu-se, de uma forma geral, uma melhoria no desempenho do sistema com a utilização do compensador *anti-windup*. Ainda assim, observou-se que as condições propostas não forneceram uma boa estimativa da máxima energia do sinal de perturbação uma vez que as trajetórias do sistema, embora permaneceram limitadas, não excursionaram por toda estimativa da região de atração. Também, pode se dizer que a abordagem utilizada é ainda conservadora, visto que os sistemas permaneceram estáveis para sinais de perturbação com energia superior a fornecida.

Um dos problemas enfrentados neste trabalho, diz respeito ao custo computacional das condições investigadas. Este tende a se elevar, por exemplo, quando a dimensão do sistema aumenta devido o aumento do atraso. Esse aspecto pode ser, até mesmo, impeditivo da utilização das condições propostas.

Embora as condições propostas sejam muito custosas computacionalmente, os resultados podem ser vistos como limites (talvez teóricos) que podem ser alcançados com funções de Lyapunov-Krasovskii mais simples (ou incompletas).

5.2 Trabalhos para publicação

No desenvolvimento deste trabalho de dissertação foi elaborado um artigo que foi aceito para publicação no XIII SBAI:

- C. de Souza, V. J. S. Leite, L. F. P. Silva and I. Rubio Scola (2017). Projeto de compensador anti-windup para sistemas sujeitos a atrasos nos estados com taxa de variação limitada. Em *Anais do XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, SBAI 2017, 1-4 de outubro, Porto Alegre, RS, Brasil.

Esse artigo, que tem como base o conteúdo apresentado no Capítulo 4 deste trabalho, aborda o projeto de compensadores *anti-windup* estáticos para sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e atuadores saturantes. Mais especificamente, são tratados os sistemas com incertezas e atraso variantes no tempo e, além disso, assume-se que a variação máxima do atraso possui taxas limitadas. Considerando que o sistema esteja sujeito a ação de perturbações limitadas em energia, as condições propostas para a síntese do compensadores *anti-windup* devem garantir que as trajetórias do sistema sejam

limitadas e um certo nível de desempenho ℓ_2 seja alcançado para a saída regulada. A partir das condições determinadas, problemas de otimização convexa são propostos a fim de maximizar o limite de perturbações admissíveis ou minimizar o ganho ℓ_2 . Por fim, exemplos numéricos demonstram a eficiência dos métodos propostos.

Além disso, encontra-se em preparação o artigo:

- C. de Souza, V. J. S. Leite, L. F. P. Silva, and E. B. Castelan. ISS Robust Stabilization of Discrete-time Systems with Time-varying State Delay and Saturating Actuators.

Esse artigo, que terá como base o conteúdo apresentado no Capítulo 3 deste trabalho, abordará o problema de estabilização robusta entrada-estado de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados e atuadores saturantes. Mais especificamente, serão tratados os sistemas com incertezas e atraso variantes no tempo e, além disso, será assumido que a variação máxima do atraso possui taxas limitadas. Considerando que o sistema esteja sujeito a ação de perturbações limitadas em energia, as condições propostas para a síntese de controladores do tipo realimentação de estados deverão garantir que as trajetórias do sistema sejam limitadas e um certo nível de desempenho ℓ_2 seja alcançado para a saída regulada. A partir das condições determinadas, problemas de otimização convexa serão propostos a fim de maximizar a estimativa da região de atração, maximizar o limite de perturbações admissíveis ou minimizar o ganho ℓ_2 . Por fim, exemplos numéricos demonstrarão a eficiência dos métodos propostos.

5.3 Propostas de continuidade

Algumas propostas de continuidade deste trabalho são apresentadas em sequência:

- considerar a saturação na taxa de variação de atuadores;
- estender os resultados para classe dos sistemas quasi-LPV, tal como acontece na modelagem fuzzy Takagi-Sugeno;
- desenvolver o projeto de compensadores *anti-windup* dinâmicos;
- investigar condições para tratar a saturação de atuadores a partir de abordagens baseadas em funções de Lyapunov-Krasovskii.

Desigualdades Matriciais Lineares

Neste apêndice são mostradas algumas das ferramentas utilizadas no desenvolvimento desse trabalho.

A.1 Definição

Definição A.1 ((Boyd et al., 1994)) *Uma LMI é uma desigualdade da forma*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > \mathbf{0}, \quad (\text{A.1})$$

em que $x \in \mathbb{R}^m$ é a variável de interesse e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes conhecidas. Desde que o cone de matrizes definidas positivas seja convexo e a matriz $F(x)$ seja uma função afim em x , então a restrição $F(x) > \mathbf{0}$ é uma restrição convexa em x . Com isso, o seguinte problema de otimização pode ser formulado:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & F(x) > \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

em que $c \in \mathbb{R}^m$. O problema de otimização (A.2) é uma generalização do problema de programação linear clássico em um cone de matrizes definidas positivas.

A.2 Complemento de Schur

Algumas desigualdades matriciais não-lineares convexas podem ser transformadas em LMIs usando o complemento de Schur, sendo esta, uma ferramenta básica na manipulação de desigualdades matriciais.

Lema A.1 (Complemento de Schur) *Suponha que $R = R^T$, $S = S^T$ e Q são matrizes reais de dimensões apropriadas. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$1. \quad \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

2. $R > 0$ e $S - QR^{-1}Q^T > \mathbf{0}$.

A prova completa deste Lema pode ser encontrada em (Tarbouriech et al., 2011).

A.3 *S-Procedure*

Um problema comum em programação convexa é o caso onde a definição em sinal de uma função quadrática deve verificar-se sempre a definição em sinal de outra função quadrática for verificada. Assim, pode-se utilizar *S-procedure* para aproximar esta relação através de uma LMI. A seguir será apresentado o *S-procedure* para funções quadráticas e inequações estritas (Boyd et al., 1994).

Sejam $T_0, \dots, T_p \in R^{n \times n}$ matrizes simétricas sujeitas à seguinte condição:

$$\xi^T T_0 \xi > 0, \forall \xi \neq 0 \text{ tal que } \xi^T T_{(i)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.3})$$

Pode-se demonstrar que, se existem $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tais que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_{(i)} T_{(i)} > \mathbf{0}, \quad (\text{A.4})$$

então a relação (A.3) se verifica. É importante notar que a condição (A.4) é uma LMI nas variáveis T_0 e $\tau_1, \dots, \tau_p$.

Soluções obtidas para os casos do item 3.5

Neste apêndice são mostradas, para todos os sistemas avaliados, as matrizes encontradas na resolução dos problemas de otimização $\mathcal{J}_{1,\bullet}$ e $\mathcal{J}_2$, que foram usados no Capítulo 3, item 3.5 . Ressalta-se que os valores apresentados resultam de um arredondamento no qual considerou-se apenas 4 casas decimais.

Sistema representado por (3.55):

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$ dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3761 & 0,9893 & 1,7939 \\ 0,9893 & 28,2088 & 7,3625 \\ 1,7939 & 7,3625 & 67,3015 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4335 & 1,8078 & 3,0911 \\ 1,8078 & 30,4950 & 31,0527 \\ 3,0911 & 31,0527 & 97,6919 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3942 & 1,1632 & 1,9925 \\ 1,1632 & 22,9877 & 14,4181 \\ 1,9925 & 14,4182 & 60,6415 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0,3665 & 1,1334 & 1,6937 \\ 1,1334 & 22,9556 & 14,0969 \\ 1,6937 & 14,0969 & 57,4181 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3632 & 0,8610 & 1,5262 \\ 0,8610 & 31,2469 & -0,4231 \\ 1,5262 & -0,4231 & 69,2114 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4577 & 2,1777 & 3,5756 \\ 2,1777 & 33,72894 & 37,9298 \\ 3,5756 & 37,9298 & 108,3872 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,4267 & 1,8456 & 2,5005 \\ 1,8456 & 40,8277 & 23,3863 \\ 2,5005 & 23,3863 & 66,5732 \end{bmatrix}.$$

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3762 & 0,9898 & 1,7951 \\ 0,9898 & 28,2008 & 7,3611 \\ 1,7951 & 7,3611 & 67,3176 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4335 & 1,8075 & 3,0924 \\ 1,8075 & 30,4862 & 31,0538 \\ 3,0924 & 31,0538 & 97,7189 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3942 & 1,1631 & 1,9934 \\ 1,1631 & 22,9777 & 14,4145 \\ 1,9934 & 14,4145 & 60,6468 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0,3665 & 1,1334 & 1,6941 \\ 1,1334 & 22,9532 & 14,0962 \\ 1,6941 & 14,0962 & 57,4225 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3761 & 0,9893 & 1,7939 \\ 0,9893 & 28,2081 & 7,3625 \\ 1,7939 & 7,3625 & 67,2998 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4335 & 1,8077 & 3,0911 \\ 1,8077 & 30,4943 & 31,0521 \\ 3,0911 & 31,0521 & 97,6902 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3942 & 1,1632 & 1,9925 \\ 1,1632 & 22,9872 & 14,4178 \\ 1,9925 & 14,4178 & 60,6404 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3,4467 & -0,1269 & -0,0705 \\ -0,1269 & 0,0560 & -0,0100 \\ -0,0705 & -0,0100 & 0,0219 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3637 & 0,8763 & 1,5386 \\ 0,8763 & 32,9564 & 1,0758 \\ 1,5386 & 1,0758 & 68,4620 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4728 & 2,0848 & 3,1329 \\ 2,0848 & 30,6241 & 29,0274 \\ 3,1329 & 29,0274 & 99,8585 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,4190 & 1,8739 & 2,4546 \\ 1,8739 & 42,7401 & 23,4767 \\ 2,4546 & 23,4767 & 67,8554 \end{bmatrix}.$$

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se as seguintes matrizes:

$$\mathbb{K} = [-1,6161 \quad 0,0177 \quad 0,0480], \quad (\text{B.1})$$

logo, $v_k = -1,6191x_k + 0,0177x_{k-1} + 0,0480x_{k-2}$ estabiliza o sistema representado por (3.55). Além disso, do procedimento de otimização (3.50) obteve-se também as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,0144 & 0,0083 & 0,0067 \\ 0,0083 & 0,0238 & 0,0134 \\ 0,0067 & 0,0134 & 0,0563 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,0144 & 0,0093 & 0,0072 \\ 0,0093 & 0,0322 & 0,0287 \\ 0,0072 & 0,0287 & 0,0569 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,0145 & 0,0092 & 0,0084 \\ 0,0092 & 0,0319 & 0,0273 \\ 0,0084 & 0,0273 & 0,0817 \end{bmatrix}.$$

Sistema representado por (3.62):

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$ dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3251 & 0,8866 & 1,6230 \\ 0,8866 & 20,0491 & 9,9731 \\ 1,6230 & 9,9731 & 57,1347 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,3343 & 1,0130 & 1,8610 \\ 1,0130 & 20,0575 & 14,8781 \\ 1,8610 & 14,8781 & 61,7565 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3292 & 0,9655 & 1,6755 \\ 0,9655 & 20,8008 & 12,2554 \\ 1,6755 & 12,2554 & 55,5251 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,3128 & 0,7441 & 1,3721 \\ 0,7441 & 21,5699 & 5,2724 \\ 1,3721 & 5,2724 & 52,6616 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,3519 & 1,3172 & 2,2557 \\ 1,3172 & 22,8573 & 22,4778 \\ 2,2557 & 22,4778 & 72,2963 \end{bmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{bmatrix} 0,3271 & 0,8851 & 1,5411 \\ 0,8851 & 17,6116 & 11,0617 \\ 1,5411 & 11,0617 & 47,2174 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,3050 & 0,8482 & 1,2993 \\ 0,8482 & 17,5501 & 10,6587 \\ 1,2993 & 10,6587 & 44,5758 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3312 & 1,0075 & 1,8270 \\ 1,0075 & 25,5955 & 9,0605 \\ 1,8270 & 9,0605 & 65,5369 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,3608 & 1,4088 & 2,5482 \\ 1,4088 & 25,7799 & 22,7030 \\ 2,5482 & 22,7030 & 80,3603 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3485 & 1,3066 & 2,0961 \\ 1,3066 & 29,1270 & 16,3327 \\ 2,0961 & 16,3327 & 64,4730 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,3041 & 0,6542 & 1,1962 \\ 0,6542 & 24,2066 & -0,5552 \\ 1,1962 & -0,5552 & 53,7789 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,3745 & 1,6616 & 2,7698 \\ 1,6616 & 26,1124 & 29,7118 \\ 2,7698 & 29,7118 & 84,7394 \end{bmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{bmatrix} 0,3493 & 1,4110 & 1,8885 \\ 1,4110 & 31,9185 & 18,2629 \\ 1,8885 & 18,2629 & 51,3454 \end{bmatrix}.$$

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3248 & 0,8813 & 1,6178 \\ 0,8813 & 19,9713 & 9,8312 \\ 1,6178 & 9,8312 & 57,0788 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,3342 & 1,0101 & 1,8634 \\ 1,0101 & 19,9920 & 14,9096 \\ 1,8634 & 14,9096 & 61,8481 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3290 & 0,9628 & 1,6719 \\ 0,9628 & 20,7421 & 12,2411 \\ 1,6719 & 12,2411 & 55,4397 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,3127 & 0,7440 & 1,3717 \\ 0,7440 & 21,5760 & 5,2804 \\ 1,3717 & 5,2804 & 52,6577 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,3520 & 1,3189 & 2,2589 \\ 1,3189 & 22,8820 & 22,5322 \\ 2,2589 & 22,5322 & 72,4095 \end{bmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{bmatrix} 0,32706 & 0,8851 & 1,5408 \\ 0,8851 & 17,6178 & 11,0685 \\ 1,5408 & 11,0685 & 47,2190 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,3049 & 0,8483 & 1,2990 \\ 0,8483 & 17,5526 & 10,6617 \\ 1,2990 & 10,6617 & 44,5742 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3251 & 0,8893 & 1,6202 \\ 0,8893 & 20,0596 & 10,0868 \\ 1,6202 & 10,0868 & 56,9010 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,3337 & 1,0079 & 1,8416 \\ 1,0079 & 20,0088 & 14,6956 \\ 1,8416 & 14,6956 & 61,1108 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3290 & 0,9632 & 1,6695 \\ 0,9632 & 20,7285 & 12,2404 \\ 1,6695 & 12,2404 & 55,2752 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,3128 & 0,7441 & 1,3721 \\ 0,7441 & 21,5687 & 5,2707 \\ 1,3721 & 5,2707 & 52,6588 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,3520 & 1,3170 & 2,2553 \\ 1,3170 & 22,8545 & 22,4718 \\ 2,2553 & 22,4718 & 72,2812 \end{bmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{bmatrix} 0,3271 & 0,8852 & 1,5410 \\ 0,8852 & 17,6112 & 11,0611 \\ 1,5410 & 11,0611 & 47,2144 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 4,0345 & -0,144 & -0,0830 \\ -0,1446 & 0,0718 & -0,0130 \\ -0,0830 & -0,0130 & 0,0279 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,3368 & 1,0371 & 2,0498 \\ 1,0371 & 30,2581 & 8,9625 \\ 2,0498 & 8,9625 & 80,5185 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,3883 & 1,6967 & 3,1289 \\ 1,6967 & 29,1275 & 27,8795 \\ 3,1289 & 27,8795 & 100,2759 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,3702 & 1,4981 & 2,6574 \\ 1,4981 & 34,7647 & 18,8322 \\ 2,6574 & 18,8322 & 80,2375 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,3098 & 0,6178 & 1,1282 \\ 0,6178 & 24,4551 & -4,4759 \\ 1,1282 & -4,4759 & 49,2220 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,3907 & 1,7001 & 2,6836 \\ 1,7001 & 25,8521 & 28,4065 \\ 2,6836 & 28,4065 & 79,6360 \end{bmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{bmatrix} 0,3463 & 1,4444 & 1,8453 \\ 1,4444 & 34,2311 & 18,5775 \\ 1,8453 & 18,5775 & 52,2375 \end{bmatrix}.$$

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,0162 & 0,0089 & 0,0070 \\ 0,0089 & 0,0273 & 0,0208 \\ 0,0070 & 0,0208 & 0,0644 \end{bmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,0162 & 0,0090 & 0,0071 \\ 0,0090 & 0,0283 & 0,0219 \\ 0,0071 & 0,0219 & 0,0652 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,2} = \begin{bmatrix} 0,0162 & 0,0090 & 0,0071 \\ 0,0090 & 0,0282 & 0,0219 \\ 0,0071 & 0,0219 & 0,0655 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,0162 & 0,0083 & 0,0062 \\ 0,0083 & 0,0212 & 0,0120 \\ 0,0062 & 0,0120 & 0,0509 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,0162 & 0,0091 & 0,0063 \\ 0,0091 & 0,0286 & 0,0235 \\ 0,0063 & 0,0235 & 0,0479 \end{bmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{bmatrix} 0,0162 & 0,0089 & 0,0070 \\ 0,0089 & 0,0282 & 0,0216 \\ 0,0070 & 0,0216 & 0,0635 \end{bmatrix}.$$

Sistema representado por (3.69):

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
 W_{1,0} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0009 & 0,0003 & -0,0006 \\ 0,0001 & 0,0084 & 0,0285 & 0,0009 & 0,0158 & 0,0195 \\ -0,0002 & 0,0285 & 0,0980 & 0,0017 & 0,0534 & 0,0686 \\ 0,0009 & 0,0009 & 0,0017 & 0,0270 & -0,0050 & -0,0048 \\ 0,0003 & 0,0158 & 0,0534 & -0,0050 & 3,2269 & -3,3608 \\ -0,0006 & 0,0195 & 0,0686 & -0,0048 & -3,3608 & 3,6786 \end{bmatrix}, \\
 W_{1,1} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0015 & 0,0001 & -0,0006 \\ 0,0002 & 0,0087 & 0,0294 & 0,0010 & 0,0249 & 0,0107 \\ -0,0002 & 0,0294 & 0,1004 & 0,0004 & 0,0859 & 0,0381 \\ 0,0015 & 0,0010 & 0,0004 & 0,0285 & -0,0068 & -0,0047 \\ 0,0001 & 0,0249 & 0,0859 & -0,0068 & 1,6789 & -1,6694 \\ -0,0006 & 0,0107 & 0,0381 & -0,0047 & -1,6694 & 1,8372 \end{bmatrix}, \\
 R &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0011 & 0,0003 & -0,0005 \\ 0,0002 & 0,0083 & 0,0281 & 0,0005 & 0,0240 & 0,0107 \\ -0,0002 & 0,0281 & 0,0965 & 0,0000 & 0,0822 & 0,0380 \\ 0,0011 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0238 & -0,0045 & -0,0039 \\ 0,0003 & 0,0240 & 0,0822 & -0,0045 & 1,6735 & -1,6701 \\ -0,0005 & 0,0107 & 0,0380 & -0,0039 & -1,6701 & 1,8370 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Já para $\mathcal{J}_{1,3}$, dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
 W_{1,0} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0007 & 0,0003 & -0,0006 \\ 0,0002 & 0,0084 & 0,0284 & 0,0010 & 0,0155 & 0,0198 \\ -0,0002 & 0,0284 & 0,0978 & 0,0022 & 0,0523 & 0,0698 \\ 0,0007 & 0,0010 & 0,0022 & 0,0221 & -0,0098 & -0,0009 \\ 0,0003 & 0,0155 & 0,0523 & -0,0098 & 3,5553 & -3,7104 \\ -0,0006 & 0,0198 & 0,0698 & -0,0009 & -3,7104 & 4,0523 \end{bmatrix}, \\
 W_{1,1} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0003 & 0,0018 & 0,0001 & -0,0007 \\ 0,0002 & 0,0088 & 0,0294 & 0,0008 & 0,0251 & 0,0103 \\ -0,0003 & 0,0294 & 0,1007 & -0,0006 & 0,0867 & 0,0369 \\ 0,0018 & 0,0008 & -0,0006 & 0,0372 & -0,0113 & -0,0032 \\ 0,0001 & 0,0251 & 0,0867 & -0,0113 & 1,6211 & -1,6060 \\ -0,0007 & 0,0103 & 0,0369 & -0,0032 & -1,6060 & 1,7687 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe. Para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0009 & 0,0003 & -0,0006 \\ 0,0002 & 0,0084 & 0,0286 & 0,0009 & 0,0159 & 0,0196 \\ -0,0002 & 0,0286 & 0,0984 & 0,0017 & 0,0537 & 0,0688 \\ 0,0009 & 0,0009 & 0,0017 & 0,0266 & -0,0048 & -0,0049 \\ 0,0003 & 0,0159 & 0,0537 & -0,0048 & 3,2416 & -3,3762 \\ -0,0006 & 0,0196 & 0,0688 & -0,0049 & -3,3762 & 3,6956 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0015 & 0,0001 & -0,0006 \\ 0,0002 & 0,0088 & 0,0295 & 0,0010 & 0,0251 & 0,0107 \\ -0,0002 & 0,0295 & 0,1009 & 0,0004 & 0,0864 & 0,0382 \\ 0,0015 & 0,0010 & 0,0004 & 0,0280 & -0,0065 & -0,0049 \\ 0,0001 & 0,0251 & 0,0864 & -0,0065 & 1,6867 & -1,6771 \\ -0,0006 & 0,0107 & 0,0382 & -0,0049 & -1,6771 & 1,8457 \end{bmatrix},$$

$$R = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0011 & 0,0003 & -0,0005 \\ 0,0002 & 0,0083 & 0,0281 & 0,0005 & 0,0240 & 0,0107 \\ -0,0002 & 0,0281 & 0,0965 & 0,0000 & 0,0823 & 0,0380 \\ 0,0011 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0238 & -0,0046 & -0,0038 \\ 0,0003 & 0,0240 & 0,0823 & -0,0046 & 1,6739 & -1,6705 \\ -0,0005 & 0,0107 & 0,0380 & -0,0038 & -1,6705 & 1,8374 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0009 & 0,0003 & -0,0006 \\ 0,0001 & 0,0084 & 0,0285 & 0,0009 & 0,0158 & 0,0195 \\ -0,0002 & 0,0285 & 0,0979 & 0,0017 & 0,0534 & 0,0686 \\ 0,0009 & 0,0009 & 0,0017 & 0,0270 & -0,0050 & -0,0048 \\ 0,0003 & 0,0158 & 0,0534 & -0,0050 & 3,2264 & -3,3603 \\ -0,0006 & 0,0195 & 0,0686 & -0,0048 & -3,3603 & 3,6781 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0015 & 0,0001 & -0,0006 \\ 0,0002 & 0,0087 & 0,0293 & 0,0010 & 0,0249 & 0,0107 \\ -0,0002 & 0,0293 & 0,1004 & 0,0004 & 0,0858 & 0,0381 \\ 0,0015 & 0,0010 & 0,0004 & 0,0285 & -0,0068 & -0,0047 \\ 0,0001 & 0,0249 & 0,0858 & -0,0068 & 1,6787 & -1,6692 \\ -0,0006 & 0,0107 & 0,0381 & -0,0047 & -1,6692 & 1,8370 \end{bmatrix},$$

$$R = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0011 & 0,0003 & -0,0005 \\ 0,0002 & 0,0083 & 0,0281 & 0,0005 & 0,0240 & 0,0107 \\ -0,0002 & 0,0281 & 0,0965 & 0,0000 & 0,0823 & 0,0380 \\ 0,0011 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0238 & -0,0046 & -0,0038 \\ 0,0003 & 0,0240 & 0,0823 & -0,0046 & 1,6739 & -1,6705 \\ -0,0005 & 0,0107 & 0,0380 & -0,0038 & -1,6705 & 1,8374 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0009 & 0,0004 & -0,0007 \\ 0,0001 & 0,0083 & 0,0281 & 0,0010 & 0,0167 & 0,0180 \\ -0,0002 & 0,0281 & 0,0967 & 0,0020 & 0,0564 & 0,0635 \\ 0,0009 & 0,0010 & 0,0020 & 0,0305 & 0,0011 & -0,0130 \\ 0,0004 & 0,0167 & 0,0564 & 0,0011 & 4,1971 & -4,3995 \\ -0,0007 & 0,0180 & 0,0635 & -0,0130 & -4,3995 & 4,7892 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0006 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0017 & -0,0007 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0087 & 0,0292 & 0,0006 & 0,0253 & 0,0102 \\ -0,0002 & 0,0292 & 0,1000 & -0,0013 & 0,0885 & 0,0352 \\ 0,0017 & 0,0006 & -0,0013 & 0,0336 & -0,0266 & 0,0117 \\ -0,0007 & 0,0253 & 0,0885 & -0,0266 & 1,4951 & -1,4631 \\ 0,0002 & 0,0102 & 0,0352 & 0,0117 & -1,4631 & 1,6089 \end{bmatrix}.$$

No que se refere ao procedimento de maximização da tolerância à perturbação, $\mathcal{J}_2$ dado em (3.50), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,1954 & 0,1103 & 0,0632 & 0,1912 & 0,1092 & 0,0660 \\ 0,1103 & 0,2364 & 0,5929 & 0,1034 & 0,4695 & 0,3442 \\ 0,0632 & 0,5929 & 1,8139 & 0,0571 & 1,3566 & 1,0131 \\ 0,1912 & 0,1034 & 0,0571 & 0,2558 & 0,2018 & -0,0652 \\ 0,1092 & 0,4695 & 1,3566 & 0,2018 & 41,7340 & -43,0891 \\ 0,0660 & 0,3442 & 1,0131 & -0,0652 & -43,0891 & 48,1181 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,1957 & 0,1106 & 0,0640 & 0,1977 & 0,1095 & 0,0656 \\ 0,1106 & 0,2389 & 0,6007 & 0,1051 & 0,4822 & 0,3421 \\ 0,0640 & 0,6007 & 1,8388 & 0,0560 & 1,3976 & 1,0069 \\ 0,1977 & 0,1051 & 0,0560 & 0,3708 & 0,1357 & -0,0028 \\ 0,1095 & 0,4822 & 1,3976 & 0,1357 & 16,2190 & -15,5746 \\ 0,0656 & 0,3421 & 1,0069 & -0,0028 & -15,5746 & 18,3868 \end{bmatrix}.$$

Sistema representado por (3.76):

Considerando, inicialmente, o método de resolução convencional, para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,4625 & 0,1036 & -0,1622 & 1,0552 & 0,6262 & -0,8326 \\ 0,1036 & 2,6652 & 8,7918 & 0,2265 & 2,5040 & 9,0039 \\ -0,1622 & 8,7918 & 29,7052 & -0,4357 & 7,8113 & 31,3959 \\ 1,0552 & 0,2265 & -0,4357 & 23,5941 & -3,9379 & -2,9832 \\ 0,6262 & 2,5040 & 7,8113 & -3,9379 & 777,8547 & -803,3057 \\ -0,8326 & 9,0039 & 31,3959 & -2,9832 & -803,3057 & 889,9889 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4697 & 0,1076 & -0,1805 & 1,2292 & 1,2440 & -1,7357 \\ 0,1076 & 2,6312 & 8,6392 & 0,1202 & 3,2589 & 7,7377 \\ -0,1805 & 8,6392 & 29,1969 & -1,1006 & 9,7396 & 28,4498 \\ 1,2292 & 0,1202 & -1,1006 & 28,8516 & -1,0597 & -8,2012 \\ 1,2440 & 3,2589 & 9,7396 & -1,0597 & 691,4458 & -712,8195 \\ -1,7357 & 7,7377 & 28,4498 & -8,2012 & -712,8195 & 794,4408 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0008 & 0,0001 & -0,0003 \\ 0,0001 & 0,0026 & 0,0087 & -0,0003 & 0,0022 & 0,0090 \\ -0,0002 & 0,0087 & 0,0294 & -0,0019 & 0,0076 & 0,0306 \\ 0,0008 & -0,0003 & -0,0019 & 0,0243 & -0,0066 & -0,0039 \\ 0,0001 & 0,0022 & 0,0076 & -0,0066 & 1,1689 & -1,2208 \\ -0,0003 & 0,0090 & 0,0306 & -0,0039 & -1,2208 & 1,3345 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,4721 & 0,1209 & -0,1322 & 1,3114 & -0,0465 & -0,3209 \\ 0,1209 & 2,7365 & 8,9858 & 0,7861 & -1,3672 & 13,1437 \\ -0,1322 & 8,9858 & 30,3058 & 0,8097 & -4,4291 & 45,1383 \\ 1,3114 & 0,7861 & 0,8097 & 25,1746 & -6,8624 & 0,6589 \\ -0,0465 & -1,3672 & -4,4291 & -6,8624 & 600,3904 & -637,6135 \\ -0,3209 & 13,1437 & 45,1383 & 0,6589 & -637,6135 & 739,6479 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,4364 & 0,0604 & -0,2685 & 0,9536 & 0,1334 & -0,5374 \\ 0,0604 & 2,4618 & 8,1356 & 0,0351 & -0,2788 & 10,8870 \\ -0,2685 & 8,1356 & 27,5190 & -0,9899 & -0,9726 & 37,3160 \\ 0,9536 & 0,0351 & -0,9899 & 21,2710 & -4,2938 & -2,6612 \\ 0,1334 & -0,2788 & -0,9726 & -4,2938 & 595,8600 & -628,1600 \\ -0,5374 & 10,8870 & 37,3160 & -2,6612 & -628,1600 & 716,5900 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathcal{J}_{1,3}$, dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0010 & 0,0001 & -0,0003 \\ 0,0001 & 0,0026 & 0,0086 & 0,0002 & 0,0020 & 0,0091 \\ -0,0002 & 0,0086 & 0,0289 & -0,0007 & 0,0069 & 0,0310 \\ 0,0010 & 0,0002 & -0,0007 & 0,0255 & -0,0081 & -0,0014 \\ 0,0001 & 0,0020 & 0,0069 & -0,0081 & 1,1301 & -1,1811 \\ -0,0003 & 0,0091 & 0,0310 & -0,0014 & -1,1811 & 1,2935 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4758 & 0,1049 & -0,1869 & 1,5398 & 0,8089 & -1,3489 \\ 0,1049 & 2,6167 & 8,5868 & 0,3379 & 3,7001 & 7,0885 \\ -0,1869 & 8,5868 & 29,0117 & -0,7223 & 11,3419 & 26,3075 \\ 1,5398 & 0,3379 & -0,7223 & 36,5644 & -0,1956 & -10,6829 \\ 0,8089 & 3,7001 & 11,3419 & -0,1956 & 460,0949 & -469,7884 \\ -1,3489 & 7,0885 & 26,3075 & -10,6829 & -469,7884 & 539,3504 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0007 & 0,0002 & -0,0004 \\ 0,0001 & 0,0027 & 0,0090 & -0,0006 & 0,0020 & 0,0097 \\ -0,0002 & 0,0090 & 0,0303 & -0,0028 & 0,0066 & 0,0329 \\ 0,0007 & -0,0006 & -0,0028 & 0,0204 & -0,0070 & -0,0054 \\ 0,0002 & 0,0020 & 0,0066 & -0,0070 & 1,2997 & -1,3603 \\ -0,0004 & 0,0097 & 0,0329 & -0,0054 & -1,3603 & 1,4857 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,4793 & 0,1145 & -0,1564 & 1,5866 & 0,2006 & -0,6653 \\ 0,1145 & 2,7133 & 8,9026 & 0,9182 & -2,8672 & 14,5381 \\ -0,1564 & 8,9026 & 30,0192 & 0,9534 & -9,5249 & 50,0397 \\ 1,5866 & 0,9182 & 0,9534 & 33,5915 & -8,8775 & 0,9523 \\ 0,2006 & -2,8672 & -9,5249 & -8,8775 & 606,3120 & -650,4707 \\ -0,6653 & 14,5381 & 50,0397 & 0,9523 & -650,4707 & 760,5443 \end{bmatrix}.$$

Considerando, agora, o método de resolução pelo algoritmo de Frank-Wolfe, para $\mathcal{J}_{1,1}$, dado em (3.46), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 0,4629 & 0,1044 & -0,1607 & 1,0517 & 0,6131 & -0,8145 \\ 0,1044 & 2,6709 & 8,8101 & 0,2267 & 2,5191 & 9,0127 \\ -0,1607 & 8,8101 & 29,7654 & -0,4313 & 7,8890 & 31,3920 \\ 1,0517 & 0,2267 & -0,4313 & 23,4027 & -4,2303 & -2,5873 \\ 0,6131 & 2,5191 & 7,8890 & -4,2303 & 782,5931 & -808,1735 \\ -0,8145 & 9,0127 & 31,3920 & -2,5873 & -808,1735 & 895,0614 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,4699 & 0,1082 & -0,1792 & 1,2235 & 1,2274 & -1,7143 \\ 0,1082 & 2,6369 & 8,6572 & 0,1173 & 3,2681 & 7,7529 \\ -0,1792 & 8,6572 & 29,2563 & -1,1007 & 9,8004 & 28,4646 \\ 1,2235 & 0,1173 & -1,1007 & 28,6510 & -1,4600 & -7,7092 \\ 1,2274 & 3,2681 & 9,8004 & -1,4600 & 692,3081 & -713,4675 \\ -1,7143 & 7,7529 & 28,4646 & -7,7092 & -713,4675 & 794,9390 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
W_{2,0} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0008 & 0,0001 & -0,0003 \\ 0,0001 & 0,0027 & 0,0087 & -0,0003 & 0,0023 & 0,0090 \\ -0,0002 & 0,0087 & 0,0294 & -0,0019 & 0,0076 & 0,0307 \\ 0,0008 & -0,0003 & -0,0019 & 0,0242 & -0,0069 & -0,0035 \\ 0,0001 & 0,0023 & 0,0076 & -0,0069 & 1,1702 & -1,2218 \\ -0,0003 & 0,0090 & 0,0307 & -0,0035 & -1,2218 & 1,3353 \end{bmatrix}, \\
W_{2,1} &= \begin{bmatrix} 0,4723 & 0,1214 & -0,1313 & 1,3053 & -0,0610 & -0,3026 \\ 0,1214 & 2,7423 & 9,0044 & 0,7832 & -1,3620 & 13,1645 \\ -0,1313 & 9,0044 & 30,3678 & 0,8090 & -4,3813 & 45,1719 \\ 1,3053 & 0,7832 & 0,8090 & 24,9926 & -7,1755 & 1,0493 \\ -0,0610 & -1,3620 & -4,3813 & -7,1755 & 601,0645 & -638,0945 \\ -0,3026 & 13,1645 & 45,1719 & 1,0493 & -638,0945 & 740,0122 \end{bmatrix}, \\
R &= \begin{bmatrix} 0,4364 & 0,0603 & -0,2687 & 0,9534 & 0,1328 & -0,5370 \\ 0,0603 & 2,4617 & 8,1353 & 0,0349 & -0,2830 & 10,8910 \\ -0,2687 & 8,1353 & 27,5190 & -0,9901 & -0,9895 & 37,3330 \\ 0,9534 & 0,0349 & -0,9901 & 21,2630 & -4,2546 & -2,7015 \\ 0,1328 & -0,2830 & -0,9895 & -4,2546 & 596,0700 & -628,4300 \\ -0,5370 & 10,8910 & 37,3330 & -2,7015 & -628,4300 & 716,9200 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Já para a segunda opção, $\mathcal{J}_{1,2}$ dado em (3.48), obteve-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
W_{1,0} &= \begin{bmatrix} 0,4627 & 0,1043 & -0,1598 & 1,0555 & 0,6200 & -0,8208 \\ 0,1043 & 2,6655 & 8,7919 & 0,2258 & 2,4981 & 9,0130 \\ -0,1598 & 8,7919 & 29,7027 & -0,4350 & 7,7923 & 31,4184 \\ 1,0555 & 0,2258 & -0,4350 & 23,5136 & -3,9503 & -2,8868 \\ 0,6200 & 2,4981 & 7,7923 & -3,9503 & 794,8673 & -821,4261 \\ -0,8208 & 9,0130 & 31,4184 & -2,8868 & -821,4261 & 909,2550 \end{bmatrix}, \\
W_{1,1} &= \begin{bmatrix} 0,4695 & 0,1080 & -0,1785 & 1,2238 & 1,2386 & -1,7242 \\ 0,1080 & 2,6309 & 8,6375 & 0,1161 & 3,2493 & 7,7489 \\ -0,1785 & 8,6375 & 29,1887 & -1,0994 & 9,7068 & 28,4777 \\ 1,2238 & 0,1161 & -1,0994 & 28,7269 & -1,1186 & -8,0438 \\ 1,2386 & 3,2493 & 9,7068 & -1,1186 & 689,3418 & -710,6195 \\ -1,7242 & 7,7489 & 28,4777 & -8,0438 & -710,6195 & 792,0867 \end{bmatrix}, \\
W_{2,0} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0008 & 0,0001 & -0,0003 \\ 0,0001 & 0,0026 & 0,0087 & -0,0003 & 0,0023 & 0,0090 \\ -0,0002 & 0,0087 & 0,0293 & -0,0019 & 0,0076 & 0,0305 \\ 0,0008 & -0,0003 & -0,0019 & 0,0242 & -0,0066 & -0,0037 \\ 0,0001 & 0,0023 & 0,0076 & -0,0066 & 1,1656 & -1,2172 \\ -0,0003 & 0,0090 & 0,0305 & -0,0037 & -1,2172 & 1,3304 \end{bmatrix}, \\
W_{2,1} &= \begin{bmatrix} 0,4720 & 0,1213 & -0,1305 & 1,3071 & -0,0513 & -0,3106 \\ 0,1213 & 2,7360 & 8,9837 & 0,7802 & -1,3379 & 13,1129 \\ -0,1305 & 8,9837 & 30,2963 & 0,8028 & -4,3286 & 45,0223 \\ 1,3071 & 0,7802 & 0,8028 & 25,0706 & -6,9333 & 0,8076 \\ -0,0513 & -1,3379 & -4,3286 & -6,9333 & 598,8246 & -635,8086 \\ -0,3106 & 13,1129 & 45,0223 & 0,8076 & -635,8086 & 737,5260 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} 15,1330 & -37,5580 & 12,5890 & -0,3775 & -1,0831 & -1,0245 \\ -37,5580 & 112,7000 & -37,2530 & 0,6856 & 2,8757 & 2,7229 \\ 12,5890 & -37,2530 & 12,7130 & -0,3085 & -1,2417 & -1,1763 \\ -0,3775 & 0,6856 & -0,3085 & 0,0754 & 0,0843 & 0,0795 \\ -1,0831 & 2,8757 & -1,2417 & 0,0843 & 0,3089 & 0,2912 \\ -1,0245 & 2,7229 & -1,1763 & 0,0795 & 0,2912 & 0,2761 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para a terceira opção, $\mathcal{J}_{1,3}$ dado em (3.49), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0011 & 0,0001 & -0,0004 \\ 0,0001 & 0,0027 & 0,0088 & 0,0004 & 0,0013 & 0,0102 \\ -0,0002 & 0,0088 & 0,0299 & -0,0001 & 0,0046 & 0,0347 \\ 0,0011 & 0,0004 & -0,0001 & 0,0307 & -0,0047 & -0,0051 \\ 0,0001 & 0,0013 & 0,0046 & -0,0047 & 1,6919 & -1,7766 \\ -0,0004 & 0,0102 & 0,0347 & -0,0051 & -1,7766 & 1,9281 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0001 & -0,0001 & 0,0016 & -0,0001 & -0,0004 \\ 0,0001 & 0,0026 & 0,0085 & 0,0004 & 0,0071 & 0,0034 \\ -0,0001 & 0,0085 & 0,0288 & -0,0006 & 0,0241 & 0,0125 \\ 0,0016 & 0,0004 & -0,0006 & 0,0370 & -0,0121 & 0,0011 \\ -0,0001 & 0,0071 & 0,0241 & -0,0121 & 0,9152 & -0,9313 \\ -0,0004 & 0,0034 & 0,0125 & 0,0011 & -0,9313 & 1,0065 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,0} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0001 & -0,0002 & 0,0008 & 0,0004 & -0,0007 \\ 0,0001 & 0,0026 & 0,0085 & -0,0005 & 0,0007 & 0,0102 \\ -0,0002 & 0,0085 & 0,0287 & -0,0025 & 0,0021 & 0,0352 \\ 0,0008 & -0,0005 & -0,0025 & 0,0272 & 0,0038 & -0,0175 \\ 0,0004 & 0,0007 & 0,0021 & 0,0038 & 1,6571 & -1,7503 \\ -0,0007 & 0,0102 & 0,0352 & -0,0175 & -1,7503 & 1,9073 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,4787 & 0,1467 & -0,0540 & 1,4977 & -0,4370 & 0,1159 \\ 0,1467 & 2,6434 & 8,6412 & 1,2005 & -3,6619 & 15,0264 \\ -0,0540 & 8,6412 & 29,0521 & 1,8123 & -11,0390 & 50,3525 \\ 1,4977 & 1,2005 & 1,8123 & 29,9252 & -21,6554 & 15,1400 \\ -0,4370 & -3,6619 & -11,0390 & -21,6554 & 521,7886 & -557,5796 \\ 0,1159 & 15,0264 & 50,3525 & 15,1400 & -557,5796 & 656,9212 \end{bmatrix}.$$

No que se refere ao problema de maximização da tolerância à perturbação ($\mathcal{J}_2$), dado em (3.50), obteve-se as seguintes matrizes:

$$W_{1,0} = \times \begin{bmatrix} 0,3575 & 0,1557 & 0,0945 & 0,3597 & 0,1733 & 0,0811 \\ 0,1557 & 0,2210 & 0,5252 & 0,1504 & 0,2100 & 0,5369 \\ 0,0945 & 0,5252 & 1,5793 & 0,0964 & 0,4668 & 1,6730 \\ 0,3597 & 0,1504 & 0,0964 & 0,7206 & 0,4234 & -0,2727 \\ 0,1733 & 0,2100 & 0,4668 & 0,4234 & 39,6523 & -42,0526 \\ 0,0811 & 0,5369 & 1,6730 & -0,2727 & -42,0526 & 48,0510 \end{bmatrix},$$

$$W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,3581 & 0,1566 & 0,0956 & 0,3590 & 0,2042 & 0,0472 \\ 0,1566 & 0,2223 & 0,5267 & 0,1478 & 0,5606 & 0,1479 \\ 0,0956 & 0,5267 & 1,5797 & 0,0923 & 1,5288 & 0,4915 \\ 0,3590 & 0,1478 & 0,0923 & 0,7431 & 0,2754 & -0,1023 \\ 0,2042 & 0,5606 & 1,5288 & 0,2754 & 25,2648 & -24,9028 \\ 0,0472 & 0,1479 & 0,4915 & -0,1023 & -24,9028 & 27,6195 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0,3543 & 0,1539 & 0,0953 & 0,3433 & 0,1537 & 0,1090 \\ 0,1539 & 0,2205 & 0,5273 & 0,1422 & 0,2199 & 0,5301 \\ 0,0953 & 0,5273 & 1,5825 & 0,0867 & 0,5391 & 1,5904 \\ 0,3433 & 0,1422 & 0,0867 & 0,4602 & 0,3211 & -0,1497 \\ 0,1537 & 0,2199 & 0,5391 & 0,3211 & 39,7129 & -42,0001 \\ 0,1090 & 0,5301 & 1,5904 & -0,1497 & -42,0001 & 47,8442 \end{bmatrix},$$

$$W_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,3551 & 0,1547 & 0,0970 & 0,3607 & 0,1592 & 0,1038 \\ 0,1547 & 0,2236 & 0,5368 & 0,1449 & -0,0502 & 0,8402 \\ 0,0970 & 0,5368 & 1,6122 & 0,0793 & -0,3398 & 2,5995 \\ 0,3607 & 0,1449 & 0,0793 & 0,7420 & 0,3179 & -0,1550 \\ 0,1592 & -0,0502 & -0,3398 & 0,3179 & 21,4650 & -23,5826 \\ 0,1038 & 0,8402 & 2,5995 & -0,1550 & -23,5826 & 29,2840 \end{bmatrix}.$$

Referências

- Åström, K. J. and Rundqwist, L. (1989). Integrator windup and how to avoid it, *American Control Conference, 1989*, IEEE, pp. 1693–1698.
- Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1984). *Computer-controlled systems: theory and design*, Prentice-Hall.
- Bernstein, D. S. (2009). Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas . princeton reference.
- Binotti, V. (2015). Estabilidade e estabilização de sistemas de tempo discreto sujeitos a saturação e atraso, *Trabalho de conclusão de curso*, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, RS.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities In Systems And Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Bradley, S. P., Hax, A. C. and Magnanti, T. L. (1977). Applied mathematical programming.
- Caldeira, A. F., Leite, V. J. S., Miranda, M. F., Castro, M. F. F. and Gonçalves, E. N. (2011). Convex robust $\mathcal{H}_\infty$ control design to discrete-time systems with time-varying delay, *IFAC Proceedings Volumes* **44**(1): 10150–10155.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd edn, Oxford University Press.
- Chen, Y. and Fei, S. (2014). Exponential stabilization for discrete-time time-delay systems with actuator saturation, *33rd Chinese Control Conference*, IEEE, pp. 6130–6135.
- Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2017). Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(8): 4058–4065.

- E. D. Andersen (2013). Erling’s blog. Disponível em <https://goo.gl/BB3CVs> Acessado em: 06 Fevereiro 2017.
- E. D. Andersen and K. D. Andersen (1997). Mosek. Disponível em <https://www.mosek.com/> Acessado em: 06 Fevereiro 2017.
- Frank, M. and Wolfe, P. (1956). An algorithm for quadratic programming, *Naval Research Logistics Quarterly* **3**(1-2): 95–110.
- G. Sagnol (2012). Picos: A python interface for conic optimization solvers. Disponível em <http://picos.zib.de/> Acessado em: 06 Fevereiro 2017.
- Geromel, J. C., Korogui, R. H. and Bernussou, J. (2007). $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust output feedback control for continuous time polytopic systems, *IET Control Theory Appl.* **1**(5): 1541–1549.
- Ghiggi, I., Bender, A. and Gomes da Silva Jr., J. M. (2008). Dynamic non-rational anti-windup for time-delay systems with saturating inputs, *IFAC Proceedings Volumes* **41**(2): 277–282.
- Ghiggi, I. M. F. (2008). *Controle de sistemas com atrasos no tempo na presença de atuadores saturantes*, Master’s thesis, PPGE, UFRGS.
- Gomes da Silva Jr., J. M., Bender, F. A., Tarbouriech, S. and Biannic, J.-M. (2009). Dynamic anti-windup synthesis for state delayed systems: an lmi approach, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference*, IEEE, pp. 6904–6909.
- Gomes da Silva Jr., J. M. and Leite, V. J. S. (2007). *Enciclopédia de automática: controle e automação - Cap. Sistemas lineares com atrasos de tempo*, Editora Blücher.
- Gomes da Silva Jr., J. M., Limón, D., Alamo, T. and Camacho, E. F. (2008). Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(10): 2367–2372.
- Gomes da Silva Jr., J. M., Paim, C. and Castelan, E. B. (2001). Stability and stabilization of linear discrete-time systems subject to control saturation, *IFAC Proceedings Volumes* **34**(13): 525–530.
- Gomes da Silva Jr., J. M. and Tarbouriech, S. (1997). Analysis of local stability of linear systems with saturating controls: A polyhedral approach, *IFAC Proceedings Volumes* **30**(27): 155–160.

- Gomes da Silva Jr., J. M. and Tarbouriech, S. (2001). Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(1): 119–125.
- Gomes da Silva Jr., J. M. and Tarbouriech, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(1): 106–111.
- Gu, K., Chen, J. and Kharitonov, V. L. (2003). *Stability of time-delay systems*, Springer Science & Business Media.
- Hao, F. and Zhao, X. (2010). New delay-dependent stability conditions for discrete-time systems with time-varying delay in the state, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* p. dnq011.
- Henrion, D. and Tarbouriech, S. (1999). LMI relaxations for robust stability of linear systems with saturating controls, *Automatica* **35**(9): 1599–1604.
- Hetel, L., Daafouz, J. and Iung, C. (2008). Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* pp. 697–705.
- Hu, H. Y. and Wang, Z. H. (2013). *Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback*, Springer Science & Business Media.
- Hu, K. and Yuan, J. (2009). Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of linear discrete-time systems with time-varying delay via switched system approach, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **23**(12): 1104–1112.
- Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control systems with actuator saturation: analysis and design*, Springer Science & Business Media.
- Jungers, M. and Castelan, E. B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators, *Systems & Control Letters* **60**(3): 315–325.
- Kapila, V. and Haddad, W. M. (1998). Memoryless $\mathcal{H}_\infty$ controllers for discrete-time systems with time delay, *Automatica* **34**(9): 1141–1144.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1992). *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publisher.

- Leite, V. J. S., Castro, M. F. F., Caldeira, A. F. and Gonçalves, E. N. (2011). Uncertain discrete-time systems with delayed state: Robust stabilization with performance specification via lmi formulations, *Discrete Time Systems*, InTech.
- Leite, V. J. S. and Miranda, M. F. (2008). Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach, *Mathematical Problems in Engineering* **2008**.
- Lin, J. (2012). Exponential estimates and stabilization of discrete-time singular time-delay systems subject to actuator saturation, *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2012**.
- MacDonald, N. (1989). *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*, Vol. 8, Cambridge University Press.
- Miranda, M. F. and Leite, V. J. S. (2011). Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying state delay: A convex approach, *Journal of the Franklin Institute* **348**(4): 568–588.
- Negi, R., Purwar, S. and Kar, H. (2012). Delay-dependent stability analysis of discrete time delay systems with actuator saturation, *Intelligent Control and Automation* **3**(01): 34–43.
- Niculescu, S. I. (2001). *Delay effects on stability: a robust control approach*, Vol. 269, Springer Science & Business Media.
- Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2009). Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design, *Automatica* **45**(11): 2620–2626.
- Paim, C. (2003). *Análise e controle de sistemas lineares sujeitos a saturação*, PhD thesis, PPGEAS,UFSC.
- Pal, V. C., Kumar, J., Negi, R. and Pati, A. (2017). $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete time delayed systems in presence of actuator saturation, *2017 Indian Control Conference (ICC)*, IEEE, pp. 295–302.
- Silva, J. V. V. (2016). *Controle de sistemas discretos no tempo com saturacao de atuadores e atraso nos estados*, Master’s thesis, PPGEEL, CEFET-MG.
- Silva, L. F. P., Leite, V. J. S., Castelan, E. B. and Feng, G. (2014). Stabilization of time-delay nonlinear discrete-time systems with saturating actuators through ts models, *IFAC Proceedings Volumes* **47**(3): 11000–11005.

- Stojanović, S. B., Debeljković, D. L. and Mladenović, I. (2007). A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems, *Serbian Journal of Electrical Engineering* **4**(2): 109–117.
- Sun, J. and Chen, J. (2012). A note on stability and stabilization of discrete-time systems with time-varying delay, *Control Conference (CCC), 2012 31st Chinese*, IEEE, pp. 1430–1434.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J. M. and Queinnec, I. (2011). *Stability And Satbilization Of Linear Systems With Saturating Actuators*, Springer.
- Tarbouriech, S., Prieur, C. and Gomes da Silva Jr., J. M. (2006). Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(8): 1364–1371.
- Xiao-Na, S., Zhu-Mu, F. and Lei-Po, L. (2012). Robust stabilization of state delayed discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with input saturation via an anti-windup fuzzy design, *Chinese Physics B* **21**(11): 118701.
- Xu, S., Lam, J., Zhang, B. and Zou, Y. (2014). A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **24**(16): 2512–2521.
- Zaccarian, L. and Teel, A. R. (2011). *Modern Anti-windup Synthesis: control augmentation for actuator saturation*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press.
- Zhang, H. and Shi, Y. (2012). Delay-dependent stabilization of discrete-time systems with time-varying delay via switching technique, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control* **134**(4): 044503.