

CEFET-MG e UFSJ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MODELAGEM E CONTROLE DE SISTEMAS - ANÁLISE E MODELAGEM DE SISTEMAS

Nelson de Figueiredo Barroso

ESTRATÉGIA DE MONITORAMENTO DE SISTEMAS DISTRIBUÍDOS BASEADA EM
OBSERVADORES DO TIPO KALMAN



Belo Horizonte
2017

Nelson de Figueiredo Barroso

ESTRATÉGIA DE MONITORAMENTO DE SISTEMAS DISTRIBUÍDOS BASEADA EM
OBSERVADORES DO TIPO KALMAN

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Análise e Modelagem de Sistemas - AMS.

Orientador: Prof. Dr. Valter J. S. Leite

Co-orientador: Prof. Dr. Ignacio Rubio Scola



Belo Horizonte
2017

(Catalogação - Biblioteca Universitária – Campus Divinópolis – CEFET-MG)

B270e Barroso, Nelson de Figueiredo.

Estratégia de monitoramento de sistemas distribuídos baseada em observadores do tipo Kalman. / Nelson de Figueiredo Barroso. – Divinópolis, 2017.

138f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite.

Coorientador: Prof. Dr. Ignacio Rubio Scola.

Área de Concentração: Modelagem e Controle de Sistemas.

Linha de Pesquisa: Análise e Modelagem de Sistemas.

Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais/Universidade Federal de São João del-Rei. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Sistemas a parâmetros distribuídos. 2. Modelos LPV. 3. Subsistemas interconetados. 4. Observadores de estado. I. Leite, Valter Júnior de Souza. II. Rubio Scola, Ignacio. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Universidade Federal de São João del-Rei. V. Título.

CDU: 004.75: 004.414.23

Nelson de Figueiredo Barroso

Engenheiro Mecatrônico – CEFET-MG

ESTRATÉGIA DE MONITORAMENTO DE SISTEMAS DISTRIBUÍDOS BASEADA EM
OBSERVADORES DO TIPO KALMAN

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, associação ampla entre CEFET-MG e UFSJ como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Modelagem e Controle de Sistemas - MCS. Linha de pesquisa: Análise e Modelagem de Sistemas - AMS.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Mazoni Marçal Mendes
DELT/UFMG

Prof. Dr. Erivelton Geraldo Nepomuceno
DEE/UFSJ

Prof. Dr. Marcelo Martins Stopa
PPGEL/CEFET-MG

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
PPGEL/CEFET-MG

Belo Horizonte
2017

DEDICO ESSE TRABALHO ÀS MINHAS TRÊS
FAMÍLIAS: A MINHA FAMÍLIA ORIGINAL, A
FAMÍLIA DA MINHA NOIVA MARIANA E A
FAMÍLIA DO MEU TIO SÁLVIO. SEM A
AJUDA DE VOCÊS EU NÃO SERIA QUEM SOU
E NÃO CHEGARIA ONDE ESTOU.

Agradecimentos

Agradeço,

Em primeiro lugar a Deus por me dar força e esperança para seguir em busca dos meus sonhos e por me fornecer todos os meios necessários para que eu possa crescer espiritualmente e me tornar uma pessoa melhor a cada dia.

A meus pais, irmãs, cunhados e sobrinhos pelo amor, apoio e carinho, por confiarem em mim e não me deixarem abalar diante das dificuldades e desafios. Por serem meu porto seguro.

A minha noiva Mariana, por estar sempre ao meu lado, por dividir comigo os bons e maus momentos, pelo amor, companheirismo, cumplicidade e compreensão. Agradeço também a seus pais Erlane e Maurício pelo apoio e incentivo, por acreditarem no meu potencial e me considerarem como filho.

Aos meus tios Sálvio e Estela por me acolherem como filho e me ajudarem tanto sem esperarem nada em troca. Agradeço também a meus primos Gabriela, Hebert e Barbara por me receberem com tanto carinho.

Aos amigos Igor e Cleitinho por dividirem as responsabilidades quando trabalhei junto com eles e que me apoiaram quando decidi entrar para o mestrado e a todos os demais amigos da *FIAT* que sempre estavam dispostos a ajudar nas atividades.

A meu orientador e amigo Valter pela dedicação e seriedade com que trabalha, por confiar em mim, pelos desafios e oportunidades que me proporcionou e por ser uma referência para todos nós que tivemos a sorte de trabalhar com ele.

A meu coorientador e amigo Ignácio por estar sempre disposto a ajudar a resolver os problemas, pelo entusiasmo e alegria que motiva os seus alunos.

Ao professor Samir pela pronta disponibilidade em tirar as minhas dúvidas em Identificação de Sistemas e por me auxiliar em todas as vezes que precisei.

Aos demais professores e servidores do *PPGEL CEFET/UFSJ*. Aos membros da minha banca examinadora. A fundação *CAPES* pela bolsa de mestrado.

Aos meus colegas de mestrado do *PPGEL CEFET/UFSJ*, em especial, aos amigos: Carla, Marcos, Mateus, Marcelo, Eric, Denise, Hegberton, Isabela, Vitor, Vinicius, Moises, Paulo e Fábio e aos amigos de república Juan e Toninho.

Enfim, agradeço a todos aqueles que contribuíram para a concretização deste trabalho de forma direta ou indireta. De coração, o meu muito obrigado a todos. Ninguém consegue vencer sozinho.

“Nunca nos esqueçamos que a eficiência não se harmoniza com a pressa, mas não se fará vista sem apoio da diligência”

Calma – Francisco Cândido Xavier (Emmanuel)

Resumo

Neste trabalho é proposta uma estratégia para monitoramento de sistemas a parâmetros distribuídos (SPD) baseada em observadores do tipo Kalman. São considerados SPD com atuação na borda de entrada, tal que, em condições normais de operação, a medição da variável a ser monitorada esteja disponível apenas na borda final do processo. O objetivo principal é recuperar a informação do comportamento dinâmico da variável de interesse em qualquer ponto intermediário do SPD. Em particular, assume-se que o modelo fenomenológico do processo seja desconhecido ou que seus parâmetros físicos sejam difíceis de serem estimados. Nesses casos, propõe-se também uma metodologia alternativa baseada em técnicas de identificação de sistemas a parâmetros concentrados, para obtenção de modelos adequados ao projeto de observadores. Para tanto, o SPD é aproximado por dois modelos lineares a parâmetros variantes (LPV) interconectados cuja configuração resultante permite que a variável a ser monitorada seja conhecida ao longo do sistema, por meio da dependência espacial dos seus parâmetros e do efeito desses na dinâmica dos dois subsistemas interconectados. Sob essa perspectiva, as variáveis de saída de cada subsistema são assumidas como variáveis de estado e um modelo geral LPV no espaço de estados é obtido. Uma vez que um modelo adequado é construído, observadores do tipo Kalman podem ser implementados. O uso dos observadores é fundamental devido à sua propriedade de correção das estimativas e possibilidade de acrescentar informações extras à dinâmica do modelo, tais como, a estimação em tempo real de parâmetros e de distúrbios. Uma das principais vantagens da estratégia de monitoramento proposta é que, embora o modelo final obtido mantenha a característica espaço-dependente de um SPD, ele é, localmente, um modelo a parâmetros concentrados. Dessa forma, as técnicas de observação de estados aplicáveis a sistemas pertencentes à classe dos sistemas a parâmetros concentrados podem ser prontamente utilizadas. Outro ponto positivo, é que as informações das incertezas obtidas no processo de identificação podem ser utilizadas para o cálculo dos ganhos ótimos no projeto dos observadores. A estratégia de monitoramento proposta é aplicada a um sistema térmico real e o seu desempenho é validado a partir dos dados experimentais.

Palavras-chave: Sistemas a parâmetros distribuídos. Modelos LPV. Subsistemas interconectados. Observadores de estado.

Abstract

In this work, a strategy for distributed parameters systems (DPS) monitoring, based on Kalman-like observers is proposed. We consider DPS with input edge operation, such that, under normal operating conditions, the measurement of the variable to be monitored is available only at the final edge of the process. The main objective is to recover information about the dynamic behavior of the variable of interest at an intermediate point of the DPS. Particularly, it is assumed that the phenomenological model of the process is unknown or that its physical parameters are difficult to be estimated. In these cases, an alternative methodology based on system identification techniques for lumped parameter systems is proposed to obtain suitable models for observer design. For that, the DPS is approximated by two interconnected linear parameter varying models (LPV) whose resulting configuration allows the variable to be monitored throughout the system, by the spatial dependence of its parameters and their effect on the dynamics of two interconnected subsystems. From this point of view, the output variables of each subsystem are assumed as a state variable and a general LPV model in state-space is obtained. Once a suitable model is constructed, Kalman-like observers can be implemented. The use of observers is fundamental because of their estimation correction property and the possibility of adding extra information to the model dynamics, such as real-time estimation of parameters and disturbances. One of the main advantages of the proposed monitoring strategy is that, although the final model obtained maintains the space-dependent characteristic of a DPS, it is locally a lumped parameter model. Thus, state observation techniques applicable to systems belonging to the class of the lumped parameters systems can be readily used. Another positive point is that the information of the uncertainties obtained in the identification process can be used to calculate the optimal gains in the observer design. The proposed monitoring strategy is applied to a real thermal system and its performance is validated from the experimental data.

Key-words: Distributed parameter systems. LPV models. Interconnected subsystems. State observers.

Sumário

Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxiv
Lista de Acrônimos e Notação	xxv
1 Introdução	1
1.1 Definição do problema	2
1.2 Objetivos	2
1.3 Metodologia	3
1.4 Organização do documento	4
2 Fundamentos	5
2.1 Identificação de sistemas	5
2.1.1 Etapas do processo de identificação	6
2.1.2 Representações em tempo discreto	8
2.1.3 O estimador de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP)	12
2.1.4 Polarização do estimador MQP	14
2.1.5 O estimador Estendido de Mínimos Quadrados (EMQ)	17
2.2 Observadores	18
2.2.1 Modelos sob consideração	18
2.2.2 Definição do problema de observadores	19
2.2.3 Sistemas afins nos estados com injeção da saída e observabilidade	20
2.2.4 Observador de Kalman	21
2.2.5 Observador exponencial com fator de esquecimento	23
2.3 Conclusões	23
3 Metodologia para aproximação de SPD	25
3.1 Aproximação de SPD por subsistemas interconectados	26
3.2 Aproximação SPD por modelos LPV	28
3.3 Metodologia de identificação proposta	31

3.4	Exemplo: Estratégia de identificação e observação de estados para monitoramento de SPD.	33
4	Estudo de caso: monitoramento de temperatura de um forno	37
4.1	Descrição do sistema	37
4.1.1	Calibração dos sensores	39
4.2	Identificação do modelo SS-LPV	41
4.2.1	Testes dinâmicos e coleta de dados	42
4.2.2	Determinação de estruturas	45
4.2.3	Validação dos modelos LPV	47
4.2.4	Análise residual	50
4.2.5	Estimação de parâmetros	52
4.2.6	Modelo em espaço de estados	61
4.2.7	Validação dos modelos SS-LPV	62
4.3	Projeto de observadores	67
4.3.1	O observador de Kalman	68
4.3.2	O observador de Kalman com estimação de perturbação na entrada . . .	70
4.3.3	O observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros	73
4.3.4	O observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação	77
4.3.5	Observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados e parâmetros)	86
4.3.6	Observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados, parâmetros e perturbação)	89
4.4	Conclusões	95
5	Considerações Finais e Perspectivas	97
A	Estatísticas	101
B	Índices para escolha da estrutura do modelo aplicados aos pontos s5 e s8	105
	Bibliografia	107

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática do procedimento de identificação de sistemas (Adaptado de [Lju99]).	8
2.2	Representação matemática do modelo ARX (Retirado de [Agu07]).	10
2.3	Representação matemática do modelo ARMAX (Retirado de [Agu07]).	10
2.4	Representação esquemática do modelo de erro na saída (Retirado de [Agu07]). .	11
2.5	Representação esquemática do modelo Box–Jenkins (Retirado de [Agu07]). . . .	12
3.1	Representação de um SPD com atuação na borda.	27
3.2	Aproximação de SPD por subsistemas interconectados em cascata.	27
3.3	Aproximação de SPD por modelos LPV espaço-dependentes.	29
3.4	Recuperação da natureza espacial contínua do sistema.	31
3.5	Representação esquemática da metodologia de identificação proposta.	32
4.1	Sistema real (Forno).	38
4.2	Desenho esquemático do forno com destaque para os componentes principais. . .	39
4.3	Representação esquemática do sistema na configuração escolhida.	40
4.4	Calibração dos sensores de temperatura.	41
4.5	Representação esquemática do sistema na configuração escolhida.	42
4.6	Circuito para gerar sinais PRBS (Retirado de [Agu07]).	42
4.7	Experimento para projeto do sinal PRBS (Estimação da constante de tempo). .	44
4.8	Dados coletados do experimento 1 de 10 (sensores ímpares).	46
4.9	Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{u \times y_i}$ aplicados ao ponto s_2 . . .	49
4.10	Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{y_i \times y_o}$ aplicados ao ponto s_2 . . .	50
4.11	Análise dos resíduos dos modelos escolhidos (ponto s_2).	52
4.12	<i>Funções scheduling</i> $b_1(s_\ell)$ e $a_1(s_\ell)$	57
4.13	<i>Funções scheduling</i> $w_1(s_\ell)$	58
4.14	<i>Funções scheduling</i> $\beta_0(\bar{s}_\ell)$ e $\beta_1(\bar{s}_\ell)$	59
4.15	<i>Funções scheduling</i> $\alpha_1(\bar{s}_\ell)$ e $w_2(\bar{s}_\ell)$	60
4.16	Simulação livre do modelo SS-LPV no ponto $s_2 = 175mm$	64
4.17	Simulação livre do modelo SS-LPV no ponto $s_5 = 700mm$	65
4.18	Simulação livre do modelo SS-LPV no ponto $s_8 = 1225mm$	66

4.19	Comparação entre as predições dos estados pelos modelos SS-LPV3 (Azul) e SS-LPV9 (Vermelho).	68
4.20	Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$	69
4.21	Resultados das estimações pelo observador de Kalman (estimação de estados). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.	70
4.22	Comparação entre as predições realizadas pelo modelo SS-LPV e as estimativas realizadas pelo observador de Kalman avaliados na posição $s_\ell = 175mm$	71
4.23	Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$	72
4.24	Resultados das estimações pelo observador de Kalman (estimação de estados e perturbação na entrada). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.	73
4.25	Comparação entre as predições realizadas pelos observadores de Kalman com e sem estimação de perturbação na entrada projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$	74
4.26	Comportamento da perturbação $p(k)$ na entrada do sistema.	75
4.27	Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$	76
4.28	Evolução do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$	76
4.29	Resultados das estimações pelo observador de Kalman (estimação de estados e parâmetros). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.	77
4.30	Comparação entre as predições realizadas pelos observadores de Kalman com estimação de perturbação na entrada e o observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros, projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$	78
4.31	Evolução dos parâmetros $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(\bar{s}_\ell, k)$ estimados pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação, avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$	79
4.32	Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$	80
4.33	Evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$	81
4.34	Resultados das estimações dos estados do observador de Kalman (estimação de estados, parâmetros e perturbação). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.	82
4.35	Comparação entre as estimações realizadas pelo observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros sem estimação de perturbação e com estimação de perturbação projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$	83
4.36	Evolução dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo observador de Kalman com estimação de perturbação avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$	84
4.37	Comportamento da perturbação $p(k)$	84

4.38	Resultados das estimações pelo observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados e parâmetros). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9. .	86
4.39	Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$	87
4.40	Evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$	87
4.41	Evolução dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo observador exponencial com fator de esquecimento, sem estimação de perturbação na entrada avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$	88
4.42	Resultados das estimações pelo observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados, parâmetros e perturbação). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.	90
4.43	Comparação entre as estimações realizadas pelo observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados e parâmetros sem estimação de perturbação e com estimação de perturbação projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$	92
4.44	Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$	93
4.45	Evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$	93
4.46	Evolução dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo observador exponencial com fator de esquecimento, com estimação de perturbação na entrada avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$	94
4.47	Comportamento da perturbação $p(k)$	94
B.1	Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{u \times y_i}$ aplicados aos pontos s_5 e s_8 .	105
B.2	Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{y_i \times y_o}$ aplicados aos pontos s_5 e s_8 .	106

Lista de Tabelas

4.1	Resultados da calibração dos sensores de temperatura — $T(T_i) = aT_i + b$	41
4.2	Conexões para gerar sinais de sequência m [Agu07].	43
4.3	Constantes de tempo estimadas utilizando um modelo de 1° ordem.	45
4.4	Combinações dos termos dos modelos ARMAX polinomiais.	49
4.5	Índices NRMSE dos modelos $u \times y_i$	51
4.6	Índices NRMSE dos modelos $y_i \times y_o$	51
4.7	Índices NRMSE do modelo SS-LPV avaliados utilizando as <i>funções scheduling</i> construídas a partir de 9, 5 e 3 pontos.	63
4.8	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.	79
4.9	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.	80
4.10	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.	82
4.11	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.	85
4.12	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.	88
4.13	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.	89
4.14	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.	91
4.15	Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.	91
A.1	Comparação entre as previsões dos estados dos modelos SS-LPV utilizando-se <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos o ajuste polinomial.	101
A.2	Estimações dos estados pelo observador de Kalman utilizando-se modelos SS-LPV com <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.	102
A.3	Estimações dos estados pelo observador de Kalman com estimação de perturbação na entrada utilizando-se modelos SS-LPV com <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.	102

A.4	Estimações dos estados e parâmetros pelo observador de Kalman para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.	103
A.5	Estimações dos estados, parâmetros e perturbação pelo observador de Kalman para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.	103
A.6	Estimações dos estados e parâmetros pelo observador exponencial com fator de esquecimento para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.	104
A.7	Estimações dos estados, parâmetros e perturbação pelo observador exponencial com fator de esquecimento para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com <i>funções scheduling</i> com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.	104

Lista de Acrônimos e Notação

Acrônimos

SPD	Sistemas a Parâmetros Distribuídos
SPC	Sistemas a Parâmetros Concentrados
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP	Equações Diferenciais Parciais
LPV	Linear Parameter Varying (Lineares a parâmetros variantes)
PRBS	Pseudo Random Binary Signal (Sinal binário pseudo-aleatório)
ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs (Auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas)
EMQ	método Estendido de Mínimos Quadrados
FPE	Final Prediction Error (Erro final de predição)
NRMSE	Normalized Root Mean Square Error (Erro médio quadrático normalizado)
SS-LPV	State Space Linear Parameter Varying (Modelos lineares a parâmetros variantes no espaço de estados)
MQ	Mínimos Quadrados
MQP	Mínimos Quadrados Ponderados
ARX	AutoRegressive with eXogenous inputs (Auto-regressivo com entradas exógenas)
ARMA	AutoRegressive Moving Average (Auto-regressivo com média móvel)
MA	Moving Average (Média móvel)
LTV	Linear Time Variant (Linear variante no tempo)
LTI	Linear Time Invariant (Linear invariante no tempo)

Notação

$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos números reais de dimensão n
M^T	transposta de uma matriz M
M^{-1}	inversa de uma matriz M

$\ \cdot\ $	norma euclidiana de um vetor
I	matriz identidade de ordem adequada
I_n	matriz identidade de ordem n
$\mathcal{O}$	matriz de observabilidade
$\partial f/\partial x$	derivada parcial de f em relação a x
$f(x)$	representa uma função escalar
$f(\mathbf{x})$	representa uma função vetorial
$f(\mathbf{x}, \theta)$	representa uma função vetorial de $\mathbf{x}$ parametrizada por θ
t	representa o tempo contínuo
k	representa o tempo discreto
T_s	tempo de amostragem
ΔT	período de amostragem
T_b	tempo entre bits
$+V, -V$	níveis de um sinal PRBS
τ	constante de tempo
s	representa uma coordenada espacial unidimensional
s_ℓ	representa uma posição do espaço escolhida arbitrariamente dentro do domínio $0 < s_\ell < L$
s_j	representa uma posição específica do espaço
Δs	representa uma variação espacial ($\Delta s = s_{j+1} - s_j$)
L	representa a distância máxima entre as bordas anterior e posterior do SPD
$\bar{s}_\ell$	distância complementar a s_ℓ ($\bar{s}_\ell = L - s_\ell$)
$u(s, t)$	variável de entrada dependente do espaço e do tempo
$y(s, t)$	variável de saída dependente do espaço e do tempo
$u(s, t) _{s=0}$	variável de entrada dependente do espaço e do tempo avaliada em $s = 0$
$y(s, t) _{s=L}$	variável de saída dependente do espaço e do tempo avaliada em $s = L$
$u(k)$	variável de entrada
$y(k)$	variável de saída
$\hat{y}(k)$	variável de saída estimada
$e(k)$	erro de regressão
σ_e^2	variância do erro de regressão
$\nu(k)$	ruído branco
$\xi(k)$	resíduos
n_y	número máximo de atrasos para uma sequência de saídas
n_u	número máximo de atrasos para uma sequência de entradas
n_ν	número máximo de atrasos para uma sequência de ruídos de processo
n_k	atraso de transporte entre a entrada e a saída
q^{-1}	operador de atraso ($y(k)q^{-1} = y(k-1)$)
$\mathcal{Z}$	transformada Z
θ	representa um vetor de parâmetros
θ^*	representa um vetor de parâmetros estendido
$\hat{\theta}$	representa um vetor de parâmetros estimados
$\hat{\theta}_{MQ}$	representa um vetor de parâmetros estimados pelo estimador de mínimos quadrados
$\hat{\theta}_{EMQ}$	representa um vetor de parâmetros estimados pelo estimador estendido de mínimos quadrados

n_θ	número de parâmetros do modelo
N	número de restrições
J_{MQ}	representa a função custo para o estimador de mínimos quadrados
J_{MQP}	representa a função custo para o estimador de mínimos quadrados ponderados
W	matriz diagonal definida positiva cuja diagonal representam pesos
ψ	vetor de regressores de um modelo dinâmico
Ψ	matriz de regressores de um modelo dinâmico
Ψ_θ	matriz de regressores do modelo dinâmico do processo
Ψ_ν	matriz de regressores do modelo dinâmico do ruído
Ψ^*	matriz de regressores estendida de um modelo dinâmico
$\text{LPV}_{u \times y_i}$	modelo LPV relacionando a entrada $u(0,k)$ com a saída $y(s_\ell,k)$
$\text{LPV}_{y_i \times y_o}$	modelo LPV relacionando a entrada $y(s_\ell,k)$ com a saída $y(L,k)$
$\mathbf{x}(k)$	vetor de estados
$\hat{\mathbf{x}}(k)$	vetor de estados estimados
Q	matriz de covariância do ruído de processo
R	matriz de covariância do ruído de medição
$P(k)$	matriz de covariância do erro de estimação
$\Phi(k,k_0)$	matriz de transição
$\mathcal{K}(k)$	vetor de ganhos ótimos do observador
$\Gamma(k,\sigma)$	Gramiano de observabilidade
$L(y)$	energia do sinal de saída
δ	fator de esquecimento
$\mathbf{w}(k)$	ruído de processo
$\mathbf{v}(k)$	ruído de medição
$\in$	pertence a

Introdução

Sistemas a parâmetros distribuídos (SPD) ocupam um papel importante na teoria de sistemas de controle. Tal posição se deve, principalmente, à diversificação dos sistemas industriais em que fortes acoplamentos entre dinâmicas multi-físicas são consideradas em função de novos objetivos de qualidade e economia. Para alcançar tais objetivos, diversas pesquisas tem sido desenvolvidas nos últimos anos com a finalidade de monitoramento e controle para otimização dos processos produtivos.

Diferente dos sistemas a parâmetros concentrados (SPC), cujas variáveis de interesse são funções apenas do tempo, significando que suas dinâmicas são usualmente descritas por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDO), os SPD são sistemas em que as variáveis de interesse são funções do tempo e de uma ou mais variáveis espaciais. Nesse caso, suas dinâmicas são usualmente descritas por equações diferenciais parciais (EDP) [Chr01].

Com a vantagem de se obter descrições precisas dos fenômenos físicos envolvidos em um processo distribuído, as representações por EDP envolvem métodos sofisticados de modelagem e solução podendo gerar alto custo computacional. Além disso, os modelos de dimensão infinita resultantes, são, em geral, difíceis de serem obtidos e seus parâmetros precisam ser estimados através de experimentos ou a partir de testes específicos em laboratório, podendo tornar o processo ainda mais trabalhoso e caro.

O projeto de controle para SPD requer, no entanto, modelos de baixa ordem, principalmente, devido ao fato de que soluções de alta ordem, quase sempre, resultam em síntese de controladores não implementáveis em razão da falta de sensores e atuadores suficientes para caracterização do sistema e, conseqüentemente, para implementação de tais soluções [Hoo01, Zhe02, Zhe04]. Os observadores de estado também compartilham de tal restrição devido ao fato de que quanto maior a ordem do sistema, mais informações disponíveis através de medições são necessárias para recuperação dos estados.

Contudo, para objetivos de controle e observação, os modelos de ordem infinita que descrevem a classe dos SPD podem ser reduzidos a modelos de ordem finita que capturam o comportamento dinâmico dominante de interesse. Nesse sentido, podem ser apontadas duas linhas de pesquisa relacionadas à obtenção de tais representações. A primeira delas, baseia-se no conhecimento do modelo fenomenológico do sistema e propõe métodos para transformação das representações por sistemas de EDP e de suas condições de borda em sistemas de EDO que

permitem a síntese de controladores e o projeto de observadores. A segunda, é baseada na teoria de identificação de sistemas dinâmicos e, ao contrário da anterior, se propõem a obter modelos a partir de dados experimentais [PA09a].

Segundo Coca e Billings [CB02], na prática, e especialmente em se tratando de sistemas não lineares, pode ser difícil determinar, com base em princípios físicos, a forma do sistema de equações que descreve precisamente os fenômenos observados em processos distribuídos. As dificuldades associadas com a abordagem pela física do processo tem, portanto, motivado pesquisadores para o desenvolvimento de técnicas de identificação de estruturas e estimação de parâmetros para essa classe de sistemas. O presente trabalho, partilha desse sentimento e propõe uma estratégia alternativa para monitoramento de SPD utilizando observadores.

O problema de projeto de observadores surge naturalmente em uma abordagem de sistemas quando deseja-se obter informações internas ao processo a partir de medições externas, ou seja, dos sinais de entrada e saída disponíveis. No entanto, por razões que incluem, dentre outros, o custo e restrições tecnológicas, não se pode utilizar tantos sensores quanto sinais de interesse para caracterizar o comportamento de um sistema [Bes07]. No cenário dos SPD, essa é uma situação inerente, principalmente, quando se trata de sistemas com atuação na borda. Nesses casos, a utilização de observadores se torna uma alternativa interessante e promissora.

De acordo com Besançon [Bes07], a necessidade de informações internas de um sistema pode ser motivada por diferentes propósitos, dentre eles, os principais são: modelagem (identificação), monitoramento (detecção de faltas) e controle. Todos esses propósitos podem, inclusive, estarem presentes em uma única aplicação quando, por exemplo, deseja-se manter um processo sob controle. Nesse sentido, e levando-se em consideração as restrições práticas citadas anteriormente, o problema de observação pode ser visto como o centro de um problema geral de controle. Diante desse cenário, neste trabalho é proposta uma solução para o problema definido a seguir.

1.1 Definição do problema

Considere um SPD contínuo no tempo, $t \in \mathbb{R}^+$, e no espaço, $s \in \mathbb{R}$, tal que, $0 \leq s \leq L$, em que L é a distância máxima entre as bordas anterior e posterior do sistema. Suponha que $u(s,t)|_{s=0} \in \mathbb{R}$ seja uma variável de entrada que atua na borda anterior de forma que a variável de saída, $y(s,t)$, seja alterada. Por se tratar de um SPD, podem ser definidas infinitas posições de medição de $y(s,t)$ entre $s = 0$ e $s = L$. No entanto, durante o funcionamento regular do sistema, assuma que esteja disponível apenas uma posição de medição na borda posterior, ou seja, em $y(s,t)|_{s=L}$. Sendo assim, supondo o conhecimento de $u(0,t)$ e $y(L,t)$ para $t \geq 0$, estime o valor de $y(s_\ell,t)$, em que s_ℓ indica uma posição do espaço escolhida arbitrariamente dentro do domínio $0 < s_\ell < L$.

1.2 Objetivos

Neste trabalho é proposta uma estratégia para monitoramento de sistemas a parâmetros distribuídos com atuação na borda. Tal estratégia é baseada em técnicas de identificação de

sistemas dinâmicos a parâmetros concentrados e observadores. O objetivo principal é estimar o comportamento dinâmico de uma variável interna do SPD conhecendo-se apenas o sinal de entrada aplicado a um atuador localizado em uma das bordas do sistema e a medição da variável de interesse na borda oposta. Nesse sentido, podem ser definidos dois objetivos secundários: o primeiro deles é obter um modelo em espaço de estados que represente de forma satisfatória o comportamento dinâmico de uma variável interna de interesse a ser monitorada mantendo-se a característica espaço-dependente do sistema original. O segundo objetivo, complementar ao primeiro, consiste na implementação de observadores para estimação de estados e/ou parâmetros do modelo identificado. Para alcançar tais objetivos é definida a metodologia descrita a seguir.

1.3 Metodologia

A estratégia de monitoramento de SPD desenvolvida no presente trabalho é fundamentada em dois desenvolvimentos complementares: primeiramente, é realizada a identificação de um modelo em espaço de estados adequado ao projeto de observadores, em seguida, utilizando o modelo obtido são projetados os observadores propriamente ditos. Para tanto, foi definida a metodologia descrita a seguir.

Para a obtenção de um modelo no espaço de estados foi utilizado uma estratégia baseada em duas abordagens práticas usualmente empregadas para aproximação de SPD. A primeira abordagem conhecida como modelagem por subsistemas espacialmente interconectados consiste na discretização espacial do SPD através de conjuntos de sensores, ou pares de sensores e atuadores, que dividem virtualmente o sistema original criando uma rede de subsistemas a parâmetros concentrados interconectados.

A segunda abordagem, conhecida como modelos lineares a parâmetros variantes no espaço (Spatial-LPV) é semelhante à primeira, porém, considera que os subsistemas identificados possuem a mesma estrutura, sendo possível, através da interpolação (ou do ajuste de curva) dos parâmetros correspondentes de cada modelo local, obter uma função de parâmetros contínua que define um único modelo de entrada-saída capaz de representar o comportamento dinâmico do sistema em qualquer ponto do espaço considerado. Dessa forma, no presente trabalho um SPD é aproximado por dois modelos LPV interconectados.

Para a obtenção do modelo geral na representação de espaço de estados o SPD foi espacialmente discretizado através de sensores igualmente distribuídos ao longo comprimento do sistema. Em seguida, o sistema foi submetido a um teste dinâmico para coleta de dados aplicando-se um sinal de excitação PRBS à entrada do mesmo e medindo-se a resposta de cada sensor. Posteriormente, utilizando-se a massa de dados disponível, foram identificados um conjunto de modelos locais relacionando a entrada do sistema com cada uma das saídas e outro conjunto de modelos locais relacionando cada uma das saídas intermediárias com a saída no final do processo.

Utilizando-se a representação matemática ARMAX polinomial, os parâmetros de cada modelo local foram obtidos através do método estendido de mínimos quadrados (EMQ). As estruturas dos modelos foram determinadas e os modelos foram validados através do critério do erro final de predição (FPE) e do erro médio quadrático normalizado (NRMSE). Foram realizadas também a simulação livre dos modelos locais. Uma vez obtidos os modelos locais para cada um

dos conjuntos, os parâmetros correspondentes foram ajustados utilizando-se funções polinomiais e o método dos mínimos quadrados ponderados. Nesse caso, a matriz de pesos utilizada foi construída a partir da covariância dos parâmetros obtidos na etapa de identificação dos modelos locais.

Cada conjunto de modelos, após o ajuste polinomial dos parâmetros, deu origem a um modelo LPV cujos parâmetros variam em função de uma variável espacial unidimensional. Tais modelos foram então interconectados sendo que a saída do primeiro modelo se tornou a entrada do segundo. Nessa configuração foi possível interpretar a saída de cada modelo LPV como uma variável de estado, dessa forma, um modelo geral no espaço de estados (SS-LPV) adequado ao projeto de observadores foi obtido.

Finalmente, estratégias de observação de estados e/ou parâmetros foram implementadas, as estruturas de observadores utilizadas foram o observador de Kalman, e o observador exponencial com fator de esquecimento. Para as implementações envolvendo estimação de estados e parâmetros, o modelo LPV em espaço de estados foi adequadamente reescrito como sistemas afins nos estados com injeção da saída.

1.4 Organização do documento

Neste capítulo foi feita uma pequena introdução ao tema estudado neste trabalho, seguido da definição do problema para o qual se busca uma solução baseada em técnicas de identificação de sistemas dinâmicos a parâmetros concentrados e observadores. Foram expostos os objetivos do trabalho e a metodologia utilizada para implementação de uma solução. O restante do texto está organizado como segue: no capítulo 2, são apresentadas as ferramentas base utilizadas na solução do problema proposto. O capítulo é dividido em duas partes sendo que a primeira trata de métodos para identificação de sistemas lineares a parâmetros concentrados, baseados em mínimos quadrados (MQ), e a segunda parte trata do projeto de observadores do tipo Kalman. No capítulo 3, é apresentada uma metodologia para aproximação de SPD baseada em dois conceitos principais, a representação de SPD por subsistemas interconectados e a representação de SPD por modelos LPV espaço-dependentes. No capítulo 4 é apresentado um estudo de caso no qual a estratégia para monitoramento de SPD proposta é aplicada. Para tanto, é considerado um protótipo de um sistema distribuído em que ocorre o aquecimento de um fluxo de ar transportado de forma forçada através de um tubo. Finalmente, no capítulo 5 são feitas as considerações finais e apontadas algumas perspectivas.

Fundamentos

Neste capítulo são apresentadas as principais ferramentas utilizadas para o desenvolvimento da estratégia proposta para o monitoramento de SPD. O capítulo se divide em duas partes. A primeira parte traz um conjunto de ferramentas utilizadas para identificação de sistemas dinâmicos lineares a parâmetros concentrados. Inicialmente, é feita uma pequena introdução as etapas do processo de identificação. Em seguida são apresentadas algumas possíveis estruturas de modelos lineares discretos no tempo, dando destaque a estrutura ARMAX polinomial. Posteriormente, são apresentados três métodos para estimação de parâmetros: o método dos mínimos quadrados (MQ), o método dos mínimos quadrados ponderados (MQP) e o método estendido de mínimos quadrados (EMQ). Na segunda parte do capítulo são apresentadas algumas ferramentas para o projeto de observadores. Inicialmente, são apresentadas algumas estruturas para implementação de observadores, dando destaque à estrutura de sistemas afins nos estados com injeção da saída. Em seguida, dadas as condições de observabilidade, são apresentados dois observadores, o observador de Kalman clássico e o observador exponencial com fator de esquecimento.

2.1 Identificação de sistemas

O conceito de modelo matemático é fundamental em diversos ramos da ciência e da engenharia. Embora cada sistema seja composto por componentes distintos, se cada um desses componentes é considerado como um sistema, com entradas e saídas que são relacionadas por um comportamento dinâmico, então, eles podem ser descritos por uma representação matemática. Por um caminho clássico, todos esses sistemas podem ser representados por algumas operações básicas, envolvendo derivadas e integrais, combinadas de uma maneira apropriada através de um conjunto de coeficientes. O problema em questão é como um modelo matemático de um sistema pode ser determinado [Bil13].

Segundo a literatura, modelos matemáticos podem ser desenvolvidos a partir de duas estratégias (ou através da combinação das duas). A primeira delas, conhecida como modelagem analítica, consiste em dividir o sistema em componentes cujas propriedades são bem entendidas por meio de princípios físicos e reuni-los matematicamente a fim de construir uma representação completa do mesmo. A segunda estratégia é diretamente baseada na experimentação do sistema

em que sinais de entrada e de saída são gravados e submetidos à análise de dados com o objetivo de inferir um modelo. Esse caminho, é conhecido com identificação de sistemas [Lju99].

A identificação de sistemas é, portanto, uma área do conhecimento que estuda técnicas alternativas de modelagem matemática. Referida também como modelagem ou identificação caixa-preta, ela abrange um conjunto de técnicas utilizadas para modelar sistemas onde pouco ou nenhum conhecimento prévio do processo é necessário. O que se pretende de fato com tais modelos é descrever como são as relações de causa e efeito entre as variáveis de entrada e saída. Nesse sentido, o tipo de modelo, as técnicas usadas e os requisitos necessários são bastante distintos dos análogos na modelagem pela natureza do processo, também conhecida como modelagem caixa-branca [Agu07].

Em outras palavras, a identificação de sistemas consiste em um conjunto de métodos para obtenção de uma descrição matemática de um sistema através do processamento das entradas e saídas do mesmo. Ela é, portanto, o complemento do problema de simulação e parte do princípio de que os sinais de saída possuem, implicitamente, as dinâmicas do modelo matemático que os produziram a partir de entradas conhecidas e se preocupa em como essas informações podem ser extraídas [Bil13].

2.1.1 Etapas do processo de identificação

Mesmo sendo uma área muito grande e que pode ser dividida em diversos ramos, dependendo do tipo de aplicação a que se destina, a identificação de sistemas conserva uma estrutura metodológica básica que, em linhas gerais, pode ser brevemente descrita em cinco etapas complementares como segue [Agu07]:

1. **Testes dinâmicos e coleta de dados:** nessa etapa do procedimento de identificação, o sistema deve ser experimentado através da aplicação de entradas adequadas e da observação das saídas correspondentes (e/ou das variáveis de estado observáveis). Os dados de identificação assim obtidos serão utilizados na detecção de não linearidades e no ajuste dos parâmetros do modelo escolhido. Os dados utilizados na identificação devem conter informações sobre os sistema que será modelado. Assim, o sinal de excitação deve apresentar espectro suficientemente amplo em frequência e amplitude de tal forma que excursione o sistema pelos regimes dinâmicos de interesse.
2. **Escolha da representação matemática:** uma das principais considerações a ser feita em identificação diz respeito à classe a qual o modelo pertence ou como deseja-se abordá-lo, podendo esse ser contínuo ou discreto no tempo, linear ou não linear, variante ou invariante no tempo, determinístico ou estocástico, de dimensão finita ou infinita, suave ou com singularidades, dentre outros, considerando também a combinação de várias dessas características. No entanto, uma vez que essa definição é feita, uma série de métodos e técnicas são encontradas na literatura e podem ser empregadas para obtenção da estrutura adequada.
3. **Determinação da estrutura do modelo:** a determinação de estrutura consiste em encontrar dentre os termos candidatos pertencentes a uma família de modelos, aqueles

que são mais importantes na descrição das dinâmicas de interesse. No caso de modelos lineares, a escolha da sua estrutura se restringe, basicamente, à escolha do número de pólos e de zeros, bem como à determinação do atraso puro de tempo. Na prática, obviamente, considera-se fazer buscas em uma família de modelos relativamente pequena, contudo, devido a tal restrição corre-se o risco de que a família de modelos utilizada não seja mais adequada.

4. **Estimação de parâmetros:** a etapa de estimação dos parâmetros começa com a escolha do algoritmo a ser utilizado. Determinada a estrutura do modelo, deve-se estimar seus parâmetros para aproximar o comportamento dinâmico apresentado pelo sistema original. Os parâmetros são responsáveis por ponderar a contribuição de cada termo determinado na etapa de escolha de estrutura na resposta do modelo.
5. **Validação do modelo:** a etapa de validação consiste em verificar se os modelos obtidos incorporam ou não as características de interesse do sistema original. É interessante comparar os modelos entre si para decidir se existe algum candidato significativamente melhor que os demais. Essa etapa é muito subjetiva pois o resultado da validação dependerá fortemente da aplicação pretendida para o modelo e da quantidade de informação disponível sobre o sistema original.

Segundo Ljung [Lju99], sem dúvida alguma, as etapas de escolha da representação matemática e determinação da estrutura do modelo são as mais importantes e difíceis de serem determinadas no processo de identificação. É nessa fase que o conhecimento prévio sobre o processo e a intuição da engenharia devem ser combinadas com as propriedades formais das representações matemáticas a fim de se obter uma estrutura satisfatória ao propósito para o qual tal modelo é aplicável. Um bom modelo é, portanto, aquele que melhor descreve os dados de acordo com os critérios de projeto estabelecidos.

Complementar à escolha da representação matemática e determinação de estrutura, a etapa de validação é composta por um conjunto de procedimentos e testes que permitem analisar como o modelo se comporta de acordo com os dados observados, com o conhecimento prévio do sistema e com o uso pretendido. Um modelo que se comporta de forma deficiente nos faz rejeitá-lo ao passo que um bom desempenho irá desenvolver uma certa confiança no mesmo [Lju99].

Como é possível perceber, o procedimento de identificação tem um fluxo natural, é fácil notar que, dificilmente, o primeiro modelo irá passar nos testes de validação. Portanto, as diversas etapas do procedimento de identificação devem ser revistas várias vezes (iterativamente), orientado pelo conhecimento adquirido *a priori* e pelos resultados obtidos nas tentativas anteriores, até que um modelo adequado seja alcançado. A Figura 2.1 mostra o diagrama esquemático do *Loop* de identificação de sistemas. Nesse diagrama as etapas de escolha da representação matemática e determinação da estrutura do modelo estão agrupadas no bloco “Escolha da Representação Matemática” e a etapa de estimação de parâmetros é referida como “Escolha do Critério de Ajuste”.

Definitivamente, um modelo nunca deve ser aceito como uma descrição final e verdadeira do sistema. Ao invés disso, ele pode ser, na melhor das hipóteses, uma descrição suficientemente

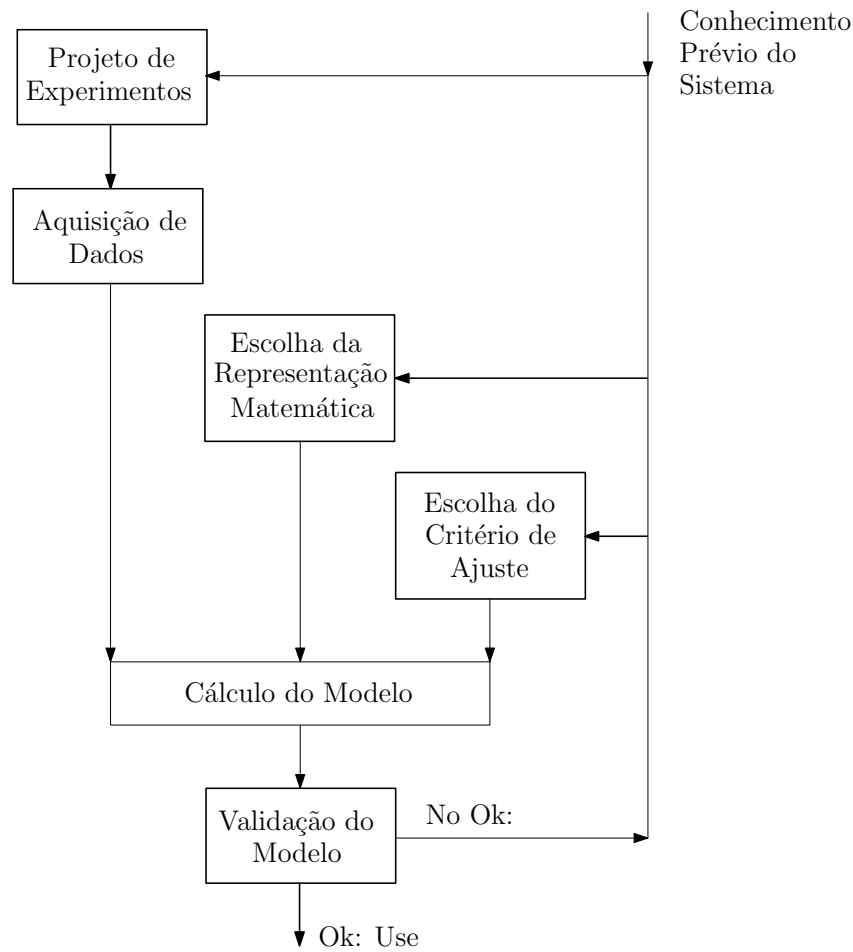


Figura 2.1: Representação esquemática do procedimento de identificação de sistemas (Adaptado de [Lju99]).

boa de certos aspectos que nos são de particular interesse [Lju99]. Neste trabalho, por exemplo, estamos interessados nas representações lineares em tempo discreto. A escolha de tais representações se deve ao fato de que são considerados sistemas dinâmicos auto-reguláveis analisados em torno de um ponto de equilíbrio, em uma faixa de operação aproximadamente linear. Além disso, as representações discretas no tempo, como será possível perceber no procedimento de estimação de parâmetros, são especialmente adequadas ao processo de identificação de sistemas.

2.1.2 Representações em tempo discreto

Modelos dinâmicos discretos no tempo representam a evolução do sistema em instantes de tempo bem definidos, k , tal que, $t_{k+1} - t_k = T_s$, sendo T_s o tempo de amostragem, e são descritos por equações a diferenças. Dentre as representações em tempo discreto mais utilizadas para modelagem de sistemas lineares podem ser citados os modelos *ARX*, *ARMAX*, modelos de erro na saída e *Box-Jenkins* os quais serão brevemente apresentados seguir.

Modelo geral em tempo discreto

Um modelo geral em tempo discreto pode ser representado pela seguinte estrutura geral [Agu07]:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k) \quad (2.1)$$

na qual q^{-1} é um operador de atraso, tal que, $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, $v(k)$ é um ruído branco e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ são polinômios definidos como

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 - a_1q^{-1} - \dots - a_{n_y}q^{-n_y}; \\ B(q) &= b_1q^{-1} + \dots + b_{n_u}q^{-n_u}; \\ C(q) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_v}q^{-n_v}; \\ D(q) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}; \\ F(q) &= 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esse modelo pode ser reescrito como

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}v(k) \quad (2.3)$$

ou ainda como

$$y(k) = H(q)u(k) + G(q)v(k) \quad (2.4)$$

em que as funções $H(q)$ e $G(q)$ são referidas normalmente como sendo funções de transferência do processo e do ruído, respectivamente. Nesse caso, $H(q)$ é o resultado de se substituir $q = z$ na transformada $\mathcal{Z}$ unilateral da resposta ao impulso do processo, $h(k)$.

Como será visto na sequência, as representações em tempo discreto citadas a pouco são variações dessa representação geral e suas diferenças básicas estão nas considerações feitas a respeito do modelo do ruído. É importante perceber que um modelo é uma aproximação que consegue reproduzir apenas algumas características do sistema real, portanto, normalmente, uma serie de considerações simplificadoras podem ser feitas dependendo da aplicação desejada.

O modelo ARX

O modelo auto-regressivo com entradas exógenas ou *ARX* (do inglês – *AutoRegressive with exogenous inputs*) é o modelo discreto mais simples. Tal modelo é obtido da equação 2.1 tomando-se $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ sendo $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}v(k) \quad (2.5)$$

Como o ruído $v(k)$ aparece diretamente na equação, o modelo ARX é normalmente classificado como pertencente à classe de modelos de erro na equação. As funções de transferência $G(q) = B(q)/A(q)$ e do ruído $H(q) = 1/A(q)$ na equação 2.5 mostram que o ruído adicionado

à saída é um ruído branco filtrado por um filtro auto-regressivo com pólos idênticos aos do processo. O polinômio $A(q)$ é um fator comum ao processo e ao ruído. Essa consideração torna a representação pouco realista. A Figura 2.2 mostra a representação esquemática do modelo *ARX* em duas formas possíveis.

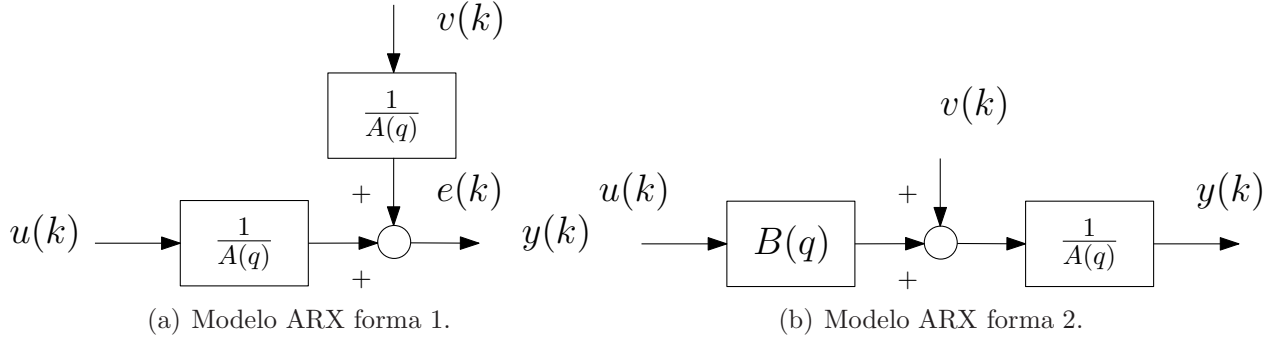


Figura 2.2: Representação matemática do modelo ARX (Retirado de [Agu07]).

O modelo ARMAX

O modelo auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas ou ARMAX (do inglês—AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs), como o nome indica, considera o ruído como um processo média móvel. Tal modelo é obtido da equação 2.1 tomando-se $D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$ como sendo polinômios arbitrários, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}v(k) \quad (2.6)$$

em que $e(k) = C(q)/A(q)$ é um ruído colorido. Como pode ser observado na Figura 4.4, o modelo ARMAX também é um modelo de erro na equação. Nesse caso, o ruído adicionado à saída, $e(k)$, é modelado como um ruído branco filtrado por um filtro ARMA, $C(q)/A(q)$. Apesar de ser mais representativo que o modelo ARX, o modelo ARMAX ainda possui um termo comum entre o processo e o ruído.

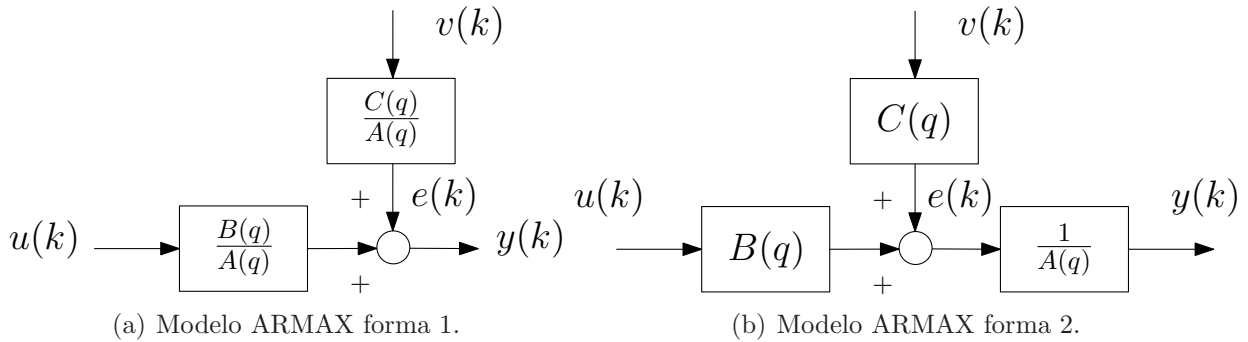


Figura 2.3: Representação matemática do modelo ARMAX (Retirado de [Agu07]).

O modelo ARMA é um caso particular do modelo ARMAX quando $u(k) = 0$. Contudo, é possível interpretar o processo aleatório $v(k)$ como uma entrada e assim, uma parte da saída

$y(k)$ pode ser vista como uma contribuição da entrada $v(k)$ filtrada através do filtro $G(q) = C(q)/A(q)$. Nesses casos, estima-se $G(q)$ usando-se tal sinal e mais uma realização de $v(k)$ tomada em uma distribuição de probabilidade ou utilizando os resíduos do modelo estimado, $\xi(k)$ no lugar de $v(k)$.

O modelo de erro na saída

Ao contrário dos modelos de erro na equação, os modelos de erro na saída não possuem um fator comum nas funções de transferência do processo e do ruído. Um modelo desse tipo pode ser obtido tomando-se, por exemplo, $A(q) = C(q) = D(q) = 1$ e $B(q)$ e $F(q)$ como polinômios arbitrários resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + v(k) \quad (2.7)$$

no qual o ruído $v(k)$ é adicionado diretamente à saída. É importante observar a diferença entre essa representação e os modelos ARX. Para tanto, basta tentar representar (2.7) na forma de (2.5), chegando-se a

$$\begin{aligned} F(q)w(k) &= B(q)u(k) \\ y(k) &= w(k) + v(k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $w(k)$ é uma variável auxiliar sem ruído, que não é medida, como pode ser observado na ilustração da Figura 2.4.

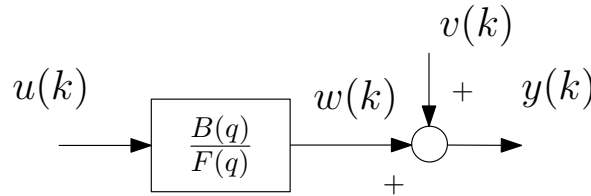


Figura 2.4: Representação esquemática do modelo de erro na saída (Retirado de [Agu07]).

O modelo Box–Jenkins

O modelo *Box–Jenkins* pode ser obtido a partir do modelo geral tomando-se $A(q) = 1$ e os demais polinômios arbitrariamente, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k) \quad (2.9)$$

Como nos modelos de erro na saída, nos modelos Box–Jenkins as funções de transferência do processo, $H(q) = B(q)/F(q)$ e do ruído, $G(q) = C(q)/D(q)$ não possuem fator comum, ou seja, são independentemente parametrizados. Tal característica faz com que essa representação seja mais realista. Conforme pode ser visto na Figura 2.5, o modelo Box–Jenkins também é do tipo erro na saída.

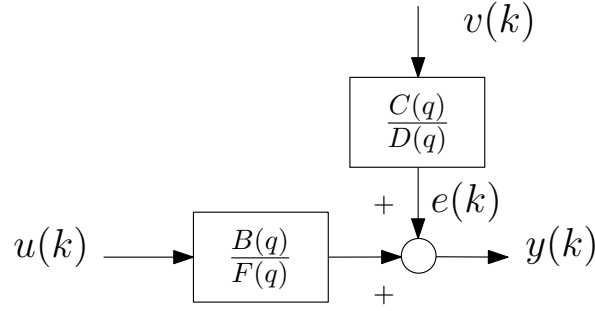


Figura 2.5: Representação esquemática do modelo Box–Jenkins (Retirado de [Agu07]).

2.1.3 O estimador de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP)

Para apresentar o método dos mínimos quadrados, primeiramente, é necessário gerar um conjunto de equações. Considere, portanto, uma função vetorial da forma $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que depende de um vetor de n parâmetros θ . Nesse caso, dizemos que a função $f(\mathbf{x})$ é parametrizada por $\theta \in \mathbb{R}^n$ e pode ser representada por:

$$y = f(\mathbf{x}, \theta) \quad (2.10)$$

sendo que $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ é um vetor formado por n variáveis dependentes conhecidas como regressores. Para N aplicações de (2.10) é obtido um conjunto de equações da forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(\mathbf{x}_1, \theta) \\ y_2 &= f(\mathbf{x}_2, \theta) \\ &\vdots \\ y_N &= f(\mathbf{x}_N, \theta) \end{aligned} \quad (2.11)$$

conhecidas como restrições. Nesse caso, y_i é a i -ésima observação de y e $\mathbf{x}_i = [x_{i,1} \ x_{i,2} \ \cdots \ x_{i,n}]^T$ é a i -ésima observação do vetor de regressores $\mathbf{x}$.

Assumindo que a função f e o vetor θ não variam de uma restrição para a outra, ou seja, o sistema é invariante no tempo e que f é linear nos parâmetros, podendo ser escrita como $y = \mathbf{x}^T \theta$, o conjunto de equações (2.11) pode ser reescrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \cdots & x_{N,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ou

$$\mathbf{y} = X\theta \quad (2.13)$$

Considerando que $N = n$, ou seja, que o número de restrições é igual ao número de regressores, então, se $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for não singular, é possível determinar o vetor de parâmetros invertendo tal matriz, ou seja,

$$\theta = X^{-1}\mathbf{y} \quad (2.14)$$

e nesse caso o sistema é possível e sua solução é única. No entanto, considerando $N > n$ restrições (2.10) tem-se um sistema de equações sobredeterminado, ou seja, $X \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Como para essa situação X não é quadrada ela não será invertível. Contudo, pre-multiplicando (2.14) por X^T em ambos os lados da igualdade tem-se:

$$X^T \mathbf{y} = X^T X \theta \quad (2.15)$$

sendo que $X^T X$ é uma matriz quadrada e invertível se X tem posto completo de colunas. Sendo assim θ pode ser obtido por:

$$\theta = [X^T X]^{-1} X^T \mathbf{y} \quad (2.16)$$

O sistema (2.16) é possível, porém, admite infinitas soluções. Deve-se, portanto, buscar entre as soluções uma que tenha algum sentido bem definido. Para isso, assuma que o vetor de parâmetros estimados $\hat{\theta}$ seja conhecido e que $\xi = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ seja o erro cometido pelo modelo ($\hat{y} = x^T \hat{\theta}$) ao tentar explicar y a partir do vetor de regressores e do vetor de parâmetros $\hat{\theta}$. Nesse caso tem-se:

$$y = \mathbf{x}^T \hat{\theta} + \xi \quad (2.17)$$

Portanto, tomando-se $N > n$ realizações de (2.17) e escrevendo o resultado na forma matricial chega-se a:

$$\mathbf{y} = X \hat{\theta} + \xi \quad (2.18)$$

sendo que $\xi \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de erros (resíduos) cometidos ao se tentar explicar $\mathbf{y}$ por $X \hat{\theta}$. Observe a partir da equação 2.18 que um sentido intuitivo para solução do sistema da equação 2.16 seria encontrar $\hat{\theta}$, tal que, o módulo do vetor de resíduos fosse minimizado. Nesse caso, uma função custo pode ser definida como:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^N \xi(i)^2 = \xi^T \xi = \|\xi\|^2 \quad (2.19)$$

que pode ser interpretada como um índice que quantifica a qualidade do ajuste $X \hat{\theta}$ ao valor dos dados $\mathbf{y}$ [Agu07]. Nesse ponto, assumindo que, por algum motivo, as incertezas associadas às medições em $\mathbf{y}$ sejam variáveis (por exemplo por haver níveis diferentes de ruído para cada faixa de observação), seria interessante atribuir pesos diferentes para cada observação, ou seja, para maior incerteza um menor peso deveria ser atribuído. Sendo assim, a função custo (2.19) pode ser reescrita como:

$$J_{MQP} = \sum_{i=1}^N \xi(i) w_i \xi(i) = \xi^T W \xi \quad (2.20)$$

em que $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz diagonal, definida positiva, cujos elementos ponderam a importância de cada observação na determinação de $\hat{\theta}$. A função custo (2.20) pode então ser reescrita como:

$$\begin{aligned} J_{MQP} &= \xi^T W \xi \\ &= (\mathbf{y} - X \hat{\theta})^T W (\mathbf{y} - X \hat{\theta}) \\ &= \mathbf{y}^T W \mathbf{y} - \mathbf{y}^T W X \hat{\theta} - \hat{\theta}^T X^T W \mathbf{y} + \hat{\theta}^T X^T W X \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para minimizar J_{MQP} em relação a $\hat{\theta}$ é necessário resolver $\partial J_{MQP}/\partial \hat{\theta} = 0$. Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_{MQP}}{\partial \hat{\theta}} &= -(\mathbf{y}^T W X^T) - X^T W \mathbf{y} + (X^T W X + X^T W X) \hat{\theta} \\ &= -2X^T W \mathbf{y} + 2X^T W X \hat{\theta} = 0\end{aligned}\quad (2.22)$$

portanto,

$$\hat{\theta}_{MQP} = [X^T W X]^{-1} X^T W \mathbf{y} \quad (2.23)$$

Contudo, para que $\hat{\theta}$ seja um mínimo, é necessário também que $\partial^2 J_{MQP} / \partial^2 \hat{\theta} > 0$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 J_{MQP}}{\partial^2 \hat{\theta}} = 2X^T W X \hat{\theta} > 0 \quad (2.24)$$

Como definido anteriormente, W é uma matriz diagonal definida positiva. Nesse caso, por definição, $2X^T W X$, também o será e a inequação (2.24) é verdadeira. Portanto, tem-se:

$$\hat{\theta}_{MQP} = \operatorname{argmin}_{\theta} J_{MQP} = [X^T W X]^{-1} X^T W \mathbf{y} \quad (2.25)$$

ou seja, $\hat{\theta}_{MQP}$ é o argumento da função J_{MQP} pertencente ao domínio θ que minimiza $J_{MQP} = \xi^T W \xi$. Observe que se os pesos que compõem a matriz W forem iguais, a equação 2.25 torna-se:

$$\hat{\theta}_{MQ} = \operatorname{argmin}_{\theta} J_{MQ} = [X^T X]^{-1} X^T \mathbf{y} \quad (2.26)$$

e o resultado é o conhecido como estimador de mínimos quadrados clássico (MQ).

2.1.4 Polarização do estimador MQP

Para os resultados desenvolvidos até aqui, foi considerado um modelo geral da forma $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}, \theta)$ em que considerações quanto à invariância no tempo da função f e θ e a linearidade de f nos parâmetros, possibilitaram a geração de um conjunto de equações parametrizadas e a escolha de um critério de ajuste dos parâmetros. No entanto, para a obtenção de modelos dinâmicos, tais como aqueles apresentados na subseção 2.1.2, uma representação mais específica deve ser determinada. Na literatura, é comum que um modelo dinâmico seja representado por:

$$y(k) = \psi^T(k-1)\theta + e(k) \quad (2.27)$$

sendo que, $\psi^T(k-1)$ é um vetor de tamanho $\dim[\hat{\theta}] = n_{\theta}$ variáveis regressoras $\psi(k-1) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{n_{\theta}}]^T$ tomadas até o instante $k-1$. Como exemplo, para um modelo ARX (ver subseção 2.1.2) $\psi^T(k-1)$ é definido como: $\psi(k-1) = [y(k-1) \ \dots \ y(k-n_y) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n_u)]^T$. Sendo assim, tal como para o modelo geral, tomando-se o modelo (2.27) sobre uma massa de dados, são gerados um conjunto de restrições que podem ser representadas matricialmente por:

$$\mathbf{y} = \Psi \theta + \mathbf{e} \quad (2.28)$$

sendo que Ψ é conhecida como matriz de regressores e $\mathbf{e}$ é conhecido como erro de regressão ou ruído de processo.

O ruído de processo (ruído dinâmico ou multiplicativo) representa o que é incerto no modelo, podendo ser resultante de erros de medição, não linearidades e dinâmicas não modeladas que, inevitavelmente, ocorrem em problemas reais. São esses erros que provocam no estimador um efeito conhecido como polarização, tendência ou viés, que prejudica a estimação correta de $\hat{\theta}$, como será brevemente apresentado na sequência tendo como exemplo o estimador de mínimos quadrados ponderados (MQP).

Assuma, portanto, que θ seja um vetor de parâmetros e $\hat{\theta}_W$ seja o seu valor estimado pelo estimador MQP. Nesse caso, $\hat{\theta}_W$ é uma variável aleatória e θ , ainda que o seu valor não seja realmente conhecido, é uma variável determinística. A polarização é então medida, pela diferença entre o vetor de parâmetros estimados e o vetor de parâmetros real (hipoteticamente conhecido) e a condição para que o estimador seja não polarizado é que essa diferença seja nula. Sendo assim, a polarização é dada por:

$$\mathbf{b} = E[\hat{\theta}_W] - \theta \quad (2.29)$$

em que vetor de parâmetros estimado, por ser uma variável aleatória, é melhor caracterizado por sua esperança matemática.

Como visto anteriormente, o estimador MQP é um estimador do tipo $\hat{\theta} = \Phi_W \mathbf{y}$ em que $\Phi_W = [\Psi^T W \Psi]^{-1} \Psi^T W$. Considerando essa informação, o modelo descrito pela equação (2.28) e a definição de polarização dada pela equação (2.29), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= E[\hat{\theta}_W] - \theta \\ &= E[\Phi_W \mathbf{y}] - \theta \\ &= E[\Phi_W (\Psi \theta + \mathbf{e})] - \theta \\ &= E[(\Phi_W \Psi - I)\theta] + E[\Phi_W \mathbf{e}] \\ &= E[(\Phi_W \Psi - I)]\theta + E[\Phi_W \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dessa equação, é fácil verificar que, para que o estimador seja não polarizado ($\mathbf{b} = 0$) as seguintes considerações devem ser atendidas (Adaptado de [Agu07]):

Consideração 2.1. A matriz Φ_W deve ser tal que $\Phi_W \Psi = I$.

Consideração 2.2. Φ_W e $\mathbf{e}$ devem ser estatisticamente independentes, portanto, $E[\Phi_W \mathbf{e}] = E[\Phi_W]E[\mathbf{e}]$.

Consideração 2.3. O erro deve ter média nula, ou seja, $E[\mathbf{e}] = 0$.

Note que a primeira consideração diz respeito ao estimador em si e é prontamente atendida pelos estimadores MQ e MQP. As outras duas restrições se referem à estrutura do modelo e aos dados. Como pode ser observado, a terceira consideração não é tão restritiva pois se a média de $\mathbf{e}$ for diferente de zero, um termo constante pode ser incluído à matriz de regressores e o valor da média pode ser estimado juntamente com os demais parâmetros. Portanto, a segunda consideração é a mais relevante e merece mais atenção pois está diretamente relacionada às etapas de escolha da representação matemática e de determinação da estrutura do modelo. Para ficar mais claro, a seguir são apresentados dois exemplos onde ocorre polarização.

Exemplo 2.1. Polarização devido à tendência (Retirado de [Agu07]).

Na prática, o aparecimento de tendências nos sinais medidos é bem comum e se deve, por exemplo, a efeitos tais como o entupimento de válvulas ou dinâmicas lentas de aquecimento. Considere como exemplo um modelo da forma $y(k) = \psi^T \theta + e(k)$ em que $e(k)$ é dado por $e(k) = \alpha k + \beta + v(k)$, tal que, $v(k)$ é uma variável aleatória não autocorrelacionada e α e β são constantes, logo, $e(k)$ não tem média nula e o valor da saída no instante k é dado por:

$$y(k) = \psi^T(k-1)\theta + \alpha k + \beta + v(k) \quad (2.31)$$

Reescrevendo $e(k)$ no instante $k-1$ tem-se:

$$e(k-1) = \alpha[k-1] + \beta + v(k-1) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha k + \beta + v(k) + v(k-1) - \alpha - v(k) \\ &= e(k) + v(k-1) - \alpha - v(k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Supondo que o modelo (2.34) seja auto-regressivo, sendo que um dos regressores é $y(k-1)$, o modelo (2.31) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} y(k-1) &= \psi^T(k-2)\theta + e(k-1) \\ &= \psi^T(k-2)\theta + e(k) + v(k-1) - \alpha - v(k) \end{aligned} \quad (2.34)$$

tal resultado mostra que $y(k-1)$ está correlacionado com $e(k)$ e, portanto, $E[\Psi^T \mathbf{e}] \neq 0$ e a Consideração 2.2 não é satisfeita.

Exemplo 2.2. *Polarização devido a um ruído MA (Retirado de [Agu07]).*

Erros modelados como processo média móvel (MA) e regressores de saída também resultam em polarização do estimador. Nesse caso, a característica que induz a polarização é o fato do erro que aparece na equação de regressão ser autocorrelacionado e, do modelo incluir regressores da saída. Considere, portanto, o modelo ARX a seguir:

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + e(k) \quad (2.35)$$

em que $e(k)$ é um processo média móvel modelado como:

$$e(k) = cv(k-1) + v(k) \quad (2.36)$$

e $v(k)$ é um ruído branco não autocorrelacionado. Reescrevendo $y(k)$ para $k-1$ tem-se:

$$y(k) = ay(k-2) + bu(k-2) + cv(k-2) + v(k-1) \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.36) chega-se a:

$$y(k) = a[ay(k-2) + bu(k-2) + \underline{cv(k-2)} + \underline{v(k-1)}] + bu(k-1) + \underline{cv(k-1)} + v(k) \quad (2.38)$$

que evidencia, pelos termos sublinhados, que os regressores (entre colchetes) estão correlacionados com $e(k)$ através de $v(k-1)$. Portanto, mais uma vez $E[\Psi^T \mathbf{e}] \neq 0$ e a Consideração 2.2, mais uma vez não pode ser satisfeita.

2.1.5 O estimador Estendido de Mínimos Quadrados (EMQ)

Como visto anteriormente, para que um estimador do tipo $\hat{\theta} = \Phi \mathbf{y}$ seja não polarizado, as Considerações 2.1–2.3 devem ser satisfeitas e os exemplos 2.1 e 2.2 mostraram como a polarização pode ocorrer. Note portanto que, mesmo quando a Consideração 2.1 é atendida, é possível que a Consideração 2.2 (e provavelmente 2.3) não o seja caso $\mathbf{e}$ seja colorido. Consequentemente, uma forma de evitar (ou diminuir) o efeito de polarização, é transformar a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi \theta + \mathbf{e}$ em:

$$\mathbf{y} = \Psi^* \theta^* + \mathbf{e}^* \quad (2.39)$$

de maneira que $\mathbf{e}^*$ seja branco e, portanto, $E[\Phi^*] = 0$ e $\Phi^* \Psi^* = I$.

O estimador EMQ é uma dessas transformações e consiste basicamente em incluir na matriz de regressores os termos do ruído de processo (geralmente considerado com um processo MA). Na estimação de parâmetros utilizando o estimador EMQ, a matriz de regressores, Ψ , é aumentada de forma a incluir os regressores do processo MA. Dessa forma, os parâmetros do modelo do ruído são estimados junto com os parâmetros do modelo do processo, evitando a polarização. Assim, reescrevendo (2.6) (subseção 2.1.2) na forma de equações a diferenças tem-se:

$$y(k) = - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y} y(k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u} u(k - i_u) + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu} \nu(k - i_\nu) + \nu(k) \quad (2.40)$$

em que n_y , n_u , n_ν e n_k são, respectivamente, o número de termos dos polinômios em 2.2: $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$; e o número de atrasos entre a entrada e a saída e $\nu(k)$ é um ruído branco. Portanto, para N realizações de $y(k)$, $k = 0, \dots, N$, pode-se escrever:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_\theta & \Psi_\nu \end{bmatrix}}_{\Psi^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}}_{\theta^*} + \underbrace{\nu}_{\mathbf{e}^*} \quad (2.41)$$

em que os termos do modelo do processo são agrupados na matriz de regressores $\Psi_\theta \in \mathbb{R}^{N \times n_\theta}$ e os termos do modelo do ruído são agrupados na matriz $\Psi_\nu \in \mathbb{R}^{N \times n_\nu}$. Logo, $\Psi^* \in \mathbb{R}^{N \times (n_\theta + n_\nu)}$ e $\theta^* \in \mathbb{R}^{n_\theta + n_\nu}$, o que permite a estimação dos parâmetros do modelo via EMQ:

$$\hat{\theta}_{\text{EMQ}} = [\Psi^{*T} \Psi^*]^{-1} \Psi^{*T} \mathbf{y}. \quad (2.42)$$

Em termos práticos, como não se conhece o erro de modelo, $\mathbf{e}^*$, *a priori*, $w(k)$ é estimado por $\hat{w}(k)$ e os resíduos ($\xi = y - \hat{y}$) são calculados, então, $C(q)\nu(k)$ é aproximado por $C(q)\xi(k)$. Em seguida, através do algoritmo EMQ, $e(k)$ é refinado, de forma iterativa, até que ocorra convergência. Note que, para calcular $\nu(k)$ é necessário conhecer o modelo $C(q)$, que por sua vez é desconhecido. Portanto, a solução completa requer as etapas descritas no Algoritmo 1.

Para verificar a convergência, pode-se monitorar a variância dos resíduos, $\sigma_{\xi_i}^2$, ou o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{\text{EMQ}_i}$. Note que o primeiro passo do algoritmo pressupõe que a estrutura do modelo de processo tenha sido escolhida *a priori* e o mesmo vale para a estrutura do modelo do ruído, necessária ao passo 4 para montar a matriz estendida. Note também que as informações do processo de identificação disponibilizam os dados necessários para construção da matriz de covariância Q do filtro de Kalman e que a covariância do ruído de medição, R , pode ser calculada

Algoritmo 1: Estimador EMQ (Retirado de [Agu07])

- 1: A partir da equação de regressão $y(k) = \psi^T(k-1)\theta + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\theta + \mathbf{e}$ e determine $\hat{\theta}_{MQ} = [\Psi^T\Psi]^{-1}\Psi^T\mathbf{y}$.
 - 2: Calcule o vetor de resíduos $\xi_1 = \mathbf{y} - \Psi\hat{\theta}_{MQ}$.
 - 3: Faça $i = 2$ (i indica o número de iterações).
 - 4: Com ξ_{i-1} , monte a matriz estendida de regressores, Ψ_i^* , e estime $\hat{\theta}_{EMQ_i} = [\Psi_i^{*T}\Psi_i^*]^{-1}\Psi_i^{*T}\mathbf{y}$.
 - 5: Determine o vetor de resíduo $\xi_i = \mathbf{y} - \Psi_i^*\hat{\theta}_{EMQ_i}$.
 - 6: Faça $i = i + 1$ e volte ao passo 4. Repita até convergir.
-

utilizando os sinais coletados para identificação. Essa última observação fará mais sentido após a leitura da próxima seção.

2.2 Observadores

Em síntese, um observador consiste em um modelo com adaptação em tempo real, baseada em medições disponíveis, que tem como objetivo reconstruir informações. Tempo-real, nesse caso, significa que os cálculos realizados pelo observador são feitos a cada instante de amostragem à medida em que os dados são disponibilizados, ou seja, o processamento ocorre suficientemente rápido de maneira que o resultado esteja disponível para influenciar o processo sendo monitorado ou controlado. Sendo assim, um observador pode ser caracterizado como um reconstrutor de informações, em malha fechada, baseado em modelos e medições.

Usualmente, o modelo é uma representação em espaço de estados e, portanto, assume-se que todas as partes das informações a serem reconstruídas são suportadas por variáveis de estado. Dessa forma, em relação ao modelo, a ideia básica por trás do projeto de observadores é tentar descrever o sistema sob consideração de acordo com as estruturas específicas com as quais os observadores estão disponíveis. Essa ideia reforça a afirmativa de que a identificação deve ser orientada ao objetivo, nesse caso, o projeto de observadores é que determina a forma do modelo adequado orientando o projeto de identificação. Portanto, nas subseções a seguir, são apresentadas algumas dessas estruturas específicas e como funcionam os algoritmos de observação de estados que são de interesse ao presente trabalho.

2.2.1 Modelos sob consideração

Como mencionado anteriormente, para o projeto de observadores considera-se algumas formas específicas nas quais os modelos do sistema devem ser representados. Em uma forma geral, a dinâmica de tais modelos podem depender explicitamente do tempo, por meio de uma função do tipo $f(x(k), u(k), k)$, e a saída desses modelos podem depender diretamente do sinal de entrada, $u(k)$, e do tempo, k , por meio de uma função do tipo $h(x(k), u(k), k)$. Esse sistema, usualmente referido como variante no tempo, pode ser escrito na representação em espaço de estados como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) &= h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{aligned} \tag{2.43}$$

em que $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ denota o vetor de entradas externas conhecidas e $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ denota o vetor de saídas medidas. A forma geral apresentada acima, permite que formas específicas, a depender da abordagem utilizada em relação ao problema a ser tratado, sejam obtidas, dentre elas, podem ser citados os casos a seguir:

- **Sistemas afins nos estados com injeção da saída:**

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{A}(\mathbf{y}(k), \mathbf{u}(k))\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(\mathbf{y}(k), \mathbf{u}(k)) \\ h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(k) \text{ ou } \mathcal{C}(\mathbf{u}(k))\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2.44)$$

- **Sistemas afins nos estados:**

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{A}(\mathbf{u}(k))\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(\mathbf{u}(k)) \\ h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(k) \text{ ou } \mathcal{C}(\mathbf{u}(k))\mathbf{x}(k) + \mathcal{D}(\mathbf{u}(k)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

- **Sistemas lineares variantes no tempo (LTV):**

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathcal{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.46)$$

- **Sistemas lineares invariantes no tempo (LTI):**

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{A}\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}\mathbf{u}(k) \\ h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(k) + \mathcal{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.2.2 Definição do problema de observadores

Seja um modelo no formato da equação 2.43. Com o propósito de atuar sobre o sistema ou monitorá-lo, em geral, é necessário conhecer $\mathbf{x}(k)$, quando, na prática, apenas se tem acesso a $\mathbf{u}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$. Dessa maneira, o problema de observação pode ser formulado da seguinte forma [Bes07]:

Problema 2.1. *Dado um sistema descrito pela representação (2.43), encontre uma estimativa, $\hat{\mathbf{x}}(k)$, para $\mathbf{x}(k)$ a partir do conhecimento de $\mathbf{u}(\tau)$ e $\mathbf{y}(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq k\Delta T$, em que ΔT é o período de amostragem. Logicamente, esse problema faz sentido se $h(\cdot)$ não pode ser invertido em relação a $\mathbf{x}(k)$ em qualquer instante de tempo.*

Uma solução possível ao problema exposto consiste em estimar o estado $\mathbf{x}(k)$ através de um algoritmo recursivo. Observe que se $\mathbf{x}(0)$ é conhecido, uma estimativa de $\mathbf{x}(k)$ pode ser obtida simplesmente pela integração de (2.43) a partir de $\mathbf{x}(0)$. No entanto, se $\mathbf{x}(0)$ é desconhecido, o que se propõe é fazer o caminho inverso e recuperar o estado inicial do sistema, $\mathbf{x}(0)$, através de um processo de integração de $\hat{\mathbf{x}}(k)$ corrigido em tempo real a partir de uma condição inicial $\hat{\mathbf{x}}(0)$ errônea, de acordo com o erro mensurável $h(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{y}(k))$. Em outras palavras, isso significa, olhar para a estimativa $\hat{\mathbf{x}}(k)$ de $\mathbf{x}(k)$ como a solução de um sistema do forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = f(\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{u}(k), k) + \mathcal{K}(k)(h(\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{u}(k), k) - \mathbf{y}(k)), \text{ com } \mathcal{K}(0) = 0 \quad (2.48)$$

ou seja, um sistema auxiliar conhecido como observador, projetado para gerar uma estimativa, $\hat{\mathbf{x}}(k)$, do vetor de estados $\mathbf{x}(k)$ no sentido de fazer com que $\hat{\mathbf{x}}(k) \rightarrow \mathbf{x}(k)$ quando $k \rightarrow \infty$. A equação 2.48 é a forma mais comum de um observador para um sistema descrito por (2.43).

2.2.3 Sistemas afins nos estados com injeção da saída e observabilidade

Definidas as estruturas de modelos adequadas e estabelecido o problema de observação, algumas restrições importantes devem ser apontadas para que a solução do problema 2.1 seja possível. Tais restrições estão fundamentadas nas condições de observabilidade. Em resumo, elas devem expressar que, de fato, existe a possibilidade de que o propósito do observador seja alcançado, ou seja, que seja possível recuperar $\mathbf{x}(k)$ a partir do conhecimento de $\mathbf{y}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$ ao longo do tempo k . Nesse sentido, considera-se observadores que possam ser sintonizados, pois, dessa forma, as condições de observabilidade se tornam necessárias. De acordo com as estruturas apresentadas na subseção 2.2.1, a representação matemática mais geral considerada, na qual o sistema pode ser descrito, é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}(u(k), y(k))\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(u(k), y(k)) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathcal{C}(u_k)\mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (2.49)$$

sistemas que possuem esse formato, são conhecidos como sistemas afins nos estados com injeção da saída, em que, $u(k)$ é uma função de entrada, $y(k)$ é uma função de saída, $x(0)$ é uma condição inicial qualquer. O projeto de um observador para esse sistema, requer que a entrada, $u(k)$, seja regularmente persistente, ou, equivalentemente, que induza uma representação LTV do sistema, que seja completamente e uniformemente observável. Mas precisamente, considera-se que uma sequência de entrada, $u(k)$, aplicada em (2.49), induza uma representação LTV da forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(k)u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathcal{C}(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (2.50)$$

na qual, $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$ e $\mathcal{C}(k)$ são funções limitadas de k (isso ocorre, por exemplo, sempre que $u(k)$ e $y(k)$ são contínuas em relação a seus argumentos). Nesse caso, a observabilidade do sistema pode ser estudada através do Gramiano de observabilidade.

Para sistemas da forma (2.50), a matriz de transição de estados da parte homogênea da equação, ou seja, $\mathbf{x}(k+1) = \mathcal{A}(k)\mathbf{x}(k)$ de estados é definida como:

$$\Phi(k, k_0) = \mathcal{A}(k-1)\mathcal{A}(k-2) \cdots \mathcal{A}(k_0) \quad (2.51)$$

que, por definição é inversível se e somente se todas as matrizes da sequência de produtos, $\{\mathcal{A}(k)\}$, são inversíveis. Assumindo, portanto, que tal condição é sempre atendida, e que $\Phi(k, k_0)^{-1} = \Phi(k_0, k)$, o Gramiano de observabilidade de (2.50) é então definido por:

$$\Gamma(k, \sigma) = \sum_{l=k}^{k+\sigma} \Phi(l, k)^T \mathcal{C}(l)^T \mathcal{C}(l) \Phi(l, k) \quad (2.52)$$

para qualquer número natural σ correspondente ao tamanho da janela do Gramiano. A estrutura quadrática do Gramiano de observabilidade implica que ele é simétrico e semi-definido positivo. Sendo assim, seus autovalores são positivos ou iguais a zero e a observabilidade será caracterizada pelos autovalores de $\Gamma(k, \sigma)$, que devem ser suficientemente maiores que zero, definindo assim, algum grau de observabilidade. As entradas regularmente persistentes são definidas para a observabilidade de (2.49) como [Bes07]:

Definição 2.1. *Se existe um determinado número natural σ , tal que, em qualquer instante de amostragem, k , e para qualquer condição inicial, $x(0)$,*

$$0 \leq \alpha_1 I_n \leq \Gamma(k, \sigma) \leq \alpha_2 I_n \quad (2.53)$$

sendo, $\Gamma(k, \sigma)$ o Gramiano de observabilidade da representação LTV (2.50) e, α_1 e α_2 , números reais positivos, então, a sequência de entradas, $u(k)$, para $k \geq 0$, é regularmente persistente para o sistema (2.49).

Uma interpretação física do Gramiano de observabilidade é que ele é uma medida da energia do sinal de saída obtida quando o sistema evoluciona livremente a partir de algum estado, $x(k)$, do tempo k para algum tempo $k + \sigma$ [RSBG16]. Tal energia é dada por:

$$L(y) = \sum_{l=k}^{k+\sigma} \|y(l)\|^2 = \sum_{l=k}^{k+\sigma} y(l)^T y(l) \quad (2.54)$$

e a evolução da saída no tempo pode ser calculada através da matriz de transição definida em (2.51), chegando-se a:

$$\begin{aligned} y(k|\sigma) &= \mathcal{C}(k|\sigma)\Phi(k+\sigma, k)x(k) \\ L(y) &= x(k)^T \Gamma(k, \sigma)x(k) \end{aligned} \quad (2.55)$$

em que $\Gamma(k, \sigma)$, definido em (2.52), é a solução positiva, no tempo k , da seguinte equação a diferença de Lyapunov [Geo95]:

$$\begin{aligned} W(k) &= \mathcal{A}(k)^T W(k+1) \mathcal{A}(k) + \mathcal{C}(k)^T \mathcal{C}(k) \\ W(k+\sigma+1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Em temos práticos, enquanto a observabilidade nos termos da definição 2.1 pareça difícil de verificar, os autovalores da matriz $W(k)$ podem ser utilizados como indicadores da observabilidade do sistema no sentido de que o seu menor valor real pode ser monitorado em tempo real devendo ser suficientemente maior que zero dentro da janela de tempo $(k + \sigma)$ considerada.

2.2.4 Observador de Kalman

O observador de Kalman é um estimador estocástico ótimo discreto no tempo desenvolvido por [Kal60] cuja teoria e aplicação tem sido tratadas em diversos artigos e livros sendo que diferentes formas de derivação podem ser encontradas em diferentes livros de estimação ótima, por exemplo, [Sim06, GA15]. Assumindo que o sistema (2.49) é corrompido por um ruído de processo, $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^n$ e por um ruído de medição, $\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^p$ ambos ruídos brancos com média nula e não-correlacionados, com matrizes de covariância $Q^{n \times n}$ e $R^{p \times p}$, conhecidas, a equação 2.49 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}(u(k), y(k))\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(u(k), y(k)) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathcal{C}(u(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Se uma sequência de entrada, $u(k)$, é regularmente persistente, ou, equivalentemente, se ela induz uma representação LTV do sistema que seja completamente e uniformemente observável.

Mas precisamente, considere que uma sequência de entrada, $u(k)$, aplicada em (2.49), induza uma representação LTV da forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(k)u(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathcal{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}\quad (2.58)$$

na qual, $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$ e $\mathcal{C}(k)$ são funções limitadas de k (isso ocorre, por exemplo, sempre que $u(k)$ e $y(k)$ são contínuas em relação a seus argumentos). Nesse caso, a observabilidade do sistema pode ser estudada através do Gramiano de observabilidade descrito anteriormente. Portanto, se o sistema (2.49) é excitado por uma entrada regularmente persistente, o observador ótimo de Kalman para ele é dado por:

Teorema 2.1. Observador de Kalman [Kal60]: *Para qualquer sequência de entrada regularmente persistente e limitada que resulte em $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$ e $\mathcal{C}(k)$, o seguinte sistema:*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(k) &= P(k)\mathcal{C}(k)^T(\mathcal{C}(k)P(k)\mathcal{C}(k)^T + R)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathcal{A}(k)(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathcal{K}(k)(\mathcal{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) - y(k))) + \mathcal{B}(k)u(k) \\ P(k+1) &= \mathcal{A}(k)(P(k) - \mathcal{K}(k)\mathcal{C}(k)P(k))\mathcal{A}(k)^T + Q\end{aligned}\quad (2.59)$$

provê um observador ótimo para o sistema (2.49).

Na equação 2.59 $\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}(u(k), y(k))$, $\mathcal{B}(k) = \mathcal{B}(u(k), y(k))$ e $\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(u(k))$. O observador de Kalman é, portanto, a solução ótima do problema de otimização que objetiva minimizar o traço da matriz de covariância do erro de estimação — $\min_{\mathcal{K}(k)} \text{Tr}(P(k+1))$. (Veja [Sim06, GA15] para mais detalhes).

Observação 2.1. *Para o observador de Kalman clássico, a matriz Q pode ser semi-definida positiva apenas, porém, a controlabilidade do par $(\mathcal{A}(k), Q^{1/2})$ deve ser garantida para todo k . Além disso, o Gramiano de observabilidade e a controlabilidade do par $(\mathcal{A}(k), R^{1/2})$, fornecem, respectivamente, os limites superior e inferior da matriz $P(k)$ em (2.59), o que faz com que o observador de Kalman para o sistema com ruído (2.57) seja um observador assintótico global para o sistema determinístico (2.49) (mais detalhes são encontrados em [Jaz70]).*

No caso dos sistemas lineares invariantes no tempo (LTI), a equação 2.57 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(k) + \mathcal{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}\quad (2.60)$$

Nesse caso, a observabilidade do sistema é caracterizada pela observabilidade do par $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ definida pela de posto completo da matriz de observabilidade, $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{nm \times n}$, definida como:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}\mathcal{A} \\ \vdots \\ \mathcal{C}\mathcal{A}^{n-1} \end{bmatrix}\quad (2.61)$$

e a equação do observador é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(k) &= P(k)\mathcal{C}^T(\mathcal{C}P(k)\mathcal{C}^T + R)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathcal{A}(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathcal{K}(k)(\mathcal{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - y(k))) + \mathcal{B}\mathbf{u}(k) \\ P(k+1) &= \mathcal{A}(P(k) - \mathcal{K}(k)\mathcal{C}P(k))\mathcal{A}^T + Q\end{aligned}\quad (2.62)$$

2.2.5 Observador exponencial com fator de esquecimento

O observador exponencial com fator de esquecimento pertence a classe dos observadores do tipo Kalman. Isso se deve à sua estrutura e ao fato de que, apesar de ser introduzido para observação de sistemas afins nos estados, em última análise, depende da propriedade de observabilidade completa uniforme. Uma vez que as condições de observabilidade descritas na subseção anterior são atendidas, um observador exponencial com fator de esquecimento pode ser projetado para (2.49) como segue:

Teorema 2.2. Observador exponencial com fator de esquecimento [TB09]: *Dado os sistema (2.49), e assumindo que uma sequência de entrada, $u(k)$, é regularmente persistente e torna $A(u(k), y(k))$ inversível, então, um observador globalmente exponencialmente convergente é dado por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(k) &= P(k)\mathcal{C}(k)^T(\mathcal{C}(k)P(k)\mathcal{C}(k)^T + R)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathcal{A}(k)(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathcal{K}(k)(\mathcal{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) - y(k))) + \mathcal{B}(k) \\ P(k+1) &= \delta^{-1}\mathcal{A}(k)(P(k) - \mathcal{K}(k)\mathcal{C}(k)P(k))\mathcal{A}(k)^T \end{aligned} \quad (2.63)$$

com $P_0 = P_0^T > 0$, $R = R^T > 0$ e $0 < \delta < 1$.

Na equação 2.63 $\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}(u(k), y(k))$, $\mathcal{B}(k) = \mathcal{B}(u(k), y(k))$ e $\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(u(k))$, δ determina a taxa de convergência do observador e quanto menor for o seu valor mais rápida é a convergência. Note que, diferente do observador de Kalman clássico, os termos de ruído de processo (sintetizados em Q) não aparecem na equação do observador exponencial com fator de esquecimento; o fator de esquecimento o torna desnecessário para estabilidade, como sugere o lema a seguir:

Lema 2.1. [TB09]: *Sob a condição de observabilidade completa e uniforme do sistema (2.50), o sistema (2.61) e tal que:*

$$0 < \beta_1 I_n \leq P(k) \leq \beta_2 I_n \quad (2.64)$$

em que o limite superior é obtido a partir do Gramiano de observabilidade e o limite inferior é garantido através da escolha adequada do valor da sintonia de δ em relação ao limite inferior da matriz de transição de estados associada a parte homogênea do sistema (2.50).

O lema sugere que os autovalores de $P(k)$ também podem ser usados como indicadores da observabilidade do sistema, no sentido de que, um aumento ilimitado em $P(k)$ indica que o Gramiano de observabilidade está próximo de ser singular. Sendo assim, uma alternativa para monitoramento da observabilidade do sistema é acompanhar a evolução do ganho do observador em tempo-real, dessa forma, qualquer aumento injustificável pode ser interpretado como um alerta do observador para compensar para a diminuição da informação útil no sinal medido.

2.3 Conclusões

Neste capítulo foi realizada uma breve revisão sobre as principais ferramentas utilizadas para o desenvolvimento da estratégia proposta para o monitoramento de SPD. A revisão foi feita de forma concisa, com o objetivo de fornecer o conteúdo necessário para o entendimento da metodologia a ser apresentada no capítulo 3 e do estudo de caso a ser apresentado no capítulo 4.

O capítulo foi dividido em duas partes. A primeira parte se refere aos conceitos básicos sobre identificação de sistemas dinâmicos lineares a parâmetros concentrados e a segunda parte sobre os observadores que serão, de fato, implementados. Apesar de parecerem distantes, os dois tópicos se convergem a partir do momento em que é entendido que o projeto de identificação é fortemente dependente do objetivo para o qual um modelo será inferido. Foi visto que, para o projeto de observadores, são consideradas algumas estruturas específicas nas quais o modelo do sistema deve ser representado. De uma forma geral, tais modelos são representações no espaço de estados e, além disso, é desejável que as descrições sejam de baixa ordem devido, principalmente, à quantidade limitada de sensores disponíveis durante a operação normal de um processo distribuído. Sendo assim, as ferramentas apresentadas na primeira parte do capítulo, principalmente, as que se referem ao processo de determinação de estrutura e validação, devem ser utilizadas de forma a atender a tais restrições. Portanto, uma vez que o projeto de identificação é orientado ao projeto de observadores, a validação do desempenho dos observadores deve ser incorporada à etapa final do *loop* de identificação de sistemas. Em outras palavras, o modelo final será suficientemente bom para a aplicação de observação de estados, quando o desempenho do observador for considerado suficientemente bom. Esse fato, como será visto no capítulo 4, direciona a interpretação dos índices de desempenho utilizados para escolha do modelo final.

Metodologia para aproximação de SPD

Sistemas a parâmetros distribuídos (SPD) atraem a atenção por diversos motivos, tais como, relevância econômica e social. Exemplos de SPD são trocadores de calor [GPK11, MPP11], fornos industriais [TJT12], linhas de transmissão de energia elétrica [PBL98], controle de vibração em sistemas flexíveis [LW16, DQG⁺14], controle de fluxo em canais de irrigação [BPB10, BPB14b, BPB14a], dentre outros. Visando o bom funcionamento desses sistemas é de interesse o controle ou a observação de estados. Nesses casos, os SPD podem ser aproximados por representações locais de dimensão finita, normalmente obtidas através da discretização espaço-temporal de modelos descritos por equações diferenciais parciais (EDP), que podem demandar diferentes métodos de modelagem e níveis de complexidade estrutural dos modelos, dependendo da aplicação pretendida [PA09b, CPCL15].

Em alguns casos práticos, posições específicas do SPD podem ser representadas por modelos a parâmetros concentrados [TJT12], porém, essa abordagem leva a perdas no conhecimento da dinâmica do SPD em outras posições do espaço [KS08]. Outra abordagem prática conhecida, consiste na discretização espacial do SPD por meio de um conjunto de sensores, ou pares de sensores e atuadores, que dividem virtualmente o sistema original criando uma rede de subsistemas a parâmetros concentrados interconectados.

As interconexões vinculam cada subsistema com sua vizinhança mais próxima, permitindo a caracterização de variáveis internas do SPD por meio das relações de causa e efeito entre os modelos de dimensão finita [LW16]. Essa abordagem permite a construção de um modelo único, multidimensional, em espaço de estados aumentado, como, por exemplo, na forma de Roesser [Roe75, CCdSL13]. Porém, a vinculação das variáveis de estado apenas aos pontos específicos do processo que foram utilizados na modelagem ainda persiste. Além disso, quanto maior o número de divisões espaciais usadas para modelar o SPD, maior é a ordem do modelo resultante, o que pode dificultar ou mesmo inviabilizar seu uso para fins de controle ou monitoração utilizando observadores.

Uma alternativa encontrada na literatura é baseada em modelos lineares a parâmetros variantes no espaço (Spatial LPV, do inglês *Spatial Linear Parameter Varying*). Nesse caso, considerando a mesma estrutura para todos modelos que representam cada subsistema, é possível estabelecer uma relação entre o seus parâmetros e uma variável espacial, usualmente denotada por *variável scheduling*, resultando em um modelo geral de entrada-saída cujos parâme-

tros dependem de uma função espaço-dependente, usualmente denotada por *função scheduling* [LHW13, LGPW14, LMTM16].

Uma variação da estratégia anterior, tipicamente encontrada em aplicações de controle de SPD via ação na borda, consiste em relacionar a entrada (variável manipulada) com saídas intermediárias distintas, por meio de modelos com a mesma estrutura que abrangem porções diferentes do SPD [GDG05, BPB10, BPB14b, BPB14a]. Ambas as abordagens, resultam em um modelo LPV que pode ser suficientemente preciso, dispensando o uso de sensores intermediários, após identificação, para monitoramento de uma variável interna de interesse. Entretanto, como se trata de uma única representação de entrada-saída os modelos nessa forma não são adequados à observação de estados. Outra limitação é a ausência de correções nas predições realizadas.

Neste trabalho é proposta uma abordagem motivada pelos conceitos de modelagem espacial LPV e de modelos interconectados. Tal estratégia tem como meta a obtenção de um modelo geral no espaço de estados adequado ao projeto de observadores. Nesse caso, um SPD com atuação em uma de suas bordas é descrito por dois subsistemas LPV complementares interconectados. A estrutura final do modelo obtido permite prever o comportamento dinâmico da variável de interesse em qualquer ponto ao longo do sistema devido à característica espaço-dependente dos dois modelos empregados.

O fato dos modelos serem interconectados permite que a variável de interesse seja conhecida através do sistema original por meio das relações de causa e efeito entre os dois modelos. Com isso, a estratégia permite que as variáveis de saída de cada modelo possam ser interpretadas como variáveis de estado, o que leva a uma representação LPV no espaço de estados adequada ao propósito de identificação.

Nesta proposta, o projeto de identificação orientado à observação de estados, é conveniente por usufruir das estimativas das incertezas associadas ao modelo — fornecidas pelas técnicas de identificação — que podem ser utilizados no projeto de observadores, e pela introdução da correção das variáveis de estado preditas pelo modelo identificado por parte do observador. Nas seções a seguir são apresentados as técnicas de identificação de SPD citadas acima e a estratégia de identificação proposta neste trabalho.

3.1 Aproximação de SPD por subsistemas interconectados

A fim de ilustrar a metodologia de identificação proposta, o problema fundamental abordado neste trabalho é retomado. Considere, portanto, um SPD contínuo no tempo, $t \in \mathbb{R}^+$, e no espaço, $s \in \mathbb{R}$, tal que, $0 \leq s \leq L$, em que L é a distância máxima entre as bordas anterior e posterior do sistema. Suponha que $u(s,t)|_{s=0} \in \mathbb{R}$ seja uma variável de entrada que atua na borda anterior de forma que a variável de saída, $y(s,t)$, seja alterada. Tal sistema é ilustrado esquematicamente na Figura 3.1. Observe que, por se tratar de um SPD, podem ser definidos infinitos pontos de medição de $y(s,t)$ entre $s = 0$ e $s = L$. No entanto, durante o funcionamento regular do sistema, assuma que esteja disponível apenas uma posição de medição na borda posterior, ou seja, em $y(s,t)|_{s=L}$. Sendo assim, supondo o conhecimento da entrada $u(0,t)$ e da saída $y(L,t)$ para $t \geq 0$, o problema proposto neste trabalho consiste em estimar o valor de

$y(s_\ell, t)$, em que s_ℓ indica uma posição do espaço escolhida arbitrariamente dentro do domínio $0 < s_\ell < L$.

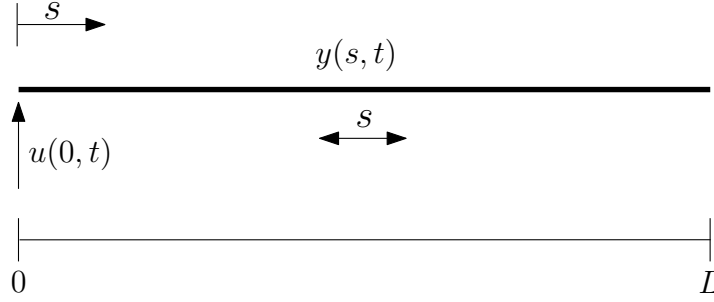


Figura 3.1: Representação de um SPD com atuação na borda.

Supondo uma região de operação linear em torno de um ponto de equilíbrio e tomando $y(s, k)$ em p locais específicos, s_j , $j = 1, 2, \dots, p$, através de um conjunto de sensores igualmente distribuídos ao longo do processo, de forma que, $s_{j+1} - s_j = \Delta s$, com Δs pequeno porém suficientemente grande para garantir $y(s_j, k) \neq y(s_{j+1}, k)$, é possível dividir virtualmente o sistema de dimensão infinita original, apresentado na Figura 3.1, em p subsistemas de dimensão finita, interconectados em cascata, conforme mostra a Figura 3.2, e identificar cada um deles utilizando-se, por exemplo, as técnicas de identificação de sistemas dinâmicos definidas na seção 2.1. Note que o primeiro modelo relaciona $y(s_1, k)$ com $u(0, k)$ e os outros relacionam $y(s_j, k)$ e $y(s_{j-1}, k)$. Sendo assim, o primeiro modelo é fixo e define a dinâmica de borda do sistema.

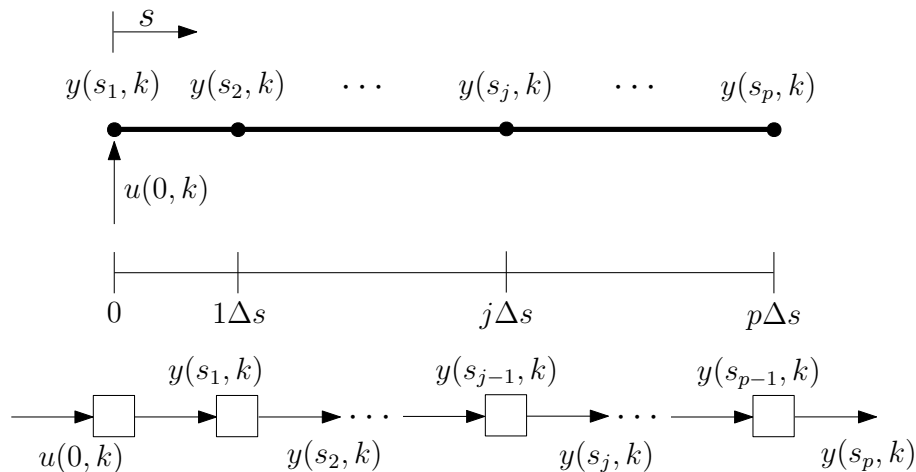


Figura 3.2: Aproximação de SPD por subsistemas interconectados em cascata.

Assumindo a representação ARMAX polinomial apresentada na subseção 2.1, reescrita na forma de equações a diferenças como indicado em (2.42) na subseção 2.1.5 e considerando as posições no espaço definidas para identificação, a condição dinâmica de borda é dada por uma

representação de entrada-saída da forma:

$$\begin{aligned} y(s_1, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y}(s_1) y(s_1, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u}(s_1) u(s_1, k - i_u) \\ & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu}(s_1) \nu(s_1, k - i_\nu) + \nu(s_1, k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

e os demais modelos locais são representações de entrada-saída da forma:

$$\begin{aligned} y(s_j, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y}(s_j) y(s_j, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u}(s_j) y(s_{j-1}, k - i_u) \\ & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu}(s_j) \nu(s_j, k - i_\nu) + \nu(s_j, k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo que $j > 1$. Observe que, nesse caso, não necessariamente os modelos locais precisam ter a mesma estrutura. Uma vez obtidos os modelos locais, eles podem ser agrupados em um modelo único, multidimensional, em espaço de estados aumentado, como, por exemplo, na forma de Roesser [Roe75]. Para isso, é considerada apenas o modelo do processo, ou seja, os dois primeiros somatórios do lado direito da igualdade nos modelos (3.1) e (3.2). O modelo do ruído é utilizado apenas para diminuição do efeito de polarização no processo de estimação de parâmetros (veja a subseção 2.1.5).

3.2 Aproximação SPD por modelos LPV

Uma abordagem comum para lidar com sistemas não lineares consiste em descrevê-los por modelos cujos parâmetros variam em função do ponto de operação ou em função de variáveis externas, conhecidas como *variáveis scheduling*. Desse ponto de vista, o sistema não linear é interpretado como uma coleção de sistemas lineares locais, um para cada valor assumido pela *variável scheduling*. Essas representações são conhecidas como modelos LPV (do inglês Linear Parameter-Varying). Uma das principais vantagens práticas da abordagem por modelos LPV é que as técnicas de controle, consolidadas na literatura para sistemas LTI podem ser estendidas para casos não lineares. Na literatura são apresentadas duas formas para identificação de modelos LPV: a abordagem local e a abordagem global [KBTB09].

1. **Abordagem local:** na abordagem local, modelos lineares locais, correspondentes a uma série de valores assumidos pela *variável scheduling* são identificados a partir de experimentos realizados para cada um desses valores. Em seguida, a natureza do sistema é recuperada através da interpolação (ou do ajuste de curvas) dos valores dos parâmetros para valores diferentes dos assumidos pela *variável scheduling* para identificação dos modelos locais, por exemplo, por meio de funções polinomiais.
2. **Abordagem global:** A abordagem global consiste em excitar todas as não linearidades do sistema por meio de um único experimento passando por um grande número de valores da

variável scheduling e identificando diretamente as dependências funcionais dos parâmetros sobre o valor da *variável scheduling* baseado nos dados de entrada-saída coletados. No caso de sistemas a parâmetros espacialmente distribuídos, essa é a abordagem mais utilizada. Nesse caso, o modelo LPV é um modelo espaço-dependente indicando a dependência dos seus parâmetros com uma coordenada espacial unidimensional ou multidimensional definida como *variável scheduling*.

Foi visto na seção 3.1 que o SPD pode ser interpretado como um conjunto de subsistemas interconectados que dão origem a uma coleção de representações de entrada e saída em que o primeiro modelo define a condição dinâmica de borda do sistema. Uma outra interpretação do SPD, pode ser dada quando se considera porções diferentes do mesmo. A Figura 3.3 ilustra esquematicamente essa situação. Note que, nesse caso, a mesma entrada, $u(0,k)$, é relacionada com diversas saídas, $y(s_j,k)$, localizadas em diferentes posições ao longo do processo. Considerando a mesma estrutura para todos os modelos locais, é possível então realizar a interpolação (ou ajuste de curva) dos seus parâmetros a fim de se obter uma única representação de entrada-saída capaz de definir o comportamento dinâmico do sistema para qualquer ponto ao longo do mesmo a partir da escolha da *variável scheduling* (aqui denotada por s_ℓ).

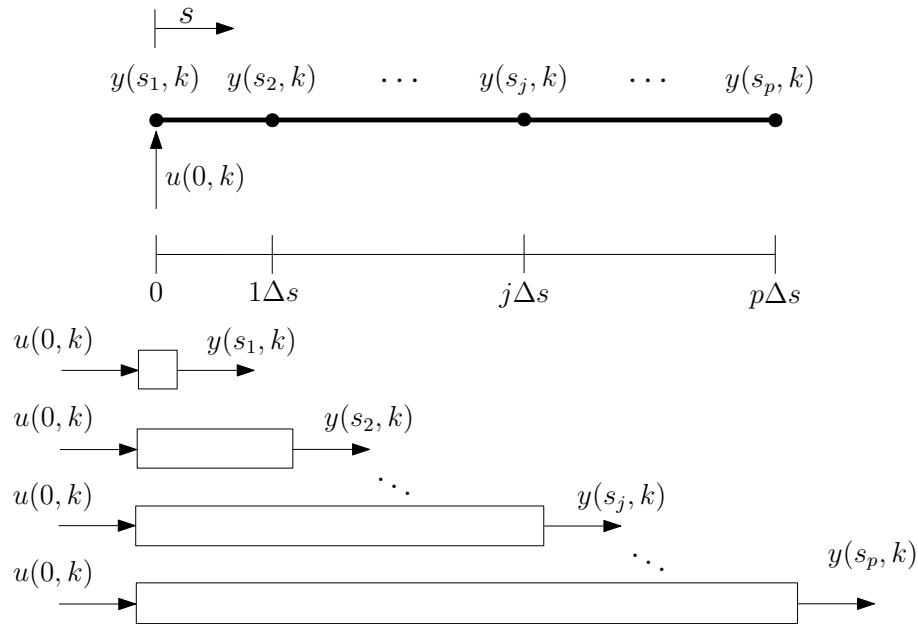


Figura 3.3: Aproximação de SPD por modelos LPV espaço-dependentes.

O modelo que define cada porção do sistema, como indicado acima, pode assumir qualquer estrutura paramétrica linear conveniente desde que os seus parâmetros sejam considerados como funções dependentes da coordenada espacial s_ℓ . Sendo assim, adotando a estrutura ARMAX

polinomial descrita pela equação (2.42) na subseção 2.1.5, tem-se:

$$\begin{aligned}
 y(s_j, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y}(s_j) y(s_j, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u}(s_j) u(s_j, k - i_u) \\
 & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu}(s_j) \nu(s_j, k - i_\nu) + \nu(s_j, k)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Note que o ajuste dos parâmetros correspondentes de cada modelo local só é possível se todos os modelos tiverem a mesma estrutura. Tal característica é uma limitação da abordagem, portanto, é necessário que um modelo com estrutura comum a todas as posições de identificação seja obtido tendo-se um compromisso com a qualidade geral do modelo final. Observe também que, assim como na abordagem por subsistemas interconectados, a estrutura do modelo final é definida em termos do modelo do processo e o modelo do ruído é utilizado para diminuir o efeito da polarização na estimação dos parâmetros.

O método para identificação de modelos LPV espaço-dependentes utilizado neste trabalho, considerando a estrutura ARMAX descrita pela equação (3.3) é descrito pelo Algoritmo 2 a seguir:

Algoritmo 2: Identificação de modelos LPV – abordagem local (Adaptado de [KBTB09])

- 1: Divida espacialmente o SPD em um conjunto de p posições ao longo do espaço, $\mathcal{P} : \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$.
 - 2: Colete um conjunto de medições entrada-saída, sendo a saída medida em cada um das posições s_j , $j = 1, 2, \dots, p$.
 - 3: Identifique p modelos ARMAX de mesma estrutura para cada uma das posições s_j , associando a cada modelo os respectivos valores dos coeficientes $a_{i_y}(s_j)$, $b_{i_u}(s_j)$ e $c_{i_\nu}(s_j)$, $j = 1, \dots, p$, $i_y = 1, \dots, n_y$, $i_u = 1, \dots, n_u$ e $i_\nu = 1, \dots, n_\nu$, conforme (3.3).
 - 4: Obtenha n_y , n_u , n_ν funções (suaves) dependentes do espaço conectando cada família de parâmetros $a_{i_y}(s_j)$, $b_{i_u}(s_j)$ e $c_{i_\nu}(s_j)$, permitindo assim que o valor de cada um desses parâmetros possa ser inferido para qualquer posição do espaço $0 < s_\ell < L$.
-

As variáveis, funções e parâmetros dos modelos LPV são usualmente referidos como *variáveis scheduling*, *funções scheduling* e *parâmetros scheduling*, respectivamente, dando a ideia de que o modelo depende de uma informação externa para ser completamente caracterizado. Possíveis escolhas para definição das *funções scheduling* são: polinômios, funções de base radial, *splines* ou outras combinações lineares de funções suaves da *variável scheduling* [CB02]. A exigência por funções com variação suave parte do princípio da continuidade da variação das propriedades físicas do SPD com relação ao espaço.

A Figura 3.4 ilustra esquematicamente o comportamento do modelo final obtido após a interpolação (ou ajuste de curva) dos parâmetros. Observe que nessa ilustração, a *variável scheduling*, s_j , que define posições específicas para identificação foi substituída pela *variável scheduling*, s_ℓ , que define uma posição arbitrária escolhida entre $0 < s < L$.

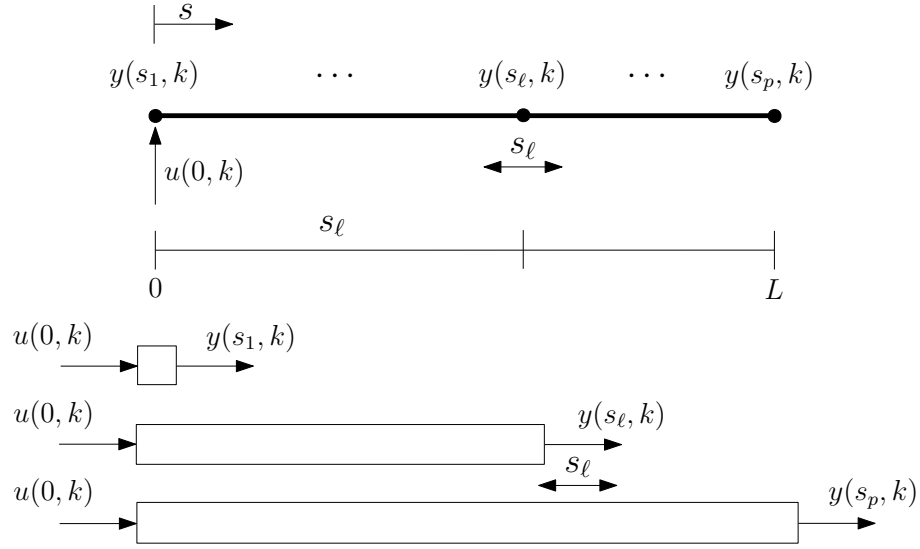


Figura 3.4: Recuperação da natureza espacial contínua do sistema.

3.3 Metodologia de identificação proposta

A metodologia de identificação proposta no presente trabalho, tem como base as duas estratégias descritas anteriormente. Nessa proposta, o sistema de dimensão infinita original é interpretado como sendo dois subsistemas LPV espaço-dependentes, interconectados de forma que a saída do subsistema anterior é admitida como sendo a entrada do subsistema posterior. Sendo assim, o primeiro modelo relaciona a variável de entrada $u(0, k)$, que atua na borda anterior do processo, com a variável de saída $y(s_\ell, k)$, em um ponto intermediário do mesmo e o segundo modelo, admite $y(s_\ell, k)$ como variável de entrada e a relaciona com a variável de saída $y(L, k)$, localizada na borda final do processo.

As *funções scheduling*, que definem os parâmetros do modelo geral ao longo do processo, dependem, respectivamente, das distâncias, s_ℓ , da borda anterior do processo até um ponto intermediário de interesse e, $\bar{s}_\ell = L - s_\ell$, do ponto intermediário de interesse até a borda posterior do processo, como indicado na Figura 3.5. Em outras palavras, os modelos LPV abrangem porções complementares do sistema original à medida que a *variável scheduling*, s_ℓ , é movimentada ao longo do espaço.

Os procedimentos para identificação dos modelos LPV são os mesmos apresentados pelo Algoritmo 2 na subseção 3.2. Para facilitar a notação, tais modelos serão, daqui em diante, referidos como modelo LPV $_{u \times y_i}$ e modelo LPV $_{y_i \times y_o}$, indicando as respectivas relações de entrada e saída dos mesmos. Além disso, os parâmetros dos modelos LPV $_{y_i \times y_o}$ serão representados por letras gregas. Com as devidas modificações em relação às variáveis de entrada e saída consideradas, os modelos LPV são descritos, respectivamente, como:

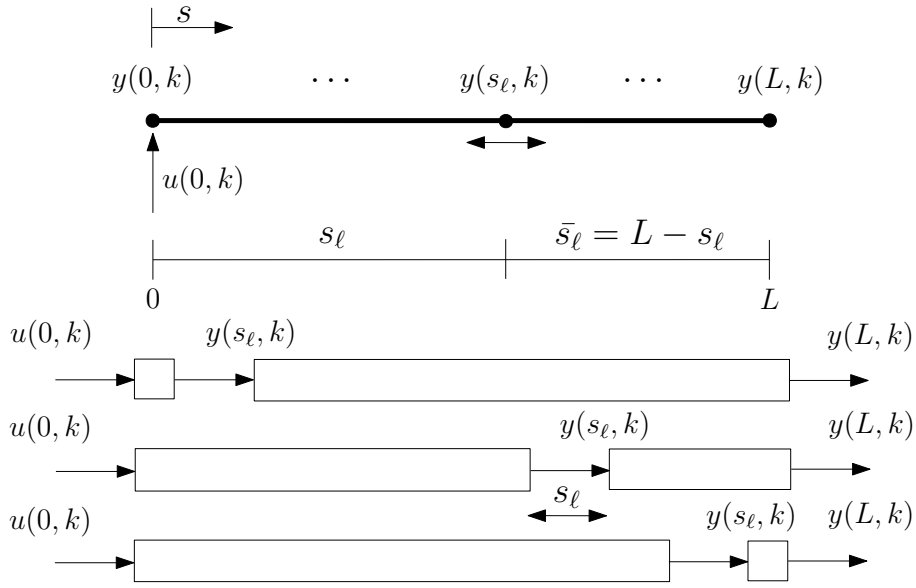


Figura 3.5: Representação esquemática da metodologia de identificação proposta.

$$\begin{aligned}
 y(s_\ell, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y}(s_\ell) y(s_\ell, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u}(s_\ell) u(s_\ell, k - i_u) \\
 & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu}(s_\ell) \nu(s_\ell, k - i_\nu) + \nu(s_\ell, k)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$\begin{aligned}
 y(L, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} \alpha_{i_y}(\bar{s}_\ell) y(L, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} \beta_{i_u}(\bar{s}_\ell) y(s_\ell, k - i_u) \\
 & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} \gamma_{i_\nu}(\bar{s}_\ell) \nu(\bar{s}_\ell, k - i_\nu) + \nu(\bar{s}_\ell, k)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Observe, no entanto, que as representações dos subsistemas permanecem como representações entrada-saída. Contudo, se as duas variáveis de saída, $y_{L,k}$ e $y_{s_\ell,k}$, forem consideradas como variáveis de estado, $x_1(L,k)$ e $x_2(s_\ell,k)$, respectivamente, as funções de transferência do modelo de processo podem ser colocadas na forma de espaço de estados. Uma forma de se alcançar esse resultado é aplicar a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral em cada um dos modelos (3.4) e (3.5) obtendo-se duas funções de transferência que, em seguida, podem ser reescritas na forma canônica observável em um sistema de equações no espaço de estados aumentado. Para concluir o capítulo, na seção a seguir é apresentado um exemplo de como a estratégia desenvolvida é aplicada.

3.4 Exemplo: Estratégia de identificação e observação de estados para monitoramento de SPD.

Suponha que, utilizando a metodologia de identificação proposta anteriormente, foram identificados dois modelos LPV ($\text{LPV}_{u \times y_i}$ e $\text{LPV}_{y_i \times y_o}$) de segunda ordem com ambas as estruturas definidas por $n_y = 2$, $n_u = 2$, $n_\nu = 2$ e $n_k = 1$. Nesse caso, tem-se:

$$\begin{aligned} y(s_\ell, k) = & -a_1(s_\ell)y(s_\ell, k) - a_2(s_\ell)y(s_\ell, k) + b_1(s_\ell)u(0, k) + b_2(s_\ell)u(0, k) \\ & + c_1(s_\ell)\nu(s_\ell, k-1) + c_2(s_\ell)\nu(s_\ell, k-1) + \nu(s_\ell, k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{aligned} y(L, k) = & -\alpha_1(s_\ell)y(L, k) - \alpha_2(s_\ell)y(L, k) + \beta_1(s_\ell)y(s_\ell, k) + \beta_2(\bar{s}_\ell)y(s_\ell, k) \\ & + \gamma_1(\bar{s}_\ell)\nu(\bar{s}_\ell, k-1) + \gamma_2(\bar{s}_\ell)\nu(\bar{s}_\ell, k-1) + \nu(\bar{s}_\ell, k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

cujos modelos de processo são respectivamente:

$$y(s_\ell, k) = -a_1(s_\ell)y(s_\ell, k) - a_2(s_\ell)y(s_\ell, k) + b_1(s_\ell)u(0, k) + b_2(s_\ell)u(0, k) \quad (3.8)$$

e

$$y(L, k) = -\alpha_1(s_\ell)y(L, k) - \alpha_2(s_\ell)y(L, k) + \beta_1(s_\ell)y(s_\ell, k) + \beta_2(\bar{s}_\ell)y(s_\ell, k) \quad (3.9)$$

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral às equações acima chega-se respectivamente a:

$$\frac{y(s_\ell, z)}{u(0, z)} = \frac{b_1(s_\ell)z + b_2(s_\ell)}{z^2 + a_1(s_\ell)z + a_2(s_\ell)} \quad (3.10)$$

e

$$\frac{y(L, z)}{y(s_\ell, z)} = \frac{\beta_1(\bar{s}_\ell)z + \beta_2(\bar{s}_\ell)}{z^2 + \alpha_1(\bar{s}_\ell)z + \alpha_2(\bar{s}_\ell)} \quad (3.11)$$

que reescritas na forma canônica observável [Che99] resultam na seguintes equações nos espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} x_1(s_\ell, k+1) \\ x_2(s_\ell, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2(s_\ell) \\ 1 & -a_1(s_\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_\ell, k) \\ x_2(s_\ell, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(s_\ell) \\ b_2(s_\ell) \end{bmatrix} u(0, k) \quad (3.12)$$

$$y(s_\ell, k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_\ell, k) \\ x_2(s_\ell, k) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e

$$\begin{bmatrix} x_3(L, k+1) \\ x_4(L, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2(\bar{s}_\ell) \\ 1 & -\alpha_1(\bar{s}_\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(L, k) \\ x_4(L, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1(\bar{s}_\ell) \\ \beta_2(\bar{s}_\ell) \end{bmatrix} y(s_\ell, k) \quad (3.14)$$

$$y(L, k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(L, k) \\ x_4(L, k) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Finalmente, sabendo que $y(s_\ell, k) = x_2(s_\ell, k)$, uma equação geral SS-LPV (em que SS se refere a espaço de estados do inglês *State Space*) pode ser determinada como:

$$\begin{bmatrix} x_1(s_\ell, k+1) \\ x_2(s_\ell, k+1) \\ x_3(L, k+1) \\ x_4(L, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2(s_\ell) & 0 & 0 \\ 1 & -a_1(s_\ell) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(\bar{s}_\ell) & 0 & -\alpha_2(\bar{s}_\ell) \\ 0 & \beta_1(\bar{s}_\ell) & 1 & -\alpha_1(\bar{s}_\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_\ell, k) \\ x_2(s_\ell, k) \\ x_3(L, k) \\ x_4(L, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2(s_\ell) \\ b_1(s_\ell) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(0, k) \quad (3.16)$$

$$y(L,k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_\ell, k) \\ x_2(s_\ell, k) \\ x_3(L, k) \\ x_4(L, k) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Uma vez que um modelo no espaço de estados é obtido, um observador de estados do tipo Kalman (como aqueles descritos na seção 2.2) pode ser derivado e utilizado para corrigir as previsões do modelo geral LPV em espaço de estados. Observe que, nesse caso, além do conhecimento de $u_{0,k}$, apenas um sensor precisa ser utilizado para que o observador consiga estimar a variável interna de interesse em qualquer posição ao longo do processo durante a operação normal de funcionamento do sistema, ou seja, após a fase de identificação. Portanto, com essa estratégia, o excesso de sensores utilizados na identificação é reduzido na fase de operação normal do sistema e o problema definido na seção 1.1 deste trabalho tem uma solução viável.

A forma geral da equação do modelo SS-LPV, na notação dos modelos destacados na seção 2.2, para o caso dos sistemas afins nos estados com injeção da saída, considerando que o modelo seja corrompido por ruídos de processo e de medição, é então obtida e pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(s,k), \mathbf{u}(0,k), \theta(s), k) &= \mathcal{A}(\mathbf{y}(s,k), \mathbf{u}(0,k))\mathbf{x}(s,k) + \mathcal{B}(\mathbf{y}(s,k), \mathbf{u}(0,k)) + \mathbf{w}(s,k) \\ h(\mathbf{x}(s,k), \mathbf{u}(0,k), \theta(s), k) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(s,k) \text{ ou } \mathcal{C}(\mathbf{u}(0,k))\mathbf{x}(s,k) + v(k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo que s pode assumir os valores s_ℓ ou $\bar{s}_\ell$ e $\theta(s)$ representa a dependência dos parâmetros com a *variável scheduling* s .

Assumindo que as condições de observabilidade sejam atendidas, a equação (2.58) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s,k+1) &= \mathcal{A}(\theta(s), k)\mathbf{x}(s,k) + \mathcal{B}(\theta(s), k) + \mathbf{w}(s,k) \\ \mathbf{y}(L,k) &= \mathcal{C}(s,k)\mathbf{x}(s,k) + v(k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

e um observador de Kalman clássico pode ser implementado como:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s,k) &= P(s,k)\mathcal{C}(s,k)^T(\mathcal{C}(s,k)P(s,k)\mathcal{C}(s,k)^T + R)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(s,k+1) &= \mathcal{A}(\theta(s), k)(\hat{\mathbf{x}}(s,k) - \mathcal{K}(s,k)(\mathcal{C}(s,k)\hat{\mathbf{x}}(s,k) - y(s,k))) + \mathcal{B}(\theta(s), k) \\ P(s,k+1) &= \mathcal{A}(\theta(s), k)(P(s,k) - \mathcal{K}(s,k)\mathcal{C}(s,k)P(s,k))\mathcal{A}(\theta(s), k)^T + Q(s) \end{aligned} \quad (3.20)$$

em que $\mathcal{K}(s,k)$ é o vetor de ganhos do observador, $P(s,k)$ é a matriz de covariância dos erros de estimação, $Q(s)$ é matriz de covariância do ruído de processo e R é a matriz de covariância do ruído de medição.

A matriz de covariância $Q(s)$ pode ser definida a partir das estimativas do erro de processo obtidas na etapa de identificação dos modelos locais (veja o Algoritmo 1 e os passos 3 e 4 do Algoritmo 2). Nesse caso, são obtidas *funções scheduling* a partir da covariância dos vetores de ruído de processo para cada conjunto de modelos LTI. Para explicar melhor, considere o exemplo dado acima para modelos LPV de segunda ordem e assumamos, respectivamente, os modelos de ruído de processo nas equações (3.6) e (3.7), reescritos a seguir como $e_1(s_\ell, k)$ e $e_2(\bar{s}_\ell, k)$:

$$e_1(s_\ell, k) = c_1(s_\ell)\nu(s_\ell, k-1) + c_2(s_\ell)\nu(s_\ell, k-2) + \nu(s_\ell, k) \quad (3.21)$$

e

$$e_2(\bar{s}_\ell, k) = \gamma_1(\bar{s}_\ell)\nu(\bar{s}_\ell, k-1) + \gamma_2(\bar{s}_\ell)\nu(\bar{s}_\ell, k-2) + \nu(\bar{s}_\ell, k) \quad (3.22)$$

Para um conjunto de realizações dessas duas equações obtém-se, respectivamente, $\mathbf{e}_1(s_\ell)$ e $\mathbf{e}_2(\bar{s}_\ell)$ e, finalmente, a matriz de covariância $Q(s)$ é dada por:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{e}_1}^2(s_\ell) & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathbf{e}_2}^2(\bar{s}_\ell) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Note que a matriz de covariância do ruído de medição também pode ser obtida na identificação dos modelos locais considerando a variância do ruído dos sensores utilizados na discretização espacial do sistema. Assumindo, portanto, o pior caso entre os sensores, ou seja, aquele que apresenta maior incerteza nas medições, o ruído de medição, $v(k)$, pode ser considerado sob várias realizações a fim de se obter $\mathbf{v}$. Sendo assim, a matriz de covariância R pode ser definida como:

$$R = \sigma_{\mathbf{v}}^2 \quad (3.24)$$

Deve ficar claro que $v(k) \neq \nu(s,k) \neq \gamma(s,k)$. O primeiro é um ruído de medição atribuído aos sensores e os dois últimos são ruídos branco utilizados na determinação do modelo do ruído de processo (veja a subseção 2.1.5).

Estudo de caso: monitoramento de temperatura de um forno

Neste capítulo a metodologia de identificação proposta para fins de monitoramento, apresentada no capítulo 3, é aplicada a um sistema térmico distribuído em que ocorre o aquecimento de um fluxo de ar que circula através de um tubo. São obtidos modelos SS-LPV considerando 9, 5 e 3 posições de medição para obtenção de *funções scheduling*. É mostrado que, para recuperar a natureza espaço-dependente do sistema e caracterizar o comportamento dinâmico da variável de interesse a ser monitorada, no caso, a temperatura do ar em uma posição desejada do sistema, o modelo obtido com apenas 3 posições de medição para criação de *funções scheduling* é suficiente para que os erros das estimativas fiquem aproximadamente iguais ao erro dos medidores. Os modelos obtidos são utilizados no projeto de observadores do tipo Kalman. Especificamente são considerados o observador de Kalman clássico e o observador exponencial com fator de esquecimento. Ensaios experimentais são realizados e os estados estimados pelos observadores são comparados com os valores reais medidos no sistema. Também são realizadas comparações entre as previsões dos modelos e entre os observadores. É mostrado que o papel do observador é fundamental para a técnica proposta devido à sua propriedade de correção e possibilidade de acrescentar informações extras, tais como, estimação em tempo real de e parâmetros e distúrbios, à dinâmica do modelo diminuindo o efeito de polarização.

4.1 Descrição do sistema

Para validação da proposta de identificação e monitoramento de SPD desenvolvida no presente trabalho, a metodologia definida no Capítulo 3 foi aplicada a uma protótipo que reproduz o escoamento forçado de um fluido em um tubo com condição de borda dinâmica. O fluido transportado através do sistema é o ar e a condição de borda variável se dá pelo aquecimento do mesmo através da potência térmica dissipada por um resistor de aquecimento localizado na entrada do tubo.

O equipamento em questão é interessante porque reproduz comportamentos dinâmicos típicos de processos industriais que envolvem transporte de massa e/ou energia, tais como os encontrados em fornos de reaquecimento em processos de laminação, fornos rotativos e res-

friadores de Clínquer na produção de cimento, reatores na indústria química e sistemas de refrigeração e aquecimento, dentre outros.

O protótipo, referido daqui em diante como forno, foi proposto por [Sa09]. O sistema, apresentado na Figura 4.1, é constituído por um tubo em acrílico por onde o ar escoa de forma forçada, insuflado por um ventilador axial; três resistências elétricas de aquecimento posicionadas em seções distintas da planta; uma válvula de restrição do fluxo de ar e dez sensores de temperatura (termopares tipo K) que podem ser distribuídos em posições aleatórias do sistema. O equipamento conta também com três transdutores de corrente (um para cada atuador) destinados ao monitoramento do consumo de energia, geralmente utilizados como parâmetro de comparação entre estratégias de controle.



Figura 4.1: Sistema real (Forno).

A comunicação com o protótipo é realizada através de um sistema supervisório com acesso remoto via Web desenvolvido em *LabVIEW*[®], em que o fluxo de informações é gerenciado por um banco de dados MySQL. O sistema como um todo faz parte de uma estrutura geral, inserida em um contexto conhecido como WebLab, e foi desenvolvido em [Bar14] com a finalidade de permitir acesso remoto ao forno para realização de experimentos de identificação e controle.

Para melhor visualização, o desenho esquemático do sistema é apresentado na Figura 4.2. No presente trabalho considera-se apenas uma seção da planta (destacada na Figura 4.2). Além disso, considera-se que o ar seja insuflado pelo ventilador axial a velocidade constante, a válvula de restrição de ar (*Damper*) é mantida totalmente aberta e o atuador, utilizado para variar a temperatura do ar a partir do início da seção escolhida, é o resistor 2.

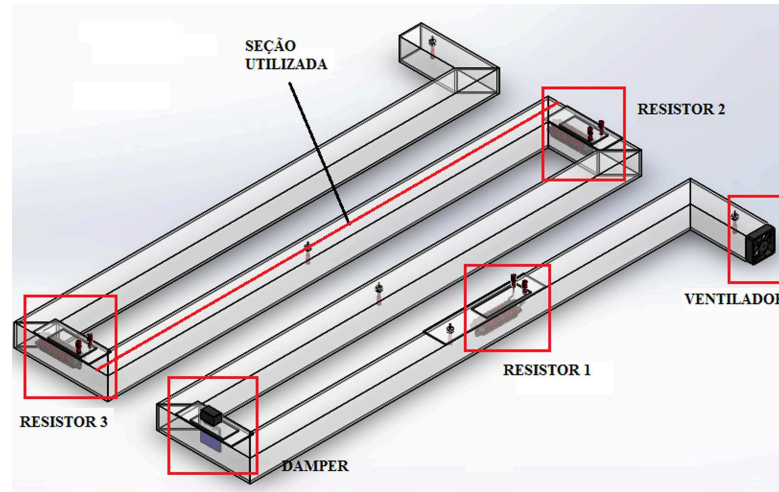


Figura 4.2: Desenho esquemático do forno com destaque para os componentes principais.

A configuração utilizada neste trabalho é representada no esquema da Figura 4.3. Considera-se portanto um tubo em acrílico cujas paredes possuem espessura de $5mm$, com $2500mm$ de comprimento e seção transversal quadrada com dimensões de $100mm \times 100mm$ através do qual a circulação de ar é forçada por um ventilador axial localizado em uma de suas extremidades funcionando a velocidade constante. A temperatura do ar que entra no sistema é mantida aproximadamente constante para cada experimento. Ao entrar no tubo o ar é aquecido por uma resistor de aquecimento cuja potência dissipada pode ser variada para controlar a temperatura do ar que passa por ela. Portanto, o objetivo principal do experimento é o monitoramento adequado da temperatura, $y(s_\ell, k)$, do ar que escoar através do processo ao longo do comprimento útil do tubo, isto é, em pontos $0 < s_\ell < L$ ($L = 1400mm$) a partir do conhecimento do sinal de entrada, $u(0, k)$, dado em termos de porcentagem da potência elétrica máxima aplicada à resistência de aquecimento, e da medição da temperatura, $y(L, k)$, na saída do tubo, para instante de amostragem, $k > 0$.

4.1.1 Calibração dos sensores

Como a metodologia de identificação proposta é baseada em dados medidos no protótipo, uma das etapas mais importantes na preparação do sistema é a calibração dos sensores utilizados. Como é desejável perceber as diferenças na medição da temperatura de um ponto do espaço para outro, é necessário que se conheça a precisão de cada medidor. Tal precisão depende principalmente do tipo de sensor e da faixa de operação que se deseja trabalhar. Sendo assim, uma boa prática é realizar a calibração para a faixa de trabalho de interesse. Outro ponto interessante é realizar a calibração simultânea de todos os sensores em um único experimento

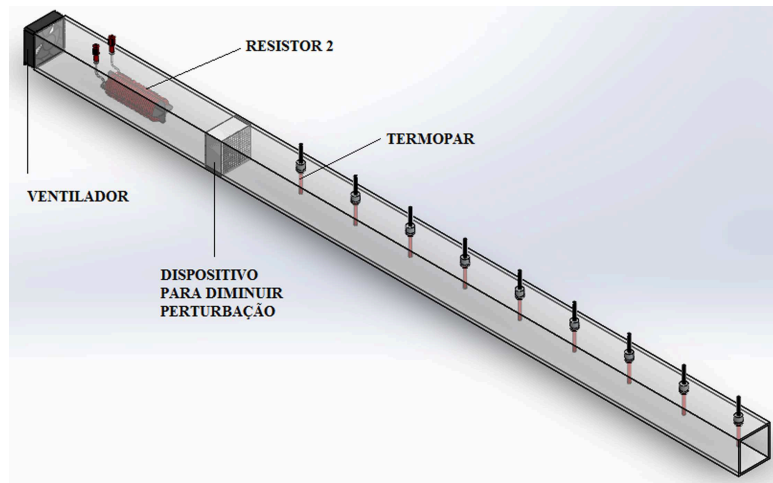


Figura 4.3: Representação esquemática do sistema na configuração escolhida.

para maior uniformidade do experimento de calibração.

Como mencionado anteriormente, neste trabalho foram utilizados sensores termopares tipo *K*. Esse tipo de sensor é ideal para medição de temperatura em meios gasosos e sua faixa de trabalho varia de -20°C a 1372°C . Quando o sensor é calibrado para uma faixa de trabalho tão grande quanto essa, a precisão do mesmo pode ser comprometida. O sinal de temperatura medido pelos sensores utilizados neste trabalho são condicionados por um circuito digital baseado no CI MAX31856 que retorna as medições diretamente em $^{\circ}\text{C}$ com resolução menor que $0,01^{\circ}\text{C}$. Tal dispositivo possui compensação de junta fria e tabela de correção de linearidade. Sendo assim, o circuito completo é pré-calibrado de fábrica, necessitando apenas de uma correção para a faixa de trabalho de interesse.

Foram utilizados dez sensores termopares sendo que um deles é destinado ao monitoramento da temperatura ambiente. Como a faixa de trabalho do forno para a configuração considerada é de aproximadamente 25°C a 100°C , os sensores foram recalibrados para essa variação. Para a calibração foi utilizado um banho térmico cuja temperatura é controlada, permitindo que a temperatura seja regulada em patamares. Como referência, foi utilizado um instrumento padrão calibrado. O gráfico da Figura 4.4(a) apresenta os patamares obtidos no experimento de calibração dos dez sensores e a Figura 4.4(b) apresenta a curva de validação para o pior caso. São apresentadas a curva de temperatura do instrumento de referência (T_{ref}), a curva de temperatura do termopar 2 antes da calibração (T_2 , pior caso) e a curva de temperatura do termopar 2 ajustada à referência.

As curvas de calibração foram ajustadas utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados (MQP – Ver subseção 2.1.3) cujos pesos são dados pelo inverso da variância entre as medições dos sensores em cada patamar. Como os sensores são pré-calibrados, foi realizada apenas a calibração estática dos mesmos considerando 300 pontos em cada patamar. O procedimento de calibração assim como a formulação para o cálculo dos intervalos de confiança são descritos em [Doe90]. Os coeficientes da equação de calibração, $T(T_i) = aT_i + b$, em que T_i é a temperatura medida pelo termopar não calibrado e, $T(T_i)$, é a função de calibração, são indicados na Tabela 4.1. Verifica-se que a maior variação de temperatura é de $\pm 0,3^{\circ}\text{C}$ para

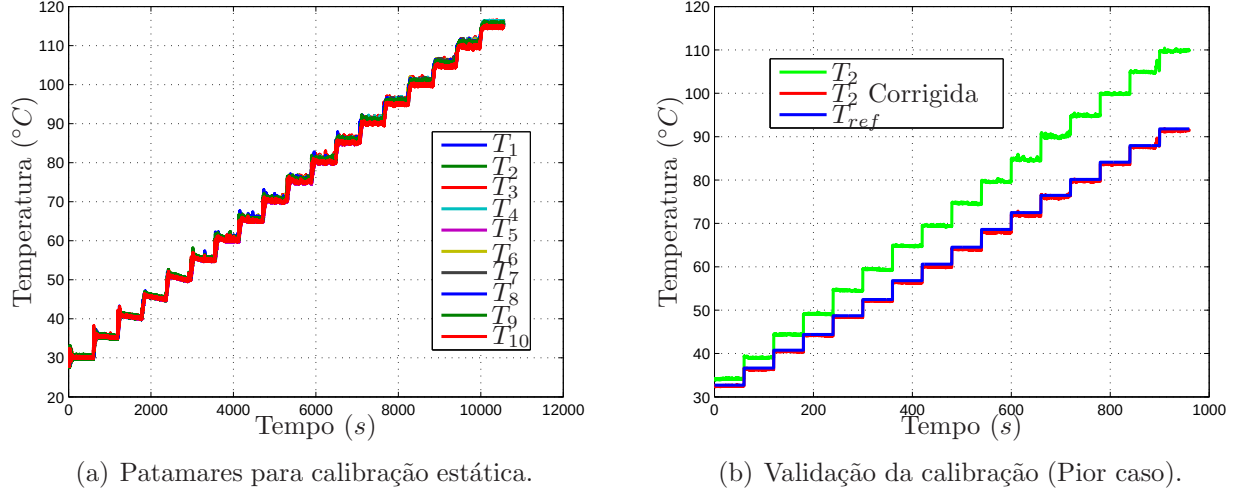


Figura 4.4: Calibração dos sensores de temperatura.

um intervalo de confiança de 99,7%, isto é, tomando-se $\pm 3\sigma_a$ e $\pm 3\sigma_b$. Esse resultado será utilizado como parâmetros de comparação para o erro estimado na validação dos modelos e dos observadores nos desenvolvimentos a seguir.

Tabela 4.1: Resultados da calibração dos sensores de temperatura — $T(T_i) = aT_i + b$.

Termopar	Coeficiente a	Coeficiente b	Variação (°C)
T_1	0,7785	5,9150	$\pm 0,2$
T_2	0,7779	5,9643	$\pm 0,3$
T_3	0,7748	5,6309	$\pm 0,2$
T_4	0,7744	5,7348	$\pm 0,2$
T_5	0,7808	5,7007	$\pm 0,2$
T_6	0,7803	5,5333	$\pm 0,2$
T_7	0,7765	5,7169	$\pm 0,2$
T_8	0,7797	5,5319	$\pm 0,2$
T_9	0,7789	5,4392	$\pm 0,2$
T_{10}	0,7839	5,6048	$\pm 0,1$

4.2 Identificação do modelo SS-LPV

Seguindo a metodologia de identificação apresentada na seção 3.3, o comprimento útil do SPD, distância entre a borda de controle $s_1 = 0mm$ e a borda de medição da temperatura, $s_9 = 1400mm$, foi dividido em oito segmentos utilizando-se nove sensores de temperatura (termopares tipo K) igualmente espaçados com intervalos, $\Delta s = 175mm$, obtendo-se nove posições de medição, $p = 9$, de acordo com o passo 1 do Algoritmo 2 (Ver seção 3.2). Isso é ilustrado na Figura 4.5 a seguir.

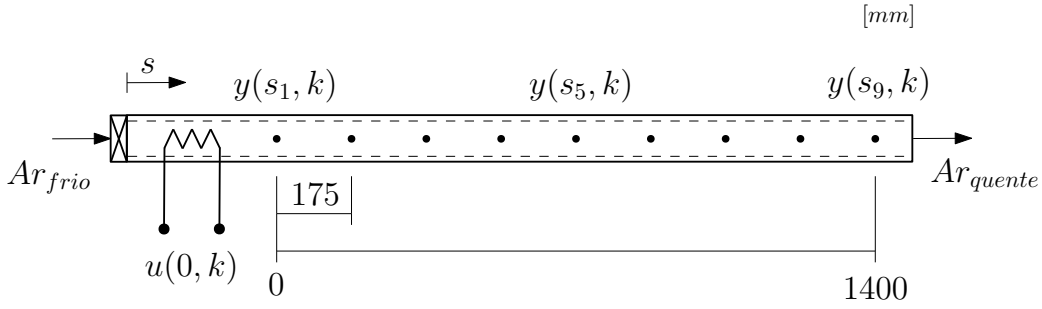


Figura 4.5: Representação esquemática do sistema na configuração escolhida.

4.2.1 Testes dinâmicos e coleta de dados

De acordo com o passo 2 do Algoritmo 2 (Ver seção 3.2), com o objetivo de coletar dados para identificação e validação dos modelos foi realizado um teste para excitar as dinâmicas do sistema. Para tanto, foi aplicado à entrada $u(0, k)$ um sinal de excitação binário pseudo-aleatório (PRBS do inglês *Pseudo Random Binary Signal*). Em particular, foi utilizado um tipo de sinal PRBS conhecido como sequência de comprimento máximo ou sinal de sequência m . Em geral, os sinais PRBS são bastante populares pela facilidade de serem gerados. A fim de gerar um sinal de sequência m , por exemplo, é necessário executar a operação OU-Exclusivo em alguns bits de um registrador de deslocamento. A Figura 4.6 ilustra esquematicamente um circuito gerador de sinais PRBS.

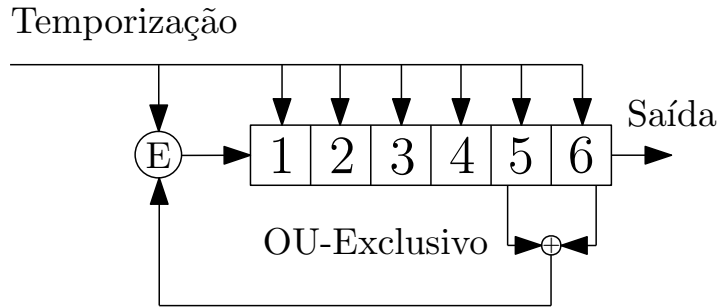


Figura 4.6: Circuito para gerar sinais PRBS (Retirado de [Agu07]).

Sinais PRBS possuem as seguintes características: 1) assumem apenas dois níveis possíveis, $+V$ e $-V$; 2) qualquer mudança de valor só pode ocorrer em instantes bem definidos $t = 0, T_b, 2T_b, \dots$, em que T_b denota o tempo entre bits; 3) os sinais são periódicos com período $T = NT_b$, sendo $N = 2^n - 1$ um número ímpar e n o número de bits do registrador de deslocamento; 4) ao longo de um período, existem $(N + 1)/2$ intervalos em um nível binário e $(N - 1)/2$ intervalos no outro nível. A fim de gerar sinais que possam ser usados com sucesso, é importante projetar adequadamente as variáveis envolvidas, V , n e T_b . Um ponto importante a ser notado é que são poucas as combinações que resultam em sinais de sequência m , tais combinações são resumidas na Tabela 4.2.

Segundo [Agu07], a escolha de $+V$ e $-V$ é normalmente limitada pela máxima excursão permitida ao sinal de excitação do processo, sem comprometer o seu funcionamento adequado nem, tampouco, levar o sistema a operar em outra faixa linear. O sinal PRBS será somado ao

Tabela 4.2: Conexões para gerar sinais de sequência m [Agu07].

n	$N = 2^n - 1$	bits utilizados
2	3	1 e 2
3	7	2 e 3
4	15	3 e 4
5	31	3 e 5
6	63	5 e 6
7	127	4 e 7
8	255	2, 3, 4 e 8
9	511	5 e 9
10	1023	7 e 10
11	2047	9 e 11

sinal de entrada do processo a partir do início da coleta de dados para identificação, ou seja, a partir do instante que o sistema atinge o ponto de equilíbrio, ou ponto de operação desejado. O número de bits, n , juntamente com o intervalo entre bits, T_b , determinam a periodicidade do sinal gerado.

Um aspecto importante e intuitivo é que a periodicidade não deve ser menor que o tempo de acomodação do sinal que está sendo testado, caso contrário, o sistema “perceberá” a periodicidade do sinal PRBS reduzindo o caráter aleatório do mesmo, o que não ocorre quando o período é suficientemente grande. Finalmente, o intervalo entre bits, T_b , deve ser compatível com a menor constante de tempo de interesse. Se T_b for muito grande, o sistema responde ao sinal PRBS como um degrau, ou seja, um sinal de características pobres para a maioria dos métodos de identificação. Por outro lado, se T_b for curto, o sistema não terá tempo de responder a uma transição antes da chegada da próxima. Um resultado heurístico que normalmente fornece bons resultados sugere que T_b seja escolhido de acordo com o intervalo a seguir [Agu07]:

$$\frac{\tau_{\min}}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau_{\min}}{3} \quad (4.1)$$

em que $\tau_{\min}$ é a menor constante de tempo de interesse. Na identificação de sistemas lineares, é comum escolher T_b mais perto do limite inferior, ao passo que para sistemas não-lineares bons resultados são normalmente obtidos tomando-se T_b mais perto do limite superior. Normalmente, $\tau_{\min}$ não é conhecido *a priori*, porém, essa informação pode ser facilmente obtida a partir da resposta ao degrau. No geral, um ponto importante a ser observado na prática é que os patamares do sinal PRBS devem ser suficientemente longos para dar tempo do sistema responder, porém, de ver suficientemente curto para que o sistema não atinja o regime permanente.

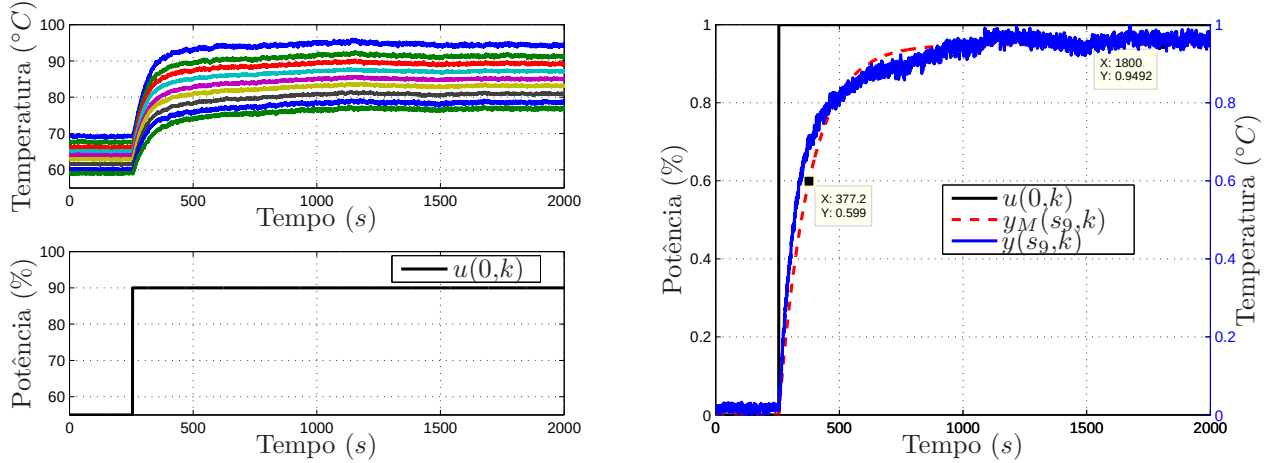
Com o objetivo de projetar um sinal PRBS para ser aplicado ao forno foi realizado um teste preliminar consistindo na aplicação de uma sequência crescente de degraus à entrada $u(0,k)$ do sistema. Através desse teste, foi possível verificar por meio das medições dos termopares como o sistema se comportava para diferentes faixas de operação. Foi visto que a cada degrau aplicado, o gradiente de temperatura aumentava ficando mais evidente as diferenças entre as temperatura de cada ponto do espaço. Foi escolhida então a região de operação na qual tais diferenças eram maiores. Isso foi feito para que fosse possível perceber melhor a variação da temperatura em

relação ao ponto de medição. O ponto de operação escolhido foi $u(0,k) = 80\%$ e, dessa forma, os valores de $+V$ e $-V$ foram definidos como sendo uma variação de $\pm 12,5\%$ desse valor, ou seja, $+V = 90\%$ e $-V = 70\%$. Essa variação na entrada foi feita com a intenção de manter o sistema operando em uma faixa linear.

A Figura 4.7(a) apresenta os perfis de temperaturas obtidos ao ser aplicado um degrau variando-se a potência de entrada de 55% para 90%, englobando portanto, o ponto de operação escolhido. A curva mais acima corresponde à temperatura, $y(s_1,k)$, medida pelo termopar localizado mais próximo do resistor de aquecimento. Note que a temperatura é gradativamente menor à medida que os pontos de medição se afastam da fonte de calor, sendo assim, as demais curvas se referem, respectivamente, às medições $y(s_2,k)$; $y(s_3,k)$; $\dots$; $y(s_9,k)$.

Tomando-se as respostas medidas pelos termopares foi realizado um segundo teste. Nesse caso, o interesse era estimar o valor da constante de tempo das respostas medidas em cada ponto do espaço a fim de definir o valor do tempo entre bits T_b . Para isso, utilizando-se a ferramenta *Process Models* do *toolbox* de identificação de sistemas do *MATLAB*[®] (*System Identification Tool*) cada uma das respostas foi aproximada por um modelo de primeira ordem com ganho K e constante de tempo τ . Com esse procedimento, foram obtidos nove valores de constante de tempo.

A Figura 4.7(b) mostra o resultado da aproximação realizada para o último sensor, já os valores das constantes de tempo para todos os pontos são indicados na Tabela 4.3. Como o objetivo da aproximação é estimar τ para projetar T_b , os valores de K não são importantes e, portanto, não são apresentados.



(a) Resposta do sistema a um degrau (Potência = 55% – 90%). (b) Aproximação da resposta ao degrau por um modelo de 1º ordem.

Figura 4.7: Experimento para projeto do sinal PRBS (Estimação da constante de tempo).

Vale a pena mencionar que o objetivo do procedimento descrito acima era apenas ter uma estimativa do valor da constante de tempo a ser utilizada para o projeto do parâmetro T_b do sinal PRBS, sendo assim, um procedimento prático válido. Como era de se esperar, o valor de τ aumenta à medida que o ponto de medição se afasta do atuador, dessa maneira, foi tomada como referência a maior delas, ou seja, $\tau = 122,35s$. Levando-se em consideração a heurística

Tabela 4.3: Constantes de tempo estimadas utilizando um modelo de 1º ordem.

Posição no espaço	Distância (mm)	Constante de tempo (s)
s_1	0	65,67
s_2	175	67,42
s_3	350	71,59
s_4	525	75,53
s_5	700	87,19
s_6	875	88,52
s_7	1050	100,26
s_8	1225	107,77
s_9	1400	122,35

(4.1), esse valor foi dividido por três, obtendo-se o valor aproximado $T_b = 40s$. Por último, utilizando-se um registrador de deslocamento de sete bits ($n = 7$), foi obtido um sinal PRBS com período $N = 127$, que multiplicado pelo tempo entre bits, T_b , gerou um sinal PRBS com tempo total de $5080s$. É importante lembrar que um tempo suficiente deve ser respeitado para que o ponto de equilíbrio seja alcançado antes da aplicação do sinal PRBS.

Uma vez projetado, o sinal PRBS foi aplicado à entrada $u(0,k)$ do sistema e as respostas foram medidas em cada ponto. A Figura 4.8 mostra o sinal projetado (parte inferior) e as respostas (parte superior) para os termopares localizados em pontos ímpares. Novamente, a curva mais acima corresponde à temperatura, $y(s_1,k)$, medida pelo termopar localizado mais próximo do resistor de aquecimento, seguidas pelas medições $y(s_3,k)$; $y(s_5,k)$; $y(s_7,k)$ e $y(s_9,k)$. Note que a janela de tempo de $5080s$ refere-se ao intervalo em que o sinal PRBS foi de fato aplicado.

A fim de verificar a repetibilidade do teste para aquisição de dados e, conseqüentemente, do comportamento dos parâmetros dos modelos locais ao longo do sistema, foram realizados dez experimentos sob as mesmas condições de operação, ou seja, temperatura ambiente, ponto de equilíbrio, sinal de entrada e variação do sinal de entrada. Com a finalidade de validar os modelos obtidos, os sinais foram divididos uma parte para identificação e a outra parte para validação dos modelos. Os sinais foram coletados utilizando uma tempo de amostragem de $0,2s$ e em seguida, foram reamostrados para $5s$. O fator para decimação do sinal foi estimado por meio do cálculo da auto-correlação do sinal de saída (A descrição do processo de decimação pode ser encontrada em [Agu07]).

4.2.2 Determinação de estruturas

De posse dos dados de entrada-saída obtidos na etapa de testes dinâmicos e coleta de dados, deu-se início ao passo 3 do Algoritmo 2 (Ver seção 3.2) em que a partir de uma representação matemática obtém-se um conjunto de modelos locais. Como já especificado, neste trabalho utiliza-se a representação matemática, linear e discreta no tempo, ARMAX polinomial (Ver subseção 2.1.2). Como visto na subseção 2.1.3 a estrutura geral dessa representação pode ser

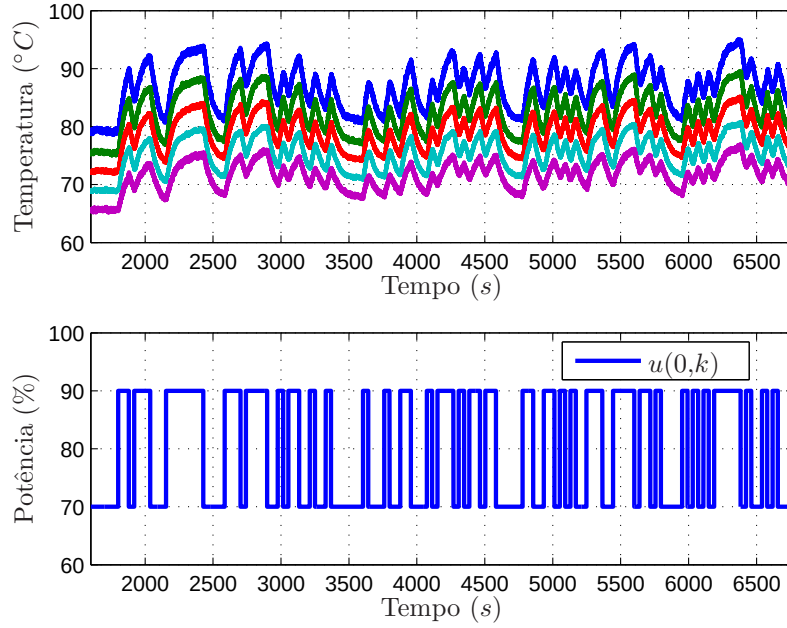


Figura 4.8: Dados coletados do experimento 1 de 10 (sensores ímpares).

escrita na forma de equações a diferenças como:

$$y(k) = - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y} y(k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u} u(k - i_u) + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu} \nu(k - i_\nu) + \nu(k) \quad (4.2)$$

em que n_y , n_u , n_ν e n_k definem, respectivamente, as ordens dos termos de saída, entrada, ruído de processo e atrasos entre entrada e saída. Como é possível notar, tal estrutura é formada por um conjunto de termos candidatos. Esses termos devem ser adequadamente especificados através da etapa de determinação da estrutura do modelo. Em se tratando de uma representação linear, a escolha dos termos equivale à definição do número de polos e zeros do modelo.

Conforme discutido na seção 3.3 a estratégia de identificação proposta neste trabalho consiste na obtenção de dois modelos LPV espaço-dependentes complementares e interconectados, denotados por $\text{LPV}_{u \times y_i}$ e $\text{LPV}_{y_i \times y_o}$, indicando as relações de entrada-saída de cada um. Sendo assim, o primeiro modelo, $\text{LPV}_{u \times y_i}$, relaciona o sinal de entrada, $u(0,k)$, definido como sendo a porcentagem da potência aplicada à resistência de aquecimento e, $y(s_j,k)$ com a temperatura medida em um ponto intermediário do processo e o segundo modelo, $\text{LPV}_{y_i \times y_o}$, relaciona essa última com a temperatura medida na saída do mesmo, $y(L,k)$.

Como o comprimento útil do forno foi dividido em oito segmentos (utilizando-se nove sensores de temperatura) para obtenção dos modelos LPV, seguindo o passo 3 do Algoritmo 2 (Ver seção 3.2), foram identificados um conjunto de nove modelos do tipo $\text{LPV}_{u \times y_i}(s_j)$ e outro conjunto de oito modelos do tipo $\text{LPV}_{y_i \times y_o}(s_j)$. Portanto, reescrevendo o modelo (4.2) em função dos locais

definidos para identificação tem-se:

$$\begin{aligned} y(s_j, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y}(s_j) y(s_j, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u}(s_j) u(s_j, k - i_u) \\ & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu}(s_j) \nu(s_j, k - i_\nu) + \nu(s_j, k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} y(L, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} \alpha_{i_y}(s_j) y(L, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} \beta_{i_u}(s_j) y(s_j, k - i_u) \\ & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} \gamma_{i_\nu}(s_j) \nu(s_j, k - i_\nu) + \nu(s_j, k) \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que as letras gregas α , β e γ são utilizadas para diferenciar os parâmetros dos modelos do tipo $\text{LPV}_{u \times y_i}(s_j)$ e $\text{LPV}_{y_i \times y_o}(s_j)$.

4.2.3 Validação dos modelos LPV

Para avaliação da qualidade dos modelos LPV, em se tratando de modelos lineares, usualmente, dois índices são utilizados. O primeiro deles é conhecido como critério de informação e fornece uma medida da importância de cada termo inserido no modelo. O segundo é usado para avaliar o desempenho dos modelos em relação às suas previsões. Neste trabalho, para auxiliar na determinação da estrutura dos modelos, foram utilizados o critério de informação do erro final de predição (FPE do inglês *Final Prediction Error*) em conjunto com o índice de desempenho erro médio quadrático normalizado (NRMSE do inglês *Normalized Root Mean Square Error*).

O critério de informação FPE é definido como:

$$FPE(n_\theta) = N \ln[\sigma_e^2(n_\theta)] + N \ln \left[\frac{N + n_\theta}{N - n_\theta} \right] \quad (4.5)$$

em que N é o número de medições, σ_e^2 é a variância do erro de modelagem (resíduos) e n_θ é o número de parâmetros do modelo. Essa equação quantifica a redução da variância dos resíduos resultante da inclusão de um novo termo, ao mesmo tempo em que penaliza a inclusão de cada um deles. Quanto menor é o valor do FPE melhor é a estrutura correspondente (Para mais detalhes veja [Aka74]).

O índice NRMSE é dado por:

$$NRMSE = 100 \times \left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \right) \quad (4.6)$$

e compara a predição do modelo com a média temporal do sinal, em que a média é usada como preditor trivial [Agu07]. O índice NRMSE é, portanto, um índice relativo que toma a média da janela de dados como referência para comparar o desempenho de diversas estruturas de modelos

para os mesmo conjunto de dados de validação. Quanto mais próximo de 100% for o valor do índice NRMSE melhor o modelo se ajusta aos dados na simulação livre. Note que nada previne que o valor do índice NRMSE seja negativo ou zero. O índice NRMSE negativo indica um desempenho muito ruim do modelo e seu valor nulo indica que o modelo não é melhor que a média do sinal medido [Dan13].

Com o objetivo de determinar as estruturas dos modelos, foram analisadas diversas combinações variando-se o valor dos termos das representações ARMAX polinomiais. As variações foram realizadas da seguinte forma: n_y de 1 a 3; n_u de 1 a 3; n_v de 1 a 2 e n_k de 0 a 1. A faixa de variação dos termos n_y e n_u , que definem o número de pólos e zeros dos modelos de processo foram definidos nessa faixa de forma que o modelo final obtido fosse de baixa ordem. Neste caso, como o modelo final é construído a partir da interconexão de dois modelos, a sua ordem é igual à soma das ordens de tais modelos. Por exemplo, dois modelos de ordem 3 interconectados geram um modelo de ordem 6.

As faixas de variação dos termos n_v e n_k foram definidas a partir de testes preliminares que mostraram que o desempenho dos modelos para uma faixa maior que a apresentada resultavam em pior desempenho, isto é, índices NRMSE com valores mais baixos e/ou FPE com valores mais elevados. Após a definição da faixa de variação dos termos das representações ARMAX polinomiais, foi escolhido aleatoriamente um dos dez ensaios realizados para coleta de dados e três pontos do espaço para análise das estruturas. O pontos escolhidos para os testes foram: $s_2 = 175mm$, $s_5 = 700mm$ e $s_8 = 1225mm$, ou seja, um ponto no início, um ponto no meio e um ponto no final do comprimento do sistema. Nesse teste, utilizando a ferramenta *Polynomial Models* e a estrutura ARMAX do *toolbox* de identificação de sistemas do *MATLAB®* (*System Identification Tool*), foram estimados os parâmetros de cada estrutura e calculados os índices FPE e NRMSE.

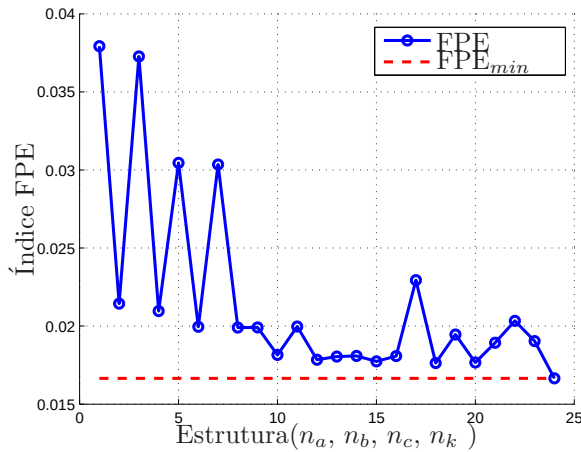
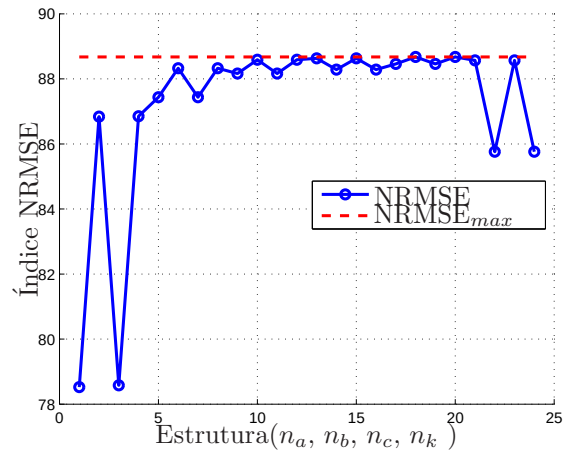
O conceito de estimação de parâmetros do *toolbox* de identificação é o mesmo do estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ) apresentado na subseção 2.1.3 em que os termos do modelo do ruído do processo são incluídos na matriz de regressores e o seus parâmetros são estimados juntamente com os parâmetros do modelo do processo. A Tabela 4.4 mostra como os termos dos modelos ARMAX polinomiais foram gradativamente inseridos, de acordo com os intervalos definidos para n_y , n_u , n_v e n_k , citados anteriormente.

Nos gráficos apresentados nas Figuras 4.9 e 4.10 é possível observar como os índices FPE e NRMSE se comportam de acordo com cada estrutura, para o ponto s_2 . A Figura 4.9, é referente aos modelos $LPV_{u \times y_i}(s_j)$ e a Figura 4.10 aos modelos $LPV_{y_i \times y_o}(s_j)$. Com o auxílio de tais gráficos foi possível selecionar as estruturas com melhor desempenho em relação aos índices, ou seja, com menor valor FPE e maior valor NRMSE (Os gráficos referentes aos pontos s_5 e s_8 são encontrados no apêndice B).

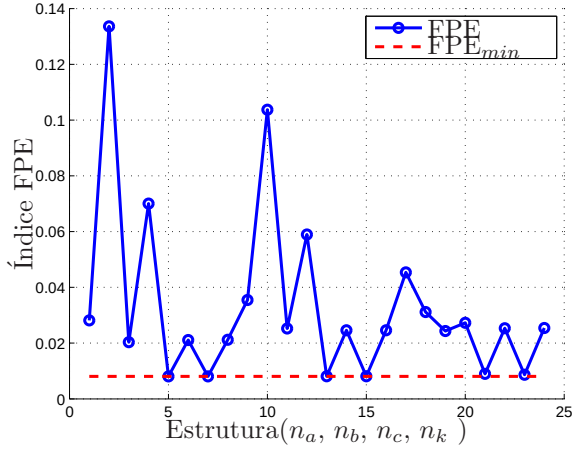
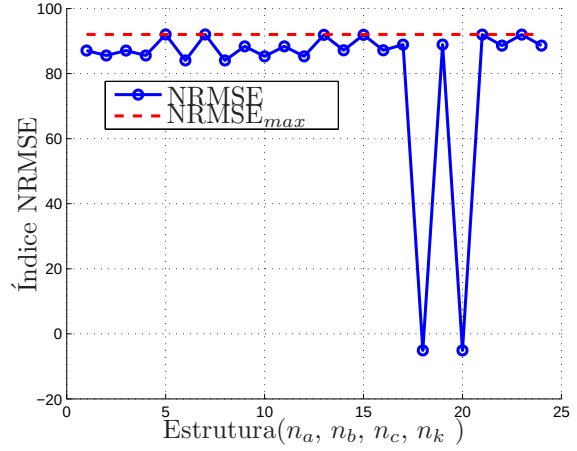
Um ponto importante a ser considerado é que os índices, FPE e NRMSE, ajudam na escolha das estruturas porém a sua interpretação é relativa pois depende da aplicação pretendida. Por exemplo, um índice NRMSE menor que 95% pode ser ruim para uma aplicação de predição, no entanto, um índice NRMSE de 65% pode ser mais do que suficiente para uma aplicação de controle. Sendo assim, o usuário deve ser capaz de julgar se o valor obtido é suficiente ou não de acordo com o seu objetivo.

Tabela 4.4: Combinações dos termos dos modelos ARMAX polinomiais.

Estrutura	n_y	n_u	n_v	n_k	Estrutura	n_y	n_u	n_v	n_k
01	1	1	1	0	13	2	2	1	0
02	1	1	1	1	14	2	2	1	1
03	1	1	2	0	15	2	2	2	0
04	1	1	2	1	16	2	2	2	1
05	1	2	1	0	17	3	1	1	0
06	1	2	1	1	18	3	1	1	1
07	1	2	2	0	19	3	1	2	0
08	1	2	2	1	20	3	1	2	1
09	2	1	1	0	21	3	2	1	0
10	2	1	1	1	22	3	2	1	1
11	2	1	2	0	23	3	2	2	0
12	2	1	2	1	24	3	2	2	1

(a) Critério de informação FPE ponto s_2 .(b) Índice de desempenho NRMSE ponto s_2 .Figura 4.9: Índices para escolha da estrutura do modelo LPV $_{u \times y_i}$ aplicados ao ponto s_2 .

Para observação de estados é desejável que os modelos sejam de baixa ordem, pois, quanto maior for a ordem do modelo maior será o número de sensores necessários para caracterizar o sistema e permitir a recuperação dos estados. Nesse sentido, primeiramente foram avaliados os modelos com menor fator FPE para a escolha dos regressores mais significativos a serem incluídos no modelo (minimizando o erro devido à estrutura). Em seguida, dentre as estruturas que apresentaram menor índice FPE foram verificadas aquelas que resultaram em maior índice NRMSE. O índice NRMSE avalia somente o ajuste da predição livre do modelo em relação aos dados e não diz nada sobre a estrutura do modelos em si. Note, por exemplo, que a estrutura 5 (ponto 5 do gráfico da Figura 4.9) apresenta índice FPE relativamente grande e seu valor NRMSE também é grande, o que pode impedir, dependendo da aplicação, utilizar apenas o índice NRMSE como critério de escolha. No entanto, para aplicações de controle é possível que isso seja suficiente para garantir um modelo adequado, no entanto, como o interesse nesse trabalho é o monitoramento, é importante que se tenha um cuidado maior com os erros de

(a) Critério de informação FPE ponto s_2 .(b) Índice de desempenho NRMSE ponto s_2 .Figura 4.10: Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{y_i \times y_o}$ aplicados ao ponto s_2 .

modelagem.

Neste trabalho arbitramos limitar os erros de modelagem em torno de 15%. As Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam os valores dos índices NRMSE para os dois tipos de modelos ARMAX, levando-se em consideração os menores índices FPE. Para tais estruturas, verificou-se que não houve diferenças significativas entre os índices NRMSE considerando a aplicação pretendida, ou seja, observação de estados. Em outras palavras, tendo-se como objetivo a aplicação dos modelos na construção de um modelo geral para fins de observação, não é vantajoso aumentar a ordem dos modelos em troca de tão pouco ganho em relação ao desempenho mensurado por esse critério (menor que 3 pontos percentuais). Tendo isso em mente, foram escolhidas as estruturas de menor ordem possível, ou seja, a estrutura 04 para modelos do tipo $LPV_{u \times y_i}(s_j)$ e a estrutura 07 para modelos do tipo $LPV_{y_i \times y_o}(s_j)$. Substituindo-se o valor dos termos n_y , n_u , n_v e n_k nas equações (4.5) e (4.6) obtém-se:

$$\begin{aligned} y(s_j, k) = & -a_1(s_j)y(s_j, k-1) + b_1(s_j)u(s_j, k-1) \\ & + c_1(s_j)v(s_j, k-1) + c_2(s_j)v(s_j, k-2) + v(s_j, k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} y(L, k) = & -\alpha_1(s_j)y(L, k-1) + \beta_0(s_j)y(s_j, k) + \beta_1(s_j)y(s_j, k-1) \\ & + \gamma_1(s_j)v(s_j, k-1) + \gamma_2(s_j)v(s_j, k-2) + v(s_j, k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2.4 Análise residual

Outro critério importante na validação de um modelo é a análise residual. Tal análise consiste em um conjunto de testes que são utilizados para verificar se os resíduos são aleatórios ou não. Se os resíduos não forem aleatórios, significa que existem informações contidas neles que o modelo utilizado não conseguiu explicar ou, melhor dizendo, que o modelo não conseguiu explicar tudo que era explicável nos dados. Neste trabalho, foram utilizados duas funções para validação

Tabela 4.5: Índices NRMSE dos modelos $u \times y_i$.

Estrutura(n_y n_u n_v n_k)	Posição $s_2 = 175mm$	Posição $s_5 = 700mm$	Posição $s_8 = 1225mm$
04(1121)	86,85%	86,59%	84,24%
08(1221)	88,33%	85,15%	85,83%
12(2121)	88,59%	88,59%	85,95%
16(2221)	88,28%	88,28%	86,52%
20(3121)	88,67%	88,67%	85,91%
24(3221)	85,76%	85,76%	87,82%

Tabela 4.6: Índices NRMSE dos modelos $y_i \times y_o$.

Estrutura(n_y n_u n_v n_k)	Posição $s_2 = 175mm$	Posição $s_5 = 700mm$	Posição ($s_8 = 1225mm$)
07(1220)	92,04%	93,93%	95,19%
15(2220)	91,90%	93,70%	95,95%
23(3220)	91,98%	94,05%	96,00%

dos modelos em relação aos resíduos, a autocorreção dos resíduos e a correlação cruzada entre os resíduos e o sinal de entrada. Ambas as funções avaliam correlações lineares e são dadas respectivamente por:

$$r_{\xi\xi}(\tau) = E\{\xi(k - \tau)\}\xi(k) = \delta(0) \quad (4.9)$$

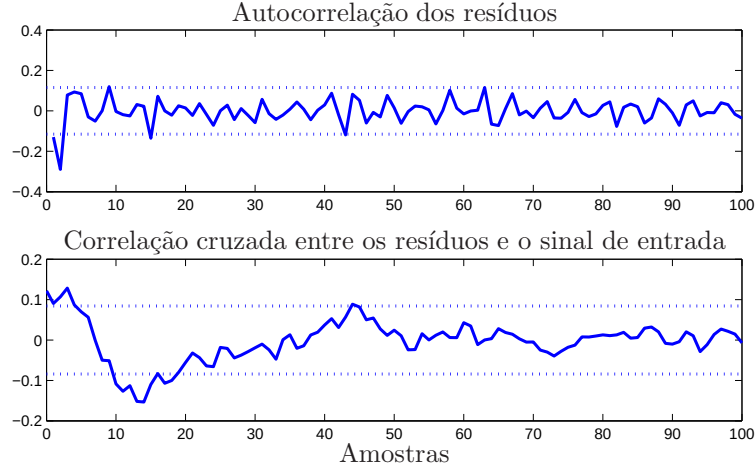
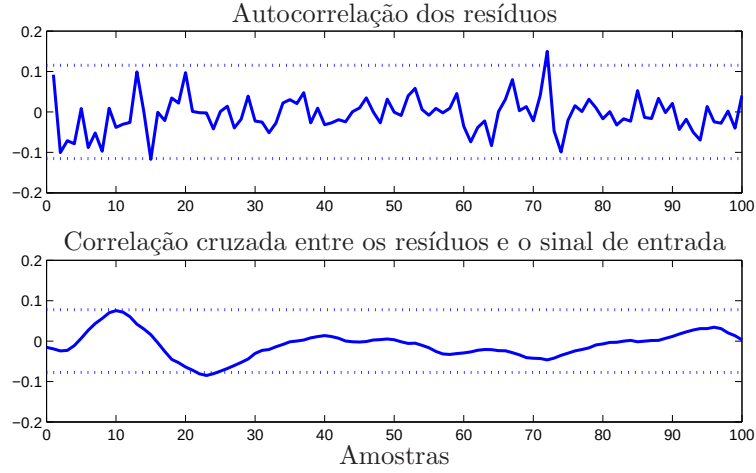
e

$$r_{u\xi}(\tau) = E\{u(k - \tau)\}\xi(k) = 0, \quad \forall \tau \quad (4.10)$$

sendo que τ , nesse caso, representa o deslocamento temporal que define qual amostra está sendo correlacionada com a amostra no instante k .

Se não houver autocorrelação dos resíduos, significa que o modelo obtido (no caso um modelo linear), conseguiu explicar tudo que era explicável nos dados. Além disso, se não houver correlação cruzada entre os resíduos e o sinal de entrada, significa que o desempenho do modelo será igualmente adequado para outro sinal de entrada, com a mesma faixa de operação, porém, diferente daquele utilizado na validação. Os gráficos da autocorrelação dos resíduos e da correlação cruzada entre os resíduos e o sinal de entrada, para as estruturas 04 e 07 escolhidas anteriormente para os modelos LPV_{uy} e LPV_{yy} , respectivamente, são apresentados na Figura 4.11. Observe que nos dois casos, os resíduos não são autocorrelacionados, no entanto, verifica-se que existe uma pequena correlação entre os resíduos e o sinal de entrada para o modelo do tipo LPV_{uy} . A correlação pode variar para mais ou para menos dependendo da posição do espaço considerada.

Contudo, como dito anteriormente, neste trabalho tem-se interesse em um modelo adequado para observação de estados (um modelo o mais simples possível). Além disso, deseja-se mostrar que é possível minimizar os erros devido a dinâmicas não modeladas por meio da estimação em tempo real de estados e parâmetros utilizando-se observadores. Dessa forma, prossegue-se com os modelos definidos por meio dos critérios utilizados anteriormente (FPE e NRMSE). Assume-se, dessa forma, que existe erro de modelagem. Esse resultado será mostrado mais a frente na

(a) Análise residual para o modelo LPV_{uy} .(b) Análise residual para o modelo LPV_{yy} .Figura 4.11: Análise dos resíduos dos modelos escolhidos (ponto s_2).

implementação de observadores.

4.2.5 Estimação de parâmetros

Definidas as estruturas dos modelos ARMAX polinomiais, deu-se início à estimação dos parâmetros. O objetivo nessa etapa é conseguir relacionar o comportamento dos parâmetros correspondentes de cada modelo local com a variação espacial unidimensional da posição em que se deseja monitorar a temperatura do sistema. Nesse caso, utilizando-se os dez ensaios realizados e as estruturas obtidas segundo o procedimento descrito na subseção anterior (subseção 4.2.3), os modelos $LPV_{u \times y_i}(s_j)$ e $LPV_{y_i \times y_o}(s_j)$ foram obtidos para todas as nove posições estabelecidas na discretização espacial do forno. Isso significa que foram realizadas dez estimações para cada parâmetro. Esse procedimento é interessante porque através dele é possível ter uma noção do espalhamento dos parâmetros em torno de um valor que seria o valor mais provável do mesmo. No entanto, para que isso seja válido, é necessário que um número maior de realizações (pelo menos 30) sejam feitas, aumentando-se a segurança estatística dos experimentos. Para este

trabalho, no entanto, foram feitas apenas dez realizações.

De acordo com o passo 4 do Algoritmo 2 (Ver seção 3.2), utilizando os conjuntos de parâmetros estimados para cada tipo de modelo, em cada ponto do espaço, foram ajustadas curvas para obtenção de funções suaves dependentes do espaço conectando cada família de parâmetros (*funções scheduling*). A obtenção dessas funções foi realizada por meio de ajustes polinomiais por mínimos quadrados ponderados (MQP – Ver subseção 2.1.3). Nesse caso, a matriz de pesos utilizada é construída a partir do inverso da variância de cada parâmetro obtida na etapa de identificação dos modelos locais. Sendo assim, o algoritmo dá maior importância aos parâmetros estimados com menor variância. Em geral, essa estratégia faz com que o desvio padrão diminua porque não se despreza a massa de dados disponível e maior importância é atribuída às estimações com menor incerteza [May79].

A seguir, são apresentados os resultados para a estimação das *funções scheduling* em questão. Como será visto mais adiante, os modelos utilizando os parâmetros definidos por essas funções devem ser validados. As validações devem ser realizadas tanto nas posições onde as medições são conhecidas e utilizadas para estimação de parâmetros quanto em posições onde elas são conhecidas mas não são utilizadas para estimação de parâmetros. Como são disponíveis no máximo nove posições de medição, os modelos obtidos utilizando-se as *funções scheduling* construídas a partir de todas essas nove posições não podem ser validadas em locais diferentes. Sendo assim, foram construídas também *funções scheduling* a partir do ajuste utilizando-se medições de apenas cinco posições e três posições. Para aquelas construídas, por exemplo, a partir de cinco posições existirão quatro posições em que as medições são conhecidas mas não são utilizadas para estimação dos parâmetros, ou seja, nesses locais específicos os parâmetros são determinados unicamente pelas *funções scheduling* ajustadas. No caso dos ajustes utilizando-se três posições, o número de locais onde existem medições mas elas não são utilizadas para estimação de parâmetros são seis.

Uma vez que as *funções scheduling* são obtidas, os modelos do tipo $LPV_{u \times y_i}(s_j)$ e $LPV_{y_i \times y_o}(\bar{s}_j)$ passam a ser, respectivamente, modelos do tipo $LPV_{u \times y_i}(s_\ell)$ e $LPV_{y_i \times y_o}(\bar{s}_\ell)$ em que seus parâmetros dependem respectivamente de uma variável espacial contínua denotada como *variável scheduling*. Para a estratégia proposta no presente trabalho, os modelos LPV são complementares e, sendo assim, as *variáveis scheduling* também o são. Dessa forma, para o primeiro modelo ela é representada por s_ℓ e para o segundo modelo ela é representada como ' $\bar{s}_\ell = L - s_\ell$ '. As *funções scheduling* representam, de certa maneira, a característica espaço-dependente do SPD original. Sendo assim, as variáveis s_j , tal que $j \in \mathbb{Z}$, que definem as posições fixas do espaço nas equações (4.3) e (4.4) podem ser substituídas por s_ℓ , tal que $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\bar{s}_\ell$, dependendo do modelo, que definem um ponto intermediário qualquer do sistema, tal que $0 < s_\ell < L$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 y(s_\ell, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} a_{i_y}(s_\ell) y(s_\ell, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} b_{i_u}(s_\ell) u(0, k - i_u) \\
 & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} c_{i_\nu}(s_\ell) \nu(s_\ell, k - i_\nu) + \nu(s_\ell, k)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned}
 y(L, k) = & - \sum_{i_y=1}^{n_y} \alpha_{i_y}(\bar{s}_\ell) y(L, k - i_y) + \sum_{i_u=n_k}^{n_k+n_u-1} \beta_{i_u}(\bar{s}_\ell) y(\bar{s}_\ell, k - i_u) \\
 & + \sum_{i_\nu=1}^{n_\nu} \gamma_{i_\nu}(\bar{s}_\ell) \nu(\bar{s}_\ell, k - i_\nu) + \nu(\bar{s}_\ell, k)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

e consequentemente, para as estruturas específicas escolhidas tem-se:

$$\begin{aligned}
 y(s_\ell, k) = & -a_1(s_\ell) y(s_\ell, k - 1) + b_1(s_\ell) u(0, k - 1) \\
 & + c_1(s_\ell) \nu(s_\ell, k - 1) + c_2(s_\ell) \nu(s_\ell, k - 2) + \nu(s_\ell, k)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned}
 y(L, k) = & -\alpha_1(\bar{s}_\ell) y(L, k - 1) + \beta_0(\bar{s}_\ell) y(\bar{s}_\ell, k) + \beta_1(\bar{s}_\ell) y(\bar{s}_\ell, k - 1) \\
 & + \gamma_1(\bar{s}_\ell) \nu(\bar{s}_\ell, k - 1) + \gamma_2(\bar{s}_\ell) \nu(\bar{s}_\ell, k - 2) + \nu(\bar{s}_\ell, k)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

em que os parâmetros são funções polinomiais da forma:

$$a(s_\ell) = \sum_{i_a=0}^{n_a} a_{i_a} s_\ell^{i_a} \tag{4.15}$$

sendo que i_a define a ordem do polinômio. As funções polinomiais ajustadas (*funções scheduling*) são dadas pelas funções polinomiais listadas a seguir:

1. ***Funções scheduling*** obtidas a partir do ajuste polinomial dos parâmetros utilizando 9 posições:

$$b_1(s_\ell) = -4,2490 \times 10^{-12} s_\ell^3 + 3,4291 \times 10^{-9} s_\ell^2 - 1,5999 \times 10^{-5} s_\ell + 0,0568 \tag{4.16}$$

$$a_1(s_\ell) = 9,5100 \times 10^{-12} s_\ell^3 - 4,7554 \times 10^{-8} s_\ell^2 + 4,3890 \times 10^{-5} s_\ell - 0,9112 \tag{4.17}$$

$$w_1(s_\ell) = -2,3370 \times 10^{-11} s_\ell^3 + 6,6704 \times 10^{-8} s_\ell^2 - 5,7759 \times 10^{-5} s_\ell + 0,0237 \tag{4.18}$$

$$\beta_0(\bar{s}_\ell) = 2,0229 \times 10^{-10} \bar{s}_\ell^3 - 4,7445 \times 10^{-7} \bar{s}_\ell^2 + 1,1916 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell + 0,7532 \tag{4.19}$$

$$\beta_1(\bar{s}_\ell) = -2,5343 \times 10^{-10} \bar{s}_\ell^3 + 6,2283 \times 10^{-7} \bar{s}_\ell^2 - 2,8674 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell - 0,6551 \tag{4.20}$$

$$\alpha_1(\bar{s}_\ell) = -5,5237 \times 10^{-11} \bar{s}_\ell^3 + 1,4785 \times 10^{-7} \bar{s}_\ell^2 - 1,5578 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell - 0,8992 \tag{4.21}$$

$$w_2(\bar{s}_\ell) = 8,1120 \times 10^{-11} \bar{s}_\ell^3 - 1,8802 \times 10^{-8} \bar{s}_\ell^2 + 1,6462 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell + 0,0017 \tag{4.22}$$

2. ***Funções scheduling*** obtidas a partir do ajuste polinomial dos parâmetros utilizando 5 posições:

$$b_1(s_\ell) = -3,3299 \times 10^{-9} s_\ell^2 - 1,5982 \times 10^{-5} s_\ell + 0,05711 \tag{4.23}$$

$$a_1(s_\ell) = -3,0164 \times 10^{-8} s_\ell^2 + 3,3929 \times 10^{-5} s_\ell - 0,91092 \tag{4.24}$$

$$w_1(s_\ell) = 1,4014 \times 10^{-8} s_\ell^2 - 2,6372 \times 10^{-5} s_\ell + 0,01952 \tag{4.25}$$

$$\beta_0(\bar{s}_\ell) = -4,8261 \times 10^{-8} \bar{s}_\ell^2 - 1,3554 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell + 0,8171 \tag{4.26}$$

$$\beta_1(\bar{s}_\ell) = 5,7969 \times 10^{-8} \bar{s}_\ell^2 + 8,1357 \times 10^{-5} \bar{s}_\ell - 0,7485 \tag{4.27}$$

$$\alpha_1(\bar{s}_\ell) = 2,9771 \times 10^{-8} \bar{s}_\ell^2 - 8,6561 \times 10^{-5} \bar{s}_\ell - 0,9149 \tag{4.28}$$

$$w_2(\bar{s}_\ell) = 3,8259 \times 10^{-9} \bar{s}_\ell^2 - 3,1247 \times 10^{-6} \bar{s}_\ell + 0,0068 \tag{4.29}$$

3. ***Funções scheduling*** obtidas a partir do ajuste polinomial dos parâmetros utilizando 3 posições:

$$b_1(s_\ell) = 1,3291 \times 10^{-9} s_\ell^2 - 2,2196 \times 10^{-5} s_\ell + 0,0563 \quad (4.30)$$

$$a_1(s_\ell) = -1,5101 \times 10^{-8} s_\ell^2 + 1,3591 \times 10^{-5} s_\ell - 0,9118 \quad (4.31)$$

$$w_1(s_\ell) = 1,6636 \times 10^{-8} s_\ell^2 - 3,2243 \times 10^{-5} s_\ell + 0,0213 \quad (4.32)$$

$$\beta_0(\bar{s}_\ell) = -2,5839 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell + 0,9036 \quad (4.33)$$

$$\beta_1(\bar{s}_\ell) = 2,3909 \times 10^{-4} \bar{s}_\ell - 0,8628 \quad (4.34)$$

$$\alpha_1(\bar{s}_\ell) = -1,6436 \times 10^{-5} \bar{s}_\ell - 0,9559 \quad (4.35)$$

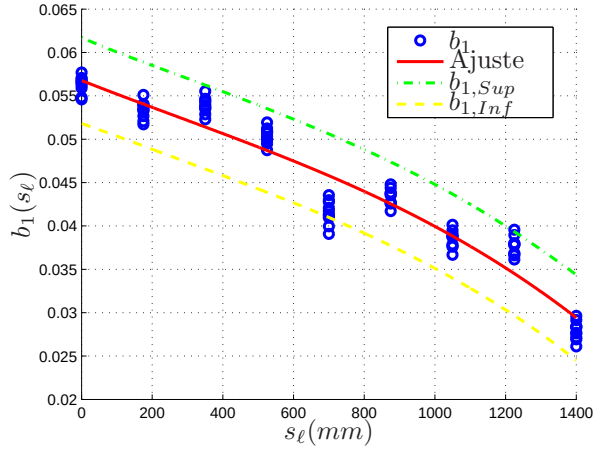
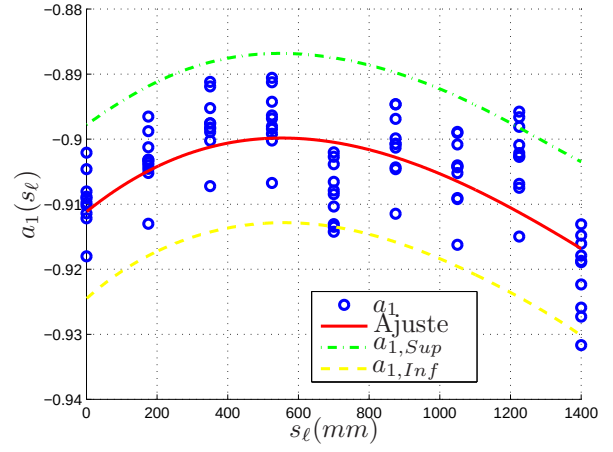
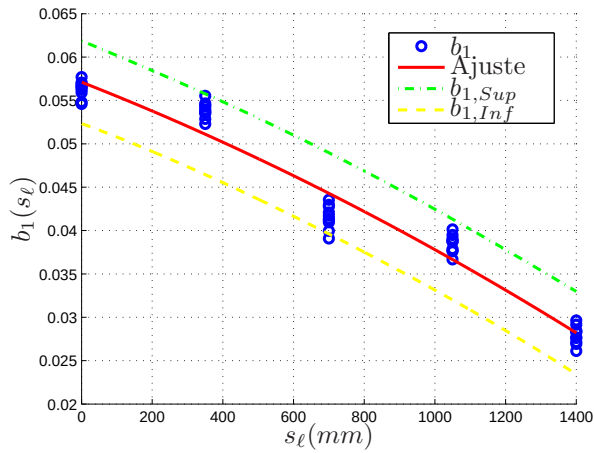
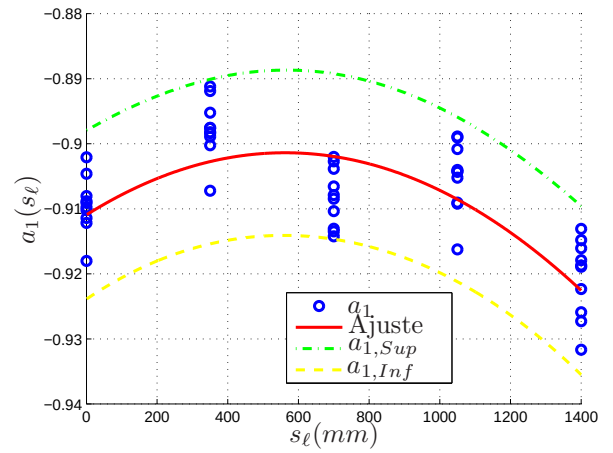
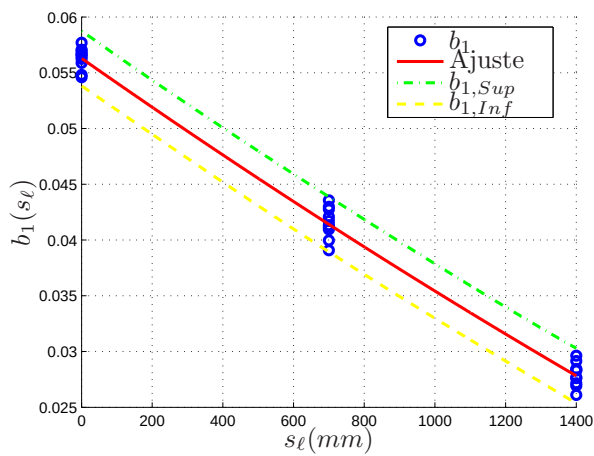
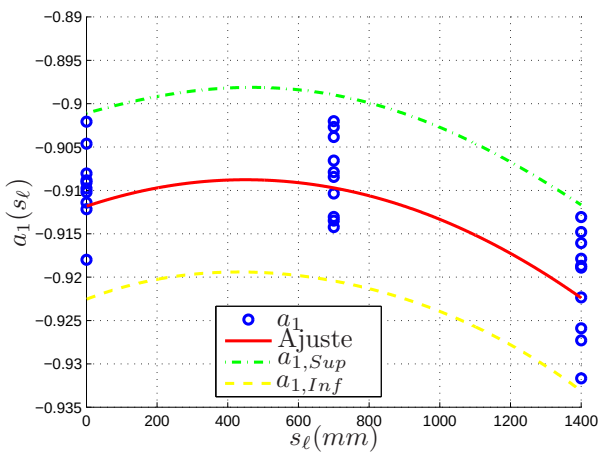
$$w_2(\bar{s}_\ell) = 4,9739 \times 10^{-6} \bar{s}_\ell + 0,0029 \quad (4.36)$$

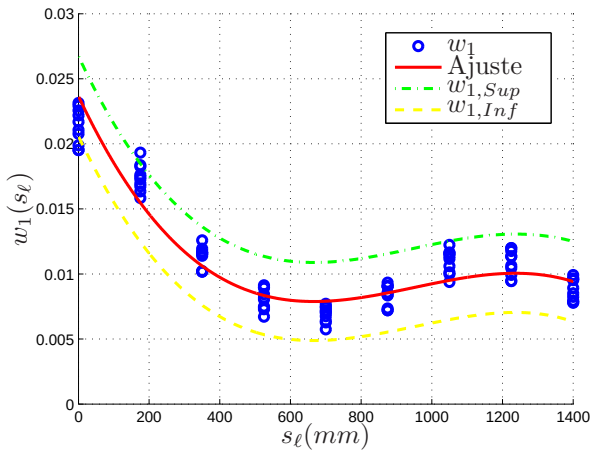
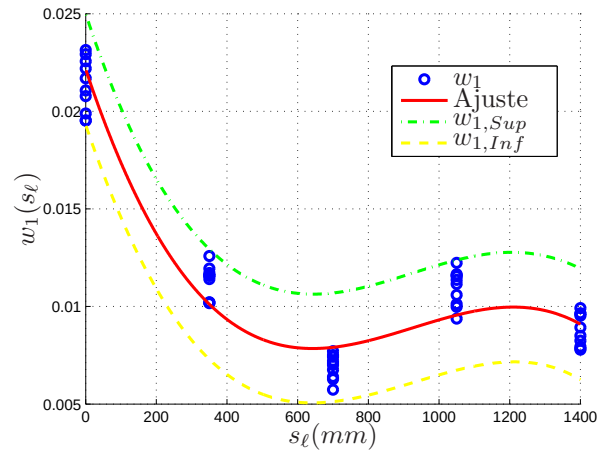
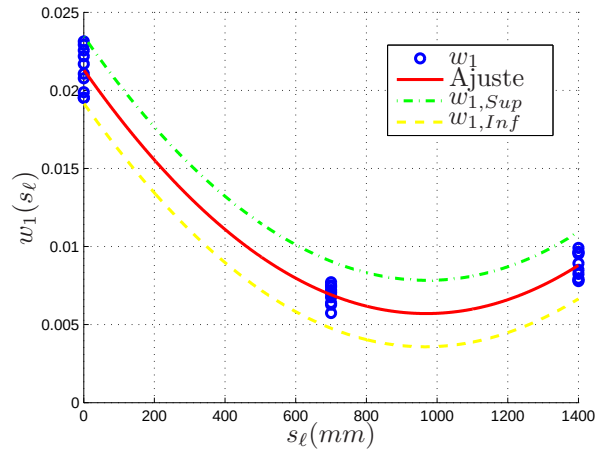
Os gráficos apresentados nas Figuras 4.12 a 4.15 mostram como os parâmetros se comportam em função das *variáveis scheduling* s_ℓ ou $\bar{s}_\ell$ e apresentam o intervalo de confiança de 95% calculados para cada ajuste (calculado a partir da função “polyconf” do *MATLAB*[®]). Nesse ponto, é importante lembrar que os modelos do ruído do processo dados por: $e_1(s_\ell, k) = c_1(s_\ell)\nu(s_\ell, k - 1) + c_2(s_\ell)\nu(s_\ell, k - 2) + \nu(s_\ell, k)$ e $e_2(\bar{s}_\ell, k) = \gamma_1(\bar{s}_\ell)\nu(\bar{s}_\ell, k - 1) + \gamma_2(\bar{s}_\ell)\nu(\bar{s}_\ell, k - 2) + \nu(\bar{s}_\ell, k)$ e são utilizados pelo estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ) apenas para reduzir o problema de polarização na estimação dos parâmetros. Sendo assim, para a aplicação de fato, apenas os termos que representam o modelo do processo, são utilizados. Contudo, os valores estimados para os modelos do ruído de processo podem ser utilizados no projeto dos observadores, na construção da matriz Q (Ver seção 3.3). Portanto, nos gráficos a serem apresentados a seguir as funções $w_1(s_\ell) = \text{var}[\mathbf{e}_1(s_\ell)]$ e $w_2(\bar{s}_\ell) = \text{var}[\mathbf{e}_2(\bar{s}_\ell)]$ produzem estimativas das incertezas dos modelos LPV a serem utilizadas no projeto dos observadores. Note que $\mathbf{e}_1(s_\ell)$ e $\mathbf{e}_2(\bar{s}_\ell)$ estão em negrito indicando N realizações de $e_1(s_\ell, k)$ e $e_2(\bar{s}_\ell, k)$, respectivamente. Como mencionado anteriormente, as *funções scheduling* são construídas utilizando nove, cinco e três posições de medição.

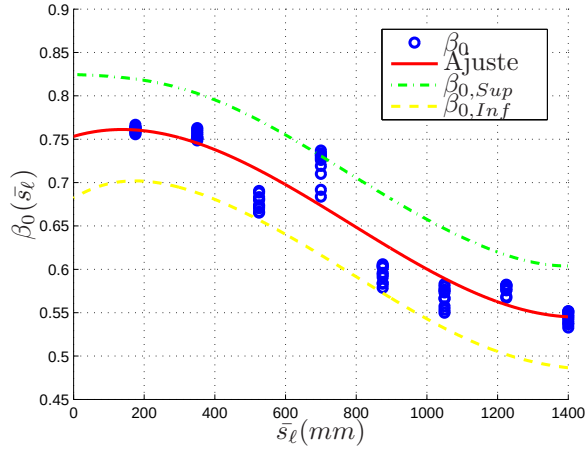
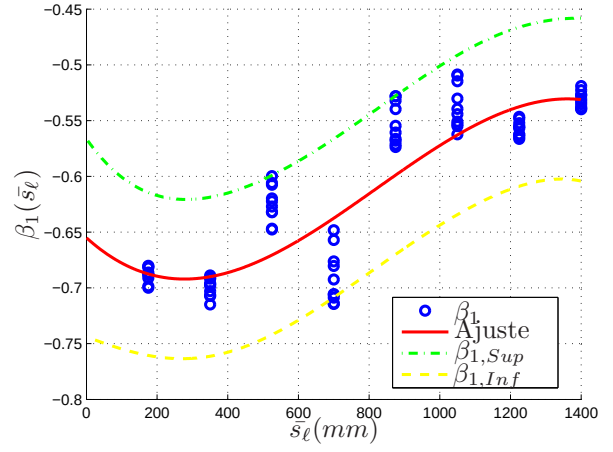
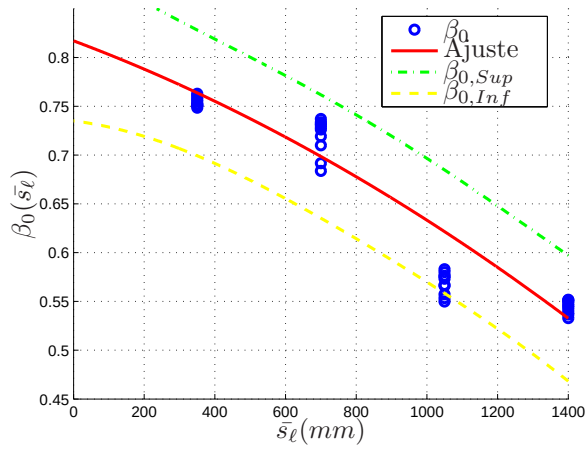
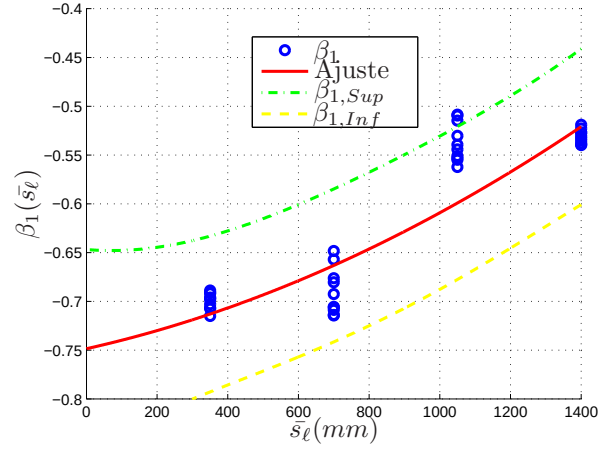
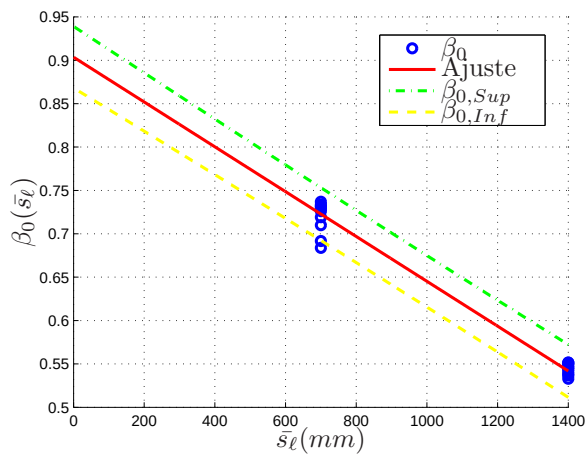
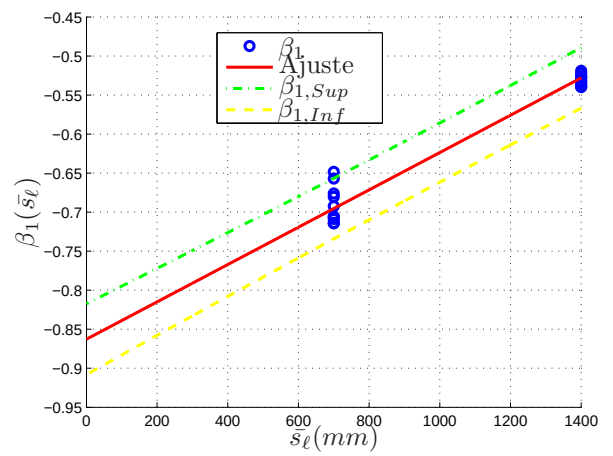
Nesse ponto surge uma questão importante em relação aos dígitos significativos considerados para construção dos polinômios. Note, por exemplo, que o primeiro coeficiente dos polinômios ajustados para obtenção das *funções scheduling* utilizando-se nove posições do espaço, possuem ordem em torno de 10^{-10} . No entanto, tais coeficientes são multiplicados pela variável s_ℓ elevada ao cubo, dessa forma, se pensarmos que os valores de s_ℓ são dados em milímetros, esse valor se torna razoável. Contudo, o problema numérico relacionado à necessidade ou não de serem considerados coeficientes com ordem de grandeza tão pequena ainda persiste. Ou seja, seria mesmo necessário considerar um polinômio de ordem 3 para construção das *funções scheduling* utilizadas nesse trabalho?

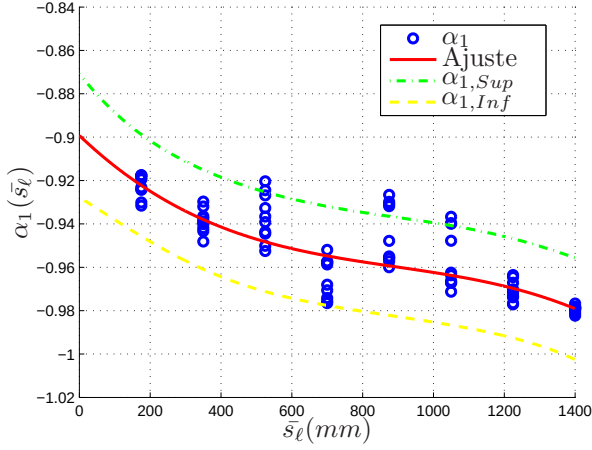
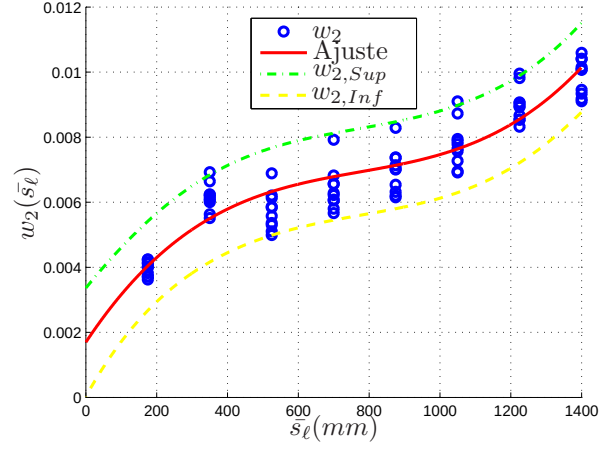
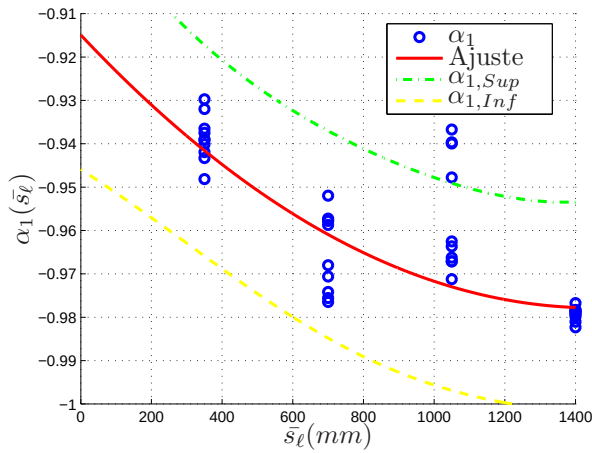
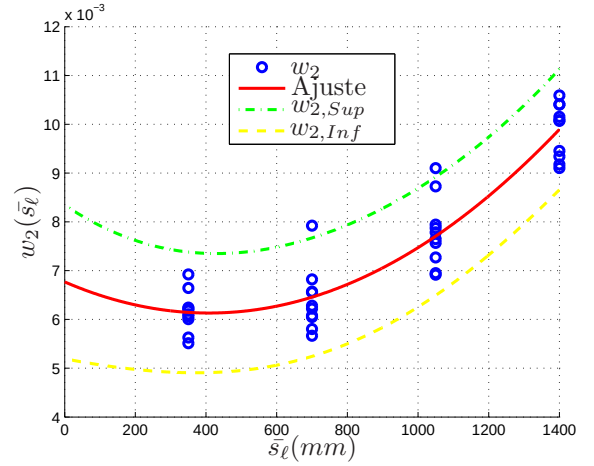
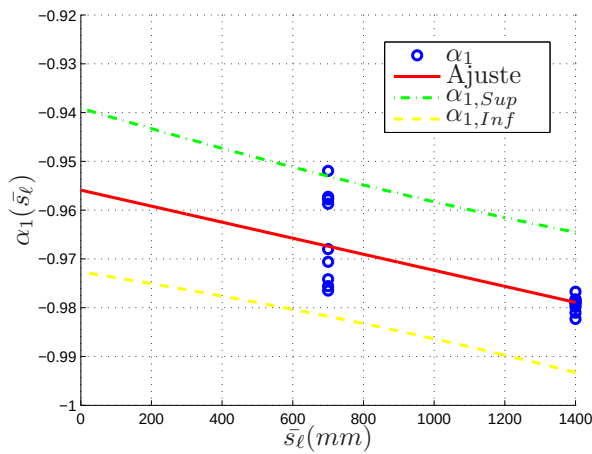
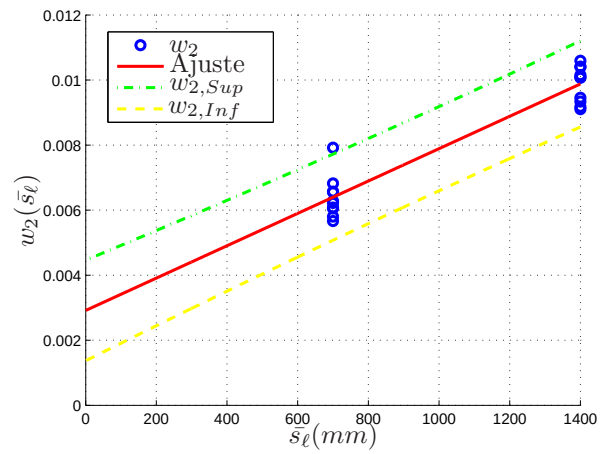
Como visto anteriormente, o ajuste polinomial proposto neste trabalho utiliza o método de mínimos quadrados ponderados, em que, os pesos atribuídos a cada observação (parâmetros dos modelos locais) são dados pelo inverso da variância de cada parâmetro estimado pelas técnicas de identificação de sistemas a parâmetros concentrados. Dessa forma, é importante que o grau do polinômio permita que a curva ajustada consiga levar em consideração os pesos atribuídos a cada observação. Se, por exemplo, aos dados indicados na Figura 4.12(a) for ajustada uma reta, apenas os dois pontos com maior peso serão considerados no ajuste, o que pode gerar

uma curva que não descreve bem os parâmetros nas outras posições do espaço. Sabe-se que o comportamento da temperatura ao longo do processo para o exemplo prático utilizado neste trabalho é aproximadamente homogênea (como pode ser visto no gráfico da Figura 4.8 superior), nesse caso, uma reta poderia ser ajustada e gerar resultado satisfatório. No entanto, podem existir processos em que as diferenças entre os parâmetros em cada posição sejam mais distintas, o que leva à necessidade da utilização de um polinômio com maior grau ou até mesmo de uma interpolação polinomial. Logicamente, o aumento do grau do polinômio sem nenhum critério pode gerar oscilações o que não é viável. Polinômios de baixa ordem tendem a ser suaves ao passo que polinômios de alta ordem tendem a ser irregulares. Sendo assim, neste trabalho, em um primeiro momento, escolheu-se o grau do polinômio de forma a obter uma curva que melhor se ajustasse aos dados (suavização) sem que ocorressem grandes oscilações, isso aconteceria, por exemplo, se aos dados indicados na Figura 4.12(a) fosse ajustado um polinômio de grau 4 ou superior. Essa discussão será retomada mais à frente quando forem validados os modelos obtidos a partir das *funções scheduling* construídas considerando-se 3, 5 e 9 posições para interpolação.

(a) Função scheduling $b_1(s_\ell)$ (9 pontos).(b) Função scheduling $a_1(s_\ell)$ (9 pontos).(c) Função scheduling $b_1(s_\ell)$ (5 pontos).(d) Função scheduling $a_1(s_\ell)$ (5 pontos).(e) Função scheduling $b_1(s_\ell)$ (3 pontos).(f) Função scheduling $a_1(s_\ell)$ (3 pontos).Figura 4.12: Funções scheduling $b_1(s_\ell)$ e $a_1(s_\ell)$.

(a) Função scheduling $w_1(s_\ell)$ (9 pontos).(b) Função scheduling $w_1(s_\ell)$ (5 pontos).(c) Função scheduling $w_1(s_\ell)$ (3 pontos).Figura 4.13: Funções scheduling $w_1(s_\ell)$.

(a) Função scheduling $\beta_0(\bar{s}_\ell)$ (9 pontos).(b) Função scheduling $\beta_1(\bar{s}_\ell)$ (9 pontos).(c) Função scheduling $\beta_0(\bar{s}_\ell)$ (5 pontos).(d) Função scheduling $\beta_1(\bar{s}_\ell)$ (5 pontos).(e) Função scheduling $\beta_0(\bar{s}_\ell)$ (3 pontos).(f) Função scheduling $\beta_1(\bar{s}_\ell)$ (3 pontos).Figura 4.14: Funções scheduling $\beta_0(\bar{s}_\ell)$ e $\beta_1(\bar{s}_\ell)$.

(a) Função scheduling $\alpha_1(\bar{s}_\ell)$ (9 pontos).(b) Função scheduling $w_2(\bar{s}_\ell)$ (9 pontos).(c) Função scheduling $\alpha_1(\bar{s}_\ell)$ (5 pontos).(d) Função scheduling $w_2(\bar{s}_\ell)$ (5 pontos).(e) Função scheduling $\alpha_1(\bar{s}_\ell)$ (3 pontos).(f) Função scheduling $w_2(\bar{s}_\ell)$ (3 pontos).Figura 4.15: Funções scheduling $\alpha_1(\bar{s}_\ell)$ e $w_2(\bar{s}_\ell)$.

4.2.6 Modelo em espaço de estados

Uma vez definidas as funções que descrevem o comportamento dos parâmetros em relação à coordenada espacial s_ℓ ou $\bar{s}_\ell$, as equações (4.13) e (4.14) podem ser reescritas em uma única equação no espaço de estados. Uma forma para alcançar esse resultado consiste em reescrever os modelos de processo de cada uma das representações LPV como funções de transferência aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e, em seguida, assumindo as variáveis de saída de cada modelo como variáveis de estado, obter uma realização na forma de espaço de estados, por exemplo, utilizando-se a forma canônica observável como descrito na seção 3.3. Nesse caso, em tratando-se de dois modelos de primeira ordem simples, como é o utilizado neste trabalho, foi considerada outra forma para obter a representação em espaço de estados. Seja, portanto, os modelos de processo definidos pelas equações (4.37) e (4.38) a seguir:

$$y(s_\ell, k) = -a_1(s_\ell)y(s_\ell, k-1) + b_1(s_\ell)u(0, k-1) \quad (4.37)$$

e

$$y(L, k) = -\alpha_1(\bar{s}_\ell)y(L, k-1) + \beta_0(\bar{s}_\ell)y(s_\ell, k) + \beta_1(\bar{s}_\ell)y(s_\ell, k-1) \quad (4.38)$$

Reescrevendo (4.37) e (4.38) para amostra $k+1$ e substituindo a primeira na segunda obtém-se:

$$y(s_\ell, k+1) = -a_1(s_\ell)y(s_\ell, k) + b_1(s_\ell)u(0, k) \quad (4.39)$$

e

$$\begin{aligned} y(L, k+1) &= -\alpha_1(\bar{s}_\ell)y(L, k) + \beta_0(\bar{s}_\ell)y(s_\ell, k+1) + \beta_1(\bar{s}_\ell)y(s_\ell, k) \\ &= -\alpha_1(\bar{s}_\ell)y(L, k) + (\beta_1(\bar{s}_\ell) - \beta_0(\bar{s}_\ell)a_1(s_\ell))y(s_\ell, k) + \beta_0(\bar{s}_\ell)b_1(s_\ell)u(0, k) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assumindo $y(L, k)$ e $y(s_\ell, k)$ como sendo, respectivamente, as variáveis de estado $x_1(L, k)$ e $x_2(s_\ell, k)$ obtém-se diretamente a equação em espaço de estados dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(L, k+1) \\ x_2(s_\ell, k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\alpha_1(\bar{s}_\ell) & (\beta_1(\bar{s}_\ell) - \beta_0(\bar{s}_\ell)a_1(s_\ell)) \\ 0 & -a_1(s_\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(L, k) \\ x_2(s_\ell, k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \beta_0(\bar{s}_\ell)b_1(s_\ell) \\ b_1(s_\ell) \end{bmatrix} u(0, k) \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$y(L, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(L, k) \\ x_2(s_\ell, k) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Obtém-se, portanto, uma representação do SPD (forno) condizente com o objetivo da identificação, ou seja, uma representação em espaço de estados adequada ao projeto de observadores. Como se trata de um modelo cujos parâmetros variam em função do espaço, daqui em diante esse modelo será referido como modelo SS-LPV.

4.2.7 Validação dos modelos SS-LPV

A validação das representações gerais SS-LPV foram realizadas por meio da simulação livre dos modelos e da análise dos índices NRMSE de suas previsões. Foram consideradas, portanto, as três condições de identificação das *funções scheduling*, ou seja, com nove, com cinco e com três posições de medição. De fato, nas simulações realizadas com nove posições os parâmetros estimados a partir das *funções scheduling* coincidem com os parâmetros obtidos na identificação dos modelos locais, ou seja, com os parâmetros utilizados para gerá-los. Dessa forma, a simulação do modelo SS-LPV utilizando as funções produzidas com nove posições, servem apenas como base de comparação para os modelos cujas *funções scheduling* são construídas a partir de cinco e de três posições de medição. Observe que nesse dois últimos casos, existem situações em que a medição do sinal de temperatura intermediária é conhecido em uma determinada posição mas não é utilizada para gerar modelos locais e, portanto, parâmetros nessa mesma posição. Sendo assim, é possível analisar as respostas dos modelos SS-LPV utilizando-se parâmetros diferentes daqueles utilizados para gerar uma *função scheduling*. Esse princípio é semelhante ao caso de validação de modelos locais no qual deve ser utilizada uma massa de dados diferente daquela destinada à identificação.

As Figuras 4.16, 4.17 e 4.18 apresentam, respectivamente, os resultados das simulações livres realizadas para as posições do espaço $s_2 = 175mm$, $s_5 = 700mm$ e $s_8 = 1225mm$, ou seja, um ponto no início, um ponto no meio e um ponto no final do sistema. Em cada uma dessas figuras existem três pares de gráficos que mostram o comportamento dinâmico dos estados dos modelo SS-LPV e do erro de previsão de cada um considerando as três condições de identificação das *funções scheduling*. Através das respostas, é possível verificar, de forma qualitativa, que não houve perdas significativas no desempenho dos modelos na medida em que um número menor de posições de medição foram utilizadas. Esse resultado pode ser atribuído ao comportamento homogêneo dos parâmetros ao longo do espaço. Note, por exemplo, que o comportamento das *funções scheduling* $\beta_1(\bar{s}_\ell)$, apresentadas nos gráficos da Figura 4.14, são ligeiramente diferentes, porém, possuem aproximadamente o mesmo comportamento passando por faixas de valores próximos.

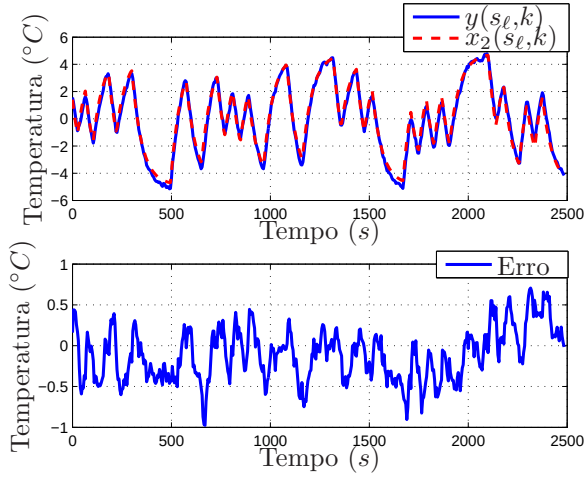
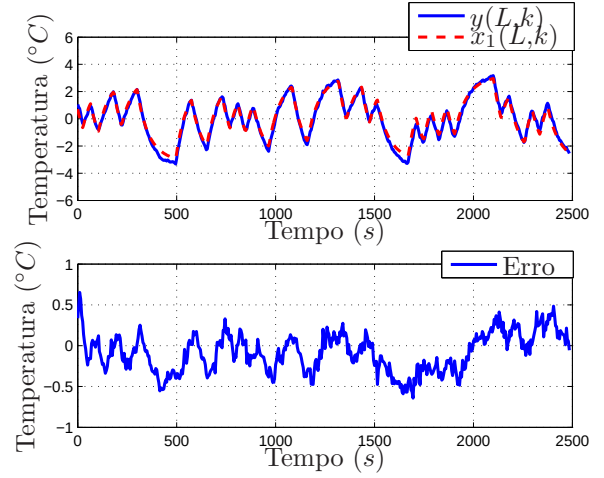
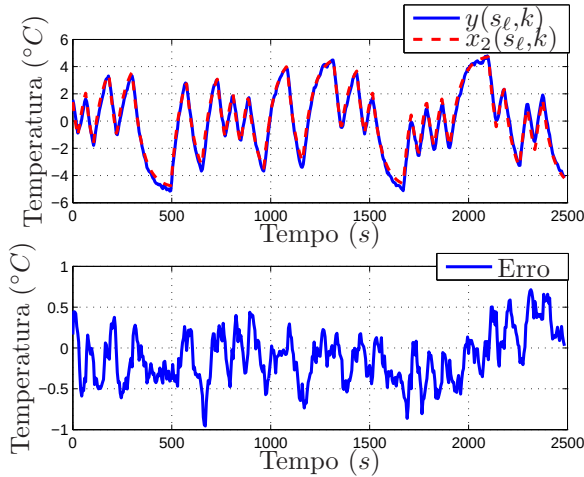
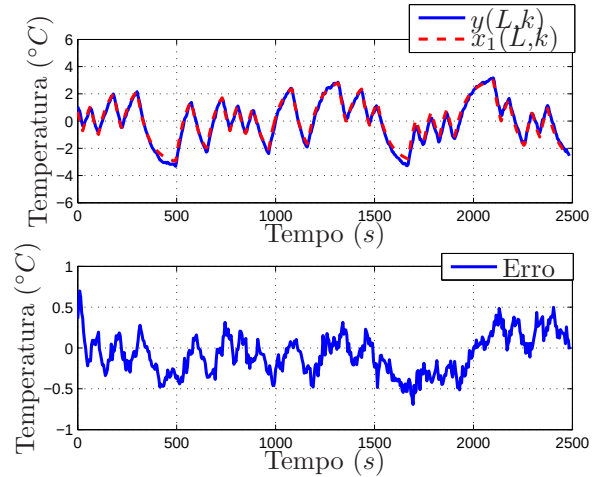
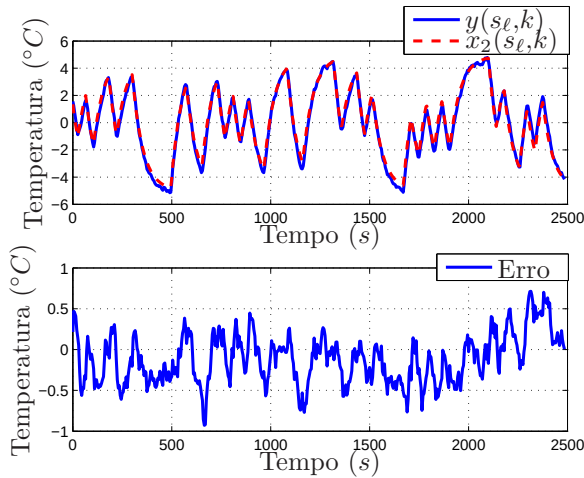
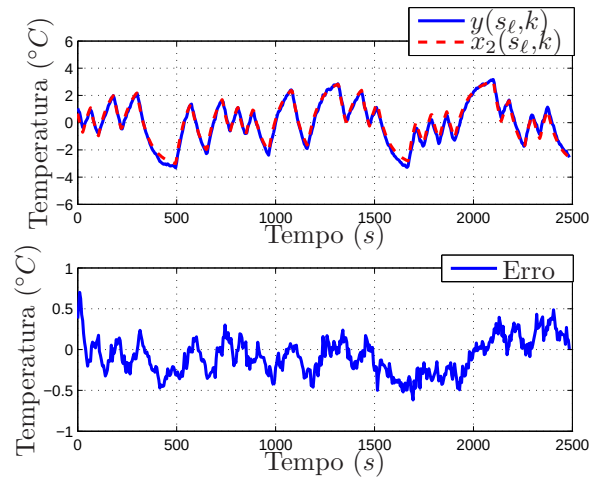
Na análise residual efetuada para os modelos LPV_{uy} e LPV_{yy} (subseção 4.2.4) foi verificado que existe uma pequena correlação entre os resíduos e o sinal de entrada para o modelo do tipo LPV_{uy} . O resultado de tal correlação pode ser observado nos gráficos das Figuras 4.16 a 4.18 que dão indícios de tendência no sinal resultando na polarização do estimador. Essa tendência pode ser observada com maior facilidade olhando o sinal do erro de estimação, principalmente no intervalo de $2000s$ a $2500s$, para o estado $x_2(s_\ell, k)$. Como será visto nos desenvolvimentos a seguir, uma hipótese para o aparecimento de tal tendência é a dinâmica lenta de aquecimento das paredes do forno que não é considerada nos modelos obtidos até então. Esse efeito poderia ser minimizado introduzindo-se um termo constante no modelo do processo. No entanto, como as paredes do forno não são aquecidas sempre da mesma forma o termo constante poderia não descrevê-lo bem. Portanto, uma solução mais inteligente para corrigir a tendência no sinal seria, por exemplo, interpretá-la como uma perturbação na entrada ou nos estados do sistema e estimá-la utilizando-se um observador como será visto mais a frente na seção 4.3.

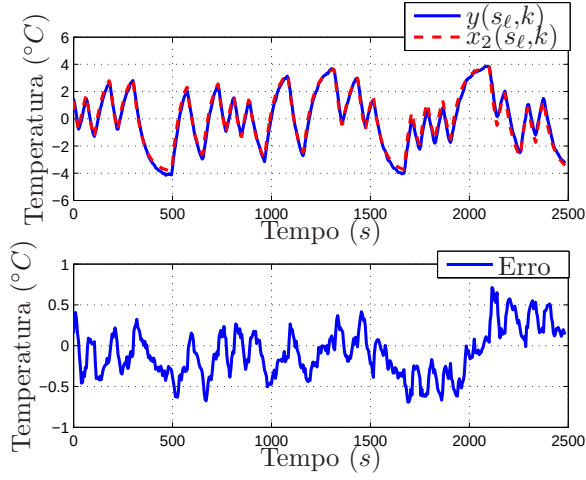
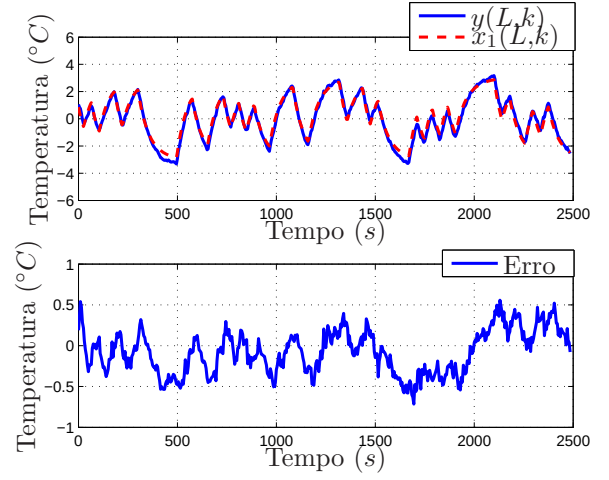
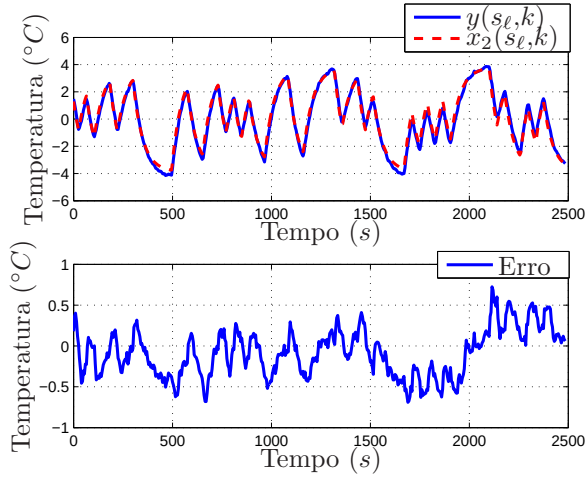
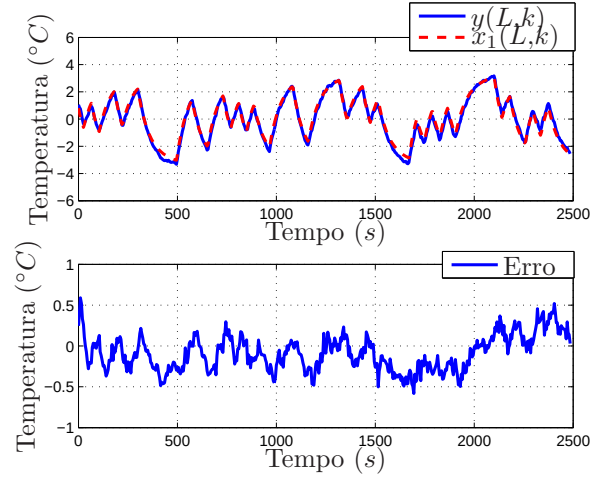
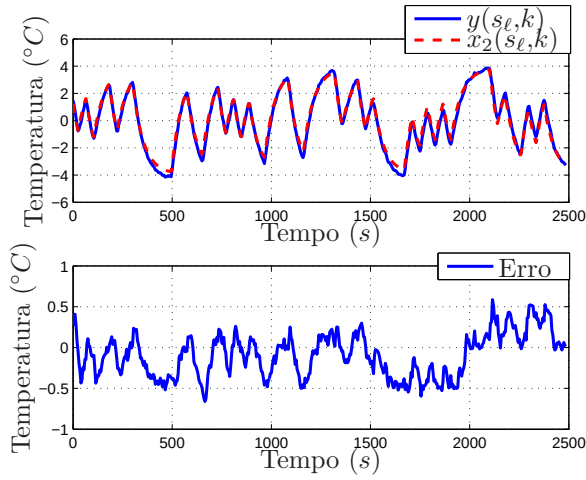
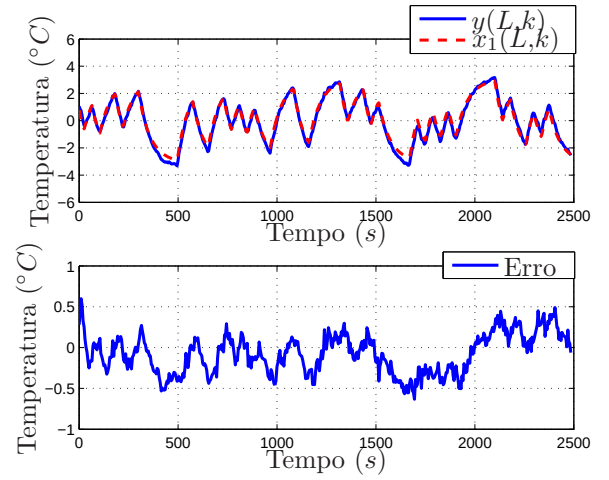
Para validar os modelos SS-LPV de forma quantitativa, foram calculados os índices NRMSE para as predições realizadas em cada posição do espaço considerando também as três condições para obtenção das *funções scheduling*. Os resultados dos cálculos são apresentados na Tabela 4.7. Nessa tabela, os valores em negrito referem-se aos pontos do espaço cujas medições são conhecidas mas não foram utilizadas para obtenção de modelos locais e, portanto, para gerar os parâmetros a serem utilizados nos ajustes polinomiais. Mais uma vez, é possível perceber que o valor dos índices permanecem próximos uns dos outros mantendo-se em torno de 80% para todos os casos. Nesse ponto, vale a pena retomar a discussão iniciada no final da subseção 4.2.5 em relação à ordem dos polinômios utilizados para o ajuste de curva. Note, portanto, que não havendo diferenças significativas em relação ao desempenho dos diversos modelos obtidos considerando-se as três condições para obtenção das *funções scheduling* (do ponto de vista de observação de estados), bastava, por exemplo, ajustar uma reta aos dados indicados na Figura 4.12(a) para obtenção de um modelo SS-LPV adequado à observação de estados.

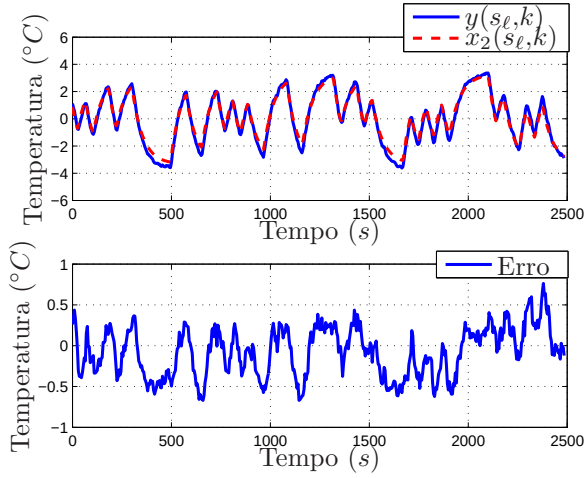
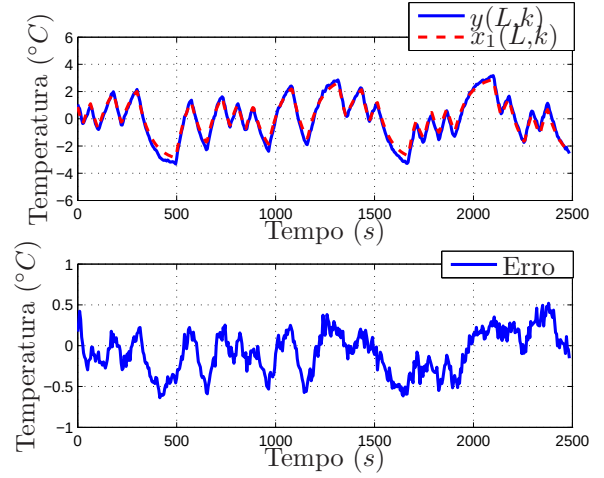
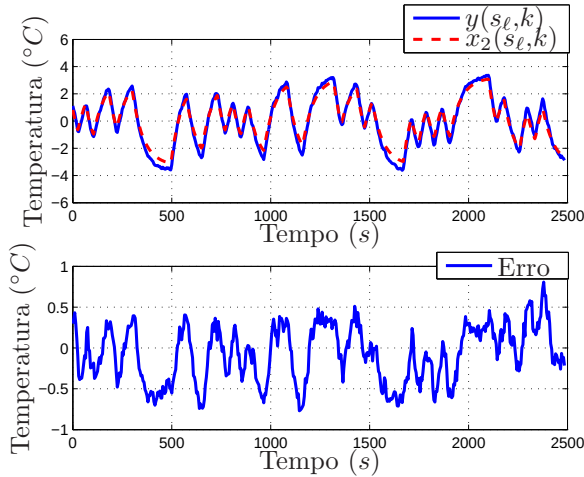
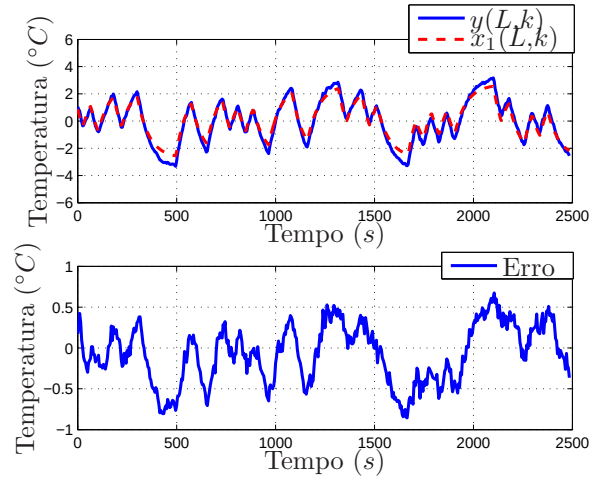
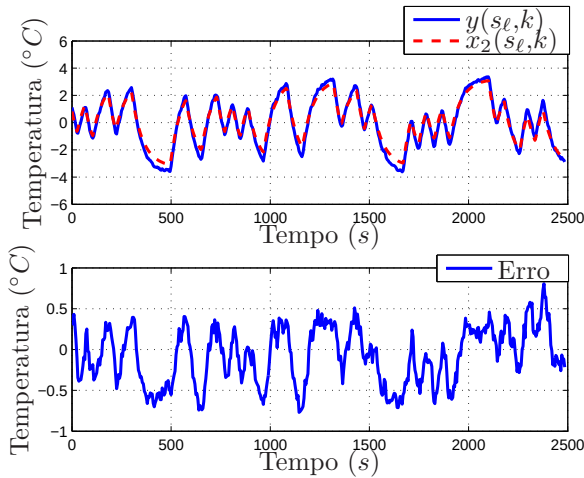
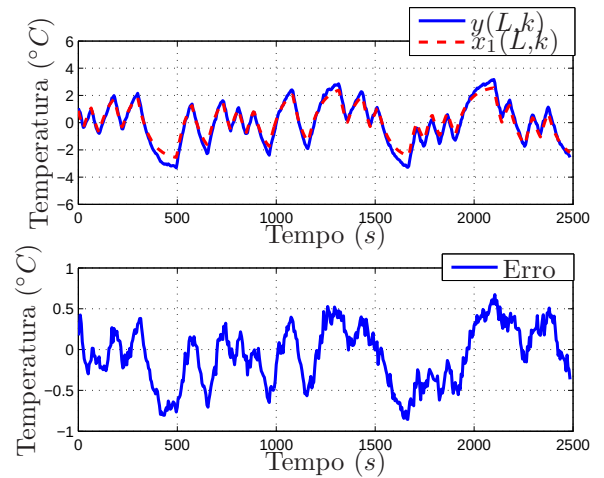
Como era esperado, em relação aos índices NRMSE obtidos para os modelos locais, houve uma pequena redução de desempenho. Tal redução pode ser percebida ao comparar os valores dos índices NRMSE nos pontos $s_\ell = 175mm$, $s_\ell = 700mm$ e $s_\ell = 1225mm$, do estado $x_1(L,k)$, considerando nove pontos para o ajuste de curva, apresentados na Tabela 4.7, com os valores dos índices nos pontos correspondentes apresentados na Tabela 4.6 para a estrutura 07 (1220). Essa redução deve-se ao fato de que os valores da Tabela 4.6 são resultantes da simulação livre do modelo $LPV_{y_i \times y_o}$ que considera como entrada o sinal medido $y(s_j, k)$ e não uma predição como é o caso do estado propagado $x_2(s_\ell, k)$. Finalmente, do ponto de vista de observação de estados, ou seja, em relação à aplicação pretendida, conclui-se, com base nesses resultados, que os modelos são satisfatórios.

Tabela 4.7: Índices NRMSE do modelo SS-LPV avaliados utilizando as *funções scheduling* construídas a partir de 9, 5 e 3 pontos.

Posição s_ℓ (mm)	com 9 pontos		com 5 pontos		com 3 pontos	
	$x_2(s_\ell, k)$	$x_1(L, k)$	$x_2(s_\ell, k)$	$x_1(L, k)$	$x_2(s_\ell, k)$	$x_1(L, k)$
0	85,83%	85,36%	85,86%	80,79%	85,84%	85,00%
175	86,56%	83,87%	86,84%	83,80%	87,04%	84,81%
350	87,18%	82,66%	87,39%	84,75%	86,55%	84,55%
525	86,39%	82,02%	86,08%	85,03%	85,02%	84,17%
700	85,15%	82,27%	85,25%	84,98%	86,25%	83,71%
875	85,19%	83,05%	83,31%	83,70%	81,85%	82,73%
1050	83,75%	83,76%	81,93%	81,01%	80,59%	81,50%
1225	82,98%	82,52%	80,64%	76,70%	78,86%	79,78%

(a) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 9 pontos).(b) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 9 pontos).(c) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 5 pontos).(d) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 5 pontos).(e) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 3 pontos).(f) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 3 pontos).Figura 4.16: Simulação livre do modelo SS-LPV no ponto $s_2 = 175mm$.

(a) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 9 pontos).(b) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 9 pontos).(c) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 5 pontos).(d) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 5 pontos).(e) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 3 pontos).(f) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 3 pontos).Figura 4.17: Simulação livre do modelo SS-LPV no ponto $s_5 = 700mm$.

(a) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 9 pontos).(b) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 9 pontos).(c) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 5 pontos).(d) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 5 pontos).(e) Resposta do estado $x_2(s_\ell, k)$ (com 3 pontos).(f) Resposta do estado $x_1(L, k)$ (com 3 pontos).Figura 4.18: Simulação livre do modelo SS-LPV no ponto $s_8 = 1225mm$.

4.3 Projeto de observadores

Visto que os modelos SS-LPV apresentaram resultados satisfatórios em termos dos índices avaliados, deu-se início ao projeto dos observadores. A utilização de observadores para a estratégia de monitoramento proposta no presente trabalho é fundamental devido à etapa de correção das previsões realizadas pelos modelos. Com essa etapa é possível melhorar a precisão das estimativas. É importante lembrar que durante a operação normal do sistema, apenas um sensor, localizado no final do processo estará disponível, sendo que os sensores intermediários, utilizados na etapa de identificação, são removidos e, dessa forma, deve-se melhorar a confiança nas estimativas. Além disso, no projeto de observadores é possível que variáveis extras sejam acrescentadas aos modelos e estimativas extras, tais como, a estimação em tempo real de perturbações e de parâmetros sejam realizadas. Nesse sentido, é possível que estimativas mais completas sejam obtidas e informações não capturadas na identificação, tais como, distúrbios e não linearidades, sejam recuperadas e utilizadas a favor do objetivo final.

Nessa seção são apresentados os resultados obtidos no projeto de observadores. Tais resultados são expressos em termos dos erros de estimação. Sendo assim, em primeiro lugar os resultados de identificação são reescritos em função dos erros de predição e servem como uma primeira referência para a comparação entre os tipos de observadores implementados. Logicamente, à primeira vista, comparar uma estimação em tempo real com uma predição off-line parece inadequado. Porém, o objetivo é mostrar que a estratégia de monitoramento utilizando observadores é conveniente mesmo que o modelo seja simples, e tenham polarização devido a dinâmicas não modeladas tais como aquelas mencionadas na subseção 2.1.4.

A complexidade dos observadores implementados é aumentada gradativamente e além da comparação com as simulações livres dos modelos SS-LPV, eles são comparados entre si. Como visto na seção anterior, de acordo com o índice NRMSE, não houve diferenças significativas entre os modelos SS-LPV projetados utilizando-se *funções scheduling* construídas a partir dos parâmetros dos modelos locais considerando-se nove, cinco e três posições do espaço. Dessa forma, para avaliar o comportamento dos observadores são utilizados os modelos SS-LPV com nove e com três posições de medição. Para facilitar a notação esses modelos serão referidos, respectivamente, como SS-LPV9 e SS-LPV3. O caso em que usa-se cinco posições de medição não é apresentado para evitar repetições. Os resultados são apresentados graficamente e os dados utilizados para gerá-los também podem ser visualizados nas tabelas do apêndice A.

Os gráficos apresentados nas Figuras 4.19 mostram o comportamento do erro médio, $\bar{e} = \text{média}(x - \hat{x})$, e da variância do erro, σ_e^2 , para os modelos SS-LPV9 e SS-LPV3, avaliados nas posições do espaço utilizadas para identificação. Observe que, como as *funções scheduling* aproximam o comportamento dos parâmetros em função do espaço com um certo grau de incerteza, é possível que o desempenho dos modelos SS-LPV3 seja melhor do que dos modelos SS-LPV9, para alguns locais. Sendo assim, uma forma mais intuitiva de comparar os modelos é observando a média do erro médio de predição, $\bar{e}$, e a média da variância do erro de predição, $\bar{\sigma}_e^2$.

Os gráficos apresentados nas Figuras 4.19(a) e 4.19(b) mostram que a diferença entre as previsões realizadas pelos modelos SS-LPV3 não diferenciam significativamente em relação ao modelo SS-LPV9. Tanto a média quanto a variância do erro de predição permanecem próximas para os dois modelos. Verifica-se que para o estado $x_2(s_\ell, k)$ a variância do erro de predição é

de 0,11. Esse valor está próximo da precisão dos termopares utilizados na identificação cuja variância é de 0,09. O mesmo ocorre com o estado $x_1(L,k)$. Observa-se que, mesmo para o caso em que considera-se três posições para obtenção das *funções scheduling*, a média dos valores permanecem dentro da faixa de precisão dos termopares (Ver Tabela (4.1)).

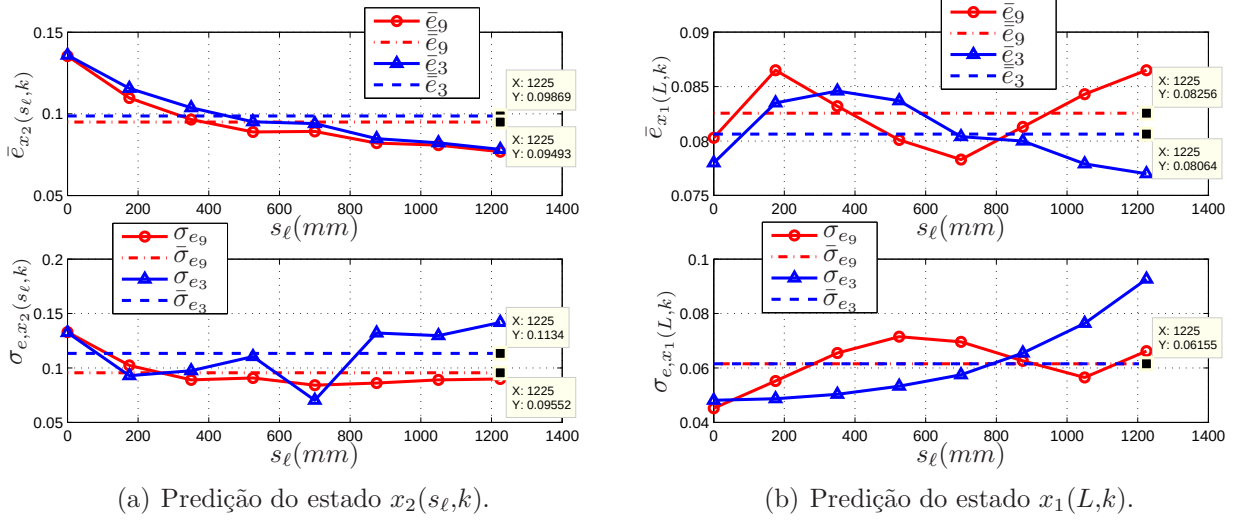


Figura 4.19: Comparação entre as predições dos estados pelos modelos SS-LPV3 (Azul) e SS-LPV9 (Vermelho).

Até aqui, foi visto que os modelos SS-LPV são determinados de acordo com parâmetros definidos por funções espaço-dependentes conhecidas como *funções scheduling*. Neste trabalho, tais funções dependem de uma variável espacial s_ℓ ou $\bar{s}_\ell = L - s_\ell$ conhecidas como *variáveis scheduling*. Uma vez que tais variáveis são informadas pelo usuário, os modelos SS-LPV adaptam-se de forma que, localmente, se tornam modelos a parâmetros concentrados. Sendo assim, daqui em diante, para facilitar a notação, a dependência espacial dos modelos será omitida nas equações, contudo, o leitor deve ter em mente, que os parâmetros, estados e sinais envolvidos dependem de uma variável espacial que define a posição de monitoramento do SPD. Dito isso, a seguir são apresentados os resultados na implementação dos observadores.

4.3.1 O observador de Kalman

Uma vez que foi verificado que a diferença entre as predições realizadas pelos modelos SS-LPV9 e SS-LPV3 são próximas, as análises de desempenho dos observadores são realizadas tomando-se como referência aqueles projetados a partir do modelo SS-LPV3. De qualquer forma, nas tabelas e gráficos a seguir, também são apresentados os resultados para os observadores projetados a partir do modelo SS-LPV9. O primeiro observador projetado foi o observador de Kalman, também conhecido como filtro de Kalman. Para tanto, foi utilizado o modelo em espaço de estados descrito pela equação 4.41. Trata-se, portanto, de uma representação linear invariante no tempo (LTI). Sendo assim, a equação geral (2.43) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f(u(k), y(k), k) = \mathcal{A}\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathbf{w}(k) \\ y(k) &= h(u(k), y(k), k) = \mathcal{C}\mathbf{x}(k) + \mathcal{D}u(k) + v(k) \end{aligned} \quad (4.43)$$

em que $\mathbf{x}_k = [x_1(k) \ x_2(k)]^T$ e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são matrizes constantes dadas por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & (\beta_1 - \beta_0 a_1) \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = [1 \ 0]; \quad \mathcal{D} = 0 \quad (4.44)$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{e_2}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_1}^2 \end{bmatrix}; \quad R = \sigma_v^2 \quad (4.45)$$

são, respectivamente, as matrizes de covariância do ruído de processo e do ruído de medição. Para esse caso, a equação do observador de Kalman é definida como:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathcal{A}(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathcal{K}(k)[\mathcal{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - y(k)]) + \mathcal{B}u(k) \quad (4.46)$$

sendo que $\mathcal{K}(k)$ é o vetor de ganhos ótimos calculado de acordo com o algoritmo apresentado na subseção 2.2.4. Os valores dos elementos de $\mathcal{K}(k)$ são mostrados na Figura 4.20 para $s_2 = 175mm$ (são mostrados até 2000s para facilitar a visualização). A norma do vetor de ganho pode ser interpretada como um índice que indica o esforço do observador para recuperar os estados a partir dos dados de entrada-saída. A média da norma dos ganhos para esse caso, calculada após a convergência, é igual a 0,8231. Note que existe um esforço maior em se estimar o estado $x_1(L,k)$. A partir de $k = 250s$ os ganhos se estabilizam. A condição de observabilidade para esse caso é dada em termos da matriz de observabilidade, de acordo com a equação (2.61).

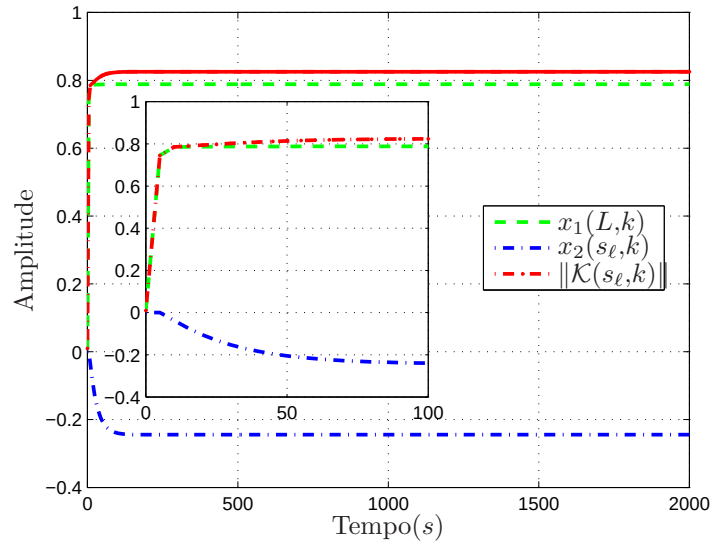


Figura 4.20: Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$.

Os gráficos apresentados nas Figuras 4.21(a) e 4.21(b) mostram as estimações realizadas pelo observador de Kalman. Comparando-se as estimativas obtidas por ele com as previsões do modelo SS-LPV3, observa-se que houve uma piora em relação à média do erro de estimação do estado $x_2(s_\ell, k)$. No entanto, as previsões do modelo consideram apenas a parte dos dados utilizada para validação do mesmo. Contudo, o observador considera os dados completos. Isso sugere que apesar da validação do modelo ter mostrado que ele representa bem o sistema, o observador mostra que ele não é tão geral quando são utilizados os dados completos. Os

resultados das estimções realizadas pelo observador sugerem, portanto, que existem dinâmicas nos dados, tais como, perturbações e não linearidades, que o modelo não consegue explicar. No entanto, é possível que tais informações sejam acrescentadas às dinâmicas do modelo através dos observadores. Como o estado $x_1(L,k)$ é medido, os valores da média e da variância do erro diminuíram melhorando a resposta em relação à filtragem do sinal.

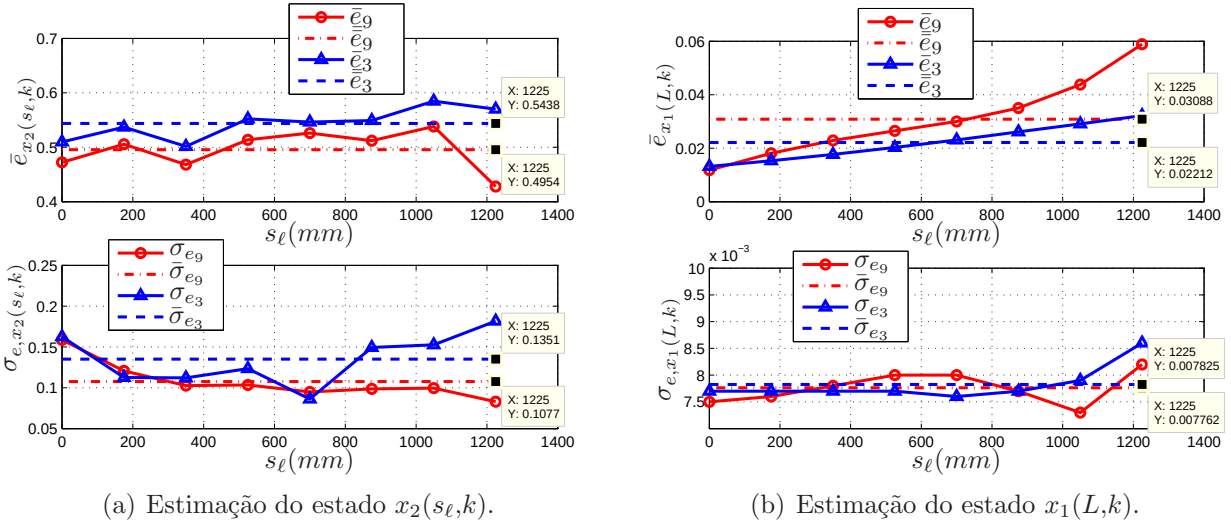


Figura 4.21: Resultados das estimções pelo observador de Kalman (estimação de estados). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.

Os gráficos apresentados na Figura 4.22 mostram as respostas do modelo SS-LPV3 e do observador de Kalman projetado a partir desse modelo. Para o observador, é considerada a mesma porção dos dados utilizada para validação, porém, após a convergência. Por isso, os dados do observador são apresentados após 2500s.

4.3.2 O observador de Kalman com estimação de perturbação na entrada

Como mencionado na subseção 2.1.4, em situações práticas é comum a presença de perturbações externas que induzem a polarização do estimador utilizado para estimar os parâmetros do modelo. Um exemplo de tais perturbações são as tendências que aparecem nos sinais medidos devido, por exemplo, ao entupimento gradativo de válvulas ou dinâmicas lentas de aquecimento. Durante a execução dos experimentos para aquisição de dados do forno percebeu-se que o aquecimento lento das paredes em acrílico, inseriam uma dinâmica extra nas medições. Esse efeito pode ser interpretado como uma entrada extra. Sendo assim, para o projeto do segundo observador essa informação foi acrescentada como um estado $p(k)$ a ser estimado pelo observador de Kalman. Para tanto, assumiu-se que $p(k)$ fosse invariante no tempo ou que sua variação fosse mais lenta que a variação dos estados. Sendo assim, as equações do sistema foram reescritas como:

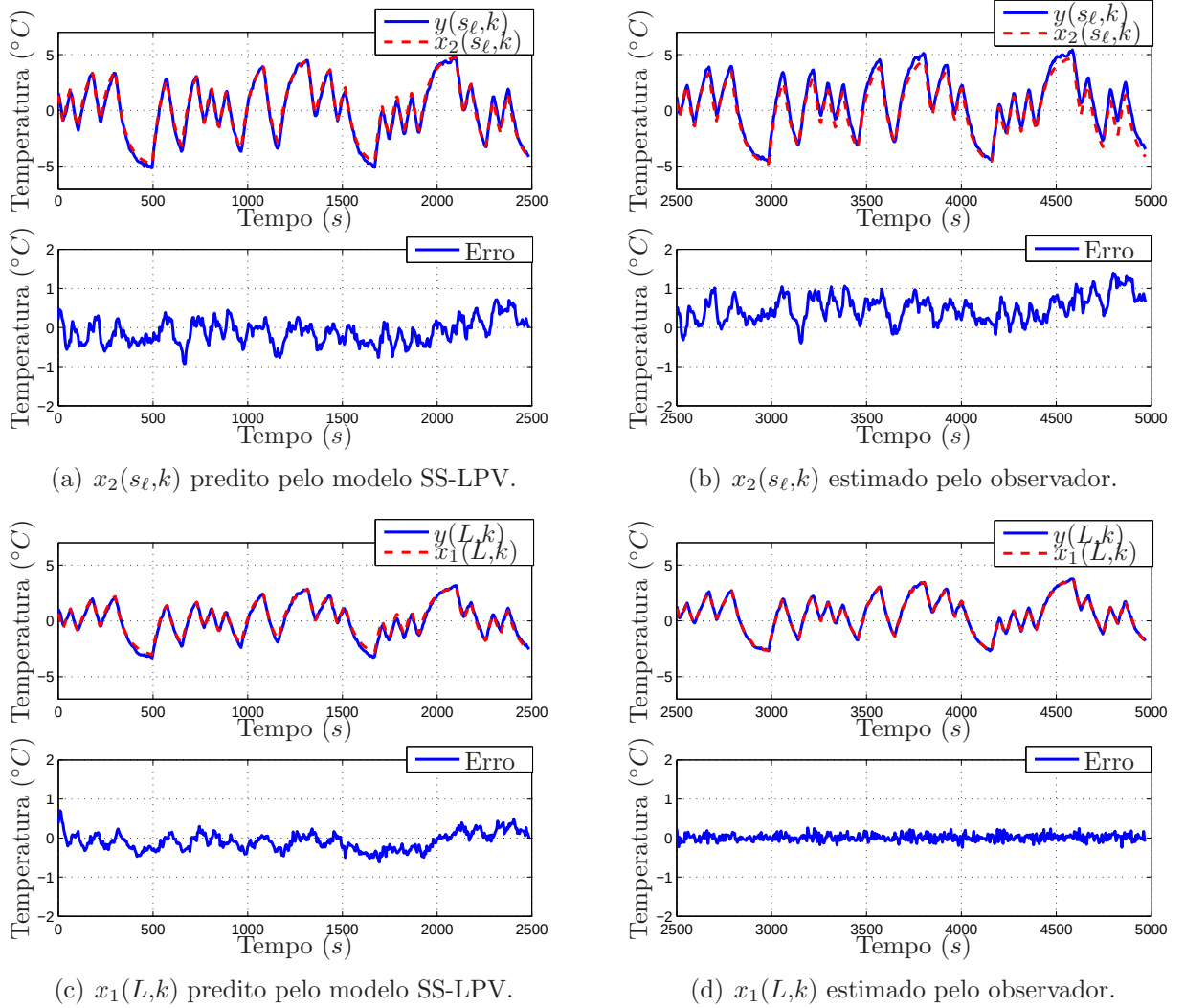


Figura 4.22: Comparação entre as previsões realizadas pelo modelo SS-LPV e as estimativas realizadas pelo observador de Kalman avaliados na posição $s_\ell = 175mm$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathcal{A}\mathbf{x}(k) + \mathcal{B}[u(k) + \delta u(k)] + \mathbf{w}(k) \\ y(k) &= \mathcal{C}\mathbf{x}(k) + v(k) \end{aligned} \quad (4.47)$$

em que $\mathbf{x}_k = [x_1(k) \ x_2(k) \ p(k)]^T$ e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são matrizes constantes dadas por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & (\beta_1 - \beta_0 a_1) & \beta_0 b_1 \\ 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 b_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = [1 \ 0 \ 0]; \quad \mathcal{D} = 0 \quad (4.48)$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{e_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03 \end{bmatrix}; \quad R = \sigma_v^2 \quad (4.49)$$

são, respectivamente, as matrizes de covariância do ruído de processo e do ruído de medição. Para esse caso, o elemento $Q(3,3)$ é determinado experimentalmente de forma a garantir uma velocidade de convergência adequada do observador. O observador não muda e é dado pela

equação (4.46) em que $\mathcal{K}(k)$ é o vetor de ganhos ótimos calculado de acordo com o algoritmo apresentado na subseção 2.2.4. Os valores dos elementos de $\mathcal{K}(k)$ são mostrados na Figura 4.23 para $s_2 = 175mm$. Note que a convergência dos ganhos, para esse caso, demora mais do que a convergência dos ganhos para o observador sem estimação da perturbação na entrada, apresentado na seção anterior. Não houve aumento no ganho relacionado ao estado $x_1(L,k)$ (que é o estado medido), porém, o ganho do estado $x_2(s_\ell,k)$ aumentou. A média da norma do vetor de ganhos, calculada após a convergência, é de 1,6320 e mostra que, como um estado a mais é estimado, um esforço maior do observador é exigido (são mostrados até 2000s para facilitar a visualização). Para esse caso, a condição de observabilidade também é dada em termos da matriz de observabilidade dada pela equação (2.61).

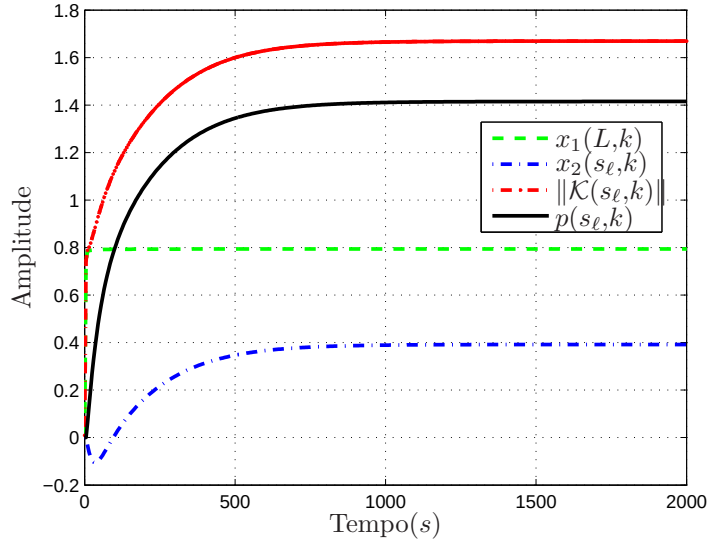


Figura 4.23: Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$.

Os gráficos apresentados na Figura 4.24 mostram os resultados das estimações realizadas pelo observador de Kalman com estimação de perturbação na entrada. Note que os valores da média e da variância do erro de estimação diminuíram significativamente tanto para o estado $x_2(s_\ell, k)$ quanto para o estado $x_1(L, k)$. Em relação ao observador de Kalman sem estimação de perturbação na entrada, a média do erro de estimação do estado $x_2(s_\ell, k)$ diminuiu cerca de 70,41% e a variância do erro diminuiu cerca de 72,73%. Em relação ao estado $x_1(L, k)$, a média do erro diminuiu de cerca de 96,44% e a variância se manteve dentro da mesma ordem de grandeza. O resultado também pode ser visualizado nos gráficos apresentados na Figura 4.25 para o ponto $s_\ell = 175mm$.

O comportamento da perturbação estimada pelo observador é apresentado no gráfico da Figura 4.26. Como era de se esperar, o erro do modelo devido a uma dinâmica não modelada, provavelmente resultante do aquecimento lento das paredes do forno, foi compensado pela estimação da perturbação. Nesse caso, é possível ter uma confiança maior nas estimativas realizadas. Outro fato importante a ser mencionado é que a variação do erro de estimação permaneceu dentro de uma faixa de $\pm 0,5^\circ C$, ou seja, próximo da precisão ($\pm 0,3^\circ C$) dos sensores utilizados nos ensaios para aquisição de dados (Ver subseção 4.1.1).

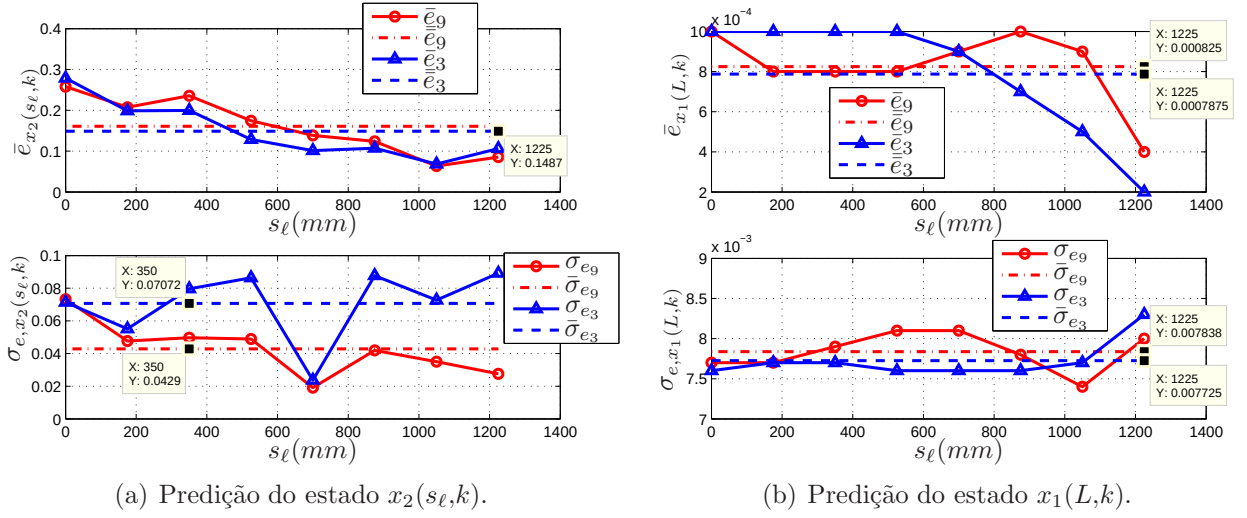


Figura 4.24: Resultados das estimações pelo observador de Kalman (estimação de estados e perturbação na entrada). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.

4.3.3 O observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros

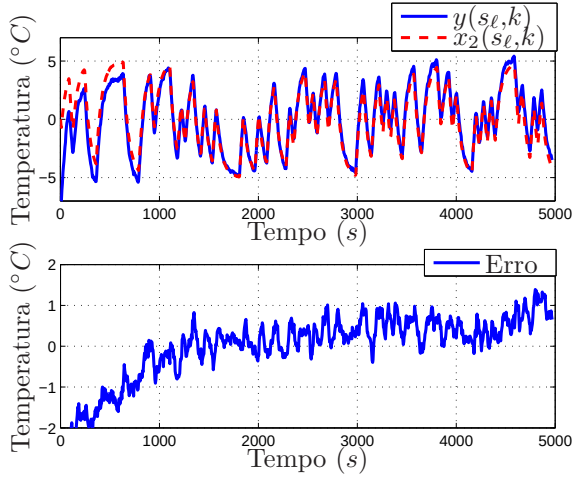
Na subseção anterior foi visto que os sinais medidos na aquisição dos dados para identificação dos modelos locais apresentavam indícios de dinâmicas não capturadas pelos modelos SS-LPV. Foi verificado que uma das causas aparentes era resultado do efeito do aquecimento lento das paredes do forno. Outra questão pertinente tem haver com a qualidade do estimador em relação à polarização. Além da polarização devido a tendências nos sinais medidos, é possível que o modelo definido para o ruído de processo não tenha sido suficiente para reduzir de forma satisfatória o efeito da polarização na estimação dos parâmetros.

Outro ponto importante é que além das incertezas associadas aos parâmetros obtidos na identificação dos modelos locais, existem as incertezas associadas ao processo de ajuste de curva dos parâmetros na obtenção das *funções scheduling*. Dessa forma, outra possibilidade interessante é estimar alguns parâmetros em tempo real, juntamente com os estados. Para isso, os parâmetros a serem estimados devem ser admitidos como variáveis de estado e suas variações devem ser nulas ou mais lentas que as variações dos estados.

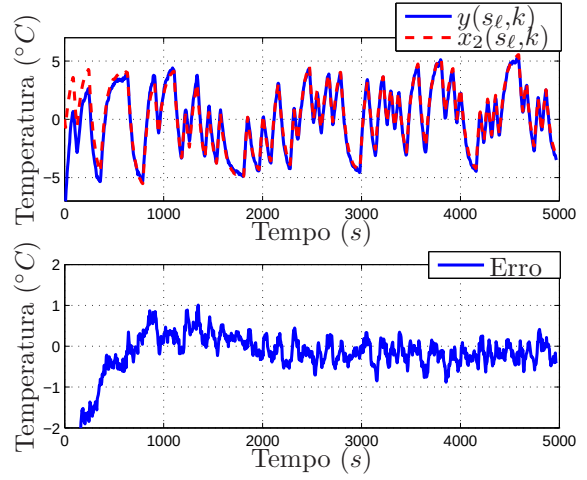
Admitindo-se, por exemplo, os parâmetros b_1 e α_1 como sendo variáveis de estado, ou seja, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(s_\ell, k)$, as equações (4.38) e (4.40) podem ser reescritas fazendo-se $y(L, k) = x_1(L, k)$ e $y(s_\ell, k) = x_2(s_\ell, k)$ como:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\alpha_1(k)x_1(k) + (\beta_1 - \beta_0 a_1)x_2(k) + \beta_0 b_1 u(k) + w_1(k) \\ x_2(k+1) &= -a_1 x_2(k) + b_1(k)u(k) + w_2(k) \end{aligned} \quad (4.50)$$

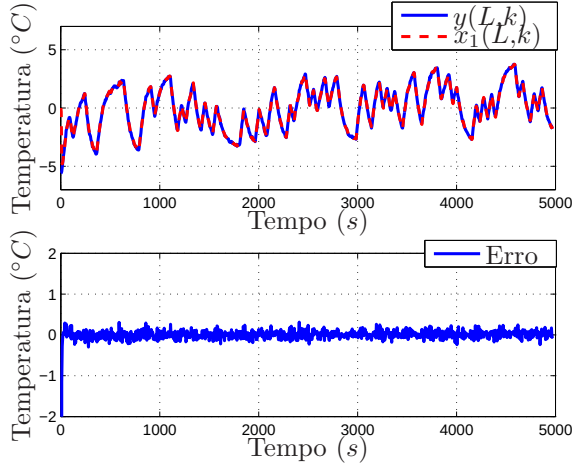
como $u(k)$ e $y(L, k)$ são conhecidos, a equação de estados pode ser escrita como:



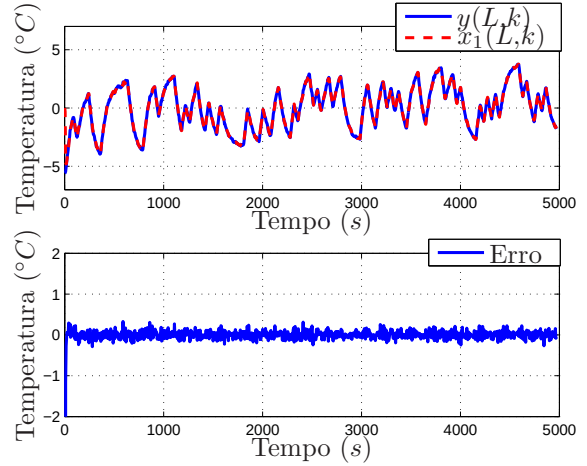
(a) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman sem estimação da perturbação na entrada.



(b) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman com estimação da perturbação na entrada.



(c) $x_1(L, k)$ estimado pelo observador de Kalman sem estimação da perturbação na entrada.



(d) $x_1(L, k)$ estimado pelo observador de Kalman com estimação da perturbação na entrada.

Figura 4.25: Comparação entre as previsões realizadas pelos observadores de Kalman com e sem estimação de perturbação na entrada projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \alpha_1(k+1) \\ b_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 - \beta_0 a_1 & -y(L, k) & \beta_0 u(k) \\ 0 & -a_1 & 0 & u(k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \alpha_1(k) \\ b_1(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}(k) \quad (4.51)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \alpha_1(k) \\ b_1(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (4.52)$$

Observe que, nesse caso, a matriz de estados $\mathcal{A}$ depende do sinal de entrada $u(k)$ e do sinal de saída medido $y(L, k)$. Portanto, ela deixa de ser constante e passa a ser variável no tempo. Dessa forma, de acordo com a teoria exposta na subseção 2.2.1 o modelo passa a ser afin nos

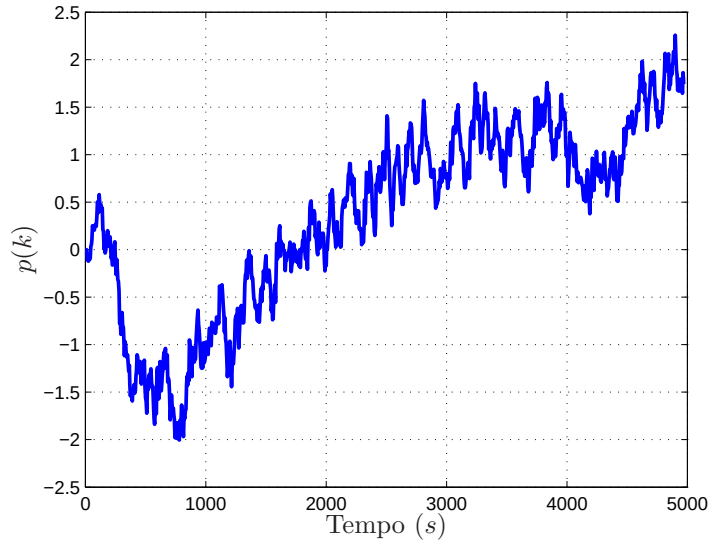


Figura 4.26: Comportamento da perturbação $p(k)$ na entrada do sistema.

estados com injeção da saída. Sendo assim, o observador a ser implementado é não linear e a forma geral do modelo é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f(u(k), y(k), k) = \mathcal{A}(u(k), y(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \\ y(k) &= h(u(k), y(k), k) = \mathcal{C}\mathbf{x}(k) + v(k) \end{aligned} \quad (4.53)$$

sendo que as matrizes Q e R são definidas como:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{e_2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \times 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad R = \sigma_v^2 \quad (4.54)$$

e a equação do observador é da forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathcal{A}(u(k), y(k))(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathcal{K}(k)[\mathcal{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - y(k)]) \quad (4.55)$$

sendo que $\mathcal{K}(k)$ é o vetor de ganhos ótimos calculado de acordo com o algoritmo apresentado na subseção 2.2.4. Os valores dos elementos de $\mathcal{K}(k)$ são mostrados na Figura 4.27 para $s_2 = 175mm$. Note que durante todo o experimento os ganhos variam apresentando um comportamento bastante distinto do que foi verificado nos observadores de Kalman sem e com perturbação na entrada (são mostrados até 2000s para facilitar a visualização). Uma explicação para esse fato é que, como nesse caso a perturbação não é estimada, o seu efeito é distribuído nos estados e parâmetros estimados: $x_1(L, k)$, $x_2(s_\ell, k)$, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(\bar{s}_\ell, k)$. O valor da média norma vetor de ganhos é 1,2391 e, como esperado, o estado $x_2(s_\ell, k)$ é o que mais influencia nesse resultado.

Como se trata de um sistema afin nos estados com injeção da saída, as condições de observabilidade são dadas de acordo com o que foi exposto na subseção 2.2.3 e a observabilidade pode ser monitorada através da implementação da equação (2.56) e do cálculo dos autovalores mínimos

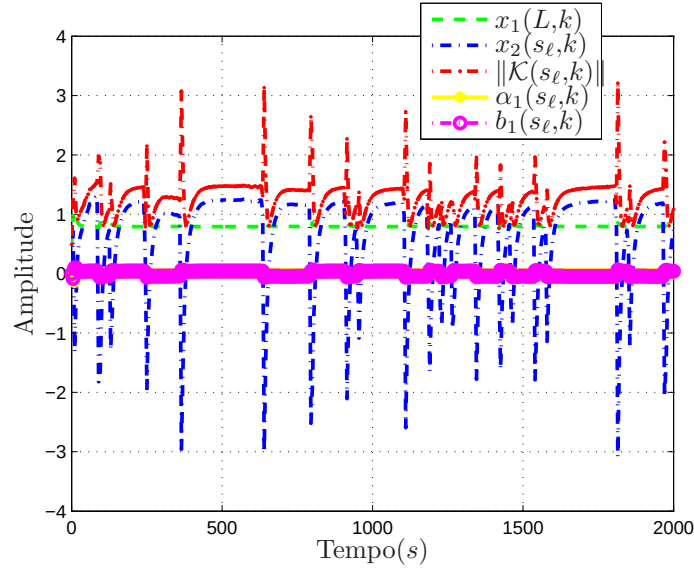


Figura 4.27: Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$.

reais dessa função. O gráfico da Figura 4.28 mostra a evolução dos autovalores mínimos reais calculados para uma janela $k = 50$ amostras. Note que os valores são suficientemente maiores que zero e, sendo assim, o sistema é observável para a entrada aplicada. A área sob a curva é igual a 4,7408 e pode ser utilizada como um parâmetro para comparação da observabilidade entre observadores do mesmo tipo.

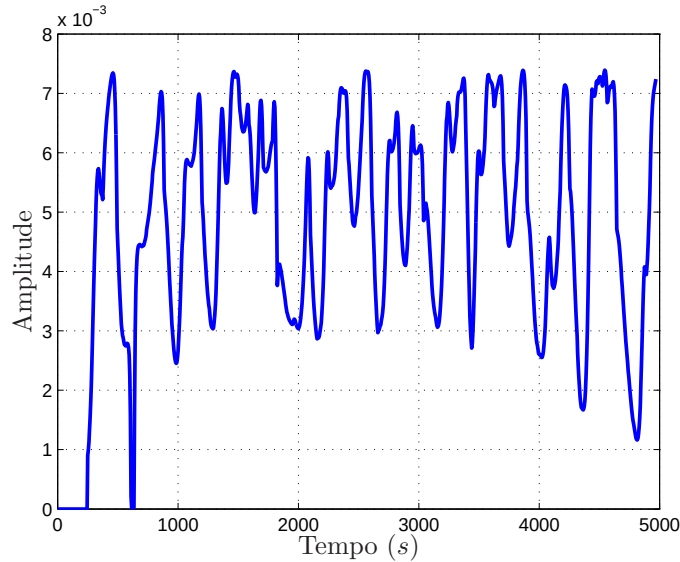


Figura 4.28: Evolução do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$.

Os gráficos apresentados na Figura 4.29 mostram os resultados das estimações realizadas pelo observador de Kalman com estimação de estados e parâmetros mas sem a estimação de perturbação. Verifica-se que a média do erro de estimação voltou a aumentar para o estado $x_2(s_\ell, k)$. No entanto, a variância do erro praticamente não muda. Esse resultado mostra

que realmente existe uma tendência no sinal medido. Como mencionado anteriormente, essa tendência pode ser atribuída à dinâmica lenta de aquecimento das paredes do forno que insere energia extra ao ar que circula no tubo. A média do erro de estimação do estado $x_1(L,k)$ aumentou cerca de 89,77%, porém a variância do erro se manteve na mesma ordem de grandeza. Os resultados podem ser visualizados nos gráficos da Figura 4.30 para a posição $s_2 = 175mm$. Note que volta a aparecer uma tendência no sinal do erro de estimação do estado $x_2(s_\ell, k)$.

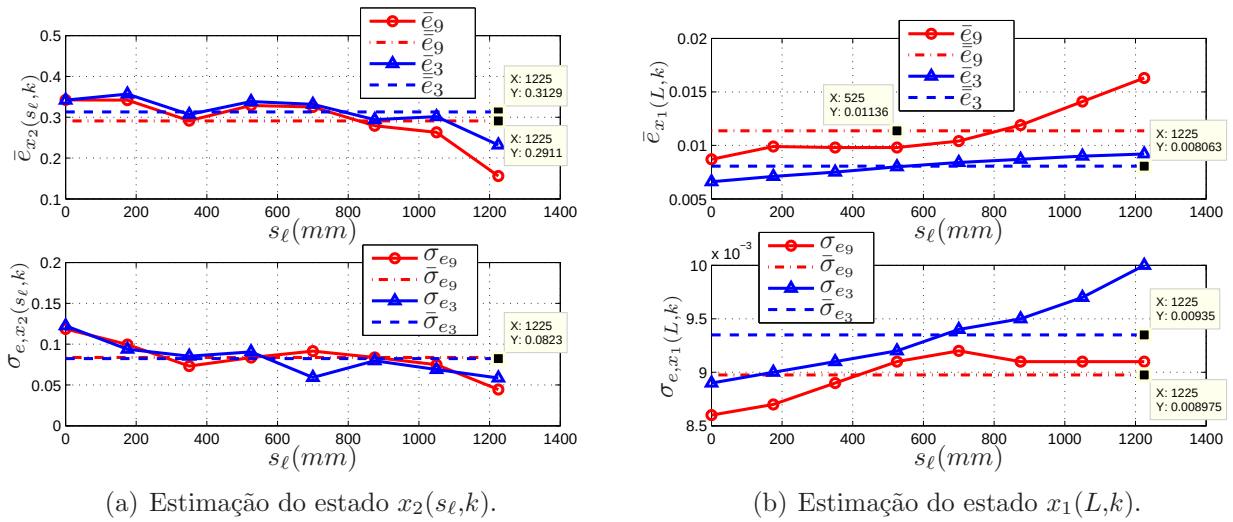
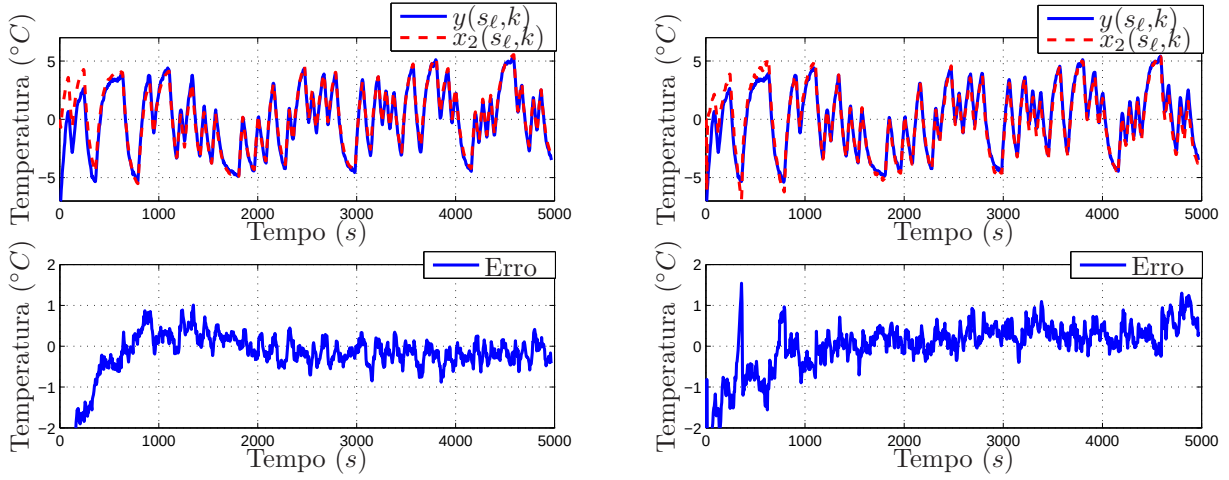


Figura 4.29: Resultados das estimações pelo observador de Kalman (estimação de estados e parâmetros). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.

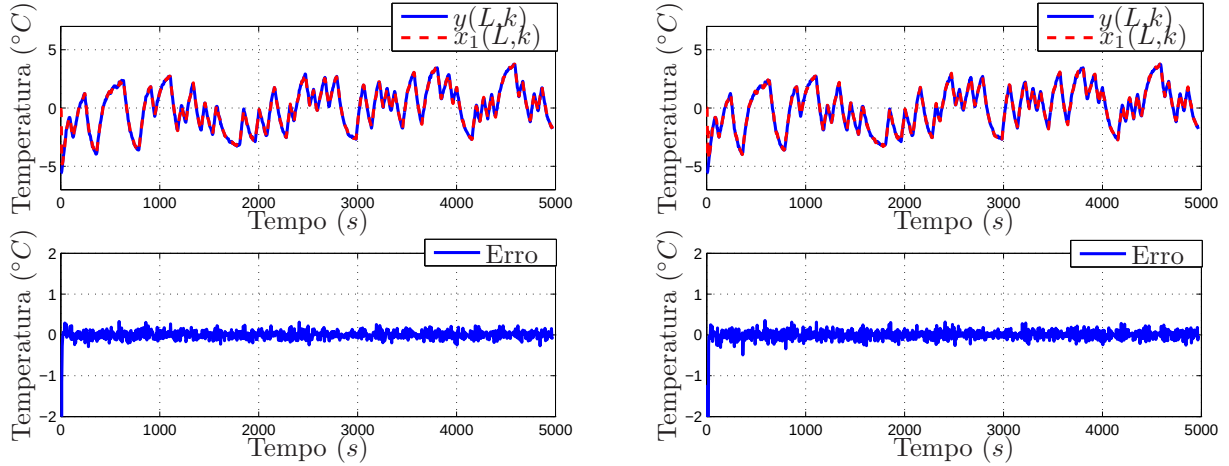
As evoluções dos parâmetros, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(\bar{s}_\ell, k)$ estimados pelo observador podem ser visualizadas nos gráficos da Figura 4.31 para o ponto $s_\ell = 175mm$. Apesar de não possuírem, *a priori*, um significado físico, o monitoramento de tais parâmetros pode ser útil para detecção de falhas. Note que o estado $b_1(s_\ell, k)$ apresenta ruído nas suas estimações. Os valores e as variâncias dos parâmetros estimados pelo observador foram comparadas com as variâncias dos parâmetros estimados pelo estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ). Nesse caso, foram consideradas as estimativas com menor variância. As comparações são apresentadas nas Tabela 4.8 e 4.9 e os resultados mostram que a variância dos parâmetros estimados pelo observador diminuíram cerca de 86,63% para o parâmetro b_1 e 89,73% para o parâmetro α_1 (os valores relativos para cada posição também são apresentados nas tabelas).

4.3.4 O observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação

Na subseção anterior, foi visto que a estimação conjunta de estados e parâmetros é importante porque diminui o efeito da polarização do estimador que resulta em parâmetros incorretos. Contudo, o problema de polarização devido a tendências nos sinais, verificado na subseção 4.3.2, ainda persiste. Sendo assim, além da estimação dos parâmetros, eventuais perturbações



(a) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman com estimação da perturbação na entrada. (b) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros.



(c) $x_1(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman com estimação da perturbação na entrada. (d) $x_1(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros.

Figura 4.30: Comparação entre as previsões realizadas pelos observadores de Kalman com estimação de perturbação na entrada e o observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros, projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$.

nos estados foram estimadas. Para tanto, as equações de estado (4.50) foram reescritas como:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\alpha_1(k)x_1(k) + (\beta_1 - \beta_0 a_1)x_2(k) + \beta_0 b_1 u(k) + \beta_1 p(k) + w_1(k) \\ x_2(k+1) &= -a_1 x_2(k) + b_1(k)u(k) + p(k) + w_2(k) \end{aligned} \quad (4.56)$$

resultando na representação em espaço de estados dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \alpha_1(k+1) \\ b_1(k+1) \\ p(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 - \beta_0 a_1 & -y(L, k) & \beta_0 u(k) & \beta_1 \\ 0 & -a_1 & 0 & u(k) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \alpha_1(k) \\ b_1(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + \mathbf{w}(k), \quad (4.57)$$

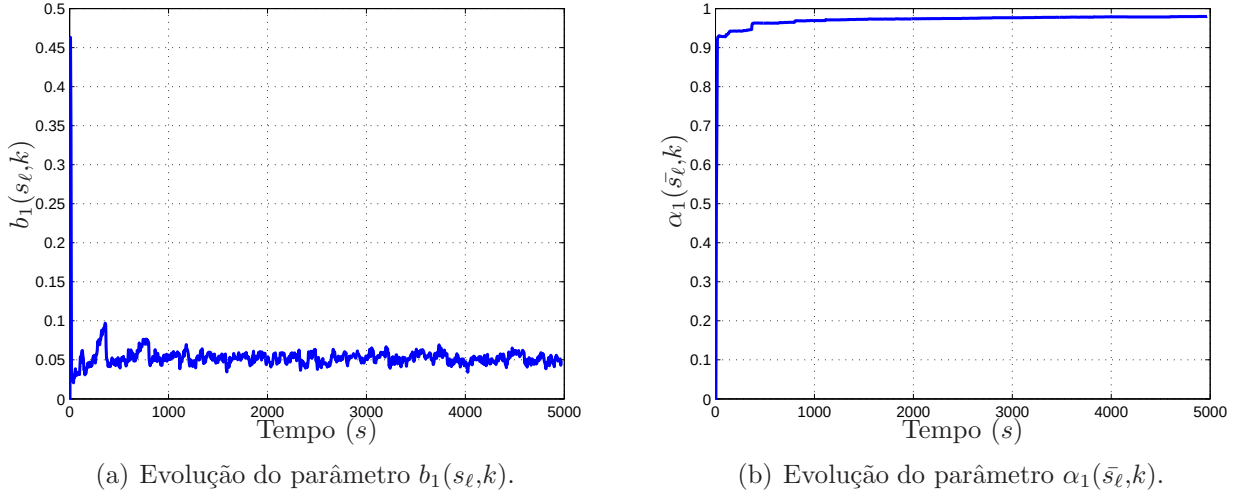


Figura 4.31: Evolução dos parâmetros $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(\bar{s}_\ell, k)$ estimados pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação, avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$.

Tabela 4.8: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.

s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	
0	0,0569	$1,60 \times 10^{-3}$	0,0560	$2,36 \times 10^{-4}$	85,25%
175	0,0533	$1,70 \times 10^{-3}$	0,0517	$2,09 \times 10^{-4}$	87,73%
350	0,0535	$1,50 \times 10^{-3}$	0,0480	$1,86 \times 10^{-4}$	87,62%
525	0,0500	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0447	$1,66 \times 10^{-4}$	84,87%
700	0,0400	$1,20 \times 10^{-3}$	0,0418	$1,50 \times 10^{-4}$	87,47%
875	0,0437	$1,00 \times 10^{-3}$	0,0391	$1,37 \times 10^{-4}$	86,33%
1050	0,0376	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0368	$1,25 \times 10^{-4}$	88,62%
1225	0,0369	$0,70 \times 10^{-3}$	0,0346	$1,15 \times 10^{-4}$	83,56%
Média	—	$1,24 \times 10^{-3}$	—	$1,65 \times 10^{-4}$	86,63%

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \alpha_1(k) \\ b_1(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + v(k), \quad (4.58)$$

sendo que as matrizes Q e R são definidas como:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{e_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{e_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \times 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad R = \sigma_v^2 \quad (4.59)$$

e modelo do observador é o mesmo do caso anterior (Ver equação (4.55)) em que $\mathcal{K}(k)$ é o vetor de ganhos ótimos calculado de acordo com o algoritmo apresentado na subseção 2.2.4.

Tabela 4.9: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.

s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	
0	-0,9786	$1,23 \times 10^{-5}$	-0,9805	$5,70 \times 10^{-6}$	53,50%
175	-0,9719	$3,86 \times 10^{-5}$	-0,9786	$5,50 \times 10^{-6}$	85,76%
350	-0,9625	$1,02 \times 10^{-5}$	-0,9767	$5,30 \times 10^{-6}$	94,82%
525	-0,9600	$6,09 \times 10^{-5}$	-0,9747	$5,10 \times 10^{-6}$	91,60%
700	-0,9706	$2,25 \times 10^{-5}$	-0,9725	$5,00 \times 10^{-6}$	77,94%
875	-0,9525	$6,85 \times 10^{-5}$	-0,9701	$4,90 \times 10^{-6}$	92,90%
1050	-0,9481	$3,88 \times 10^{-5}$	-0,9673	$4,80 \times 10^{-6}$	87,61%
1225	-0,9316	$5,62 \times 10^{-5}$	-0,9641	$4,80 \times 10^{-6}$	91,46%
Média	—	$5,00 \times 10^{-5}$	—	$5,13 \times 10^{-6}$	89,73%

Os valores dos elementos de $\mathcal{K}(k)$ são mostrados na Figura 4.32 para $s_2 = 175mm$. Note que durante todo o experimento os ganhos apresentam uma variação muito mais suave que no caso anterior, inclusive, apresentando valores aproximadamente constantes (ou com pequena variância) a partir de $k = 1000s$. Uma explicação para esse fato é que, como a perturbação é estimada, os parâmetros apresentam melhor convergência. A média da norma do vetor de ganhos é igual a 0.8064 e foi menor que a média da norma do vetor de ganhos do caso anterior. Esse resultado mostra que devido à estimação da perturbação, o observador tem mais facilidade em estimar os outros estados.

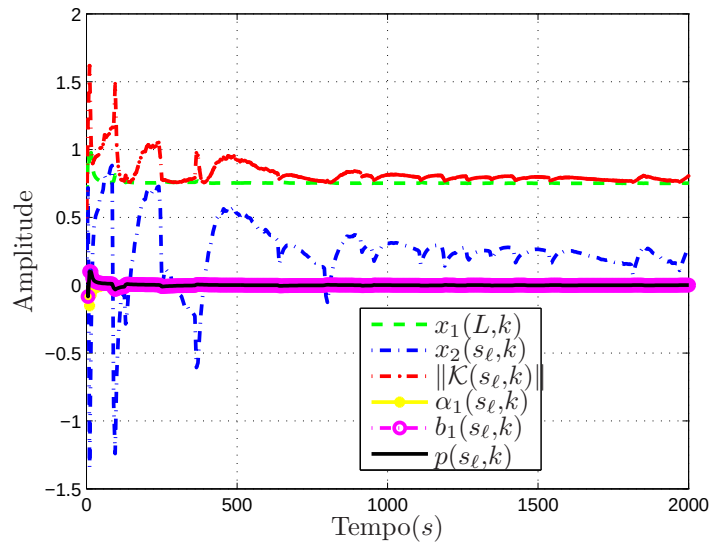


Figura 4.32: Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$.

Como no caso anterior, as condições de observabilidade são dadas de acordo com o que foi exposto na subseção 2.2.3 e a observabilidade pode ser monitorada através da implementação da equação (2.56) e do cálculo dos autovalores mínimos reais dessa função. O gráfico da Figura 4.33 mostra a evolução dos autovalores mínimos reais calculados para uma janela, $k = 50$ amostras.

Note que os valores são suficientemente maiores que zero e, sendo assim, o sistema é observável para a entrada aplicada. A área sob a curva é igual a 1,004. Observe que esse valor é menor que o valor calculado para o caso anterior (sem estimação de perturbação), porém, o valor da média da norma do erro é menor. Isso indica que, apesar do Gramiano calculado para o observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros (sem estimação da perturbação) mostrar que tal configuração é mais observável porque são estimados menos estados, o esforço realizado para estimá-los é maior porque o modelo representa menos a dinâmica do sistema.

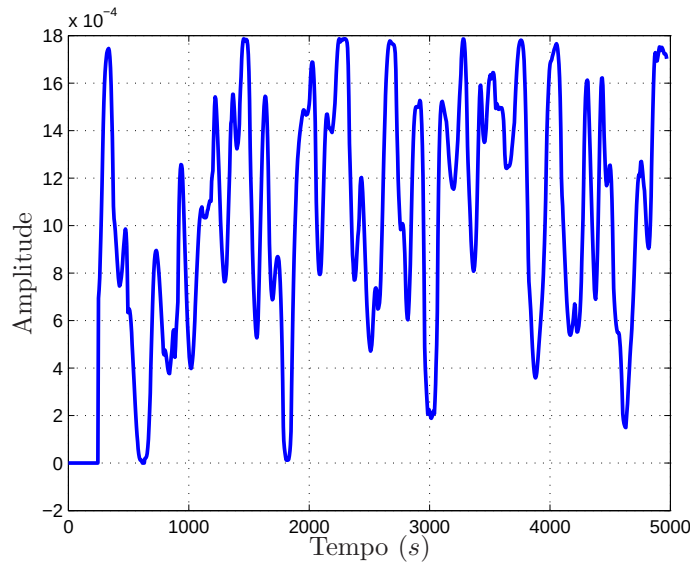


Figura 4.33: Evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$.

Os gráficos apresentados na Figura 4.34 mostram os resultados das estimações realizadas pelo observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação. Para o estado $x_2(s_\ell, k)$ em relação ao segundo observador, que apresentava o melhor desempenho até então, houve uma melhora em relação ao erro médio, de aproximadamente 69,87% e a variância se manteve. Para o estado $x_1(L, k)$, a média do erro aumentou aproximadamente 31,52% e a variância se manteve na mesma ordem de grandeza. Apesar do erro médio do estado $x_1(L, k)$ ter aumentado um pouco, o resultado mais significativo para o objetivo do projeto é relativo ao estado $x_2(s_\ell, k)$. Os resultados podem ser visualizados nos gráficos da Figura 4.35 para a posição $s_2 = 175mm$.

Os gráficos apresentados na Figura 4.36 mostram o comportamento dos parâmetros, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(s_\ell, k)$, obtidos utilizando esse observador, avaliados na posição $s_2 = 175mm$. Note que o parâmetro $b_1(s_\ell, k)$ quase não apresenta variações nas suas estimações. O comportamento da perturbação estimada pelo observador é apresentado no gráfico da Figura 4.37. Os valores e as variâncias dos parâmetros estimados pelo observador foram comparadas com as variâncias dos parâmetros estimados pelo estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ). Nesse caso, foram consideradas as estimativas com menor variância. As comparações são apresentadas nas Tabela 4.10 e 4.11 e os resultados mostram que a variância dos parâmetros estimados pelo observador diminuíram cerca de 99,96% para o parâmetro b_1 e 90,75% para o parâmetro α_1 (os

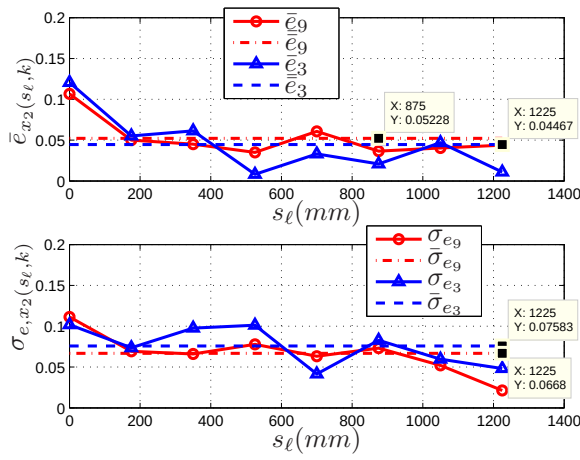
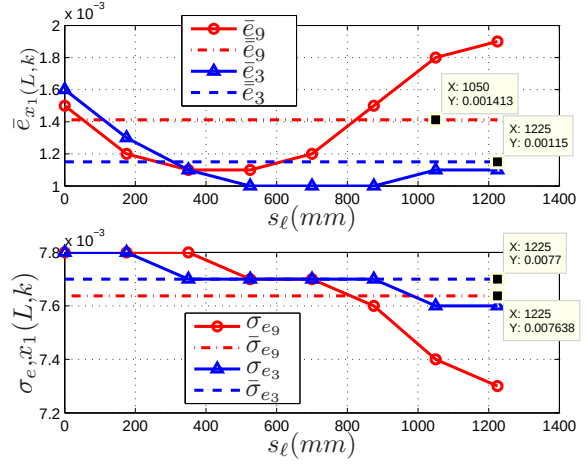
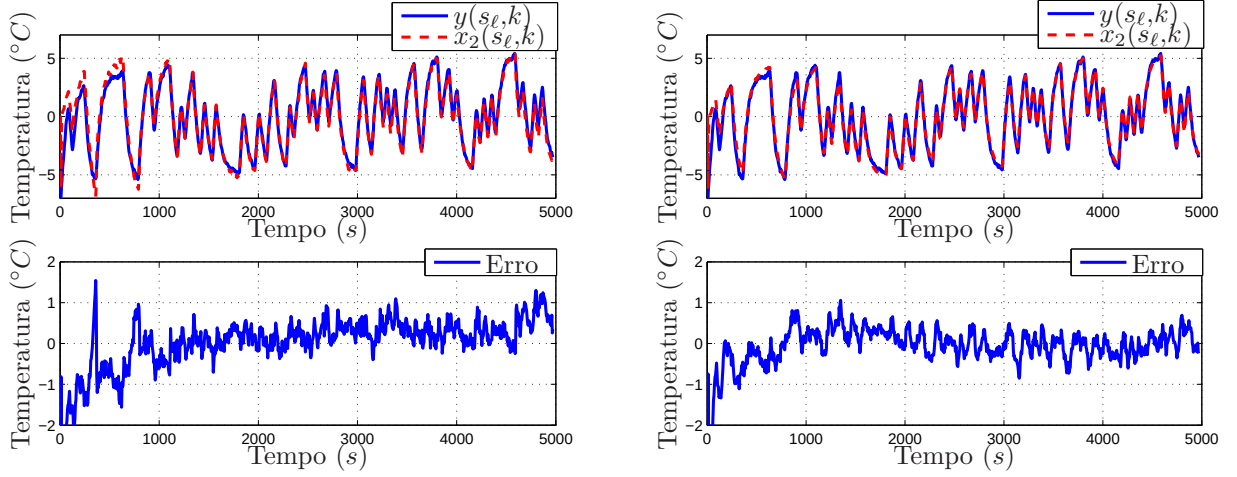
(a) Estimação do estado $x_2(s_\ell, k)$.(b) Estimação do estado $x_1(L, k)$.

Figura 4.34: Resultados das estimações dos estados do observador de Kalman (estimação de estados, parâmetros e perturbação). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.

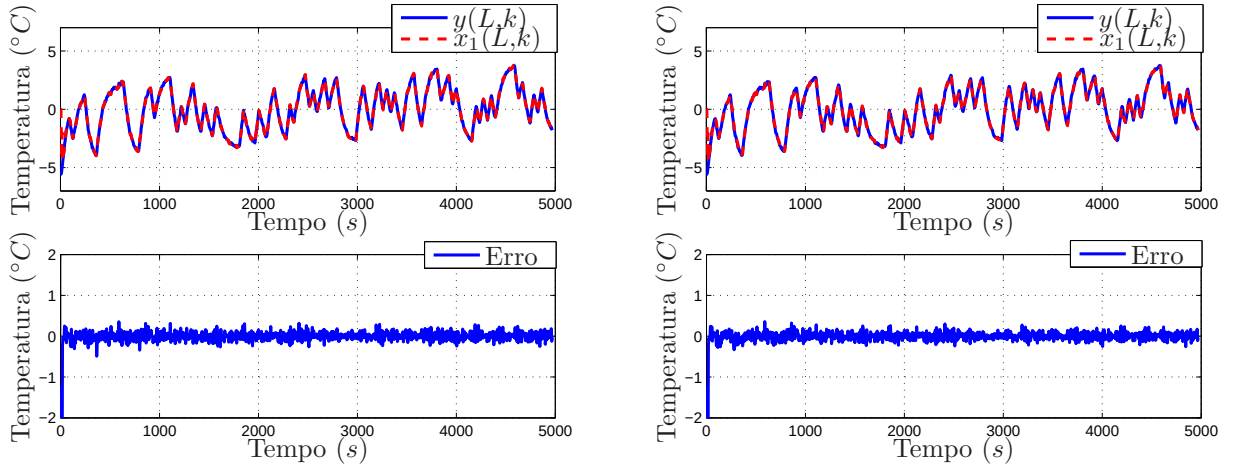
valores relativos para cada posição também são apresentados nas tabelas).

Tabela 4.10: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.

s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	
0	0,0569	$1,60 \times 10^{-3}$	0,0553	$8,82 \times 10^{-7}$	99,94%
175	0,0533	$1,70 \times 10^{-3}$	0,0511	$7,02 \times 10^{-7}$	99,96%
350	0,0535	$1,50 \times 10^{-3}$	0,0474	$5,62 \times 10^{-7}$	99,96%
525	0,0500	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0442	$4,51 \times 10^{-7}$	99,96%
700	0,0400	$1,20 \times 10^{-3}$	0,0414	$3,63 \times 10^{-7}$	99,97%
875	0,0437	$1,00 \times 10^{-3}$	0,0388	$2,93 \times 10^{-7}$	99,97%
1050	0,0376	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0366	$2,36 \times 10^{-7}$	99,98%
1225	0,0369	$0,70 \times 10^{-3}$	0,0345	$1,89 \times 10^{-7}$	99,97%
Média	—	$1,24 \times 10^{-3}$	—	$4,60 \times 10^{-7}$	99,96%



(a) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros. (b) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação.



(c) $x_1(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros. (d) $x_1(s_\ell, k)$ estimado pelo observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação.

Figura 4.35: Comparação entre as estimações realizadas pelo observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros sem estimação de perturbação e com estimação de perturbação projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$.

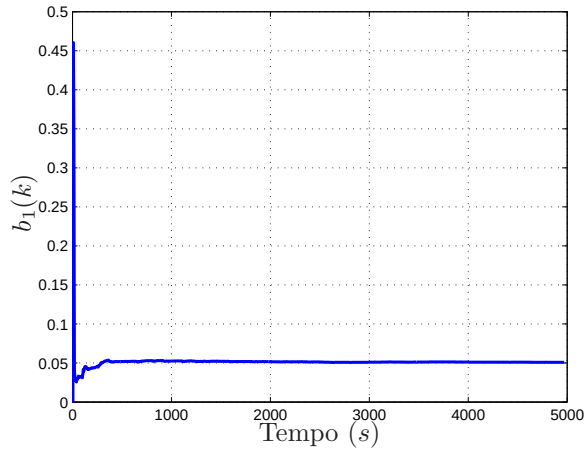
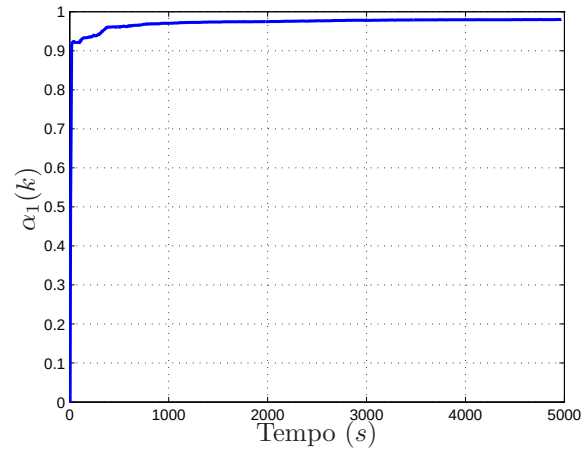
(a) Evolução do parâmetro b_1 .(b) Evolução do parâmetro α_1 .

Figura 4.36: Evolução dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo observador de Kalman com estimação de perturbação avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$.

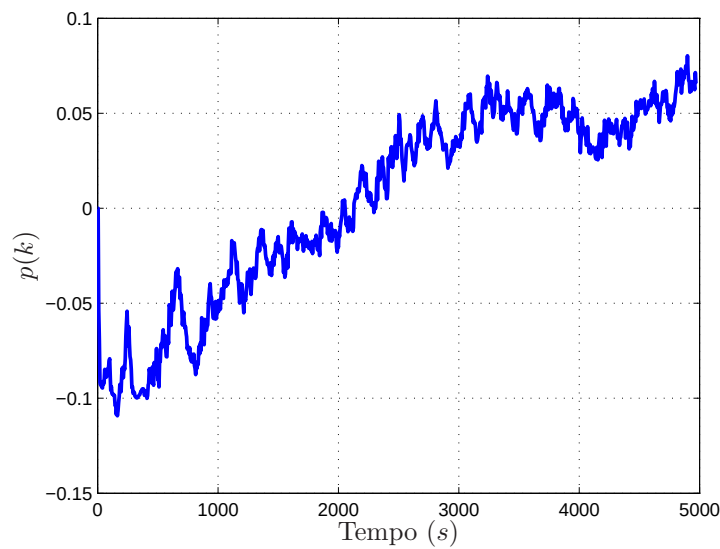


Figura 4.37: Comportamento da perturbação $p(k)$.

Tabela 4.11: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.

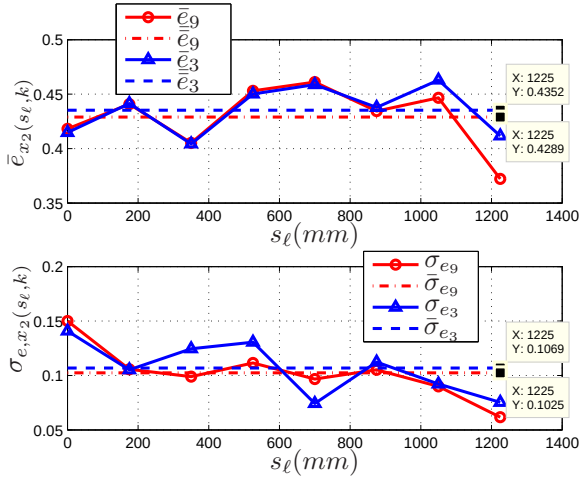
s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	
0	-0,9786	$1,23 \times 10^{-5}$	-0,9814	$5,47 \times 10^{-6}$	55,50%
175	-0,9719	$3,86 \times 10^{-5}$	-0,9795	$5,20 \times 10^{-6}$	86,52%
350	-0,9625	$10,21 \times 10^{-5}$	-0,9775	$4,93 \times 10^{-6}$	95,17%
525	-0,9600	$6,09 \times 10^{-5}$	-0,9755	$4,68 \times 10^{-6}$	92,31%
700	-0,9706	$2,25 \times 10^{-5}$	-0,9733	$4,45 \times 10^{-6}$	80,22%
875	-0,9525	$6,85 \times 10^{-5}$	-0,9707	$4,25 \times 10^{-6}$	93,80%
1050	-0,9481	$3,88 \times 10^{-5}$	-0,9677	$4,08 \times 10^{-6}$	89,48%
1225	-0,9316	$5,62 \times 10^{-5}$	-0,9641	$3,93 \times 10^{-6}$	93,00%
Média	—	$5,00 \times 10^{-5}$	—	$4,63 \times 10^{-6}$	90,75%

4.3.5 Observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados e parâmetros)

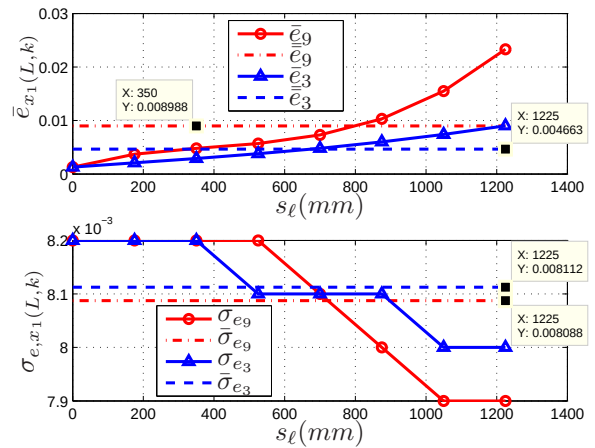
Outro tipo de observador projetado foi o observador exponencial com fator de esquecimento. Ao contrário dos observadores apresentados até aqui, este não utiliza a informação da matriz de covariância, Q , para o cálculo do vetor de ganhos $\mathcal{K}(k)$. Outra diferença importante é que enquanto o observador de Kalman tem prioridade sobre a filtragem, o observador exponencial com fator de esquecimento tem prioridade sobre a velocidade de convergência. Os observadores exponenciais com fator de esquecimento foram implementados para os dois últimos casos discutidos anteriormente, ou seja, para estimação de estados e parâmetros e para estimação de estados, parâmetros e perturbação.

Para estimação de estados e parâmetros, o modelo utilizado é o mesmo modelo apresentado na subseção 4.3.3 pelas equações de (4.50) a (4.54). A equação do observador também não muda e é descrita pela equação (4.55). Contudo, o cálculo do ganho $\mathcal{K}(k)$ é realizado de acordo com o algoritmo apresentado na subseção 2.2.5, em que δ é escolhido arbitrariamente para aumentar ou diminuir a velocidade de convergência do observador.

Os gráficos apresentados na Figura 4.38 mostram os resultados obtidos para o observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados e parâmetros. Comparando-se tais resultados com os resultados obtidos para o mesmo caso utilizando-se o observador de Kalman, nota-se que não houve grandes diferenças em relação à média e à variância do erro de estimação. No entanto, como era esperado, devido ao objetivo do observador, o observador de Kalman apresentou um resultado um pouco melhor em relação às médias do erro de estimação.



(a) Predição do estado $x_2(s_\ell, k)$.



(b) Predição do estado $x_1(L, k)$.

Figura 4.38: Resultados das estimações pelo observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados e parâmetros). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.

O gráfico apresentado na Figura 4.39 mostra a evolução dos elementos do vetor de ganhos do observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados e parâmetros. Verifica-se que o comportamento de tais elementos é semelhante ao comportamento dos elementos do vetor de ganhos, para o observador de Kalman, calculado para o mesmo caso. Contudo

os valores dos ganhos ficam mais próximos de zero e o valor da média da norma do vetor de ganhos diminui para 0,3817. Mais uma vez, como os objetivos de observação são diferentes, esses valores não podem ser diretamente comparados.

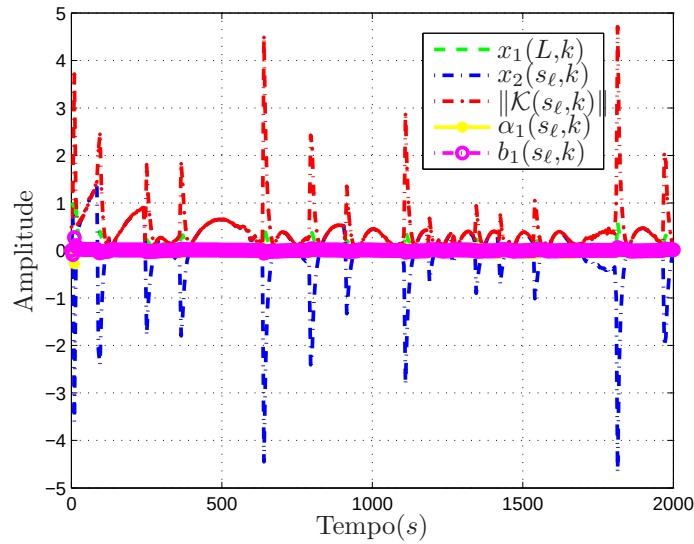


Figura 4.39: Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$.

O gráfico apresentado na Figura 4.40 mostra a evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade, calculado para uma janela, $k = 50$ amostras, avaliado na posição $s_2 = 175mm$. Observa-se que o seu comportamento não muda em relação ao observador de Kalman e o valor da área sob o gráfico permanece igual a 4,7402. Esse resultado é esperado porque a característica de observabilidade é do sistema e não do observador.

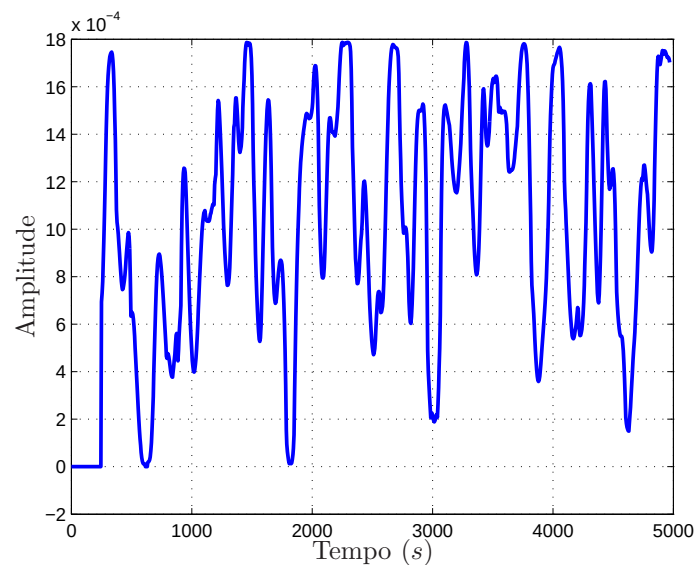


Figura 4.40: Evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$.

Os gráficos apresentados na Figura 4.41 mostram o comportamento dos parâmetros, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(\bar{s}_\ell, k)$, obtidos utilizando esse observador, avaliados na posição $s_2 = 175mm$. Note que os parâmetros apresentam poucas variações nas suas estimações. Os valores e as variâncias dos parâmetros estimados pelo observador foram comparadas com as variâncias dos parâmetros estimados pelo estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ). Nesse caso, foram consideradas as estimativas com menor variância. As comparações são apresentadas nas Tabelas 4.12 e 4.13 e os resultados mostram que a variância dos parâmetros estimados pelo observador diminuíram cerca de 99,98% para o parâmetro b_1 e 95,17% para o parâmetro α_1 (os valores relativos para cada posição também são apresentados nas tabelas).

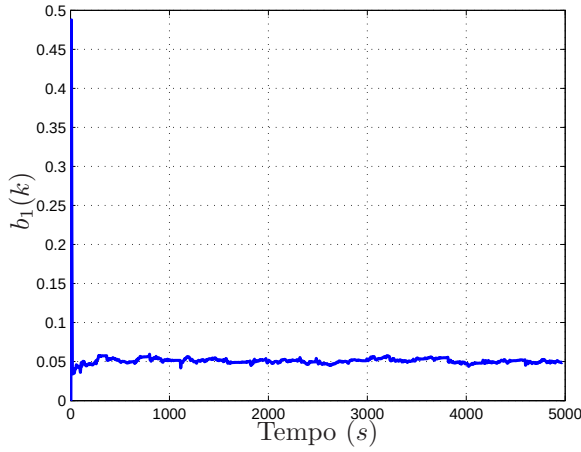
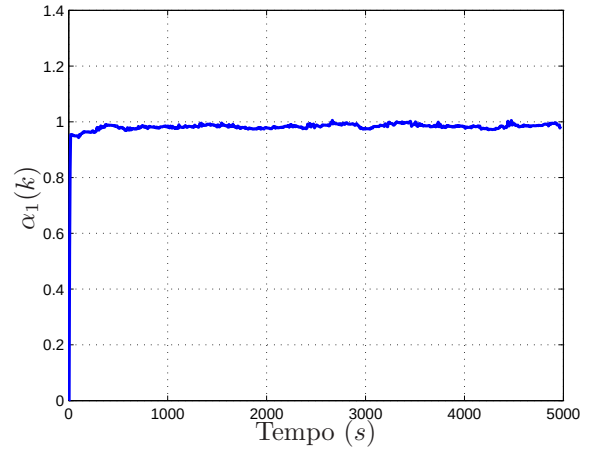
(a) Evolução do parâmetro b_1 .(b) Evolução do parâmetro α_1 .

Figura 4.41: Evolução dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo observador exponencial com fator de esquecimento, sem estimação de perturbação na entrada avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$.

Tabela 4.12: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.

s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	
0	0,0569	$1,60 \times 10^{-3}$	0,0553	$4,48 \times 10^{-7}$	99,97%
175	0,0533	$1,70 \times 10^{-3}$	0,0511	$3,82 \times 10^{-7}$	99,98%
350	0,0535	$1,50 \times 10^{-3}$	0,0474	$3,29 \times 10^{-7}$	99,98%
525	0,0500	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0442	$2,85 \times 10^{-7}$	99,97%
700	0,0400	$1,20 \times 10^{-3}$	0,0413	$2,49 \times 10^{-7}$	99,98%
875	0,0437	$1,00 \times 10^{-3}$	0,0387	$2,19 \times 10^{-7}$	99,98%
1050	0,0376	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0364	$1,94 \times 10^{-7}$	99,98%
1225	0,0369	$0,70 \times 10^{-3}$	0,0344	$1,72 \times 10^{-7}$	99,98%
Média	—	$1,24 \times 10^{-3}$	—	$2,85 \times 10^{-7}$	99,98%

Tabela 4.13: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman sem estimação de perturbação.

s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	
0	-0,9786	$1,23 \times 10^{-5}$	-0,9847	$2,40 \times 10^{-6}$	80,56%
175	-0,9719	$3,86 \times 10^{-5}$	-0,9826	$2,40 \times 10^{-6}$	93,80%
350	-0,9625	$10,21 \times 10^{-5}$	-0,9805	$2,40 \times 10^{-6}$	97,65%
525	-0,9600	$6,09 \times 10^{-5}$	-0,9784	$2,40 \times 10^{-6}$	96,05%
700	-0,9706	$2,25 \times 10^{-5}$	-0,9761	$2,40 \times 10^{-6}$	89,29%
875	-0,9525	$6,85 \times 10^{-5}$	-0,9735	$2,40 \times 10^{-6}$	96,47%
1050	-0,9481	$3,88 \times 10^{-5}$	-0,9706	$2,40 \times 10^{-6}$	93,73%
1225	-0,9316	$5,62 \times 10^{-5}$	-0,9672	$2,50 \times 10^{-6}$	95,64%
Média	—	$5,00 \times 10^{-5}$	—	$2,41 \times 10^{-6}$	95,17%

4.3.6 Observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados, parâmetros e perturbação)

O observador exponencial com fator de esquecimento também foi implementado para estimação de estados, parâmetros e perturbação. Para tanto, o modelo utilizado foi o mesmo modelo apresentado na subseção 4.3.4 pelas equações de (4.56) a (4.59). A equação do observador também não muda e é descrita pela equação (4.55). Contudo, o cálculo do ganho $\mathcal{K}(k)$ é realizado de acordo com o algoritmo apresentado na subseção 2.2.5, em que δ é escolhido arbitrariamente para aumentar ou diminuir a velocidade de convergência do observador.

Os gráficos apresentados nas Figuras 4.42 mostram os resultados obtidos para o observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados, parâmetros e perturbação. Verifica-se que o erro médio e a variância do erro tanto para o estado $x_2(s_\ell, k)$ quanto para o estado $x_1(L, k)$, em relação ao mesmo caso utilizando-se o observador de Kalman, pioraram, principalmente em relação à média do erro de estimação. Mais uma vez, como objetivo do observador exponencial com fator de esquecimento é a velocidade de convergência, esse resultado era esperado. Dessa forma, para a aplicação pretendida, o observador de Kalman apresentou melhor desempenho que o observador exponencial com fator de esquecimento em relação ao erro de estimação.

Os gráficos apresentados nas Figuras 4.43 mostram o desempenho dos observadores exponenciais com fator de esquecimento para os dois casos citados, ou seja, para estimação de estados e parâmetros com e sem estimação de perturbação. Verifica-se que o segundo observador, apresentou melhor desempenho que o primeiro mantendo o erro de estimação em torno de zero (Isso também ocorreu utilizando-se o observador de Kalman). Note também que, em relação ao observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação, a velocidade de convergência do observador exponencial com fator de esquecimento aumentou, para ver isso, é interessante comparar o gráfico da Figura 4.43(b) com o gráfico da Figura 4.35(b).

O gráfico apresentado na Figura 4.44 mostra a evolução dos elementos do vetor de ganhos do observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados, parâmetros e perturbação, avaliado na posição $s_2 = 175\text{mm}$. Verifica-se que o comportamento de tais

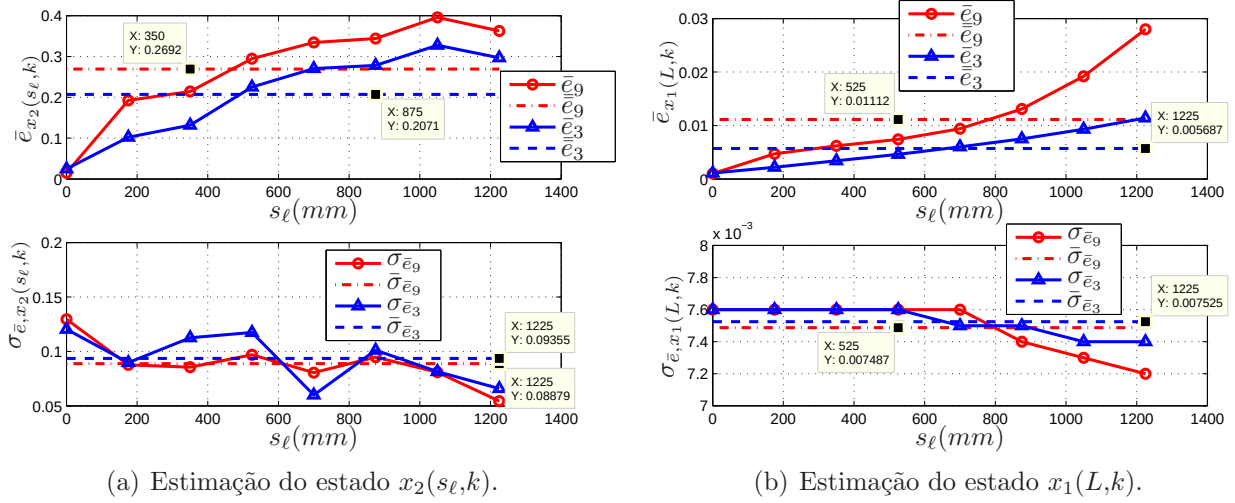


Figura 4.42: Resultados das estimações pelo observador exponencial com fator de esquecimento (estimação de estados, parâmetros e perturbação). Em azul, observadores obtidos utilizando-se modelos SS-LPV3 e em vermelho utilizando-se modelos SS-LPV9.

elementos é semelhante ao comportamento dos elementos do vetor de ganhos, para o observador de Kalman, considerando-se o mesmo caso. Contudo, os valores dos ganhos ficam mais próximos de zero e o valor da média da norma do vetor de ganhos diminui para 0,2754. A evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade, calculado para uma janela, $k = 50$ amostras, avaliado na posição $s_2 = 175mm$, é apresentado no gráfico da Figura 4.45. Observa-se que o seu comportamento não muda em relação ao observador de Kalman e o valor da área sob o gráfico permanece igual a 1,004. Esse resultado é esperado porque a característica de observabilidade é do sistema e não do observador. Observa-se também que, assim como no caso do observador de Kalman, o valor da média da norma do vetor de ganhos para o observador exponencial com fator de esquecimento diminui no caso em que a perturbação é estimada ao passo que a área da curva do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade também diminui. Esse resultado indica que a representação sem estimação de perturbação é mais observável, porém, representa menos o sistema real.

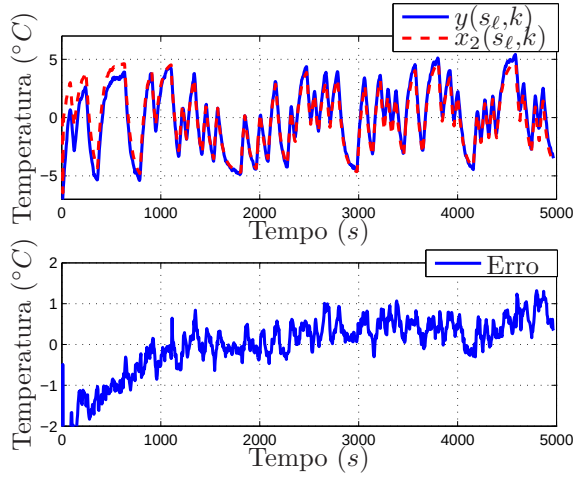
Os gráficos apresentados na Figura 4.46 mostram o comportamento dos parâmetros, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(s_\ell, k)$, obtidos utilizando o observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados, parâmetros e perturbação, avaliados na posição $s_2 = 175mm$. Note que os parâmetros quase não apresentam variações nas suas estimações. Os valores e as variâncias dos parâmetros estimados pelo observador foram comparadas com as variâncias dos parâmetros estimados pelo estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ). Nesse caso, foram consideradas as estimativas com menor variância. As comparações são apresentadas nas Tabela 4.14 e 4.15 e os resultados mostram que a variância dos parâmetros estimados pelo observador diminuíram cerca de 99,98% para o parâmetro b_1 e 95,03% para o parâmetro α_1 (os valores relativos para cada posição também são apresentados nas tabelas). O comportamento da perturbação estimada pelo observador é apresentado no gráfico da Figura 4.47.

Tabela 4.14: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.

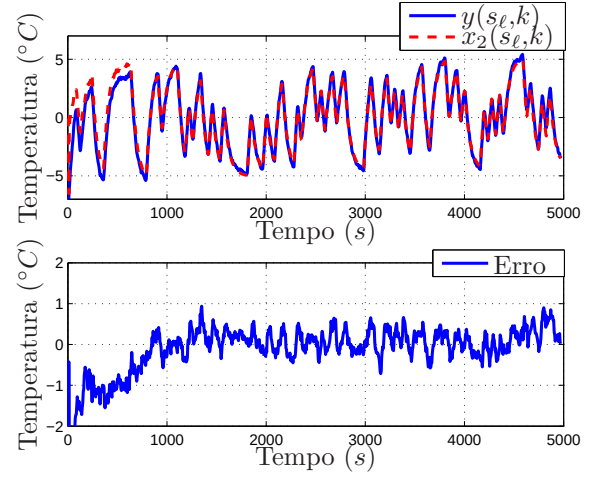
s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	b_1	$\sigma_{b_1}^2$	
0	0,0569	$1,60 \times 10^{-3}$	0,0553	$4,48 \times 10^{-7}$	99,97%
175	0,0533	$1,70 \times 10^{-3}$	0,0510	$3,82 \times 10^{-7}$	99,98%
350	0,0535	$1,50 \times 10^{-3}$	0,0474	$3,29 \times 10^{-7}$	99,98%
525	0,0500	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0442	$2,86 \times 10^{-7}$	99,97%
700	0,0400	$1,20 \times 10^{-3}$	0,0413	$2,50 \times 10^{-7}$	99,98%
875	0,0437	$1,00 \times 10^{-3}$	0,0388	$2,20 \times 10^{-7}$	99,98%
1050	0,0376	$1,10 \times 10^{-3}$	0,0364	$1,94 \times 10^{-7}$	99,98%
1225	0,0369	$0,70 \times 10^{-3}$	0,0344	$1,72 \times 10^{-7}$	99,98%
Média	–	$1,24 \times 10^{-3}$	–	$2,85 \times 10^{-7}$	99,98%

Tabela 4.15: Comparação entre as variâncias dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo estimador EMQ e pelo observador de Kalman com estimação de perturbação.

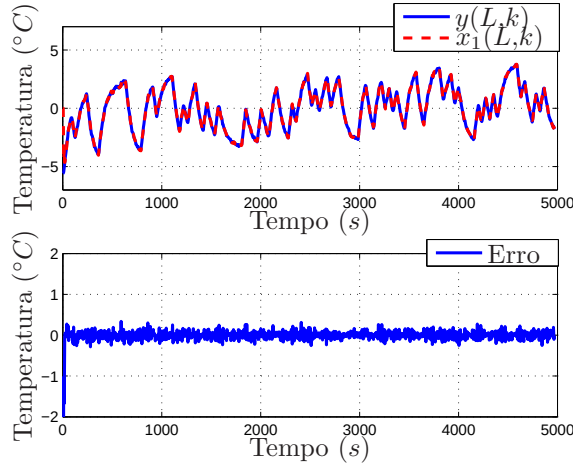
s_ℓ (mm)	Estimador EMQ		Observador		Val. Relat.
	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	α_1	$\sigma_{\alpha_1}^2$	
0	–0,9786	$1,23 \times 10^{-5}$	–0,9845	$2,45 \times 10^{-6}$	80,06%
175	–0,9719	$3,86 \times 10^{-5}$	–0,9824	$2,46 \times 10^{-6}$	93,63%
350	–0,9625	$10,21 \times 10^{-5}$	–0,9803	$2,47 \times 10^{-6}$	97,58%
525	–0,9600	$6,09 \times 10^{-5}$	–0,9782	$2,47 \times 10^{-6}$	95,94%
700	–0,9706	$2,25 \times 10^{-5}$	–0,9758	$2,48 \times 10^{-6}$	88,96%
875	–0,9525	$6,85 \times 10^{-5}$	–0,9732	$2,49 \times 10^{-6}$	96,36%
1050	–0,9481	$3,88 \times 10^{-5}$	–0,9703	$2,51 \times 10^{-6}$	93,53%
1225	–0,9316	$5,62 \times 10^{-5}$	–0,9669	$2,53 \times 10^{-6}$	95,50%
Média	–	$5,00 \times 10^{-5}$	–	$2,48 \times 10^{-6}$	95,03%



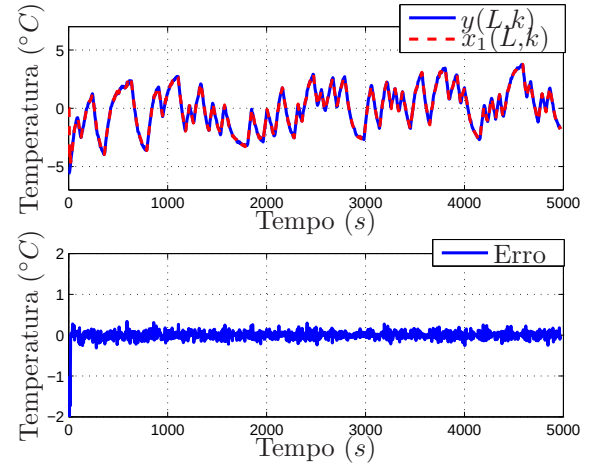
(a) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados e parâmetros.



(b) $x_2(s_\ell, k)$ estimado pelo observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados, parâmetros e perturbação.



(c) $x_1(s_\ell, k)$ estimado pelo observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados e parâmetros.



(d) $x_1(s_\ell, k)$ estimado pelo observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados, parâmetros e perturbação.

Figura 4.43: Comparação entre as estimações realizadas pelo observador exponencial com fator de esquecimento para estimação de estados e parâmetros sem estimação de perturbação e com estimação de perturbação projetados a partir do modelo SS-LPV3 avaliados na posição $s_\ell = 175mm$.

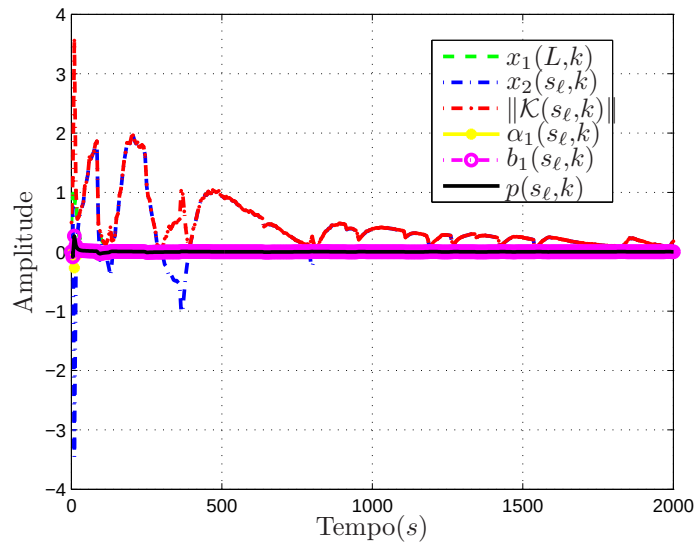


Figura 4.44: Evolução dos elementos de $\mathcal{K}(s_\ell, k)$ para $s_2 = 175mm$.

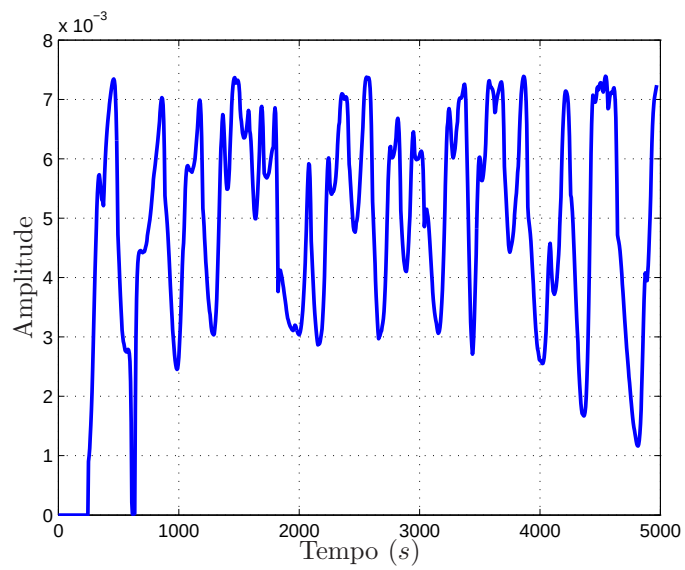


Figura 4.45: Evolução do autovalor mínimo real do Gramiano de observabilidade avaliado em $s_2 = 175mm$.

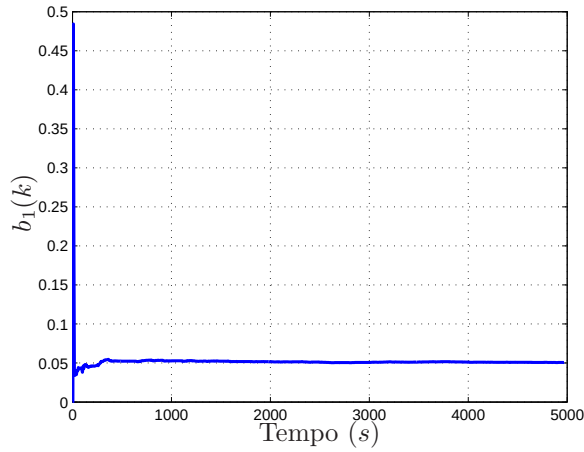
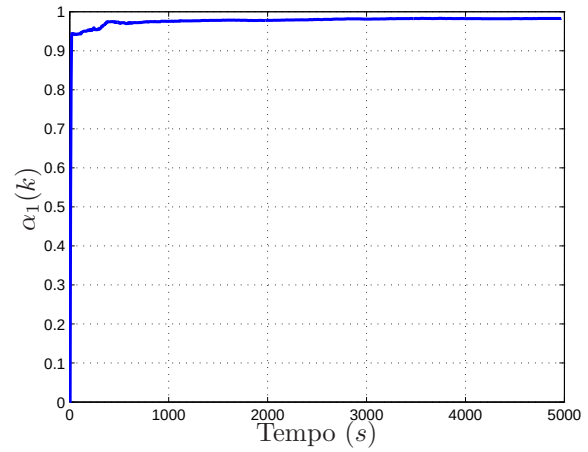
(a) Evolução do parâmetro b_1 .(b) Evolução do parâmetro α_1 .

Figura 4.46: Evolução dos parâmetros b_1 e α_1 estimados pelo observador exponencial com fator de esquecimento, com estimação de perturbação na entrada avaliados no ponto $s_\ell = 175mm$.

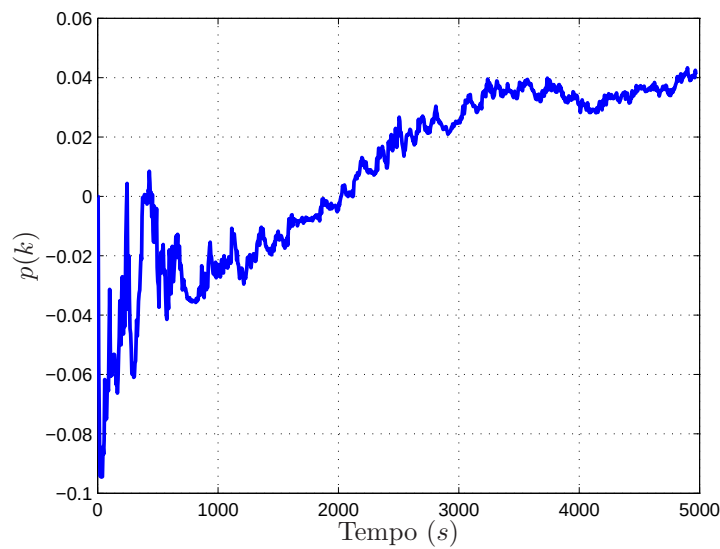


Figura 4.47: Comportamento da perturbação $p(k)$.

4.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos na implementação da estratégia de identificação e monitoramento de SPD utilizando observadores. A estratégia foi aplicada a um sistema térmico distribuído (forno), com atuação na borda de entrada, em que ocorre o aquecimento do fluxo de ar transportado de forma forçada através de um tubo. O projeto de identificação foi realizado tendo como objetivo a obtenção de um modelo em espaço de estados adequado ao projeto de observadores. Para tanto, o sistema foi espacialmente discretizado e foram obtidos dois modelos LPV de primeira ordem interconectados, de forma que a saída do primeiro modelo foi considerada como sendo a entrada do segundo modelo. Sob essa perspectiva, foi possível admitir a saída de cada modelo como sendo uma variável de estado e um modelo SS-LPV foi construído. Os resultados da validação do modelo SS-LPV mostraram que este reproduz, de forma satisfatória, as dinâmicas dominantes do sistema considerado. Uma vez obtido um modelo adequado foram implementados alguns observadores do tipo Kalman. O primeiro observador projetado foi o observador de Kalman para estimação de estados. Os resultados obtidos indicaram que, apesar do processo de validação ter mostrado que o modelo obtido representava bem as dinâmicas de interesse para os dados utilizados na validação, ele não era tão geral quando avaliado utilizando-se os dados completos. Tal resultado sugeriu que existiam dinâmicas nos dados não explicadas pelo modelo devido, por exemplo, a tendências nos dados. Para verificar essa possibilidade, foi implementado o observador de Kalman para estimação de estados e de perturbação na entrada. Avaliando o erro e a variância do erro de estimação, foi visto que houve uma melhora significativa nas estimativas. Em um terceiro observador, o observador de Kalman para estimação de estados e parâmetros, foi testada a hipótese do efeito de polarização devido à tendência nos dados e dinâmicas não modeladas. Para isso, os parâmetros, b_1 e α_1 , foram admitidos como variáveis de estados, $b_1(s_\ell, k)$ e $\alpha_1(\bar{s}_\ell, k)$, e estimados em tempo real. Foi observado uma pequena melhora nas estimações, porém, o efeito da tendência nos dados persistiu. Foi então implementado um quarto observador, o observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação. Os resultados desse observador mostraram que a média do erro de estimação se aproximou de zero e a variância do erro também diminuiu consideravelmente. A variância do erro de estimação permaneceu próxima da precisão dos sensores utilizados para identificação para todos os observadores implementados. Por último, foram implementados dois observadores exponenciais com fator de esquecimento. O objetivo de tais observadores, diferente dos casos anteriores em que a prioridade é a filtragem, é a velocidade de convergência. Nesse sentido, como esperado, foi verificado que, para o objetivo de monitoramento, os observadores de Kalman apresentaram melhor desempenho. Comparando-se os observadores exponenciais, foi observado que a estimação de perturbação foi fundamental para garantir que o erro se mantivesse em torno de zero. Portanto, o melhor resultado obtido foi utilizando-se o observador de Kalman para estimação de estados, parâmetros e perturbação.

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho foi proposta uma estratégia para modelagem e monitoramento de sistemas a parâmetros distribuídos com atuação na borda. O objetivo principal era estimar o comportamento dinâmico de uma variável interna do SPD conhecendo-se apenas o sinal de entrada aplicado a um atuador localizado em uma das bordas do mesmo e a medição da variável de interesse na borda oposta. Para atender a esse objetivo, primeiramente, foi proposta uma metodologia alternativa baseada em técnicas de identificação de sistemas a parâmetros concentrados direcionada ao projeto de observadores. É importante salientar que os objetivos de identificação foram obter modelos de baixa ordem e que não explicam, necessariamente, todas as dinâmicas presente no processo de interesse.

Para tanto, o SPD foi aproximado por dois modelos lineares a parâmetros variantes (LPV) interconectados. A configuração resultante permitiu que a variável monitorada se tornasse conhecida ao longo do sistema por meio da dependência espacial dos seus parâmetros e do efeito desses na dinâmica dos dois subsistemas interconectados: $LPV_{u \times y_i}$ e $LPV_{y_i \times y_o}$. Sob essa perspectiva, as variáveis de saída de cada subsistema foram assumidas como variáveis de estado e um modelo geral SS-LPV foi obtido.

Uma vez que um modelo adequado foi construído, observadores do tipo Kalman foram implementados. Especificamente, foram implementados o observador de Kalman clássico e o observador exponencial com fator de esquecimento. O uso dos observadores é fundamental para a estratégia proposta devido à sua propriedade de correção das estimativas e possibilidade de acrescentar informações extras à dinâmica do modelo, tais como, a estimação em tempo real de parâmetros e de distúrbios. Uma das principais vantagens da abordagem utilizada é que, embora o modelo final obtido mantenha a característica espaço-dependente de um SPD, ele é, localmente, um modelo a parâmetros concentrados. Dessa forma, as técnicas de observação de estados aplicáveis a sistemas pertencentes à classe dos sistemas a parâmetros concentrados foram prontamente utilizadas. Outro ponto positivo, é que as informações das incertezas obtidas no processo de identificação puderam ser utilizadas para o cálculo dos ganhos ótimos no projeto dos observadores.

A estratégia de modelagem e monitoramento propostas foram aplicadas a um sistema térmico com características dinâmicas distribuídas no espaço. Foram realizados diversos experimentos que demonstraram a viabilidade e a eficácia das propostas desenvolvidas neste trabalho. Os

resultados experimentais encorajam a aplicação das técnicas estudadas em sistemas de maior porte.

Decorrentes deste trabalho, encontram-se em preparação os seguintes artigos científicos:

- Identificação de Modelos LPV Interconectados Orientada à Observação de Estados para Monitoramento de Sistemas a Parâmetros Distribuídos.

Este trabalho considera uma metodologia de identificação de sistemas a parâmetros distribuídos, orientada ao projeto de observadores, para monitoramento de uma variável interna do sistema. Para tanto, o sistema original, com atuação em uma das bordas, é aproximado por dois modelos LPV complementares interconectados cujos parâmetros variam em função de uma coordenada espacial unidimensional. Sob tal perspectiva, as variáveis de saída em cada subsistema são interpretadas como variáveis de estado, e um modelo geral LPV, em espaço de estados, adequado à observação de estados é obtido. As técnicas de identificação de sistemas utilizadas produzem estimativas do ruído de processo que podem ser usadas no projeto de observadores, por exemplo, o observador de Kalman. Como exemplo, a estratégia proposta é aplicada a um sistema térmico real com atuação na borda para monitoramento de temperatura e a potencialidade do método é validada a partir de dados experimentais.

Palavras chave: Sistemas a parâmetros distribuídos, Modelos LPV, Subsistemas interconectados, Observadores de estados, Filtro de Kalman.

- Monitoramento de Sistemas a Parâmetros Distribuídos via Observadores do Tipo Kalman baseado em Modelos LPV Interconectados.

Neste trabalho é aplicada uma estratégia de identificação para aproximação de sistemas a parâmetros distribuídos através de modelos LPV interconectados com a finalidade de projetar observadores do tipo Kalman. A partir desses observadores podem ser monitorados tantos estados quanto alguns dos parâmetros do sistema. A técnica é aplicada em um protótipo de laboratório e os resultados demonstram que as estimativas dos observadores propostos estão dentro da margem de erro dos sensores utilizados.

Palavras chave: Sistemas a parâmetros distribuídos, Modelos LPV, Subsistemas interconectados, Observadores de estados, Filtro de Kalman.

Os resultados obtidos indicam que as técnicas de identificação e monitoramento investigadas podem ser aplicadas a sistemas de maior porte. No entanto, para que isso seja possível, é necessário que a estratégia seja mais explorada para situações mais complexas. Nesse sentido, como perspectiva, pode-se propor que os experimentos realizados sejam feitos considerando-se outras configurações do protótipo como, por exemplo, variando-se a velocidade do ar que circula no sistema, ou a temperatura de entrada do mesmo, de forma a verificar o comportamento das estimativas realizadas pelos observadores, diante de outras fontes de perturbação e não linearidades. Outra possibilidade é considerar diferentes seções do protótipo e atribuir novas interconexões entre elas obtendo-se uma descrição de toda a planta através de uma coleção de subsistemas LPV interconectados. Também é possível considerar que, além da variação espacial, o sistema

possa ser variante no tempo. Além disso, que os modelos considerados sejam obtidos para faixas mais amplas de operação, resultando em representações não lineares. Nesse caso, técnicas de observação de estados não lineares mais sofisticadas podem ser implementadas. Também existe a possibilidade do estudo de síntese de controladores a partir do estados estimados. As incertezas em relação às *funções scheduling* também são um ponto importante a ser investigado.

Apêndice A

Estatísticas

Tabela A.1: Comparação entre as predições dos estados dos modelos SS-LPV utilizando-se *funções scheduling* com 9 e 3 pontos o ajuste polinomial.

s_ℓ (mm)	com 9				com 3			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,1354	0,1329	0,0803	0,0452	0,1359	0,1325	0,0780	0,0481
175	0,1097	0,1023	0,0865	0,0552	0,1156	0,0929	0,0835	0,0487
350	0,0965	0,0890	0,0832	0,0655	0,1037	0,0974	0,0846	0,0503
525	0,0889	0,0908	0,0801	0,0715	0,0951	0,1105	0,0837	0,0533
700	0,0892	0,0842	0,0783	0,0696	0,0940	0,0703	0,0804	0,0575
875	0,0821	0,0861	0,0813	0,0626	0,0848	0,1321	0,0800	0,0655
1050	0,0808	0,0890	0,0843	0,0565	0,0822	0,1296	0,0779	0,0764
1225	0,0768	0,0899	0,0865	0,0662	0,0782	0,1417	0,0770	0,0926
Média	0,0949	0,0955	0,0826	0,0615	0,0987	0,1134	0,0806	0,0616

Tabela A.2: Estimacões dos estados pelo observador de Kalman utilizando-se modelos SS-LPV com *funções scheduling* com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.

s_ℓ (mm)	com 9				com 3			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,4723	0,1587	0,0118	0,0075	0,5098	0,1626	0,0132	0,0077
175	0,5056	0,1206	0,0181	0,0076	0,5370	0,1126	0,0153	0,0077
350	0,4680	0,1027	0,0229	0,0078	0,5016	0,1121	0,0177	0,0077
525	0,5137	0,1035	0,0265	0,0080	0,5521	0,1234	0,0203	0,0077
700	0,5260	0,0949	0,0300	0,0080	0,5463	0,0862	0,0231	0,0076
875	0,5120	0,0987	0,0350	0,0077	0,5490	0,1494	0,0261	0,0077
1050	0,5381	0,0996	0,0438	0,0073	0,5846	0,1526	0,0291	0,0079
1225	0,4278	0,0829	0,0589	0,0082	0,5701	0,1816	0,0322	0,0086
Média	0,4954	0,1077	0,0309	0,0078	0,5438	0,1351	0,0221	0,0078

Tabela A.3: Estimacões dos estados pelo observador de Kalman com estimacão de perturbacão na entrada utilizando-se modelos SS-LPV com *funções scheduling* com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.

s_ℓ (mm)	com 9				com 3			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,2579	0,0733	0,0010	0,0077	0,2787	0,0714	0,0010	0,0076
175	0,2075	0,0477	0,0008	0,0077	0,1989	0,0551	0,0010	0,0077
350	0,2357	0,0497	0,0008	0,0079	0,1998	0,0796	0,0010	0,0077
525	0,1745	0,0489	0,0008	0,0081	0,1287	0,0864	0,0010	0,0076
700	0,1385	0,0191	0,0009	0,0081	0,1012	0,0237	0,0009	0,0076
875	0,1240	0,0419	0,0010	0,0078	0,1071	0,0877	0,0007	0,0076
1050	0,0636	0,0350	0,0009	0,0074	0,0685	0,0727	0,0005	0,0077
1225	0,0855	0,0276	0,0004	0,0080	0,1063	0,0892	0,0002	0,0083
Média	0,1609	0,0429	0,0008	0,0078	0,1487	0,0707	0,0008	0,0077

Tabela A.4: Estimacões dos estados e parâmetros pelo observador de Kalman para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com *funções scheduling* com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.

s_ℓ (mm)	com 9				com 3			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,3426	0,1186	0,0087	0,0086	0,3420	0,1225	0,0066	0,0089
175	0,3419	0,0996	0,0099	0,0087	0,3568	0,0938	0,0071	0,0090
350	0,2915	0,0732	0,0098	0,0089	0,3069	0,0853	0,0075	0,0091
525	0,3289	0,0835	0,0098	0,0091	0,3385	0,0905	0,0080	0,0092
700	0,3251	0,0914	0,0104	0,0092	0,3317	0,0592	0,0084	0,0094
875	0,2793	0,0837	0,0119	0,0091	0,2940	0,0797	0,0087	0,0095
1050	0,2632	0,0749	0,0141	0,0091	0,3016	0,0689	0,0090	0,0097
1225	0,1560	0,0444	0,0163	0,0091	0,2320	0,0585	0,0092	0,0100
Média	0,2911	0,0837	0,0114	0,0090	0,3129	0,0823	0,0081	0,0094

Tabela A.5: Estimacões dos estados, parâmetros e perturbação pelo observador de Kalman para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com *funções scheduling* com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.

Posição s_ℓ (mm)	com 9 pontos				com 3 pontos			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,1067	0,1114	0,0015	0,0078	0,1207	0,1019	0,0016	0,0078
175	0,0500	0,0693	0,0012	0,0078	0,0552	0,0737	0,0013	0,0078
350	0,0450	0,0660	0,0011	0,0078	0,0614	0,0977	0,0011	0,0077
525	0,0350	0,0778	0,0011	0,0077	0,0082	0,1012	0,0010	0,0077
700	0,0607	0,0632	0,0012	0,0077	0,0332	0,0415	0,0010	0,0077
875	0,0366	0,0732	0,0015	0,0076	0,0209	0,0827	0,0010	0,0077
1050	0,0404	0,0521	0,0018	0,0074	0,0469	0,0597	0,0011	0,0076
1225	0,0438	0,0214	0,0019	0,0073	0,0109	0,0482	0,0011	0,0076
Média	0,0523	0,0668	0,0014	0,0076	0,0447	0,0758	0,0012	0,0077

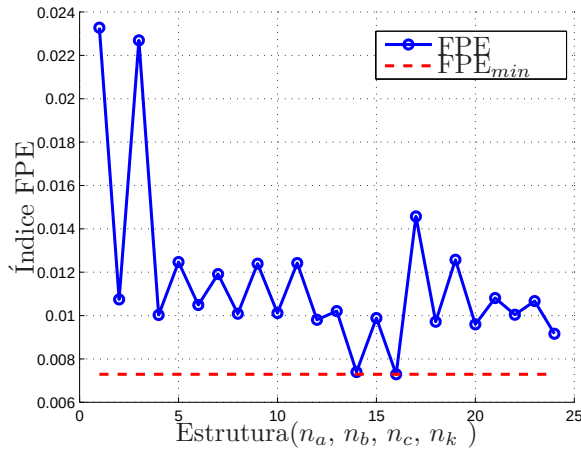
Tabela A.6: Estimacões dos estados e parâmetros pelo observador exponencial com fator de esquecimento para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com *funções scheduling* com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.

s_ℓ (mm)	com 9				com 3			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,4246	0,1562	0,0050	0,0077	0,4307	0,1428	0,0076	0,0075
175	0,4541	0,1061	0,0081	0,0077	0,4584	0,1083	0,0076	0,0084
350	0,4208	0,1004	0,0096	0,0077	0,4226	0,1272	0,0076	0,0094
525	0,4697	0,1128	0,0107	0,0077	0,4696	0,1329	0,0076	0,0105
700	0,4800	0,0908	0,0126	0,0076	0,4798	0,0713	0,0075	0,0117
875	0,4585	0,1038	0,0163	0,0075	0,4605	0,1143	0,0075	0,0131
1050	0,4802	0,0843	0,0225	0,0074	0,4878	0,0928	0,0074	0,0147
1225	0,4215	0,0524	0,0323	0,0073	0,4391	0,0761	0,0073	0,0166
Média	0,4512	0,1009	0,0146	0,0076	0,4561	0,1082	0,0075	0,0115

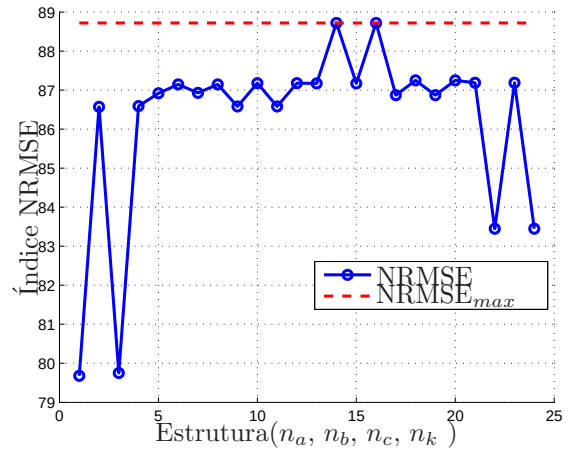
Tabela A.7: Estimacões dos estados, parâmetros e perturbação pelo observador exponencial com fator de esquecimento para o sistema afins nos estados com injeção da saída utilizando-se modelos SS-LPV com *funções scheduling* com 9 e 3 pontos para o ajuste polinomial.

s_ℓ (mm)	com 9				com 3			
	$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$		$x_2(s_\ell, k)$		$x_1(L, k)$	
	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2	$\bar{e}$	σ_e^2
0	0,0152	0,1295	0,0010	0,0076	0,0247	0,1204	0,0011	0,0076
175	0,1926	0,0877	0,0047	0,0076	0,1023	0,0897	0,0022	0,0076
350	0,2144	0,0855	0,0062	0,0076	0,1317	0,1125	0,0034	0,0076
525	0,2948	0,0969	0,0074	0,0076	0,2252	0,1174	0,0046	0,0076
700	0,3344	0,0806	0,0094	0,0076	0,2703	0,0599	0,0060	0,0075
875	0,3441	0,0948	0,0131	0,0074	0,2783	0,1011	0,0075	0,0075
1050	0,3958	0,0809	0,0192	0,0073	0,3275	0,0815	0,0093	0,0074
1225	0,3626	0,0544	0,0280	0,0072	0,2969	0,0659	0,0114	0,0074
Média	0,2692	0,0888	0,0111	0,0075	0,2009	0,0936	0,0057	0,0075

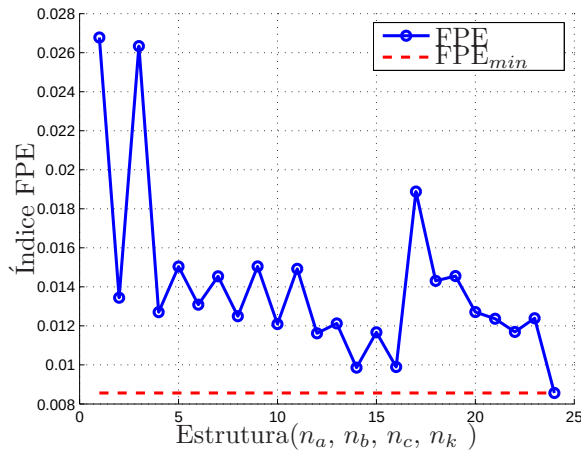
Índices para escolha da estrutura do modelo aplicados aos pontos s_5 e s_8



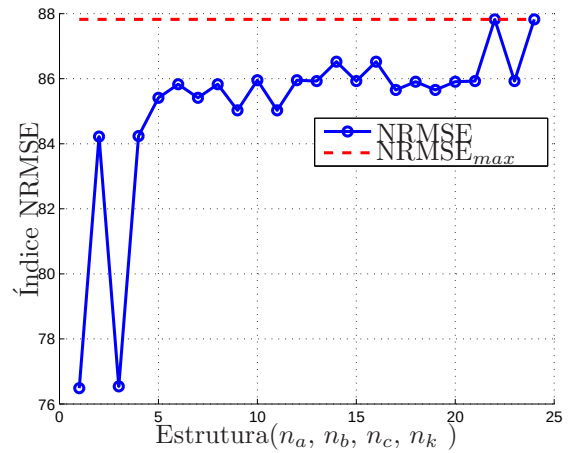
(a) Critério de informação FPE ponto s_5 .



(b) Índice de desempenho NRMSE ponto s_5 .



(c) Critério de informação FPE ponto s_8 .



(d) Índice de desempenho NRMSE ponto s_8 .

Figura B.1: Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{u \times y_i}$ aplicados aos pontos s_5 e s_8 .

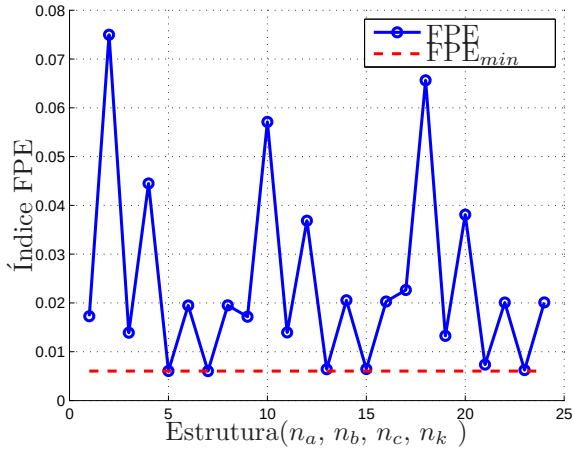
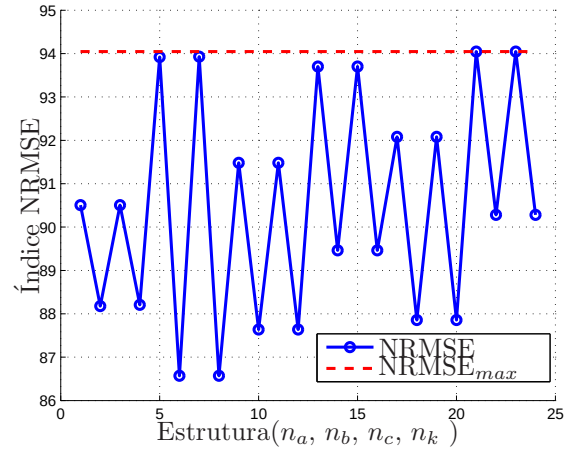
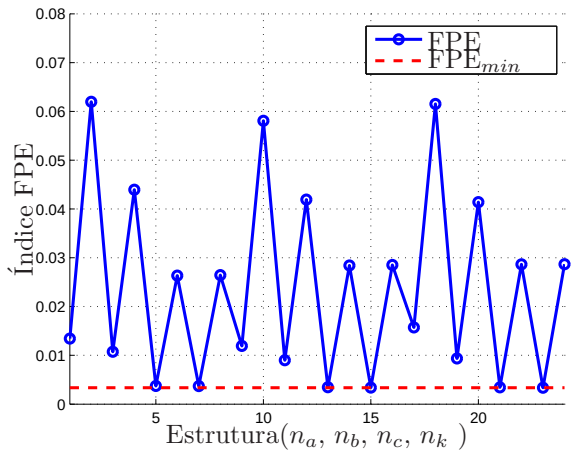
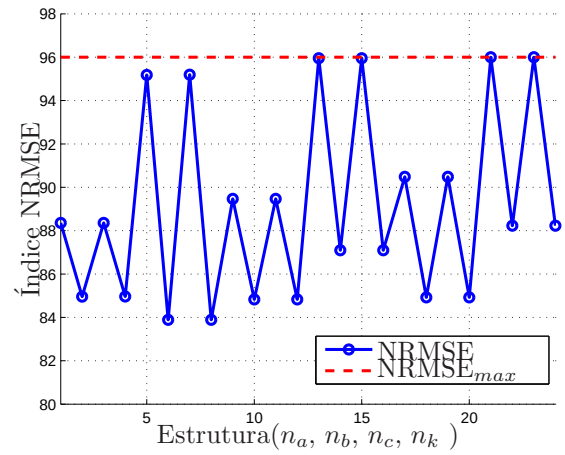
(a) Critério de informação FPE ponto s_5 .(b) Índice de desempenho NRMSE ponto s_5 .(c) Critério de informação FPE ponto s_8 .(d) Índice de desempenho NRMSE ponto s_8 .

Figura B.2: Índices para escolha da estrutura do modelo $LPV_{y_i \times y_o}$ aplicados aos pontos s_5 e s_8 .

Bibliografia

- [Agu07] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. UFMG, 2007.
- [Aka74] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19:716–723, 1974.
- [Bar14] N. F. Barroso. Instrumentação virtual aplicada à automação de um sistema térmico para experimentação via web. *Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível na biblioteca do CEFET-MG campus II*, 2014.
- [Bes07] G. Besançon. *Nonlinear Observers and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2007.
- [Bil13] S. A. Billings. *Nonlinear System Identification: NARMAX Methods in the Time, Frequency and Spatial-Temporal Domains*. John Wiley & Sons, 2013.
- [BPB10] J. Blesa, V. Puig, and Y. Bolea. Fault detection using interval lpv models in an open-flow canal. *Control Engineering Practice*, 18:460–470, 2010.
- [BPB14a] Y. Bolea, V. Puig, and J. Blesa. Gain-scheduled smith predictor pid-based lpv controller for open-flow canal control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22:468–477, 2014.
- [BPB14b] Y. Bolea, V. Puig, and J. Blesa. Linear parameter varying modeling and identification for real-time control of open flow-irrigation canals. *Environmental Modelling & Software*, 53:87–97, 2014.
- [CB02] D. Coca and S. A. Billings. Identification of finite dimensional models of infinite dimensional dynamical systems. *Automatica*, 38:1851–1865, 2002.
- [CCdSL13] A. F. Caldeira, D. Coutinho, C. E. de Souza, and V. J. S. Leite. Numerically tractable stability tests for 2-d singular discrete-time systems. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3391–3396, 2013.
- [Che99] C. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc, 1999.

- [Chr01] P. D. Christofides. *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems Methods and Applications to Transport-Reaction Process*. Business Media, LLC, 2001.
- [CPCL15] A. F. Caldeira, C. Prieur, D. Coutinho, and V. J. S. Leite. Modeling and control of flow with dynamical boundary actions. *IEEE Conference on Control Applications*, pages 1579–1584, 2015.
- [Dan13] P. Y. Dandois, J.; Garnier E.; Pamart. Narx modelling of unsteady separation control. *Experiments in Fluids*, 54:1445–, 2013.
- [Doe90] E. O. Doebelin. *Measurement Systems: Application and Design*. McGraw–Hill International, 2^a Edição, 1990.
- [DQG⁺14] L. R. Douat, I. Queinnec, G. Garcia, M. Michelin, F. Pierrot, and S. Tarbouriech. Identification and vibration attenuation for the parallel robot par2. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22:190–200, 2014.
- [GA15] M. S. Grewal and A. Andrews. *Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, 2015.
- [GDG05] B. Gustavo, Fabrizio D., and P. Gay. Lpv approximation of distributed parameter systems in environmental modelling. *Environmental Modelling & Software*, 20:1063–1070, 2005.
- [Geo95] D. Georges. The use of observability and controllability gramians or functions for optimal sensor and actuator location in finite-dimensional systems. *IEEE Conference on Decision and Control*, 4:3319–3324, 1995.
- [GPK11] J. D. Gabano, T. Poinot, and H. Kanoun. Identification of a thermal system using continuous linear parameter-varying fractional modelling. *IET Control Theory & Applications*, 5:889–899, 2011.
- [Hoo01] D. Hoo, K. A.; Zheng. Low-order control-relevant models for a class of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*, 56:6683–6710, 2001.
- [Jaz70] H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Dover Publications Inc., 1970.
- [Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [KBTB09] A. A. Khalate, X. Bombois, R. Tóth, and R. Babuska. Optimal experimental design for lpv identification using a local approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 42:162–167, 2009.
- [KS08] M. Krstic and A. Smyshlyaev. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2008.

-
- [LGPW14] Q. Liu, J. Gross, S. Pfeiffer, and H. Werner. A local approach for the lpv identification of an actuated beam using piezoelectric actuators and sensors. *Mechatronics*, 24:289–297, 2014.
 - [LHW13] Q. Liu, C. Hoffmann, and H. Werner. Distributed control of parameter-varying spatially interconnected systems using parameter-dependent lyapunov functions. *American Control Conference*, pages 3278–3283, 2013.
 - [Lju99] L. Ljung. *System Identification - Theory for the User*. Prentice Hall, 1999.
 - [LMTM16] Q. Liu, J. Mohammadpour, R. Toth, and N. Meskin. Non-parametric identification of linear parameter-varying spatially-interconnected systems using an ls-svm approach. *IEEE American Control Conference*, pages 4592–4597, 2016.
 - [LW16] Q. Liu and H. Werner. Distributed identification and control of spatially interconnected systems with application to an actuated beam. *Control Engineering Practice*, 54:104–116, 2016.
 - [May79] P. S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation and Control, Vol. 1*. ACADEMIC PRESS, 1979.
 - [MPP11] G. Mercere, H. Palsson, and T. Poinot. Continuous-time linear parameter-varying identification of a cross flow heat exchanger: A local approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19:64–76, 2011.
 - [PA09a] R. Padhi and Sk. F. Ali. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 33:59–68, 2009.
 - [PA09b] R. Padhi and Sk. F. Ali. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 33:59–68, 2009.
 - [PBL98] P. L. D. Peres, I. S. Bonatti, and A. Lopes. Transmission line modeling: A circuit theory approach. *SIAM Review*, 40:347–352, 1998.
 - [Roe75] R. Roesser. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20:0–10, 1975.
 - [RSBG16] I. Rubio Scola, G. Besançon, and D. Georges. Improving Kalman filtering by input selection for nonuniformly observable state-affine systems. *IEEE European Control Conference*, pages 1153–1158, 2016.
 - [Sa09] J. D. Simeão. Controle de sistemas com atraso nos estados: uma abordagem convexa. *Dissertação de Mestrado. Disponível na biblioteca do CEFET-MG campus II*, 2009.
 - [Sim06] Dan Simon. *Optimal state estimation: Kalman, H_∞ , and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.

- [TB09] A. Ticlea and G. Besançon. State and parameter estimation via discrete-time exponential forgetting factor observer. *IFAC proceedings volumes*, 42:1370–1374, 2009.
- [TJT12] B. O. S. Teixeira, F. G. Jota, and M. H. Teixeira. Modelagem, controle e otimização do processo dos fornos de reaquecimento de placas. *European Journal of Control*, 18:239–246, 2012.
- [Zhe02] K. A. Zheng, D.; Hoo. Low-order model identification for implementable control solutions of distributed parameter systems. *Computers & Chemical Engineering*, 26:1049–1076, 2002.
- [Zhe04] K. A. Zheng, D.; Hoo. System identification and model-based control for distributed parameter systems. *Computers & Chemical Engineering*, 28:1361–1375, 2004.