



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

ANÁLISE MULTIPLEX DA REDE BRASILEIRA DE TRANSPORTE AÉREO

IZABELA MARQUES DE OLIVEIRA

Orientador: Allbens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Laura Corina Carpi
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2023

IZABELA MARQUES DE OLIVEIRA

ANÁLISE MULTIPLEX DA REDE BRASILEIRA DE TRANSPORTE AÉREO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Allbens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Laura Corina Carpi
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

O48a Oliveira, Izabela Marques de
Análise multiplex da rede brasileira de transporte aéreo / Izabela Marques de Oliveira. – 2023.
xv, 127 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Allbens Atman Picardi Faria.
Coorientadora: Laura Corina.Carpi.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Aeronáutica comercial – Análise de redes – Teses. 2. Multiplex – Eficiência – Teses. 3. Complexidade computacional – Teses. 4. Conexões (Matemática) – Teses. 5. Tráfego aéreo – Modelos matemáticos – Teses. 6. Linhas aéreas – Teses. I. Faria, Allbens Atman Picardi. II. Carpi, Laura Corina. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

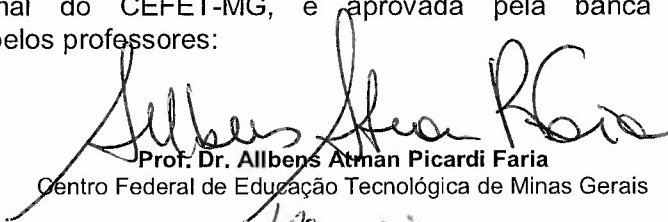
CDD 519.6

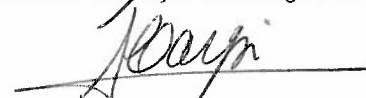


SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

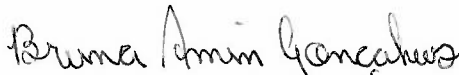
**“ANÁLISE MULTIPLEX DA REDE BRASILEIRA DE
TRANSPORTE AÉREO”.**

Tese de Doutorado apresentada por **Izabela Marques de Oliveira**, em 20 de março de 2023, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:


Prof. Dr. Allbens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais


Profª. Drª. Laura Corina Carpi (Coorientadora)
Universidade Federal de Minas Gerais

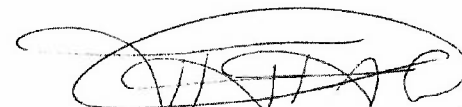

Prof. Dr. Tiago Alves Schieber de Jesus
Universidade Federal de Minas Gerais


Profª. Drª. Bruna Amin Gonçalves
Faculdade Pitágoras


Prof. Dr. Antônio Paulo Baeta Scarpelli
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais


Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,


Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em
Modelagem Matemática e Computacional

Ao meu pai, Alcides Ivo de Oliveira
(*in memoriam*).

Agradecimentos

Concluir um curso de doutorado é uma realização que só pode ser alcançada com o apoio e a contribuição de muitas pessoas ao longo da jornada. Embora não seja possível mencionar todos os nomes, gostaria de expressar aqui algumas palavras de reconhecimento a todos que participaram desse processo.

Em primeiro lugar agradeço ao Allbens e à Laura por toda a parceria, dedicação, ensinamentos, confiança, paciência, orientação e, acima de tudo, amizade. Obrigada por estarem ao meu lado na alegria e na tristeza!

Aos meus pais, Alcides e Berenice, agradeço pela formação que me deram para a vida;

Aos meus filhos, Sá e Vini, por todo o apoio e compreensão pelas ausências e eventuais inversões de papéis que o doutorado exige;

Aos meus irmãos, pelo incentivo e apoio;

Aos demais familiares e todos os amigos, pela torcida. Em especial ao Gui-genro pela força com as figuras – valeu!

Aos colegas do CEFET-MG agradeço pelo companheirismo e pela troca de aprendizados. Vocês são nota 10!

Aos professores do CEFET-MG agradeço por contribuir para minha formação e, junto aos demais funcionários, pela prontidão no auxílio;

Aos membros da banca avaliadora, pela disponibilidade e contribuições;

Ao CEFET-MG pelo apoio financeiro e pela oportunidade;

E a Deus, que embora seja o princípio de tudo, cito aqui no final para agradecer por essa existência, por todas as oportunidades que me concede e por ter colocado todas essas pessoas em meu caminho!

Registro aqui a minha gratidão.

Resumo

O transporte aéreo continua sendo a melhor opção para conectar regiões distantes e apoiar o desenvolvimento social e econômico mundial, apesar dos desafios ambientais. O Brasil depende fortemente dessa modalidade de transporte devido às suas dimensões continentais. Neste trabalho realizamos um estudo utilizando a abordagem multiplex de redes complexas para analisar a rede brasileira de transporte aéreo de passageiros, BATMN. Nesse contexto, criamos o Índice de Eficiência Multiplex (MEI) e suas versões para redes direcionadas e/ou ponderadas, que permitem quantificar o nível de heterogeneidade de conexões de uma rede multiplex em uma escala de 0 a 1, considerando características de direção e grau de importância das arestas, sendo apropriados para pesquisas em redes de transporte. Utilizamos o MEI para avaliar a diversificação de rotas das empresas de transporte aéreo no Brasil entre 2010 e 2021, um período marcado pela ocorrência de grandes eventos no país. Analisamos a influência de alguns desses eventos sobre a eficiência da rede, como a Copa do Mundo FIFA em 2014 e as Olimpíadas do Rio em 2016, assim como de outras mudanças no setor, incluindo a fusão entre companhias aéreas, a privatização de aeroportos, o encerramento de operações de uma importante transportadora aérea e da pandemia de COVID-19. Além disso, investigamos se a diversificação de rotas afetou os preços das passagens aéreas praticados no Brasil. Adicionalmente, por meio de uma metodologia recém-introduzida na literatura, examinamos a capacidade de difusão da rede e observamos o ganho relativo ocorrido em relação à difusão do sistema de transporte aéreo quando são consideradas as conexões de voos entre diferentes companhias aéreas, delineando um cenário de possíveis parcerias entre as empresas aéreas. As avaliações realizadas neste trabalho fornecem novas e significativas informações sobre a rede de transporte aéreo de passageiros no Brasil, contribuindo para otimizar a oferta desse tipo de transporte no país e, conseqüentemente, reduzir os custos envolvidos. Além disso, a metodologia proposta permite não somente uma análise diferenciada das redes de transporte aéreo, mas também a quantificação da eficiência de redes multiplex em geral.

Palavras-chave: Redes complexas. Redes multiplex. Índice de eficiência multiplex. Eficiência. Diversidade de conexões. Transporte aéreo. Difusão em redes de transporte aéreo.

Abstract

Air transportation remains the best option to connect distant regions and support world social and economic development, despite environmental challenges. Brazil depends strongly in this mode of transportation due to its continental dimensions. In this work, we conducted a study using the multiplex approach of complex networks to analyze the air transport network of Brazilian passengers, BATMN. In this context, we create the multiplex efficiency index (MEI) and its versions for targeted and/or weighted networks, which allow to quantify the level of connection heterogeneity of a multiplex network on a scale of 0 to 1, considering the characteristics of direction and importance level of edges, being appropriate for research in transportation networks. We used the MEI to evaluate the diversification of routes of airlines in Brazil between 2010 and 2021, a period of occurrence of major events in the country. We analyzed the influence of some of these events on network efficiency, such as the FIFA World Cup in 2014 and the Rio Olympic Games in 2016, as well as other sector changes, including the merger between airlines, airport privatization, the closure of operations of an important air carrier and COVID-19 pandemic. In addition, we investigated whether the diversification of routes affected the prices of air tickets in Brazil. Additionally, through a recently introduced methodology in the literature, we examined the network's diffusion capacity and observed the relative gain that occurred in the diffusion of the air transportation system when the flight connections between different airlines are considered, outlining a scenario possible partnerships between airlines. The evaluations carried out in this work provide new and significant information about the passenger air transportation network in Brazil, contributing to optimize the offer of this type of transportation in the country and, consequently, reduce the costs involved. In addition, the proposed methodology allows not only a differentiated analysis of air transportation networks, but also the quantification of the efficiency of multiplex networks in general.

Keywords: Complex networks. Multiplex networks. Multiplex efficiency index. Efficiency. Diversity of connections. Air transportation. Diffusion in air transportation networks.

Lista de Figuras

Figura 1 – Exemplo de grafo composto por seis vértices e sete arestas.	7
Figura 2 – Exemplos de grafos: direcionado, ponderado, não direcionado e completo.	9
Figura 3 – Exemplo didático de estrutura multiplex.	14
Figura 4 – Ilustração das redes sintéticas analisadas nos experimentos 1 e 2.	23
Figura 5 – Representação de redes multiplex com diferentes configurações relativas a direção e peso das arestas.	25
Figura 6 – Comparação entre valores de MEI obtidos para BATMN em dois experimentos.	32
Figura 7 – Número de passageiros pagantes transportados por voos domésticos no Brasil entre 2010 e 2021 e variação percentual em relação ao ano anterior.	33
Figura 8 – Evolução dos valores de MEI para BATMN em escala anual e em escala mensal entre 2010 e 2018.	34
Figura 9 – Análise do número de rotas de BATMN.	36
Figura 10 – Simulação dos valores de MEI para 2019 em BATMN devido à exclusão da camada ONE da rede.	39
Figura 11 – Possíveis correlações de MEI com <i>load factor</i> e com o valor médio das passagens aéreas no Brasil.	41
Figura 12 – Ilustração parcial da camada AZU em 2021.	44
Figura 13 – Evolução dos valores de MEIDW para BATMN contendo vértices isolados na rede.	45
Figura 14 – Valores de MEIDW para BATMN considerando apenas nós de graus multiplex não nulos.	45
Figura 15 – Valores de MEI para B-BATMN no contexto anual entre 2010 e 2021 e em escala mensal para 2019.	47
Figura 16 – Comparação entre MEI e MEIDW para B-BATMN e BATMN.	50
Figura 17 – Ilustração dos <i>links</i> de B-BATMN em 2017 e de BATMN em 2019.	51
Figura 18 – Ilustração de rede de duas camadas contendo arestas intercamadas.	56
Figura 19 – Valores de capacidade de difusão anual para BATN.	59
Figura 20 – Capacidade de difusão anual de cada camada de BATMN.	61
Figura 21 – Capacidade de difusão anual das camadas BATMN acopladas no sistema multiplex.	61
Figura 22 – Evolução do ganho relativo das camadas de BATMN.	62
Figura 23 – Ilustração dos aeroportos da BATMN em 2021 com destaque para aqueles que são mais significativos para a difusão.	66
Figura 24 – Densidade de vértices de BATMN que apresentam ganho relativo positivo.	67
Figura 25 – Densidade anual de vértices superdifusivos em cada camada de BATMN.	67

Figura 26 – Evolução do índice $\mathcal{E}$ para o Aeroporto Internacional de Natal.	78
Figura 27 – Valores de MEI para os aeroportos de Brasília, Guarulhos e Viracopos. .	79
Figura 28 – Evolução de $\mathcal{E}$ para os aeroportos Galeão e Confins.	79
Figura 29 – Valores de MEI para o Aeroporto de Congonhas.	80
Figura 30 – Centralidade de intermediação para os vértices de B-BATMN.	83
Figura 31 – Distribuição da centralidade de intermediação de B-BATMN.	85
Figura 32 – Valores da centralidade de proximidade para os vértices de B-BATMN. .	87
Figura 33 – Centralidade de grau dos vértices de B-BATMN.	89
Figura 34 – Distribuição de graus para B-BATMN.	91

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Companhias aéreas consideradas neste trabalho e seus respectivos códigos ICAO.	30
Tabela 2 – Companhias aéreas que compõem a BATMN a cada ano.	30
Tabela 3 – Número de aeroportos e empresas aéreas que compõem a segunda versão de BATMN a cada ano.	32
Tabela 4 – Posição de aeroportos privatizados no <i>ranking</i> $\mathcal{E}$ em 2010, 2014 e 2018 e de outros aeroportos que estavam no <i>top</i> 10.	42
Tabela 5 – Número de aeroportos e respectivas companhias aéreas que compõem B-BATMN a cada ano.	46
Tabela 6 – Aeroportos com os mais altos valores de ganho relativo por camada de BATMN no ano de 2021	64

Lista de Abreviaturas e Siglas

ANAC	Agência Nacional de Aviação Civil
AZU	Azul Linhas Aéreas Brasileiras
BATMN	Rede Multiplex de Transporte Aéreo Brasileiro
BATN	Rede Brasileira de Transporte Aéreo
B-BATMN	Rede Multiplex de Transporte Aéreo Mais Movimentada do Brasil
DDDN	Distribuição de Distância Direcionada dos Nós
DTM	Matriz de Transição Direcionada
DWTM	Matriz de Transição Direcionada e Ponderada
FIFA	Federação Internacional de Futebol
GLO	Gol Linhas Aéreas
IPM	Itapemirim Transportes Aéreos
LD	Distância entre Camadas
MAP	MAP Linhas Aéreas
MEI	Índice de Eficiência Multiplex
MEID	Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas
MEIDW	Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas e Ponderadas
MEIW	Índice de Eficiência Multiplex para Redes Ponderadas
ND	Diferença de Nós
NDD	Distribuição de Distância dos Nós
ONE	Avianca Brasil
PTB	Passaredo Transportes Aéreos
PTN	Pantanal Linhas Aéreas
TAM	TAM Linhas Aéreas

TIB	TRIP Linhas Aéreas
TM	Matriz de Transição
WEB	Webjet Linhas Aéreas
wNDD	Distribuição de Distância de Nó Ponderada
WTM	Matriz de Transição Ponderada

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Redes Complexas	6
2.1 Definições e fundamentos quantitativos	6
2.2 Métricas e medidas	10
2.3 Redes complexas interconectadas - <i>multilayer networks</i>	13
3 – Índices de Eficiência em Redes Multiplex	16
3.1 Índice de Eficiência Multiplex para redes não direcionadas e não ponderadas	17
3.2 Uma nova proposta para o cálculo de MEI para redes multiplex direcionadas e/ou ponderadas	19
3.2.1 Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas e Não Ponderadas - MEID	19
3.2.2 Redes ponderadas e não direcionadas: Índice de Eficiência Multiplex para Redes Ponderadas - MEIW	20
3.2.3 Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas e Ponderadas - MEIDW	20
3.3 Exemplos	21
4 – Análise de Eficiência da Rede Brasileira de Transporte Aéreo	29
4.1 Modelo multiplex para a rede brasileira de transporte aéreo doméstico de passageiros	29
4.2 A rede multiplex não direcionada e não ponderada BATMN	31
4.3 A rede brasileira de transporte aéreo de passageiros modelada como rede multiplex direcionada e ponderada	43
4.4 B-BATMN: um modelo multiplex para a rede de transporte aéreo mais movimentada do Brasil	46
4.5 Comparação entre MEI e MEIDW para B-BATMN e BATMN	49
4.6 A rede mais movimentada construída como rede de camada única e suas centralidades clássicas	50
4.7 Publicações	53
5 – Capacidade de Difusão em Redes Interconectadas	54
5.1 Capacidade de difusão em uma rede de camada única	54
5.2 Capacidade de difusão em uma rede multicamada	56
5.3 Avaliando a capacidade de difusão da rede brasileira de transporte aéreo	58

5.3.1	Capacidade de difusão da rede de camada única BATN	58
5.3.2	Capacidade de difusão da BATMN	60
6	– Conclusões e Trabalhos Futuros	68
	Referências	71
	 Apêndices	 77
	APÊNDICE A – Análise do Índice de Eficiência Multiplex para aeroportos privatizados	78
	APÊNDICE B – Gráficos de centralidades para B-BATMN	81
	APÊNDICE C – Artigo: The Multiplex Efficiency Index: Unveiling the Brazilian Air Transportation Multiplex Network—BATMN	92
	APÊNDICE D – Artigo: Diversity Analysis of the Brazilian Air Transportation Network	108
	APÊNDICE E – Artigo: Quantificando Eficiência em Redes Multiplex	117

Capítulo 1

Introdução

A sociedade está se tornando cada vez mais conectada e, conseqüentemente, necessita buscar soluções para reduzir as distâncias físicas entre as pessoas. Meios de transporte rápido são desenvolvidos em várias partes do mundo, porém, barreiras geográficas e econômicas fazem com que esses recursos não sejam acessíveis a todos os países ou suas diferentes regiões de maneira equitativa. Assim o transporte aéreo permanece como uma alternativa essencial para a mobilidade, cumprindo um papel importante no desenvolvimento social e econômico mundial.

A integração das regiões do Brasil, por ser este um país de grande extensão territorial, é pauta das discussões governamentais desde a criação da República. Inicialmente o foco foi a manutenção da integridade territorial e, posteriormente, a partir dos governos de Vargas e Kubitschek, a redução das distâncias entre as “ilhas econômicas” que formavam o país (GALVÃO, 1996). O transporte ferroviário exerceu um papel importante nesse contexto até a década de 1950, quando se inicia seu processo de erradicação, com o incentivo do governo brasileiro ao desenvolvimento da malha rodoviária. Atualmente, o quinto maior país do mundo sofre com o alto custo de manutenção de suas rodovias, muitas delas em más condições, o que cria uma forte dependência do transporte aéreo para mobilidade interna. Nas últimas décadas, o transporte aéreo brasileiro tem sido reestruturado. Importantes companhias aéreas encerraram suas operações e empresas de baixo custo passaram a operar em todo o país (COSTA; LOHMANN; OLIVEIRA, 2010). Entre os anos de 2006 e 2007, o setor aéreo foi marcado por uma crise conhecida como “apagão aéreo”, iniciado por um acidente de grandes proporções, que deu origem à crise dos controladores de voo que, entre outros problemas, reivindicavam investimentos públicos no setor. O problema estendeu-se até 2007, culminando em outro acidente grave, ocorrido em um dos aeroportos mais movimentados do país (COSTA; LOHMANN; OLIVEIRA, 2010).

A partir desses eventos, novas regras foram implementadas pela ANAC - Agência Nacional de Aviação Civil, que é responsável por regular e fiscalizar as atividades da aviação civil e a

infraestrutura aeronáutica e aeroportuária no Brasil (ANAC, 2020). Fusões entre companhias aéreas delinearão um cenário de concentração de mercado, de modo que mais de 95% do número de passageiros do país passou a ser atendido por apenas 5 empresas entre os anos de 2014 e 2018 (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020b). O Governo Federal iniciou o processo de privatização de aeroportos a partir de 2011, além de investir em infraestrutura aeroportuária para atender à alta demanda gerada por grandes eventos que ocorreriam no país, como a Copa do Mundo FIFA de 2014 e os Jogos Olímpicos do Rio em 2016 (BRASIL. Ministério do Planejamento, 2012). Mais recentemente, o *lockdown* decretado nos estados brasileiros em virtude da pandemia de COVID-19, impactou intensamente no transporte aéreo.

Devido à sua importância, o funcionamento do transporte aéreo é amplamente estudado em um esforço de projetar sistemas que atendam às demandas da sociedade de forma eficiente. Assim, a teoria de redes complexas foi empregada pela primeira vez para analisar a rede mundial de transporte aéreo por Guimerà et al. (2005). Os autores encontraram um comportamento de rede de mundo pequeno e livre de escala, além de descobrir estruturas de comunidade e de melhor entender o papel das diferentes cidades nessas estruturas, com base nos padrões de conexão. Para isso foram empregadas medidas de centralidade de intermediação e distribuição de grau, entre outras. A partir daí, muitos trabalhos foram desenvolvidos nesse sentido no estudo redes de transporte aéreo em diferentes escalas geográficas. Um exemplo é o caso de Guida e Maria (2007) que estuda a rede italiana empregando medidas de centralidade de grau e de intermediação; Xu e Harriss (2008) analisa a topologia da rede norte americana através de centralidades de grau e intermediação; Wang et al. (2011) que usa comprimento médio do caminho, distribuição de grau, centralidades de proximidade e intermediação para avaliar a rede chinesa; Jia, Qin e Shan (2014), valendo-se de medidas clássicas de centralidades de redes estuda a topologia da rede norte americana; Malik et al. (2019), analisa a rede paquistanesa de transporte aéreo usando comprimento médio do caminho, distribuição de grau e centralidades de intermediação, e Pereira e Mello (2021), utiliza o método de centralidades baseada no índice h , que se assemelha à centralidade de grau para identificar os aeroportos mais influentes do Brasil.

Para caracterizar a rede mundial de transporte aéreo, Varga (2016) cria um modelo de redes interconectadas formado por duas redes, no qual os aeroportos são os vértices e as rotas são as arestas. Neste caso, as arestas são ponderadas pela quantidade de companhias aéreas que operam naquela rota. Uma camada desta rede representa os voos domésticos (dentro de um mesmo país) e a outra, reproduz os voos internacionais. São analisadas medidas de caminhos mínimos e as propriedades das diferentes camadas são reveladas. Em um trabalho mais recente, a rede mundial de transporte aéreo é avaliada por Diop et al. (2021), através de uma nova proposta de modelo de estrutura de componentes. Os

autores decompõem a rede em componentes locais, que são as áreas densas da rede e componentes globais, que são os nós e arestas que ligam estes componentes, encontrando diferenças regionais e globais na rede mundial.

Em dois trabalhos diferentes, o formalismo de redes interconectadas é usado para estudar a dinâmica da rede europeia de transporte aéreo, onde cada camada representa a rede de uma companhia aérea e os vértices são dados pelos aeroportos, conectados entre si pelas diferentes rotas. No primeiro, [Cardillo et al. \(2013b\)](#) calcula a resiliência da rede, que se mostra fortemente reduzida quando comparado com o modelo de camada única. Isso indica que o modelo de camada única é uma simplificação excessiva do sistema, resultando em uma superestimação da resiliência da rede contra perturbações. No segundo trabalho, [Cardillo et al. \(2013a\)](#) analisa as propriedades estruturais e a evolução de métricas clássicas à medida em que as diferentes redes são progressivamente agregadas, até chegar à rede de camada única. Confrontando as abordagens de rede complexa única e rede interconectada, os autores concluem que este último favorece o entendimento dos processos dinâmicos e, portanto, não deve ser ignorado.

Analisando a rede de transporte aéreo dos Estados Unidos, o trabalho de [CHI e CAI \(2004\)](#) revela a característica de alta vulnerabilidade da rede a ataques direcionados, quando aeroportos específicos são removidos. Medidas de vulnerabilidade também foram empregadas em diversos trabalhos, como por [Wilkinson, Dunn e Ma \(2012\)](#), para avaliar a rede europeia de transporte aéreo, de [Hossain et al. \(2013\)](#), na análise da rede australiana, nos trabalhos recentes de [Yang, Xu e Hong \(2021\)](#) para a rede chinesa e [Siozos-Rousoulis, Robert e Verbeke \(2021\)](#), para a rede dos Estados Unidos.

A rede chinesa é exaustivamente estudada, apresentando características próprias em sua estrutura como a disassortatividade, demonstrada por [Wang et al. \(2011\)](#) através da distribuição de grau. Três grandes metrópoles despontam como hubs altamente influentes, diretamente conectados a cidades periféricas. Outros trabalhos exploram as características topológicas de rede no país, como o de [Du et al. \(2017\)](#) e de [Yang, Xu e Hong \(2021\)](#), que usa uma abordagem de redes multicamadas para avaliar a vulnerabilidade da rede chinesa.

Sob a perspectiva de redes de multicamadas, [Rocha \(2009\)](#) constrói a rede brasileira de transporte aéreo, onde o mesmo conjunto de nós (aeroportos) e arestas (rotas entre eles) são replicados, atribuindo pesos diferentes às arestas de cada camada. Na primeira camada, os pesos representam o número de voos; na segunda, correspondem ao número de passageiros e, na terceira, a quantidade de carga transportada por esses voos. O autor aplica medidas de centralidade e outras ferramentas clássicas para o estudo de redes e conclui que a rede brasileira de transporte aéreo evolui de forma dinâmica conforme a demanda, de modo que o crescente número de passageiros contrasta com a redução do tamanho da rede, resultando em maior nível de ocupação de aeronaves ou a necessidade

de aeronaves maiores.

Posteriormente a rede brasileira de transporte aéreo é analisada por [Couto et al. \(2015\)](#) em três cenários distintos: o primeiro considera somente voos nacionais, o segundo contempla voos internacionais, e o terceiro inclui tanto voos nacionais quanto internacionais. Através de métricas clássicas do estudo de redes complexas, a rede exibe características de mundo pequeno e um teste de resiliência mostra os aeroportos mais importantes.

Um modelo econométrico de concentração de redes é desenvolvido por [Oliveira, Lohmann e Costa \(2016\)](#), investigando as influências das variáveis demanda, custo e concorrência entre as operadoras aéreas, capazes de conduzir a uma concentração de voos em um número restrito de aeroportos. O modelo é aplicado na rede brasileira de transporte aéreo, usando dados empíricos entre os anos de 2002 e 2008, incluindo o período conhecido como “grande apagão aéreo”, marcado por muitos atrasos e cancelamentos de voos e dois grandes acidentes aéreos no país. Esses fatos deram origem à crise dos controladores de voo, que protestavam contra a falta de investimentos públicos no setor. Os autores concluem que o mercado de transporte aéreo brasileiro já caminhava para a concentração antes mesmo da referida crise, mas esse processo se acelerou especialmente no final daquela década.

Trabalhando com abordagem de redes complexas, [Wandelt, Sun e Zhang \(2019\)](#) comparam a evolução de algumas redes de transporte aéreo em diferentes regiões do mundo, incluindo a brasileira, durante o período de 2002 a 2013. Empregam medidas clássicas de análise de redes complexas, como centralidade de grau e distribuição de grau, concluindo que a centralidade de grau médio da rede brasileira é relativamente alta, de modo que cada aeroporto está conectado, em média a 20% dos demais em uma curva crescente durante o período estudado. Os autores atribuem esse fato aos esforços de consolidação do transporte aéreo brasileiro e à privatização de alguns aeroportos, iniciada em 2010. Constataram também que a malha aérea brasileira passou por grandes alterações no período, supostamente devido às tentativas de reorganização das empresas aéreas após a crise dos controladores de tráfego aéreo entre 2006 e 2007, com repercussões até 2010.

Outro modelo para a rede brasileira de transporte aéreo é desenvolvido por [Cajueiro et al. \(2019\)](#), baseado em cadeias de Markov de tempo discreto, considerando a estrutura multiplex da rede, onde as companhias aéreas são separadas em camadas. Através da metodologia empregada, os autores identificam as rotas mais importantes, a estabilidade delas ao longo do tempo e os nichos específicos de mercado de cada empresa aérea.

A partir da medida de diversidade para redes não direcionadas e não ponderadas, introduzida por [Carpi et al. \(2019\)](#), propomos o índice de eficiência multiplex (MEI) para avaliar a diversificação de rotas ofertadas pelas companhias aéreas de maior expressão no cenário

de transporte doméstico de passageiros no país. Com o MEI torna-se possível a quantificar a evolução da diversidade da rede mesmo quando fusões entre transportadoras aéreas ocorrem, ou quando novas empresas são inseridas no mercado, alterando o número de companhias atuantes e modificando a estrutura da rede. Analisamos a evolução do MEI para a rede brasileira multiplex de transporte aéreo (*Brazilian air transportation multiplex network* - BATMN) entre os anos de 2010 e 2021, período que inclui a ocorrência de grandes eventos no país como a Copa do Mundo em 2014, as Olimpíadas do Rio em 2016 e, mais recentemente, o *lockdown* causado pela pandemia de COVID-19, impactando intensamente o transporte aéreo.

Motivados pelas características intrínsecas da rede de transporte aéreo, propomos, neste trabalho, uma extensão da medida de diversidade para redes direcionadas e/ou ponderadas, e do índice de eficiência multiplex para essas classes de redes (MEIDW), que podem ser usados nos mais diversos contextos de redes multiplex. Com MEIDW torna-se possível que as direções das arestas da rede e características quantitativas de cada aresta sejam consideradas, como distância entre os vértices, ou qualquer outra quantidade que indique o grau de importância das arestas. No presente trabalho aplicamos MEIDW para BATMN considerando as direções das rotas realizadas e levando em conta o número de passageiros embarcados em cada uma dessas rotas nas diversas empresas aéreas, fazendo uma análise mais pragmática. Nesse contexto, nos desafiamos a avaliar a eficiência do sistema brasileiro de transporte aéreo de passageiros, lançando luz sobre a qualidade do serviço prestado à população.

Este texto foi dividido em seis capítulos. No capítulo 2 descrevemos conceitos da teoria de redes complexas que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 3 apresentamos os índices de eficiência multiplex, que são nossa contribuição para o desenvolvimento da teoria de redes complexas. No capítulo 4, exibimos nossa análise da rede brasileira de transporte aéreo usando um modelo multiplex e aplicando os índices de eficiência multiplex. Citamos também nossas publicações durante o curso. No capítulo 5 fazemos uma análise da capacidade de difusão da rede, empregando conceitos recém-introduzidos na literatura. Por fim, as conclusões são apresentadas no capítulo 6, no qual também apontamos algumas perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Redes Complexas

As redes complexas podem ser descritas como estruturas que representam sistemas compostos por elementos interconectados que possuem relações distintas entre si. Essas estruturas são úteis para modelar e analisar, por exemplo, conexões entre indivíduos em uma rede social, ligações entre células de um organismo, ou mesmo computadores conectados em rede.

Trata-se de uma ferramenta poderosa em uma ampla gama de contextos, incluindo biologia, sociologia, tecnologia da informação, entre outros. Essa característica multidisciplinar impulsiona o desenvolvimento da ciência das redes complexas, em uma busca por instrumentos capazes de captar detalhes específicos de um sistema a partir de sua estrutura e interações.

A teoria de redes complexas se desenvolve apoiada nos conceitos de grafos e em ferramentas de física estatística, ciência da computação e ciências sociais aplicadas ([SAYAMA, 2015](#)). Ao modelar um sistema como uma rede complexa, é necessário inicialmente representar sua estrutura através de um grafo para, só então, analisar suas características topológicas, empregando um conjunto de medidas que traduzem informações relevantes sobre o sistema em questão ([COZZO et al., 2018](#)).

Discorreremos a seguir sobre algumas ferramentas teóricas necessárias para descrever e analisar redes complexas, sendo a maioria delas provenientes da teoria dos grafos. Não temos a pretensão de esgotar o assunto, que é vasto, mas apenas de munir o leitor dos conceitos necessários para o entendimento deste trabalho. Maiores detalhes podem ser consultados nos livros de [M.E.J.Newman \(2010\)](#) e [Cozzo et al. \(2018\)](#).

2.1 Definições e fundamentos quantitativos

Um *grafo* $G(V, E)$ é um conjunto finito de N elementos $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_N\}$ denominados *vértices* (ou nós) que são conectados através de *arestas* $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$,

também conhecidas como *links*. Cada aresta e_k relaciona um par de vértices e pode ser representada por $e_k = (v_i, v_j)$ ou simplesmente e_{ij} . Dizemos que um nó v_j é vizinho do nó v_i se (e somente se) o nó v_i estiver conectado ao nó v_j através de uma aresta. É comum nos textos usarmos apenas i para representar um vértice v_i .

A Figura 1 ilustra um pequeno grafo formado pelo conjunto $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de vértices e arestas $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6)\}$.

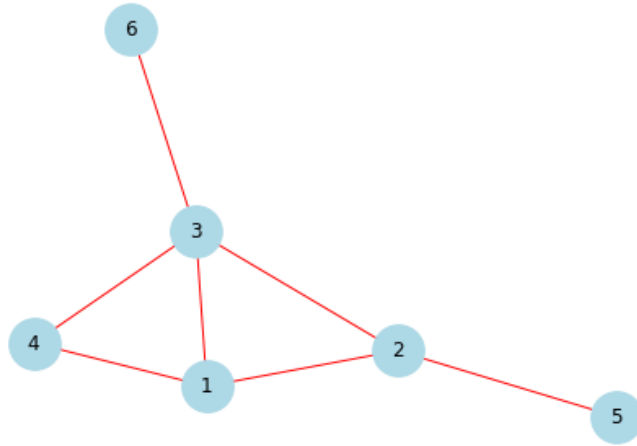


Figura 1 – Exemplo de grafo composto por seis vértices e sete arestas.

Há diferentes maneiras de representar grafos, sendo recorrente o uso da *matriz de adjacência* A , cujas linhas e colunas são rotuladas pelos vértices, de modo que cada elemento a_{ij} recebe o valor 1 se o vértice v_i for conectado ao vértice v_j , ou 0 caso contrário. Ou seja,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

Desse modo, a matriz de adjacência descreve a vizinhança de cada nó, favorecendo análises matemáticas e manipulações computacionais do grafo. As configurações da matriz de adjacência podem variar conforme as particularidades do grafo.

O número de arestas conectadas a um vértice v_i recebe o nome de *grau* do vértice e é escrito como $\deg(v_i)$ ou $\text{grau}(v_i)$ ou apenas k_i . No exemplo da Figura 1, vemos $\text{grau}(3) = 4$ enquanto o $\text{grau}(6) = 1$, por exemplo. Através da matriz de adjacência é possível obter o $\text{grau}(v_i)$ através da expressão

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad (2)$$

para cada vértice i . Se o vértice não possui nenhuma conexão, dizemos que ele é um *vértice isolado*.

De acordo com características das arestas, os grafos podem ser classificados como direcionados ou não direcionados, ponderados ou não ponderados, entre outras classes. Considerando aspectos topológicos, os grafos se classificam como completos, regulares, simples, bipartidos, planares ou árvores. É possível que um grafo específico pertença a mais de uma categoria. Vamos nos limitar a descrever apenas os tipos que são citados neste trabalho, mas uma exposição detalhada pode ser encontrada no trabalho de Sayama (2015).

Em um grafo *não direcionado* há uma conexão simétrica entre os nós: se um nó v_i é conectado a um nó v_j através de uma aresta não direcionada, ambos pertencem às correspondentes listas de vizinhos de forma recíproca. Desse modo, a matriz de adjacência desse grafo será simétrica. No caso de *grafos direcionados*, a conexão não é simétrica: é possível existir uma aresta partindo do nó v_i para o nó v_j , sem que haja a conexão de retorno saindo de v_j para v_i . Assim a matriz de adjacência é, geralmente, assimétrica (SAYAMA, 2015). Para grafos direcionados são definidos o grau de entrada k_i^{in} e o grau de saída k_i^{out} de cada vértice i , considerando apenas as arestas que incidem sobre ele (arestas de entrada) ou as arestas que saem do vértice (arestas de saída). Assim a equação 2 tem duas variações dadas por

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ji} \text{ e } k_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ij}. \quad (3)$$

Os grafos também podem ser *ponderados* ou *não ponderados* e essa característica diz respeito à associação de valores (*pesos*) às arestas. Um grafo não ponderado não apresenta nenhum valor associado às suas arestas. Nesse caso, a matriz de adjacência relacionada tem estrutura booleana de maneira que as conexões podem ser representadas como estados binários – presentes ou ausentes – e então a matriz será composta por valores 1's e 0's, respectivamente, como já descrito na equação 1. Por outro lado, em um grafo ponderado, um número real, geralmente não negativo, é associado a cada aresta, podendo representar, por exemplo, a distância entre os nós ou qualquer outra característica que seja relevante para o grafo em questão. A matriz de adjacência pode ser redefinida de modo que os pesos das arestas sejam então representados, sendo $a_{ij} = w_{ij}$ se o vértice v_i for conectado ao vértice v_j através de uma aresta de peso w_{ij} , ou 0 se não houver conexão. Em termos matemáticos,

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

Somando-se os pesos de todas as arestas conectadas a um nó obtemos o *grau ponderado*

do nó, também conhecido como *força do nó* e aqui será representada por

$$s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}. \quad (5)$$

Caso o grafo seja direcionado, podemos obter a *força de entrada do nó* e a *força de saída do nó*, considerando-se os pesos das arestas de entrada ou saída, respectivamente, e obtemos, assim como na equação 5, suas versões

$$s_i^{in} = \sum_{j=1}^N w_{ji}, \text{ e } s_i^{out} = \sum_{j=1}^N w_{ij}. \quad (6)$$

Dizemos que um grafo é *completo* quando qualquer par de seus vértices está conectado. Em outras palavras, todos os nós estão diretamente conectados uns aos outros.

A Figura 2 ilustra alguns grafos pertencentes às classes descritas.

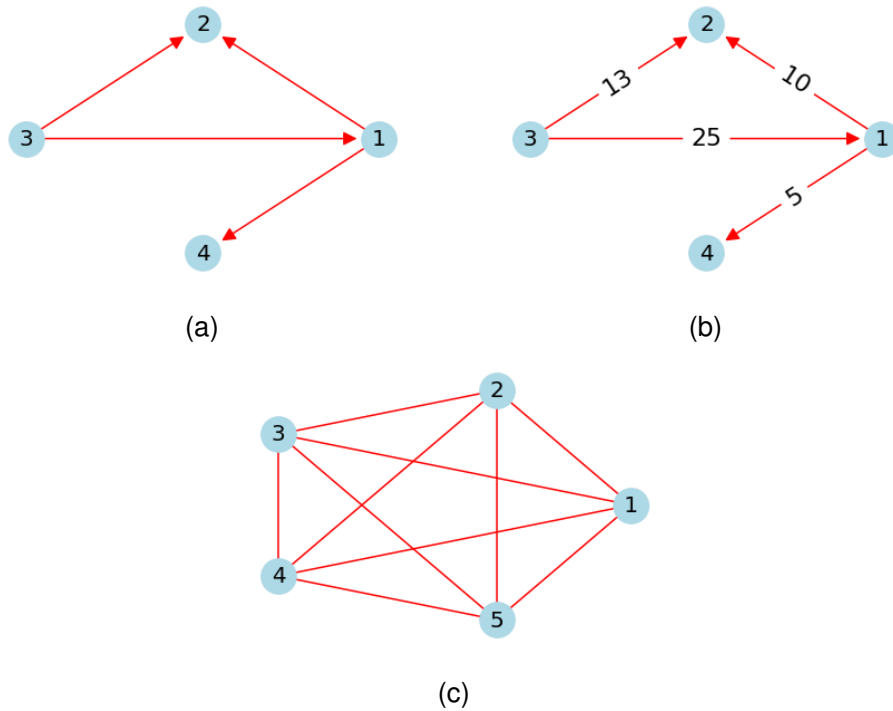


Figura 2 – Exemplos de grafos: **(a)** direcionado e não ponderado; **(b)** direcionado e ponderado; **(c)** grafo completo, não direcionado e não ponderado.

Um *caminho* em um grafo é dado por uma sequência de vértices de modo que existe sempre uma aresta conectando cada par consecutivo de vértices na sequência. Em outras palavras, um caminho é uma rota que liga um vértice ao outro, através das arestas do grafo. Se o grafo for direcionado, o caminho deve ser percorrido respeitando as direções das arestas e, por outro lado, para grafos não direcionados, as arestas podem ser percorridas em qualquer direção. O comprimento de um caminho é dado pelo número de arestas percorridas entre

os vértices inicial e final do caminho (origem e destino). Um *caminho geodésico* entre dois vértices i e j é o caminho mais curto que existe entre esses vértices no grafo, por isso é comumente chamado apenas de *caminho mais curto*, de modo que cada aresta e cada vértice do caminho só pode ser visitado uma vez. Chamamos de *distância geodésica* $D_g(i, j)$ ou *distância mais curta* o comprimento de um caminho geodésico entre dois vértices i e j . Observamos, porém, que os caminhos geodésicos não são necessariamente únicos. É possível haver mais de um caminho de igual comprimento entre um dado par de vértices.

Para cada nó i de um grafo, a *excentricidade* $E(i) = \max_j D_g(i, j)$ fornece a maior distância geodésica de i a todos os outros nós j . O *diâmetro* de um grafo $D = \max_i E(i)$ é definido como o valor máximo de excentricidade entre todos os nós, o que indica qual é a distância geodésica máxima possível entre dois vértices do grafo. Os nós cuja excentricidade é D são chamados de *periféricos*.

Quando não existe um caminho no grafo conectando algum par de vértices (i, j) , consideramos que $D_g(i, j) = \infty$ e dizemos que o grafo é *desconexo*. Nesse caso o grafo é formado por mais de um componente, que são os subgrupos de vértices nos quais existe pelo menos um caminho conectando cada um de seus vértices, portanto, esses componentes recebem o nome de *componentes conexos*. Essa definição é válida para grafos não direcionados, enquanto que, para grafos direcionados, existem duas situações distintas que devem ser consideradas. Inicialmente, se desprezarmos as direções das arestas e analisarmos como um grafo não direcionado, os componentes são chamados de *componentes fracamente conexos*. Sendo assim, dois vértices pertencem ao mesmo componente fracamente conexo quando há um ou mais caminhos que os conectam, independente da direção das arestas. Em uma segunda abordagem, considerando-se as direções, dizemos que um *componente fortemente conexo* é um subconjunto máximo de vértices tal que existe um caminho direcionado em ambas as direções, conectando cada par no subconjunto (M.E.J. NEWMAN, 2010).

2.2 Métricas e medidas

A análise de uma rede complexa pode ser feita por diferentes meios com o objetivo de investigar e comparar suas características estruturais a partir do grafo que a representa. Conhecendo sua estrutura topológica, é possível empregar um conjunto de métricas e medidas para extrair particularidades que lhe são próprias.

Grande parte dos trabalhos de pesquisa em redes é voltada à identificação dos vértices mais importantes – ou mais centrais – em relação a determinadas características e são provenientes de estudos de redes sociais. Segundo Freitas (2010), BAVELAS introduz a ideia de centralidades em redes sociais em 1948, considerando que, quando um indivíduo

está estrategicamente posicionado em um caminho mais curto de comunicação entre seus pares em um grupo de pessoas, ele está em uma posição central na rede. Quanto mais central ele estiver, maior a sua influência na transmissão de informação para os outros indivíduos.

Existem várias medidas de centralidade dos nós que podem ser empregadas conforme as características da rede e o objetivo do estudo. Mencionamos aqui algumas delas: a *centralidade de grau*, que indica a influência direta que um vértice exerce em seus contatos, a *centralidade de proximidade*, que está relacionada com o tempo que uma informação leva para ser transmitida a todos os vértices e a *centralidade de intermediação*, que quantifica a importância do vértice no controle da comunicação entre os demais pares de vértices da rede (FREITAS, 2010).

Centralidade de grau: Centralidade de grau é uma medida simples e intuitiva que indica a quantidade de contatos que um vértice tem, através da contagem do número de arestas conectadas a ele. Na definição original, coincide com o próprio grau do vértice, o que pode induzir a interpretações equivocadas pelo uso de valores absolutos que não representam a importância do nó em relação à rede como um todo. Assim surge a *centralidade relativa de grau* para uma rede que possui n vértices, dada por

$$c_D(i) = \frac{k_i}{N - 1}, \quad (7)$$

onde $N - 1$ é o grau máximo possível para um vértice. Desse modo $0 \leq c_D(i) \leq 1$ sendo o valor 0 atingido pelos nós isolados e 1 pelos vértices totalmente conectados (FREITAS, 2010).

Centralidade de Proximidade: Centralidade de Proximidade é relacionada à distância média de um vértice aos outros. Inicialmente foi definida como o inverso da soma das distâncias geodésicas do nó i aos demais nós da rede,

$$c'_C(i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N D_g(i, j)},$$

porém, estamos diante novamente de valores absolutos para uma medida de centralidade. No caso extremo de um vértice i que seja completamente conectado aos demais, a $D_g(i, j) = 1$ para todo nó j na rede, e assim obtemos $\sum_{j=1}^N D_g(i, j) = N - 1$. Desse modo, o valor máximo de $c'_C(i) = \frac{1}{N-1}$. Normalizando então a medida por seu valor máximo, obtemos

$$c_C(i) = \frac{N - 1}{\sum_{j=1}^N D_g(i, j)}, \quad (8)$$

de modo que $0 \leq c_C(i) \leq 1$, sendo o valor máximo atingido apenas pelos vértices totalmente conectados. Para redes desconexas, essa medida não traz informações relevantes, uma vez que, em tais redes, existe pelo menos um par de vértices i e j tal que $D_g(i, j) = \infty$. No

entanto, algum desses nós pode estar conectado a outros, como parte de um componente conexo.

Centralidade de intermediação: Centralidade de intermediação, também conhecida pelo nome em inglês *betweenness*, foi inicialmente definida como uma medida de intermediação parcial, que relaciona o número de caminhos geodésicos $N_g(i, j)$ entre um par de vértices (i, j) e o número de caminhos geodésicos $N_g(i, j|k)$ que ligam esses vértices por intermédio de um dado vértice k . Assim, em uma rede com n vértices, a intermediação parcial de k em relação a i e j é

$$b_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{N_g(i, j|k)}{N_g(i, j)}, & \text{se existir um caminho entre } i \text{ e } j; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (9)$$

considerando $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$.

Somando-se todos os valores de intermediação parcial de um vértice, obtemos a centralidade de intermediação de um vértice k , que, normalizada pelo seu limite superior, é dada por

$$c_B(k) = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N \\ i, j \neq k}} b_{ij}(k), \quad (10)$$

considerando redes não direcionadas. Para redes direcionadas, a equação 10 deve ser dividida por 2. Essa medida pode ser usada para um grafo conexo, ou não.

Além das medidas de centralidade, o conceito de disparidade vem para contribuir com a análise de redes ponderadas, quantificando o quão díspares os pesos das arestas conectadas a um nó podem ser. Assim como grande parte dos instrumentos avaliativos da ciência de redes complexas, o conceito de disparidade foi introduzido em outro contexto e posteriormente empregado para redes complexas (BARTHÉLEMY et al., 2005).

Disparidade: Em uma rede ponderada, avaliando os pesos das arestas conectadas a um dado nó i , cujo grau é k_i e força s_i , diferentes situações podem surgir. Por um lado, todos os pesos w_{ij} podem ser da mesmo ordem s_i/k_i . Em contraste, a situação mais heterogênea é obtida quando um peso domina sobre todos os outros. Para medir essa *disparidade* dos pesos, usamos a quantidade

$$Y_2(i) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{w_{ij}}{s_i} \right)^2. \quad (11)$$

Se todos os pesos são da mesmo ordem, então $Y_2 \sim \frac{1}{k_i}$ (para $k_i \gg 1$) e se um pequeno número de pesos dominar, então Y_2 é do ordem $\frac{1}{n}$ com n de ordem unitária (BARTHÉLEMY et al., 2005).

Para avaliar as intrincadas conexões de redes complexas, é frequente o emprego de técnicas da teoria de probabilidade. Entre elas, a *divergência de Jensen-Shannon* desponta como uma ferramenta útil.

Divergência de Jensen-Shannon: A Divergência de Jensen-Shannon é um método empregado em Teoria de Probabilidade para quantificar a similaridade entre duas distribuições de probabilidade (FUGLEDE; TOPSOE, 2004). Dadas duas funções de probabilidade $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, a Divergência de Jensen-Shannon é definida por

$$J[P, Q] = S \left[\frac{P + Q}{2} \right] - \frac{S[P]}{2} - \frac{S[Q]}{2}, \quad (12)$$

onde S denota a entropia de Shannon¹.

Tomando a raiz quadrada de J , obtém-se uma métrica e, portanto, satisfaz às propriedades:

- (i) $\sqrt{J[P, Q]} \geq 0$;
- (ii) $\sqrt{J[P, Q]} = 0 \iff P = Q$;
- (iii) $\sqrt{J[P, Q]} = \sqrt{J[Q, P]}$;
- (iv) $\sqrt{J[P_1, P_2]} + \sqrt{J[P_2, P_3]} = \sqrt{J[P_1, P_3]}$,

para funções de probabilidade dadas P, Q, P_1, P_2 e P_3 .

O estudo de redes complexas vem enfrentado, na última década, o desafio de melhor entender as características estruturais e a evolução dinâmica de sistema reais. Sabe-se que qualquer sistema real é o resultado da interação de sub-sistemas, portanto, surge a necessidade de considerar estruturas formadas por duas ou mais redes (GOMEZ et al., 2013). Apresentamos a seguir alguns conceitos importantes para a compreensão de redes interconectadas.

2.3 Redes complexas interconectadas - *multilayer networks*

A abordagem tradicional na modelagem de redes assume que as conexões entre seus elementos são da mesma natureza e consideradas na mesma escala temporal, o que claramente implica em uma abstração de qualquer sistema real (MUCHA et al., 2010). Diante da necessidade de melhor entender o comportamento de sistemas complexos reais nos quais coexistem diferentes escalas de tempo e padrões estruturais, surge o conceito de redes interconectadas. Esta nova abordagem representa um sistema interconectado como um conjunto de redes em camadas, cada uma das quais possui características próprias a respeito da natureza das conexões. Estas redes são chamadas de redes multicamadas (em inglês, *multilayer networks*) as quais melhor representam as intrincadas formas de interação de um sistema real (LEE; MIN; GOH, 2015).

¹A entropia de Shannon é uma ferramenta da Teoria da Informação que mede o grau de incerteza de uma variável aleatória. Mais detalhes podem ser encontradas em Salinas (2001).

Uma rede multicamada é um par $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ onde $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in \{1, \dots, M\}\}$ é uma família de grafos $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, que podem ser direcionados ou não direcionados, ponderados ou não ponderados, e são chamados camadas de $\mathcal{M}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}, \alpha \neq \beta\}$ representa as interconexões entre nós de diferentes camadas G_α e G_β com $\alpha \neq \beta$. Os elementos de cada E_α são chamados conexões intracamadas de $\mathcal{M}$ enquanto os elementos de cada $E_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) são as conexões intercamadas (BOCCALETTI et al., 2014).

Existe um tipo especial de rede multicamada, chamado rede multiplex, no qual $V_1 = V_2 = \dots = V_M = V$ e o único possível tipo de conexões intercamadas são aquelas em que um determinado nó está conectado apenas aos seus nós correspondentes nas demais camadas (BOCCALETTI et al., 2014). Muitas redes do mundo real podem ser modeladas segundo essa configuração, em diversas áreas do conhecimento, tais como propagação de epidemias (SILVA et al., 2019), comportamento de votação em parlamentos (ARINIK; FIGUEIREDO; LABATUT, 2020), redes de transporte aéreo (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020b), redes biológicas (CARPI et al., 2019), propagação de boato em redes sociais (HOSNI; LI; AHMAD, 2020), entre outras.

Usando uma formulação matemática mais simples, dizemos que uma rede multiplex é constituída por um mesmo conjunto de N elementos, que são chamados nós, interligados de M diferentes maneiras, definindo, assim, as M camadas da rede, e é representada por um conjunto de $M_{N \times N}$ matrizes de adjacências, $\mathcal{A} = \{A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[M]}\}$. Nessas estruturas, as interações existem apenas dentro das camadas: o nó i na camada p não está vinculado ao nó j na camada q . A Figura 3 ilustra um exemplo didático de uma rede multiplex formada por cinco vértices e três camadas.

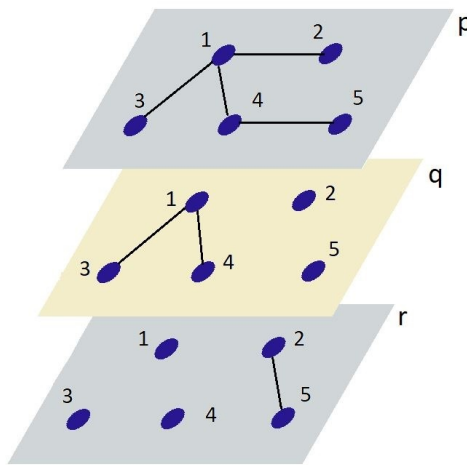


Figura 3 – Exemplo de estrutura multiplex formada por cinco vértices, $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e três camadas $L = \{p, q, r\}$.

Encontramos na literatura mais de uma definição para o grau multiplex de um nó. Adotamos neste trabalho a definição apresentada por Cozzo et al. (2018), que adaptamos aqui.

Seja $l(i) = \{(i, \alpha); i \in V \text{ e } \alpha \in L\}$, o conjunto de todos os pares nó-camada que representam as camadas nas quais o nó i possui conexões, sendo V o conjunto de nós e L , o conjunto de camadas de uma rede multiplex. O *grau multiplex* do nó i é dado por

$$\kappa_i = |l(i)|,$$

ou seja, o grau multiplex do nó i é o número de camadas nas quais ele é conectado.

No exemplo apresentado na Figura 3, se considerarmos apenas as redes independentes de cada camada, vemos que o nó 4 tem grau $k_4^p = 2$ na camada p , grau $k_4^q = 1$ na camada q e é um nó isolado na camada r , sendo $k_4^r = 0$. No entanto, o grau multiplex desse nó é $\kappa_4 = 2$, pois ele possui conexões em duas camadas do sistema.

Ferramentas de redes complexas são adaptadas para analisar a estrutura e as propriedades dinâmicas das redes multiplex e a busca por novos métodos específicos para análise das estruturas multiplex é responsável por grande parte das pesquisas atuais na ciência de redes (LEE; MIN; GOH, 2015).

A definição de caminho geodésico e de medidas baseadas em distâncias para redes multiplex, por exemplo, são dependentes do contexto da rede e devem considerar o aspecto funcional do acoplamento das camadas e o processo dinâmico envolvido no sistema (MIN et al., 2015). Conforme o contexto, é possível haver um caminho geodésico entre dois nós de uma mesma camada, passando por arestas de outras camadas. Assim não há uma única definição para distância entre dois elementos de uma rede multiplex. Do mesmo modo, há uma ampla variedade de métricas e medidas descritas na literatura. Neste trabalho, vamos nos concentrar em apresentar apenas aquelas que foram utilizadas em nossas aplicações, mencionando em outras seções do texto.

Capítulo 3

Índices de Eficiência em Redes Multiplex

Conceitos já bem definidos em ciência de redes para uma única camada têm sido generalizados para redes multiplex, como grau de um nó, matriz de adjacência, centralidade de nós, percolação, difusão, entre outros. São necessários, porém, novos instrumentos para avaliar as características intrínsecas de redes dessa natureza, considerando a estrutura de camadas. Nesse sentido, [Carpi et al. \(2019\)](#) introduziram a medida de diversidade para uma rede multiplex não direcionada e não ponderada, que quantifica a variedade de padrões de conexões presentes no sistema. Desse modo, quanto maior o valor da diversidade de uma rede, mais distinta é a disposição das arestas entre as camadas presentes.

Aplicamos a medida de diversidade para avaliar a evolução dos padrões de rotas da rede doméstica brasileira de transporte aéreo de passageiros ao longo do tempo, e assim percebemos que a medida de diversidade é influenciada pelo número de camadas que participam da rede. Propusemos então uma nova medida, que consiste na normalização da diversidade por seu valor máximo e introduzimos, assim, o “Índice de Eficiência Multiplex” - MEI (em referência à sigla em inglês para *Multiplex Efficiency Index*) ([OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020b](#)), inédito na literatura, e que possibilita quantificar o nível de heterogeneidade de conexões de uma rede multiplex em uma escala de 0 a 1. Como o valor de MEI independe do número de camadas que constituem a rede, é possível, através dele, comparar a eficiência de uma rede multiplex ao longo do tempo, ou entre redes diferentes.

Em uma nova proposta, estendemos neste trabalho o conceito de diversidade para redes multiplex direcionadas e/ou ponderadas e apresentamos os índices MEID, MEIW e MEIDW, que permitem quantificar a eficiência dessas classes de redes. O conceito de eficiência em redes multiplex que tratamos aqui está relacionado ao nível de diversificação dos caminhos da rede nas diferentes camadas. Uma maior diversificação implica na presença de arestas menos sobrepostas entre as camadas, reduzindo a redundância das conexões e ampliando as possibilidades de usar diferentes caminhos para explorar a estrutura de forma mais eficiente.

3.1 Índice de Eficiência Multiplex para redes não direcionadas e não ponderadas

Com a proposta de [Carpi et al. \(2019\)](#) é possível medir a diversidade local (no nível dos nós) ou a diversidade global do sistema (no nível das camadas), captando a variedade de padrões de conectividade entre os elementos de uma rede não direcionada e não ponderada e, para isso, são empregadas medidas de distâncias entre pares de elementos do sistema. Para tanto, foram definidas duas distribuições de probabilidade que são extraídas da rede:

(i) “Distribuição de Distâncias dos Nós” (NDD - *Node Distance Distribution*): nessa primeira distribuição estão contidas informações sobre a topologia geral da camada. Para cada nó i na camada p , $\mathcal{N}_i^p(d)$ corresponde à fração de nós alcançáveis a partir do nó i , pelo menor caminho d ;

(ii) “Matriz de Transição” (TM - *Transition Matrix*): refere-se a informações locais sobre a conectividade da camada. $\mathcal{T}_i^p(j)$ é a probabilidade de que o nó j seja alcançado, em um passo, por um *random walker* localizado no nó i . $\mathcal{T}^p$ é a matriz de adjacência da camada p reescalada pelo grau de cada nó.

De posse dessas distribuições que descrevem os grafos de cada camada, é possível calcular a diferença dos caminhos de conectividade do nó i nas camadas p e q , chamada *Node Difference* (ND), empregando a divergência de Jensen-Shannon ([CICHOCKI; AMARI, 2010](#)) para medir a distância entre duas distribuições de probabilidade, a saber:

$$\mathcal{D}_i(p, q) = \frac{\sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{N}_i^p, \mathcal{N}_i^q)} + \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{T}_i^p, \mathcal{T}_i^q)}}{2\sqrt{\log(2)}}. \quad (13)$$

A partir da Equação (13), fica claro que $0 \leq \mathcal{D}_i(p, q) \leq 1$. Se $\mathcal{D}_i(p, q) = 0$ significa que as conexões do nó i são idênticas nas duas camadas p e q ; no outro extremo, se $\mathcal{D}_i(p, q) = 1$, então o nó i está totalmente conectado em uma camada e é um nó isolado na outra.

Para computar a diferença entre duas camadas, os autores definem a *Layer Distance* (LD) que quantifica a diferença de caminhos de conectividade entre as camadas p e q . Para isso, tomam a média de $\mathcal{D}_i(p, q)$ sobre todos os nós i , de 1 a N . Assim,

$$\mathcal{D}(p, q) = \langle \mathcal{D}_i(p, q) \rangle_i. \quad (14)$$

Novamente tem-se uma medida tal que $0 \leq \mathcal{D}(p, q) \leq 1$. Quando $\mathcal{D}(p, q) = 0$, significa que as camadas p e q são idênticas; por outro lado, $\mathcal{D}(p, q) = 1$, implica que uma camada é totalmente conectada, enquanto a outra é completamente desconectada.

Para definir diversidade, [Carpi et al. \(2019\)](#) empregam a distância entre um elemento g e um conjunto S , definida como a menor distância entre o elemento g , não pertencente a S , e

algum elemento de S , supondo que seja possível calcular todas essas distâncias:

$$\mathcal{D}(g, S) = \min_{s_i \in S} \mathcal{D}(g, s_i). \quad (15)$$

Quando os elementos envolvidos são os nós da rede, usa-se a medida ND dada na Equação (13) para calcular a distância referida pela Equação (15); em outra situação, para obter a distância entre camadas da rede (Eq. 15), emprega-se a distância LD dada pela Equação (14). Desse modo, obtem-se sempre valores tais que $0 \leq \mathcal{D}(g, S) \leq 1$.

Finalmente, a função diversidade $U(\tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^+)$ é definida recursivamente como

$$U(S) = \max_{s_i \in S} \{U(S \setminus s_i) + \mathcal{D}(s_i, S \setminus s_i)\}, \quad (16)$$

para todo $S \in \tilde{S}$, que é o conjunto de todas as entidades consideradas, de tal modo que o conjunto S contenha, pelo menos, dois elementos.

Observamos, pela definição dada na Equação (16), que o valor da diversidade é calculado pela soma de $M - 1$ distâncias obtidas através da Equação (15), e, portanto, é limitado superiormente por $M - 1$, onde M é o número de camadas da rede multiplex. Se a rede analisada tiver, por exemplo, 10 camadas, o valor de U será um número real entre 0 e 9; ao passo que, se a rede tiver 5 camadas, U será um valor entre 0 e 4. Sendo assim, para comparar a eficiência dessas estruturas, no sentido de diversidade de conexões, propomos uma medida normalizada, independente do número de camadas. Introduzimos então o conceito de *índice de eficiência multiplex* (MEI) (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020b), que leva em conta a quantidade de camadas da rede, relacionando o valor de diversidade do sistema e o número de camadas envolvidas, através da expressão:

$$\mathcal{E} = \frac{U(S)}{M - 1}, \quad (17)$$

onde $\mathcal{E}$ representa o valor de MEI, de modo que $0 \leq \mathcal{E} \leq 1$. Assim é possível comparar os valores do índice de eficiência multiplex entre redes, sem a influência do número de camadas, além de facilitar a análise do valor encontrado. Para redes nas quais haja grande sobreposição de arestas em suas camadas, ou seja, muita semelhança nos padrões de conectividade, o valor de MEI será próximo de 0 e, por outro lado, em redes onde as conexões sejam mais diversas quando comparamos as diferentes camadas, o valor de MEI será mais próximo de 1. Observamos que o valor máximo de MEI ($\mathcal{E} = 1$) ocorre se, e somente se, a rede for composta por duas camadas, sendo uma delas um grafo completo e a outra totalmente desconectada, conforme já mencionado no detalhamento da Equação 14.

Ao computar o valor de diversidade através da Equação (16), os elementos considerados são levados em conta a partir daquele que é “mais próximo” aos outros, até o último, que será o “mais distante” dos demais, considerando *distância* no sentido dado pela Equação

(15). Desse modo, Carpi et al. (2019) definiram o conceito de “ordem de diversidade”, que é dado através do conjunto de entidades da rede ordenado de maneira ascendente, à medida em que cada uma contribui para a composição do valor final da diversidade. Essa ferramenta é extremamente útil para identificar quais são as camadas, ou os nós, que adicionam ou reduzem heterogeneidade de *links* à rede. Assim a ordem de diversidade auxilia a tomada de decisão sobre excluir ou acrescentar elementos à rede, conforme o objetivo desejado, quer seja reduzir ou ampliar a eficiência da rede, no sentido de diversificação de conexões e cobertura da rede. Elaboramos um exemplo que ilustra o algoritmo de obtenção da ordem de diversidade na Seção 3.3 e mostrado na Figura 4.

3.2 Uma nova proposta para o cálculo de MEI para redes multiplex direcionadas e/ou ponderadas

Conforme a natureza do sistema que estiver sendo modelado, o uso de redes direcionadas e/ou ponderadas é desejável e isso se aplica às redes de transporte aéreo. Com essa motivação, estendemos os conceitos de diversidade e MEI para essas duas classes de redes multiplex, ampliando as possibilidades de aplicação da ferramenta. Novas propriedades de conexões dos nós em cada camada advêm das características de direção e peso e então as distribuições de probabilidade usadas no cálculo original da diversidade (3.1-(i),(ii)) que descrevem a topologia da rede, precisam ser redefinidas para considerar tais aspectos.

3.2.1 Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas e Não Ponderadas - MEID

Para calcular a diversidade de redes direcionadas e, por consequência, o MEI para esse tipo de rede, definimos a “Distribuição de Distância Direcionada dos Nós” (*Directed Distance Distribution of Nodes* - DDDN) considerando, no cálculo original de NDD (3.1-(i)), apenas as arestas de saída de cada nó e aí teremos, para cada nó i na camada p , $\mathcal{N}_i^p(d_d)$ que corresponde à fração de nós alcançáveis a partir do nó i , pelo menor caminho direcionado d_d .

Definimos também a “Matriz de Transição Direcionada” (DTM - *Directed Transition Matrix*), $\mathcal{T}_d^p$, como a matriz de adjacência da camada p reescalada pelo grau de saída de cada nó, de modo que $\mathcal{T}_d^p(i, j)$ é a probabilidade de que, na camada p , um *random walker* localizado no nó i alcance o nó j , em um passo, seguindo as arestas direcionadas. Para um nó isolado i na camada p tem-se $\mathcal{T}_d^p(i, i) = 1$, assim como ocorre na TM para redes não direcionadas. Além disso, como $\mathcal{T}_d^p$ é originária de uma matriz de adjacência que pode ser assimétrica – característica das redes direcionadas – é possível ter $\mathcal{T}_d^p(i, j) \neq 0$ e $\mathcal{T}_d^p(j, i) = 0$ para algum par de vértices (i, j) de p .

Os demais cálculos seguem conforme descritos na Seção 3.1, fazendo-se as devidas substituições de NDD e TM pelas respectivas matrizes DDDN e DTM aqui definidas. Obtemos assim a “diversidade direcionada” e o “Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas” (*Multiplex Efficiency Index for Directed Networks* - MEID):

$$\mathcal{E}_d = \frac{U_d(S)}{M - 1}, \quad (18)$$

onde $U_d(S)$ representa a diversidade direcionada para o sistema e $\mathcal{E}_d$, o valor de MEID, sendo $0 \leq \mathcal{E}_d \leq 1$.

3.2.2 Redes ponderadas e não direcionadas: Índice de Eficiência Multiplex para Redes Ponderadas - MEIW

Para redes nas quais o peso das arestas for uma característica relevante, mas elas não forem direcionadas, definimos a “diversidade ponderada” e o “Índice de Eficiência Multiplex para Redes Ponderadas” (*Multiplex Efficiency Index for Weighted Networks* - MEIW). Para isso, no cálculo da Matriz de Transição (3.1-(ii)) usamos a força do nó em substituição ao grau e definimos assim a “Matriz de Transição Ponderada” (*Weighted Transition Matrix* - WTM), $\mathcal{T}_w^p$, que podemos entender como a matriz de adjacência ponderada da camada p , reescalada pela força de cada nó. Assim $\mathcal{T}_w^p(i, j)$ é a probabilidade de que o nó j seja alcançado, em um passo, por um caminhante localizado no nó i , em uma caminhada tendenciosa (*biased walk*), influenciado pelos pesos das arestas. Ambos os nós, i e j , pertencem à camada p . Como a rede é não direcionada, decorre que $\mathcal{T}_w^p(i, j) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_w^p(j, i) \neq 0$.

A matriz de distância dos nós NDD será computada da maneira usual, conforme descrito na Seção 3.1-(i), de modo que para cada nó i de 1 a N na camada p , $\mathcal{N}_i^p(d)$ corresponde à fração de nós que é possível alcançar a partir do nó i com $d = 1$ passo, $d = 2$ passos, $\dots$, $d = N$ passos, através do caminho mais curto. O peso das arestas não é considerado.

Dando sequência às demais etapas do cálculo já mencionadas na Seção 3.1, chegamos à diversidade ponderada e ao MEIW:

$$\mathcal{E}_w = \frac{U_w(S)}{M - 1}, \quad (19)$$

sendo $U_w(S)$ a diversidade ponderada do sistema e $\mathcal{E}_w$, o valor de MEIW, onde $0 \leq \mathcal{E}_w \leq 1$.

3.2.3 Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas e Ponderadas - MEIDW

Para redes direcionadas e ponderadas, combinamos as estratégias mencionadas anteriormente. Inicialmente obtemos a Distribuição de Distância Direcionada dos Nós, que foi definida em 3.2.1, sem levar em conta os pesos das arestas.

Aqui definimos a “Matriz de Transição Direcionada e Ponderada” (*Directed and Weighted Transition Matrix* - DWTM) de forma que $\mathcal{T}_{dw}^p$ é a matriz de adjacência ponderada da camada p , reescalada pela força de saída de cada nó pertencente a p . Dessa forma, $\mathcal{T}_{dw}^p(i, j)$ é a probabilidade de que um caminhante localizado no nó i alcance o nó j , em um passo, em uma caminhada tendenciosa pela camada p , sob influência dos pesos das arestas. Assim como no cálculo de DTM (Subseção 3.2.1), podemos ter $\mathcal{T}_{dw}^p(i, j) \neq 0$ e $\mathcal{T}_{dw}^p(j, i) = 0$ para algum par de vértices (i, j) de p .

Substituindo as matrizes NDD e TM pelas correspondentes DDDN e DWTM no algoritmo detalhado na Seção 3.1, chegamos à “diversidade direcionada e ponderada” $U_{dw}(S)$ e no “Índice de Eficiência Multiplex para Redes Direcionadas e Ponderadas” (*Multiplex Efficiency Index for Directed and Weighted Networks* - MEIDW):

$$\mathcal{E}_{dw} = \frac{U_{dw}(S)}{M - 1}, \quad (20)$$

onde $\mathcal{E}_{dw}$ representa o valor de MEIDW, de maneira que $0 \leq \mathcal{E}_{dw} \leq 1$.

Cabe salientar que para redes ponderadas a disparidade dos vértices (conforme enunciado na Seção 2.2) é importante para a escolha entre calcular MEI em sua versão original ou ponderada, MEIW, ou de seus correspondentes em redes direcionadas, MEID e MEIDW. Quando os pesos são distribuídos de forma heterogênea nas arestas dos nós, com ocorrência de pesos dominantes sobre os demais em grande parte dos vértices da rede, temos uma disparidade que é captada por MEIW ou MEIDW, conforme as redes sejam direcionadas ou não. Por outro lado, quando todos os pesos são da mesma ordem, não teremos diferença nas entradas das matrizes $\mathcal{T}^p$ e $\mathcal{T}_w^p$ ou $\mathcal{T}_d^p$ e $\mathcal{T}_{dw}^p$, sendo equivalentes ao caso de redes não ponderadas, resultando então em valores iguais para os índices MEI e MEIW ou MEID e MEIDW.

No caso de redes direcionadas, a escolha de considerar as direções das arestas tem impacto significativo no valor de MEID quando comparado à versão não direcionada MEI. Isso ocorre como consequência da mudança nos padrões de conexões da rede, que alteram os caminhos geodésicos entre dois vértices, repercutindo na DDDN. Assim a diferença entre a matriz de adjacência de uma rede direcionada para uma rede não direcionada pode alterar a estrutura da TM para DTM, porém, em redes com alta incidência de arestas recíprocas, essas diferenças podem se tornar irrelevantes.

3.3 Exemplos

A fim de aprimorar a compreensão das definições apresentadas nas Seções 3.1 e 3.2, trazemos aqui exemplos de estruturas multiplex sintéticas para as quais exibimos parcial-

mente os cálculos necessários para a obtenção do índice $\mathcal{E}$ e de suas variações $\mathcal{E}_d$ e $\mathcal{E}_{dw}$, evidenciando as características que os tornam distintos.

Inicialmente criamos dois sistemas multiplex para ilustrar o cálculo do índice $\mathcal{E}$ e a obtenção do conjunto da ordem de diversidade (ver Fig. 4). Conforme proposto em 3.1, calculamos as dissimilaridades entre cada par de camadas, que são mostradas nas matrizes LD , e então, os valores de $\mathcal{E}$ e a ordenação da diversidade de cada estrutura. Empregamos o algoritmo desenvolvido por Carpi et al. (2019) na linguagem R para o cálculo da diversidade da rede e, conseqüentemente para o MEI. Optamos por manter essa linguagem de programação para obter os índices MEID, MEIW e MEIDW durante todo o desenvolvimento do presente trabalho.

Experimento 1: Trata-se de uma estrutura de rede de quatro camadas, na qual P e Q apresentam alta sobreposição de *links* e, conseqüentemente, o menor valor de dissimilaridade (Fig. 4- a). Através da matriz

$$LD_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & Q & R & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,271 & 0,702 & 0,849 \\ 0,271 & 0 & 0,693 & 0,705 \\ 0,702 & 0,693 & 0 & 0,935 \\ 0,849 & 0,705 & 0,935 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

fica evidente que a camada R não possui *links* sobrepostos às demais e apresenta a maior dissimilaridade para S .

As distâncias de cada camada às demais, organizadas em ordem ascendente, são:

$$\mathcal{D}(P, S_1) = \{0; 0,271; 0,702; 0,849\},$$

$$\mathcal{D}(Q, S_1) = \{0; 0,271; 0,693; 0,705\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_1) = \{0; 0,693; 0,702; 0,935\},$$

$$\mathcal{D}(S, S_1) = \{0; 0,705; 0,849; 0,935\},$$

onde $S_1 = \{P, Q, R, S\}$ representa o conjunto de camadas presentes na rede neste estágio.

Assim, o menor valor positivo é $\mathcal{D}(P, Q) = 0,271$, que exprime a distância entre as camadas P e Q . Observando os conjuntos de distâncias de ambas a S_1 , percebemos que Q tem a próxima menor distância para outra camada e, portanto, a ordem de diversidade recebe o primeiro elemento: $O_D(S) = \{Q\}$, e assim adicionamos o primeiro valor para o cálculo recursivo da diversidade $U = 0,271$.

Em seguida, eliminamos a camada Q e observamos as distâncias de cada camada ao conjunto remanescente $S_2 = \{P, R, S\}$, obtendo os valores:

$$\mathcal{D}(P, S_2) = \{0; 0,702; 0,849\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_2) = \{0; 0,702; 0,935\},$$

$$\mathcal{D}(S, S_2) = \{0; 0,849; 0,935\}.$$

Agora, o menor valor de LD é $\mathcal{D}(P, R) = 0,702$. Desse modo, $U = 0,271 + 0,702$ e,

seguindo a ordem lexicográfica, a camada P é a mais próxima de outra camada e, portanto, $O_D(S) = \{Q, P\}$. Ficamos agora com o conjunto de camadas remanescentes $S_3 = \{R, S\}$ após a exclusão de P e, assim, temos:

$$\mathcal{D}(R, S_3) = \{0; 0, 935\},$$

$$\mathcal{D}(S, S_3) = \{0; 0, 935\}.$$

Claramente, 0,935 é o último valor a ser adicionado em $U = 0,271 + 0,702 + 0,935 = 1.908$ e, portanto, $\mathcal{E} = 0,64$, de acordo com a Equação (17). Para a sequência ascendente de componentes do cálculo de $\mathcal{E}$, observamos que a camada R foi a “mais próxima” do conjunto S_2 no passo anterior e então $O_D = \{Q, P, R, S\}$. Isso significa que S é a camada que adiciona maior diversidade ao multiplex, enquanto a camada Q é a que menos contribui.

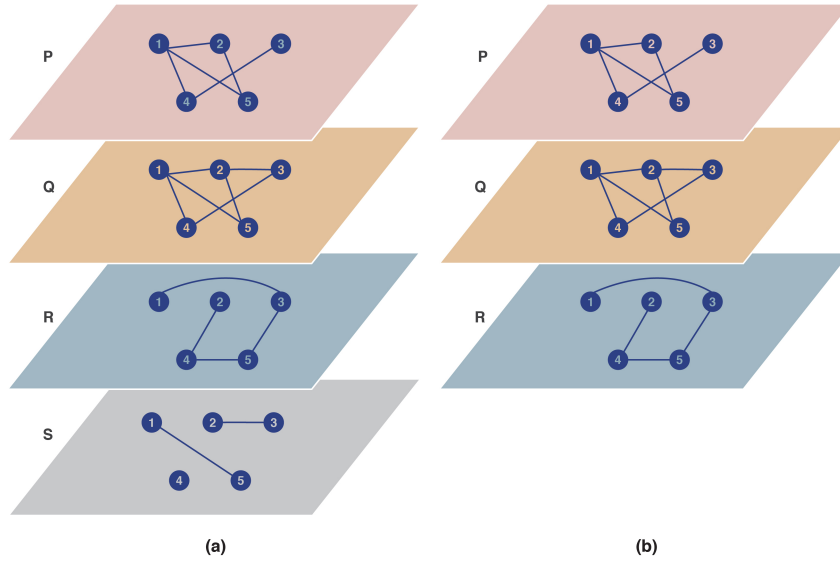


Figura 4 – Ilustração das redes sintéticas analisadas nos experimentos 1 e 2. **(a)** Representação da rede multiplex de quatro camadas, utilizada no Experimento 1. Como pode ser visto nesta estrutura, as camadas P e Q possuem alta sobreposição de arestas, grau e distribuição de distâncias muito semelhantes, entre outras características. A ordem de diversidade $O_D = \{Q; P; R; S\}$ indica que a camada S é a que mais contribui para a heterogeneidade do sistema multiplex, pois, embora tenha dois *links* redundantes, as distribuições de grau e distância são muito diferentes de todas as outras, tornando alto o valor do MEI ($\mathcal{E} = 0,64$). **(b)** Representação da rede multiplex de três camadas utilizada no Experimento 2, obtida a partir da rede do Experimento 1, excluindo a camada S . Esta estrutura é altamente redundante em seus padrões de conectividade. Sua ordem de diversidade $O_D = \{Q; P; R\}$ indica que a camada R é a que apresenta maior participação na composição do valor de MEI do sistema ($\mathcal{E} = 0,49$).

Experimento 2: Do sistema apresentado no experimento anterior, eliminamos a camada S , que foi a mais significativa no cálculo do valor da diversidade e obtemos a estrutura

apresentada na Figura 4-b. A matriz seguinte,

$$LD_2 = \begin{matrix} & P & Q & R \\ \begin{matrix} P \\ Q \\ R \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,271 & 0,702 \\ 0,271 & 0 & 0,693 \\ 0,702 & 0,693 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

exibe os valores de dissimilaridade para a nova situação.

Seguindo a sequência de passos já mostrada no Experimento 1, as distâncias entre as camadas, organizadas em ordem ascendente, são:

$$\mathcal{D}(P, S_1) = \{0; 0,271; 0,702\},$$

$$\mathcal{D}(Q, S_1) = \{0; 0,271; 0,693\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_1) = \{0; 0,693; 0,702\},$$

e então, nesta primeira etapa, $U = 0,271$ e $O_D = \{Q\}$. Em seguida, eliminando a camada Q , ficamos com:

$$\mathcal{D}(P, S_2) = \{0; 0,702\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_2) = \{0; 0,702\},$$

e finalmente, $U = 0,271 + 0,702 = 0,973$. Portanto, $\mathcal{E} = 0,49$ e $O_D = \{Q, P, R\}$. Concluímos que a camada R é a que mais contribui para o valor de $\mathcal{E}$ neste sistema.

A diferença entre os cálculos de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_d$ e $\mathcal{E}_{dw}$ reside na forma como obtemos as distribuições de distância e transição nas redes, dependendo das características topológicas de direção e peso em cada caso. Para evidenciar as especificidades dessas matrizes, ilustramos, na Figura 5, uma pequena rede multiplex composta por cinco vértices e três camadas, que é apresentada em três versões diferentes: uma rede não direcionada e não ponderada, uma rede direcionada e uma versão ponderada com adição de pesos às arestas. Calculamos os respectivos valores de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_d$ e $\mathcal{E}_{dw}$ e exibimos as matrizes de distância dos nós e de transição em cada situação.

Versão 1 - Rede não direcionada e não ponderada: A estrutura representada no painel esquerdo da Figura 5 é caracterizada por alta sobreposição de arestas em todas as camadas. A camada q , no entanto, se diferencia das demais por se tratar de uma rede desconexa que apresenta dois componentes conexos, sendo um deles um grafo completo e o outro, um nó isolado. Calculamos as matrizes NDD e TM para cada camada conforme descrito em 3.1-(i)(ii) e obtemos:

$$\mathcal{N}^p = \begin{matrix} & [1] & [2] & [3] & [4] & [5] \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathcal{T}^p = \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,33 & 0,33 & 0 & 0,33 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,33 & 0 & 0 & 0,33 & 0,33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

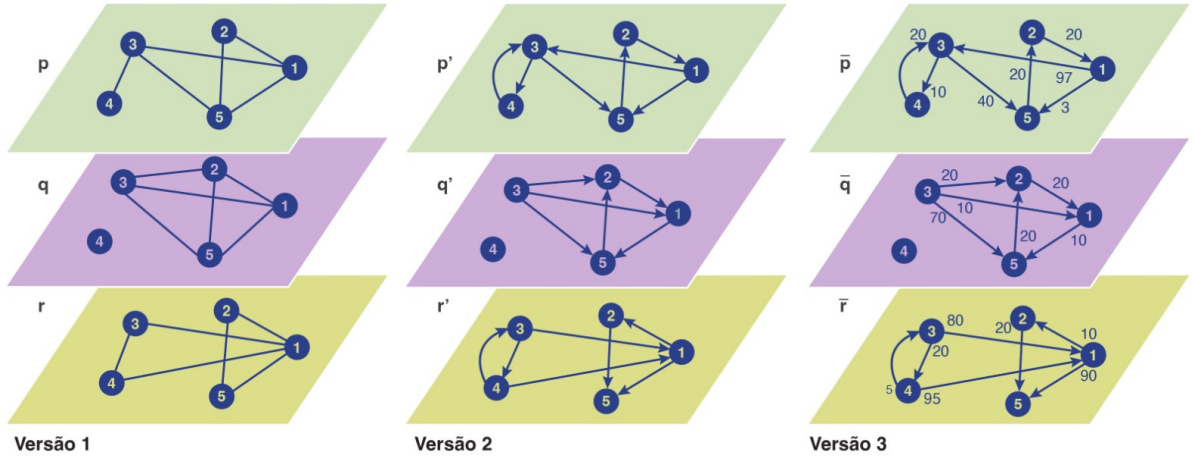


Figura 5 – Representação de redes multiplex com diferentes configurações relativas a direção e peso das arestas para enfatizar as variações nos valores de MEI, MEID e MEIDW. No painel esquerdo observamos uma rede não direcionada e não ponderada, para a qual $\mathcal{E} = 0,48$ e $O_D = \{p, r, q\}$. Na figura central as arestas recebem direções e encontramos $\mathcal{E}_d = 0,67$, sendo $O_D = \{q', p', r'\}$. Na rede ilustrada no painel direito, adicionamos pesos às arestas do sistema anterior e obtemos $\mathcal{E}_{dw} = 0,71$ e $O_D = \{\bar{q}, \bar{p}, \bar{r}\}$.

$$\mathcal{N}^q = \begin{matrix} & [1] & [2] & [3] & [4] & [5] \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{T}^q = \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,33 & 0,33 & 0 & 0,33 \\ 0,33 & 0 & 0,33 & 0 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 0 & 0 & 0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{N}^r = \begin{matrix} & [1] & [2] & [3] & [4] & [5] \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{T}^r = \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0,50 & 0 & 0 & 0,50 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

onde os índices em destaque identificam as respectivas camadas. A matriz $\mathcal{N}^r$ indica que o vértice (1) está diretamente conectado a todos os outros vértices da camada r e que, a partir de qualquer nó é possível alcançar os demais em, no máximo, dois passos. Já na camada p , são necessários até três passos, conforme mostrado por $\mathcal{N}^p$. Por sua vez, $\mathcal{N}^q$ destaca as características da rede desconexa, bem como do componente conexo completo, onde todos os elementos são acessíveis a uma distância de [1], enquanto o nó isolado está a uma distância de [5] dos demais.

Observamos que as matrizes $\mathcal{T}^p$, $\mathcal{T}^q$ e $\mathcal{T}^r$ representam as matrizes de adjacência das respectivas camadas reescaladas pelo grau de cada nó, conforme explicado em 3.1-(ii). Como a rede é não direcionada, as matrizes de adjacência são simétricas, e as entradas nulas e não nulas seguem o padrão de uma matriz simétrica, exceto para os vértices isolados, onde temos $\mathcal{T}_i^L(j) = 1$ se $i = j$ em qualquer camada L , como mostrado pelo nó 4 da camada q . Além disso, notamos em $\mathcal{T}^q$ que todos os vértices do componente conexo completo são interconectados com a mesma probabilidade.

Através da matriz

$$LD_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & q & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,514 & 0,341 \\ 0,514 & 0 & 0,627 \\ 0,341 & 0,627 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

vemos que os valores mais altos de dissimilaridade são referentes à camada q , que apresenta o padrão de conexões mais diverso da rede. Calculando o valor de MEI obtemos $\mathcal{E} = 0,48$ e a ordem de diversidade é $O_D = \{p, r, q\}$.

Versão 2 - Rede direcionada: No painel central da Figura 5 mostramos uma rede obtida a partir da primeira estrutura, introduzindo direções nas arestas. Desse modo foram calculadas as matrizes DDDN e DTM, conforme definido em 3.2.1 para redes direcionadas, obtendo:

$$\mathcal{N}_d^{p'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} [1] & [2] & [3] & [4] & [5] \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,50 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{T}_d^{p'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,50 & 0 & 0,50 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,50 & 0,50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{N}_d^{q'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} [1] & [2] & [3] & [4] & [5] \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,50 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{T}_d^{q'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0,33 & 0 & 0 & 0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{N}_d^{r'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & [1] & [2] & [3] & [4] & [5] \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,75 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathcal{T}_d^{r'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,50 & 0 & 0 & 0,50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,50 & 0 & 0 & 0,50 & 0 \\ 0,50 & 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

cujas camadas são indicadas pelos índices p' , q' e r' , respectivamente. A camada p' tem diâmetro 4, como vemos na $\mathcal{N}_d^{p'}$, ao passo que, na camada q' , a presença de uma ligação triangular entre (1), (2) e (5) faz com que haja pares de vértices que não se conectam, aparecendo à distância [5] em $\mathcal{N}_d^{q'}$, mas nada muda para o nó isolado (4). Na camada r' vemos que, embora haja arestas de entrada no vértice (5), seu grau de saída é nulo e, portanto, sua representação na matriz $\mathcal{N}_d^{r'}$ é equivalente ao que vimos para o nó isolado em q' . Além disso não é possível acessar a todos elementos da camada a partir dos nós (1) e (2).

As matrizes DTM apresentam muitas alterações quando comparadas às suas equivalentes TM, porque as matrizes de adjacência de redes direcionadas não são simétricas como no caso das não direcionadas.

Os valores de dissimilaridades entre os pares de camadas do sistema podem ser vistos na matriz

$$LD_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} & p' & q' & r' \end{matrix} \\ \begin{matrix} p' \\ q' \\ r' \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,586 & 0,750 \\ 0,586 & 0 & 0,729 \\ 0,750 & 0,729 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

a partir da qual calculamos $\mathcal{E}_d = 0,67$ e a ordem de diversidade é dada por $O_D = \{q', p', r'\}$, sequência totalmente diferente daquela encontrada na versão não direcionada, sendo r' a camada que apresenta os padrões de conexões mais heterogêneos neste sistema.

Versão 3 - Rede direcionada e ponderada: Finalmente a rede apresentada na porção mais à direita da Figura 5 é uma cópia do sistema multiplex da versão 2, acrescida de pesos nas arestas. As distribuições de distância direcionada dos nós, DDDN, são análogas às aquelas apresentadas na versão 2 para a rede direcionada, portanto exibimos apenas a

matriz de transição direcionada e ponderada – DWTM – para as camadas relacionadas:

$$\mathcal{T}_{dw}^{\bar{p}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0,03 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,20 & 0,80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \mathcal{T}_{dw}^{\bar{q}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,10 & 0,20 & 0 & 0 & 0,70 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathcal{T}_{dw}^{\bar{r}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,10 & 0 & 0 & 0,90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,80 & 0 & 0 & 0,20 & 0 \\ 0,95 & 0 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

onde $\bar{p}$, $\bar{q}$ e $\bar{r}$ indicam as camadas consideradas. Como as arestas da versão 2 foram mantidas, vemos que DWTM preserva os mesmos valores de DTM nas entradas relativas aos nós que possuem grau de saída 1, como ocorre, por exemplo, com os vértices (2), (4) e (5) na camada $\bar{p}$ e na referente $\bar{p}'$, além de conservar as entradas nulas. Isso ilustra que a distinção entre DWTM e DTM consiste na distribuição dos pesos das arestas de cada nó, de modo que, quanto mais díspares os valores dos pesos, mais distintas serão as duas matrizes.

As dissimilaridades entre as camadas são mostradas na matriz

$$\text{LD}_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \bar{p} & \bar{q} & \bar{r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,598 & 0,830 \\ 0,598 & 0 & 0,707 \\ 0,830 & 0,707 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

a partir da qual calculamos $\mathcal{E}_{dw} = 0,71$ e a ordem de diversidade, dada por $O_D = \{\bar{q}, \bar{p}, \bar{r}\}$, mantendo a mesma ordem obtida na versão direcionada e não ponderada.

No capítulo seguinte descreveremos nossas análises a partir das aplicações dos índices de eficiência multiplex para a rede brasileira de transporte aéreo.

Capítulo 4

Análise de Eficiência da Rede Brasileira de Transporte Aéreo

Apresentamos aqui o modelo multiplex que desenvolvemos para o sistema brasileiro de transporte aéreo de passageiros em diferentes versões. Inicialmente trabalhamos com uma rede ampla, que abrange aeroportos em todo o país e tratamos como uma rede não direcionada e não ponderada, fazendo posteriormente sua versão direcionada e ponderada. Em outra análise, fizemos um recorte nessa rede, levando em conta apenas os aeroportos mais movimentados do país. Nossas análises são descritas neste capítulo.

4.1 Modelo multiplex para a rede brasileira de transporte aéreo doméstico de passageiros

Pesquisamos e coletamos dados reais sobre a rede de transporte aéreo brasileira, disponíveis no sítio da [ANAC \(2022\)](#) e empregamos os algoritmos que desenvolvemos na linguagem *Python* para tratar esses dados, criando então o modelo “Rede Multiplex de Transporte Aéreo Brasileira” (BATMN - em referência à sigla em inglês para *Brazilian Air Transportation Multiplex Network*), para cada ano, a partir de 2010. Os vértices da rede representam os aeroportos brasileiros que participaram do transporte doméstico de passageiros pagantes durante todo o período considerado. Os *links* que conectam os nós são as diversas rotas percorridas pelas companhias aéreas que transportam um número superior a 0,5% do total de passageiros anuais em voos regulares de passageiros pagantes. Nessa configuração multiplex, cada companhia aérea possui sua própria rede, representada como uma camada do sistema multiplex completo e o número de empresas (camadas) varia a cada ano.

Como o Brasil é membro da *International Civil Aviation Organization (ICAO)*, os aeroportos brasileiros e as companhias aéreas que operam no país são identificadas através do

código ICAO. A Tabela 1 apresenta todas as empresas aéreas que fizeram parte deste estudo e seus respectivos códigos ICAO. Salientamos que os nomes apresentados não são exatamente as razões sociais de cada empresa, mas sim, os nomes pelos quais elas são conhecidas no mercado e foram obtidos no sítio da [ANAC \(2022\)](#). A Tabela 2 exibe as companhias aéreas que compõem BATMN a cada ano.

Tabela 1 – Companhias aéreas consideradas neste trabalho e seus respectivos códigos ICAO.

ICAO	Nome da Empresa Aérea
AZU	Azul Linhas Aéreas Brasileiras
GLO	Gol Linhas Aéreas
ONE	Avianca Brasil
PTB	Passaredo Transportes Aéreos
PTN	Pantanal Linhas Aéreas
TAM	TAM Linhas Aéreas
TIB	TRIP Linhas Aéreas
WEB	Webjet Linhas Aéreas
IPM	Itapemirim Transportes Aéreos

Tabela 2 – Companhias aéreas que compõem BATMN a cada ano.

Ano	Companhias aéreas consideradas
2010	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB, PTN, WEB
2011	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB, PTN, WEB
2012	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB, PTN, WEB
2013	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB
2014	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2015	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2016	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2017	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2018	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2019	AZU, GLO, TAM, ONE
2020	AZU, GLO, TAM, PTB
2021	AZU, GLO, TAM, PTB, IPM

Uma vez apresentados os dados reais que utilizamos para a elaboração deste trabalho e os conceitos básicos da teoria de redes complexas, passamos agora a expor os resultados encontrados. Ao longo do estudo, fizemos experimentos com diferentes abordagens, obtendo a evolução da disposição de rotas da rede brasileira doméstica de transporte aéreo de passageiros a partir do ano de 2010. Inicialmente trabalhamos com os dados da [ANAC \(2022\)](#) até o ano de 2018, quando tivemos a oportunidade de publicar os resultados (ver Seção 4.7). Na sequência estendemos algumas análises até 2021, incluindo assim o período da pandemia da COVID-19, e buscamos mensurar o impacto desse acontecimento na organização de rotas pelas principais companhias aéreas durante o ano mais crítico (2020) e na busca pela retomada das atividades em 2021.

Os gráficos deste capítulo foram gerados usando o *software Origin 6.0*. A menos que indicado de outra forma, as curvas exibidas nos gráficos que mostram a evolução dos índices de eficiência multiplex, nas diversas versões apresentadas, são meramente indicativas, ou seja, guias para os olhos.

4.2 A rede multiplex não direcionada e não ponderada BATMN

Em um primeiro experimento, construímos BATMN tomando como vértices os 154 aeroportos que receberam voos domésticos de passageiros pagantes das companhias aéreas que transportaram mais de 0,5% do número total de passageiros de cada ano, entre 2010 e 2018. A seguir, de posse dos dados reais da rede brasileira até 2021, completamos o estudo até esse último ano, tendo 125 aeroportos que receberam voos segundo os critérios anteriores, entre 2019 e 2021. Para manter o padrão, consideramos a rede com 154 vértices em todo o período. Calculamos então o MEI para BATMN, que é mostrado na Figura 6, em azul. No primeiro momento, verificamos que houve um pico local em 2011, seguido por um decréscimo em 2012 e um crescimento progressivo a partir de 2013, culminando em 2014. Após esse pico, o índice $\mathcal{E}$ cai ligeiramente em 2015, permanecendo estacionário até 2018. A partir de 2019 ocorre novo acréscimo nos valores de $\mathcal{E}$, com o ápice em 2020 e voltando ao patamar anterior em 2021.

A presença de nós isolados na rede faz com que os valores de $\mathcal{E}$ sejam menores, pois cada nó isolado em todas as camadas da rede representa uma semelhança entre as camadas, uma vez que o padrão de conexões será idêntico nesses nós. Desse modo, quando retiramos os nós isolados e consideramos apenas aqueles que são conectados (ou seja, aqueles que têm grau multiplex maior ou igual a 1), obtemos valores diferentes para $\mathcal{E}$.

Reconstruímos BATMN, em um segundo experimento, levando em conta apenas os aeroportos que receberam voos a cada ano, de modo que todos os vértices têm grau multiplex não nulo e, desse modo, o número de vértices da rede varia ano a ano. A Tabela 3 detalha a nova configuração da rede. Calculando novamente o MEI, obtemos os resultados mostrados na Figura 6, em vermelho. O novo panorama é similar ao já apresentado, exibindo pequenas oscilações nos valores de $\mathcal{E}$ entre 2014 e 2018 e, conforme esperado, valores maiores em todo o período.

Analisando o contexto do mercado aéreo brasileiro, é possível descrever alguns fatores que influenciaram as variações observadas nos valores de $\mathcal{E}$ para BATMN. Basicamente, três grandes eventos de fusão entre companhias aéreas ocorreram ao longo dos primeiros quatro anos analisados, o que explica as oscilações na eficiência da rede até 2014. Em 2010, a TAM adquiriu a PTN (CADE, 2010), uma companhia aérea regional que operava entre o Aeroporto de Congonhas, localizado em São Paulo, e cidades de médio porte nas

Tabela 3 – Número de aeroportos e empresas aéreas que compõem a segunda versão de BATMN a cada ano.

Ano	Aeroportos	Companhias aéreas consideradas
2010	110	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB, PTN, WEB
2011	116	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB, PTN, WEB
2012	114	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB, PTN, WEB
2013	116	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB, TIB
2014	117	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2015	109	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2016	111	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2017	106	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2018	110	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2019	114	AZU, GLO, TAM, ONE
2020	121	AZU, GLO, TAM, PTB
2021	107	AZU, GLO, TAM, PTB, IPM

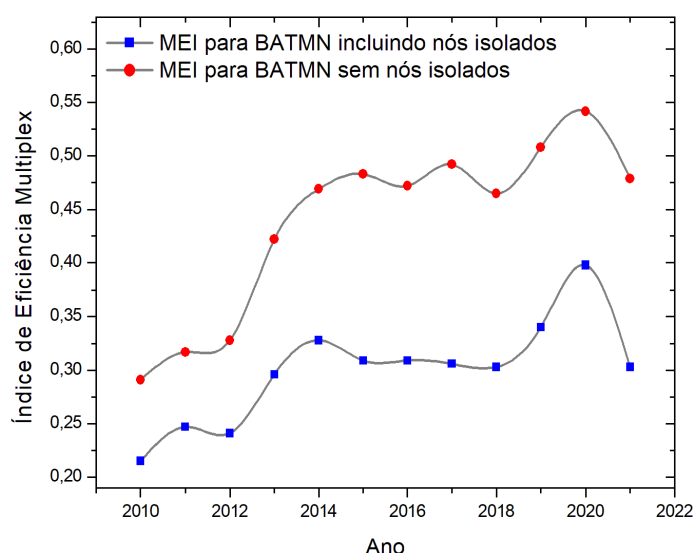


Figura 6 – Comparação entre valores de MEI obtidos para BATMN em dois experimentos. Na curva assinalada de azul as redes contam com a presença de nós isolados em todos os anos; na curva marcada com pontos vermelhos, BATMN foi construída somente com nós que possuem grau multiplex maior ou igual a 1.

regiões Sul e Sudeste do país. A partir de 2011, as rotas da PTN foram gradativamente desativadas, até 2013, quando a fusão foi concluída (MACEDO, 2013). Em 2011, a GLO adquiriu 100% das ações da WEB e, em 2012, consolidou essa fusão (CADE, 2012a), encerrando definitivamente a companhia aérea WEB. Finalmente, a AZU se fundiu com a TIB em 2012 (AZUL..., 2012) e passou a controlar 15% do mercado doméstico. De acordo com as regras estabelecidas pela ANAC, os voos compartilhados (*codeshare*) pré-existent entre TIB e TAM foram desativados gradualmente até 2014, incentivando a concorrência entre a AZU e outras companhias aéreas (CADE, 2012b). Entre 2014 e 2018, as mesmas

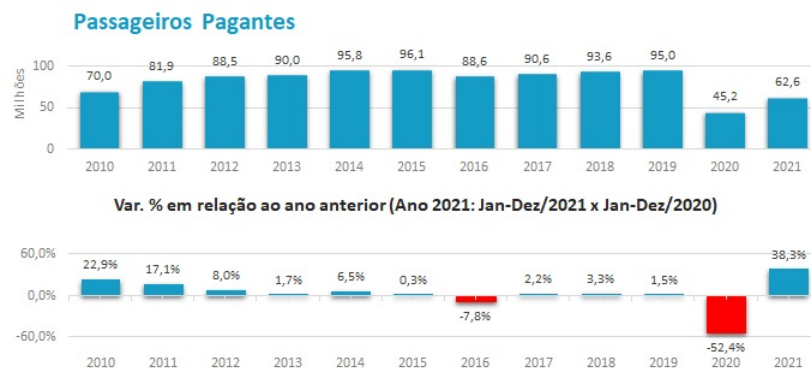


Figura 7 – Número de passageiros pagantes transportados por voos domésticos no Brasil entre 2010 e 2021 e variação percentual em relação ao ano anterior. Fonte: ANAC (2019b).

companhias aéreas compõem BATMN, havendo apenas reorganização de rotas conforme as necessidades de cada empresa. Em 2019 a ONE encerrou suas operações no Brasil, concentrando a malha em três grandes companhias aéreas, reduzindo as opções de ofertas à população. Várias rotas foram extintas e os *slots* (direitos de pouso e decolagem) operados pela ONE no aeroporto de Congonhas, foram redistribuídos para AZU e PTB, de acordo com as normas vigentes da ANAC (ANAC, 2019a). Os 15 *slots* recebidos pela AZU foram alocados em uma única rota – a ponte aérea Rio-São Paulo – que liga os aeroportos Santos Dumont e Congonhas, e é uma das rotas mais rentáveis do país (ANAC, 2022). A PTB ficou com 26 *slots*, sendo 14 recebidos pela própria PTB e 12 através da empresa regional MAP Linhas Aéreas, que operava na Região Norte do país e foi adquirida pela PTB em meados de 2019 (TOLEDO, 2019), iniciando assim suas operações no aeroporto de Congonhas com 7 rotas, das quais 5 correspondem a *links* não pertencentes à BATMN em 2018. Em 2019 a PTB transportou 0,49% dos passageiros pagantes no mercado doméstico e, portanto, não fez parte da BATMN naquele ano, sendo o único ano em que PTB se ausenta de BATMN no período estudado. Como a ONE participou com 3,29% dos passageiros e operou durante alguns meses, ela ainda foi considerada, conforme descrito na Tabela 2. Em 2020, o Brasil é atingido pela pandemia da COVID-19 e, com o *lockdown* decretado nos Estados brasileiros, a demanda por transporte aéreo cai drasticamente (veja Fig. 7) e as empresas aéreas são obrigadas a se reorganizar para a nova realidade (BRASIL, 2020). Além disso, é o primeiro ano em que a ONE não faz parte da BATMN, ao passo que PTB retorna ao sistema. E finalmente, em julho de 2021, a empresa IPM inicia suas operações com voos regulares e passa a integrar BATMN, contribuindo para a variação observada. O gradativo relaxamento do *lockdown* decretado em virtude da pandemia faz com que a demanda por transporte aéreo retorne progressivamente, porém, como o número de passageiros não é considerado nessa etapa do trabalho, isso não influencia o valor de MEI, que retoma o nível anterior a 2019.

Para melhor analisar os efeitos de alguns eventos na rede, realizamos o cálculo mensal

do MEI para BATMN, construindo a rede a partir das rotas presentes em cada mês, de 2010 a 2018 (ver Fig. 8b). Mantivemos ainda o mesmo conjunto de 154 aeroportos em todos os meses. Encontramos um forte salto nos valores do MEI de dezembro de 2012 a janeiro de 2013 e outro acréscimo menos expressivo entre novembro e dezembro de 2013, o que coincide, no primeiro caso, com a exclusão das companhias PTN e WEB da rede e, no segundo, com exclusão da TIB. Também é possível observar na Figura 8b que o maior valor mensal do MEI corresponde a dezembro de 2013 e então ocorre uma estabilização do índice, com variações consideravelmente menores. A reorganização das rotas provocada pelas fusões das companhias aéreas levou a um aumento dos valores do índice $\mathcal{E}$, ou seja, um aumento da diversificação de rotas entre as companhias aéreas participantes e, posteriormente, observamos a consolidação do grupo de empresas remanescentes.

Um comportamento interessante do índice $\mathcal{E}$ pode ser observado em 2014. Os valores mensais apresentam um mínimo pronunciado, pois diminuem de março a agosto, aumentando nos meses seguintes. Isso sugere uma correlação com a concentração de rotas aéreas para atender à crescente demanda por transporte aéreo para as cidades-sede dos jogos da Copa do Mundo da FIFA, realizados em julho (COMPARIN, 2014). No contexto anual, mostrado na Figura 8a, observa-se que o maior valor de $\mathcal{E}$ corresponde à conclusão das fusões de companhias aéreas em 2014, seguida de um período de estabilidade na diversificação de rotas.

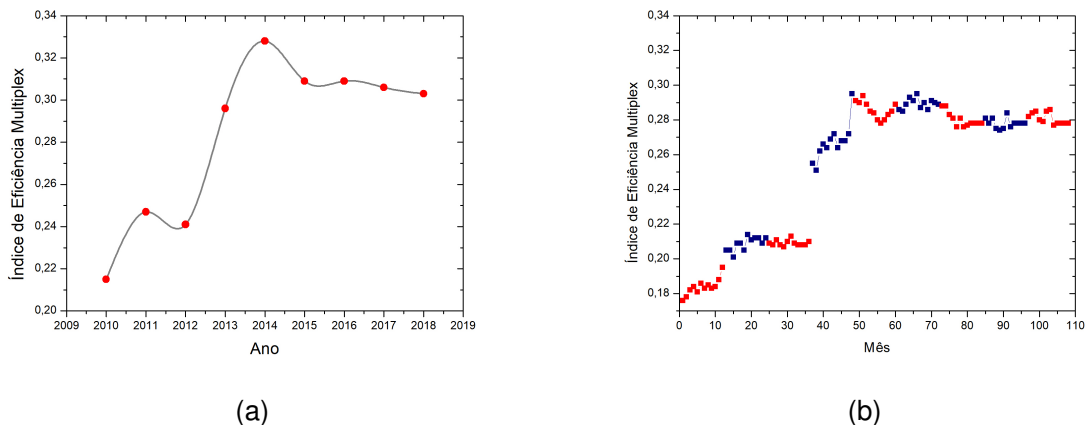


Figura 8 – O painel esquerdo mostra a evolução do MEI para BATMN na escala anual, entre 2010 e 2018. No lado direito da figura, temos os valores de MEI em escala mensal, no mesmo período, onde as cores alternadas representam os diferentes anos. Nos dois casos, consideramos o mesmo conjunto de 154 aeroportos em todas as etapas.

Verificamos a maneira como cada companhia aérea participa na composição do valor final de MEI através da ordem da diversidade. Mostramos a seguir a sequência ascendente das camadas de BATMN de acordo com as respectivas contribuições para o valor da diversidade (e, conseqüentemente, de MEI), a cada ano.

- 2010: ONE, WEB, PTN, TAM, AZU, PTB, GLO, TIB;
- 2011: WEB, PTN, TAM, ONE, AZU, PTB, GLO, TIB;
- 2012: PTN, WEB, TAM, ONE, GLO, AZU, PTB, TIB;
- 2013: TAM, ONE, AZU, GLO, PTB, TIB;
- 2014: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2015: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2016: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2017: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2018: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2019: TAM, GLO, ONE, AZU;
- 2020: TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2021: IPM, TAM, GLO, PTB, AZU.

A partir da lista, fica claro que, enquanto estão presentes na rede, PTN e WEB estão entre as companhias aéreas que menos contribuem para o valor da diversidade, ao passo que TIB lidera esse *ranking*. A partir de 2014, após a fusão entre AZU e TIB, a malha da AZU torna-se a principal em diversidade. Vale ressaltar que durante o tempo em que PTN esteve na BATMN, houve uma redução progressiva de sua contribuição para a diversidade da rede multiplex. Entre 2010 e 2012, PTN caiu da 6ª para a 8ª posição em um grupo de 8 companhias aéreas e isso coincide com a realocação de rotas da PTN, feita pela TAM, em razão do processo de aquisição da empresa. Salientamos que em 2013, PTN ainda estava em funcionamento, contudo, por transportar menos de 0,5% do total de passageiros daquele ano, não foi incluída na BATMN.

Vemos que a partir de 2014 até 2018, ONE é a camada que menos contribui para a diversidade de BATMN, porém, em seu último ano na rede, ela salta para o segundo lugar na ordem de diversidade. Concluimos então que existe uma grande sobreposição de rotas entre a ONE e as demais companhias aéreas até 2018, em concordância com os resultados já discutidos e mostrados na Figura 6. No entanto, o cenário se modifica em 2019.

Carpi et al. (2019) mencionam que quando uma camada é removida do sistema multiplex, há uma redução no valor da diversidade que é, pelo menos igual ao valor da distância entre a camada correspondente e o conjunto restante, como pode ser deduzido da Eq.

15. A saída da PTB da rede em 2019 produz esse efeito, mas ONE assume o posto de segunda camada mais diversificada da rede e o que vemos é um crescimento no valor de MEI. Entretanto, em 2020, a saída definitiva da ONE, que é a segunda camada mais diversa de BATMN no ano anterior e o retorno de PTB à rede, que é altamente relevante para a diversidade, após expandir sua malha com a aquisição da MAP e dos *slots* que pertenciam à ONE no aeroporto de Congonhas, acrescidos de todas as adaptações que foram necessárias à rede aérea durante o ano mais crítico da pandemia, provocaram o pico do valor de $\mathcal{E}$. O índice $\mathcal{E}$ é independente do número de camadas, portanto, apenas reduzir as camadas no sistema multiplex não induz aumento de seu valor. Uma ilustração desse fato é mostrada no exemplo de duas redes sintéticas na Seção 3.3, representado pela Figura 4, em que, ao excluir uma camada da rede, o valor de $\mathcal{E}$ diminui.

Finalmente, a inclusão da camada da IPM à BATMN em 2021 traz novos padrões de conexões ao sistema, apresentando muitas sobreposições de rotas, como vemos na ordem de diversidade.

Investigamos a influência do número de *links* da rede nos valores do índice $\mathcal{E}$, analisando o número de rotas (arestas da BATMN), conforme mostrado na Figura 9a. Em 2011 e 2012, TIB foi a companhia aérea com maior número de rotas e no ano seguinte, AZU exibe um crescimento expressivo e então TIB e AZU lideraram o volume de rotas. A partir de 2014, após a fusão dessas duas empresas, a liderança é assumida pela AZU com um crescimento relativo significativo. Não surpreendentemente, a TIB foi líder na ordem de diversidade até 2013 e, a partir de 2014, a AZU está liderando a diversidade da rede, conforme mostrado na lista anterior.

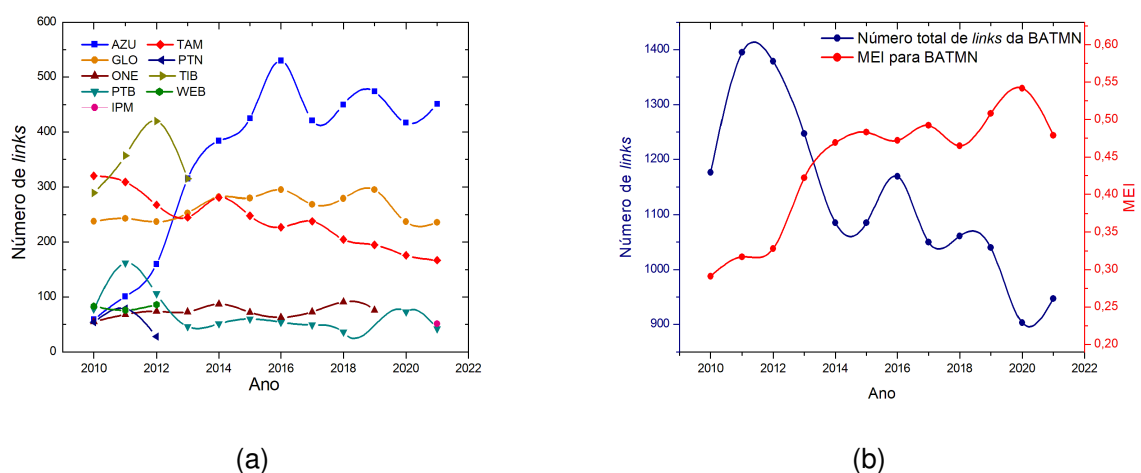


Figura 9 – Análise do número de rotas de BATMN. **(a)** Número de *links* da BATMN considerados para as companhias aéreas estudadas entre 2010 e 2021. **(b)** Comparação entre o número total de arestas das camadas representantes das companhias aéreas e o valor de MEI para BATMN, a cada ano.

Após a fusão entre TAM e PTN, consolidada em 2013, o crescimento do número de rotas da

TAM não foi tão expressivo. Houve um pequeno aumento em 2014, retornando ao mesmo patamar em 2015. Esse aumento pode ter sido influenciado pela Copa do Mundo FIFA de 2014. Com exceção de 2014, há uma tendência de queda no número de rotas da TAM.

Na terceira fusão ocorrida no sistema, entre WEB e GLO, concluída em 2012, o número de rotas GLO aumenta a partir de 2013, superando a TAM, sua concorrente mais próxima. Ambas as componentes tiveram quase o mesmo número de rotas em 2014. A partir daí, a quantidade de rotas da GLO ultrapassou a da TAM, atingindo seu máximo em 2016, quando ocorreram os Jogos Olímpicos do Rio, retornando ao patamar de 2015 nos anos seguintes, até igualar ao máximo em 2019. Com a pandemia de COVID-19 em 2020 e 2021, o número de rotas da GLO retorna ao nível de 2010.

A companhia aérea ONE não apresentou alterações significativas no número de rotas, tendo um aumento em 2014 (Copa do Mundo da FIFA) e redução em 2016, ano dos Jogos Olímpicos do Rio. Curiosamente, a quantidade de rotas foi ampliada em 2018, ano em que a companhia aérea abriu o processo de recuperação judicial e voltou ao mesmo patamar anterior em seu último ano de operação.

Para finalizar esta análise, a PTB é a companhia aérea que apresenta o menor número de rotas, com pico em 2011 e caindo a seguir. A partir de 2013, seu número de rotas se estabiliza. A empresa não participa de BATMN em 2019, mas retorna à rede em 2020, com um acréscimo de rotas superior 100%, após a aquisição da MAP Linhas Aéreas. A IPM é inserida em BATMN apenas em 2021, tendo um número de rotas pouco superior ao da PTB naquele ano.

Podemos observar que, no caso da BATMN, a partir de 2011, a companhia aérea que possui maior número de rotas é a que mais contribui para o MEI da rede. Percebemos, porém, que em 2010 a TAM é a líder no *ranking* de *links*, mas aparece em quinto lugar na ordem de diversidade entre as 8 camadas presentes naquele ano. Do mesmo modo, em 2013, TIB e AZU lideram o *ranking* de *links* simultaneamente, contudo, AZU ocupa a quarta posição na ordem de diversidade entre 6 companhias participantes. Desse modo, concluímos que o alto número de arestas de uma camada pode causar diversificação e ampliar a cobertura da rede, mas isso não é um fator determinante para a ordem de diversidade das camadas e, conseqüentemente, para o cálculo de MEI.

Somando o número de *links* das camadas de BATMN e comparando com o valor de MEI a cada ano (Fig. 9b), observamos forte anticorrelação. Quanto maior a densidade de arestas dessa rede, maior a probabilidade de sobreposição delas entre as camadas. Esse comportamento é esperado para redes de transporte aéreo, uma vez que há uma tendência de concorrência das companhias aéreas por rotas que ligam aeroportos que apresentam maior demanda por voos. Em 2016, o número de rotas aumenta significativamente, provavelmente

impulsionado pelos Jogos Olímpicos do Rio, enquanto o valor do índice $\mathcal{E}$ reduz ligeiramente, o que indica que a maioria das novas arestas criadas naquele ano, correspondem a *links* anteriormente existentes na rede.

Em um trabalho escrito em 2019 e publicado no ano seguinte (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020a), analisamos possíveis repercussões do encerramento das operações da ONE no Brasil, que ocorreu na sequência de um processo de recuperação judicial iniciado no final de 2018 (G1, 2018). Como exercício para estimar a influência da remoção dessa camada da BATMN, que tinha 91 *links*, simulamos a eficiência anual da rede para 2019, agora com 4 camadas (AZU, GLO, PTB e TAM), mantendo o mesmo conjunto de 154 aeroportos já considerado nos outros anos. Cinco experimentos foram realizados a partir dos dados de 2018, conforme mostrado na Figura 10 e decritos a seguir.

- **Experiência 1:** A camada da ONE é excluída e nenhuma alteração é feita nas demais camadas;
- **Experiência 2:** Todos os links pertencentes à ONE em 2018 são distribuídos para as 4 companhias aéreas restantes de BATMN, de modo que 3 empresas recebem 23 links cada, e uma delas recebe os outros 22;
- **Experiência 3:** A camada ONE é excluída, um *link* é adicionado à camada da AZU ligando os aeroportos Congonhas e Santos Dumont e as rotas criadas pela PTB em 2019 a partir do aeroporto de Congonhas, são representadas por 7 *links* adicionados à camada PTB. Essa situação é similar ao que ocorreu com a rede em 2019 devido a exclusão da ONE.
- **Experimento 4:** Os 82 *links* pertencentes à ONE em 2018, exceto os que se conectam ao aeroporto de Congonhas, são distribuídos igualmente na rede do experimento 3, entre GLO e TAM.
- **Experiência 5:** Exclui ONE e cria 41 *links* aleatórios a partir do aeroporto de Congonhas (número equivalente aos *slots* redistribuídos), sendo 15 para AZU e 26 para PTB, para aeroportos que anteriormente não recebiam rotas vinculadas a Congonhas.

Em todos os casos, o valor de $\mathcal{E}$ aumenta após a exclusão de ONE, o que significa que a cobertura da rede é semelhante àquela já existente, porém com um número inferior de camadas. Apenas 4 dos 91 *links* pertencentes à ONE em 2018 são exclusivos de sua camada, e, portanto, 95,6% das arestas são sobrepostas à rede. Assim, o aumento de $\mathcal{E}$ em todos os experimentos reflete a exclusão de uma camada com alta sobreposição de arestas em relação às demais – o que também já foi mostrado pela ordem da diversidade. Em outras palavras, o conjunto de 5 companhias aéreas pertencentes à BATMN em 2018

apresenta maior sobreposição de rotas do que o conjunto de 4 companhias remanescentes nas simulações realizadas para 2019.

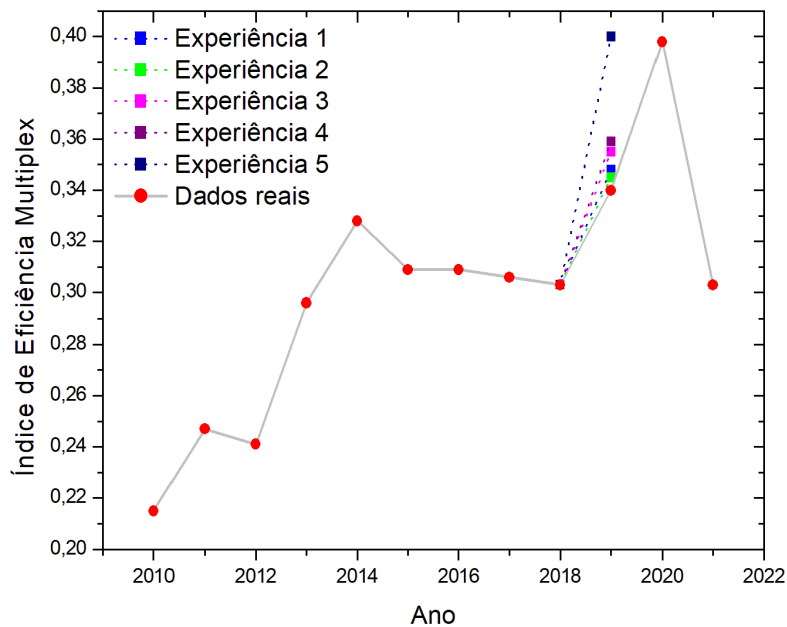


Figura 10 – Simulação dos valores de MEI para 2019 em BATMN devido à exclusão da camada ONE da rede. Rede construída com o mesmo conjunto de aeroportos. Os pontos em vermelho sobre a linha contínua representam os dados reais entre 2010 e 2021 e as linhas pontilhadas em outras cores, mostram os resultados dos 5 experimentos realizados simulando a saída da companhia aérea ONE.

É possível observar que os valores de $\mathcal{E}$ encontrados nas simulações são semelhantes, com pequenas variações na segunda ou terceira casa decimal, exceto no último experimento. Nos experimentos 1 e 2 os valores são equivalentes, mostrando que apenas excluir a ONE ou redistribuir suas rotas para outras empresas não modifica a diversificação das arestas da rede, pois 96% de suas arestas já existem nas outras camadas. Na Experiência 3, a criação de novos links para PTB, que anteriormente não operava no aeroporto Congonhas, aumenta ligeiramente o valor de $\mathcal{E}$ em relação à Experiência 2, pois cinco desses links representam novas rotas para BATMN. A adição da rota Congonhas/Santos Dumont para AZU não influencia significativamente o valor de $\mathcal{E}$, pois este *link* já existia em outras camadas. O valor $\mathcal{E}$ do experimento 4 é equivalente ao do experimento 3, devido à alta sobreposição dos 82 *links* que pertenciam à ONE com as arestas das camadas GLO e TAM, que são as mais próximas de ONE na ordem de diversidade. O maior crescimento, 32% sobre o valor de $\mathcal{E}$ de 2018, pode ser observado na experiência 5, quando são criadas 41 rotas diferentes para BATMN, nas camadas mais diversificadas da rede – PTB e AZU. Comparando os cenários dos experimentos 5 e 1, há um aumento de 15%, enquanto do experimento 3 para o 1 o aumento é de apenas 2%. Pode-se concluir que a liberação de *slots* de uma companhia

aérea para outra não tem efeito significativo na eficiência da rede, pois não é sinônimo de diversificação de rotas.

Posteriormente, mantendo as mesmas configurações para BATMN, calculamos a eficiência anual entre 2019 e 2021. A companhia aérea ONE permanece em atividade por alguns meses de 2019 e se encaixa nos critérios para continuar fazendo parte da rede naquele ano, porém, PTB não é considerada, por transportar um número inferior de passageiros. Assim, a camada excluída da BATMN em 2019 foi PTB, e não ONE, como previsto (ver Tabela 2). Esses dois fatores provocam um cenário bem diferente daqueles que simulamos para 2019, não sendo possível então compará-los mas, ainda assim, percebemos um crescimento no valor de $\mathcal{E}$, que já discutimos. Em 2020 as quatro companhias aéreas que constituem a BATMN coincidem com as simulações, porém, a pandemia da COVID-19 impôs um contexto que impede uma comparação justa com as simulações feitas, mas, ainda assim, vemos na Figura 10 que o Experimento 5 teve o resultado mais próximo do valor real de MEI. PTB retorna à rede em 2020 com 37 novos *links*, valor superior ao dobro do número de arestas que tinha em 2018, devido à fusão com a MAP. As demais camadas sofreram redução de arestas. Concluimos então que o Experimento 5 é o que melhor se aproxima do resultado real, devido às grandes modificações adicionadas à camada PTB, que é a segunda mais diversa da rede em 2018, ano-base dos experimentos simulados.

Para investigar outras causas de flutuações no Índice de Eficiência Multiplex para BATMN entre 2010 e 2018, estudamos possíveis correlações entre os valores de $\mathcal{E}$, o preço médio da passagem aérea (em dólares americanos) e o *load factor*, que representa a taxa de ocupação, por passageiros pagantes, dos assentos oferecidos na aeronave (ABEAR, 2021). Os dados foram extraídos da página da ANAC (2019b) e do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (BRASIL. Ministério do Planejamento e Orçamento.IPEA, 2019). O forte coeficiente de correlação de Pearson entre $\mathcal{E}$ e o *load factor* (0,92) é evidente na Figura 11-a. Ao comparar o valor médio dos bilhetes aéreos com $\mathcal{E}$, encontra-se anticorrelação (-0,89) até 2014 e forte correlação (0,96) após 2014 (Fig. 11-b). À medida que os preços dos bilhetes caem, espera-se que a taxa de ocupação das aeronaves aumente e vice-versa. A novidade aqui é que o Índice de Eficiência Multiplex acompanhou o *load factor*. Isso aponta para o fato de que quanto maior a diversificação de rotas, maior a taxa de utilização de assentos das aeronaves, e isso está fortemente relacionado aos preços das passagens aéreas.

Em uma última análise para BATMN entre 2010 e 2018 com as configurações já mencionadas, avaliamos a evolução local do índice $\mathcal{E}$, ou seja, no nível dos nós. Um aumento no valor de $\mathcal{E}$ para um nó representa um aumento na diferença de conectividade desse nó nas várias camadas do sistema multiplex. No contexto em que os nós são os aeroportos, isso significa que diferentes companhias aéreas atendem a diferentes cidades ligadas ao mesmo aeroporto. Listamos o *ranking* dos 10 aeroportos mais eficientes da rede em 2010,

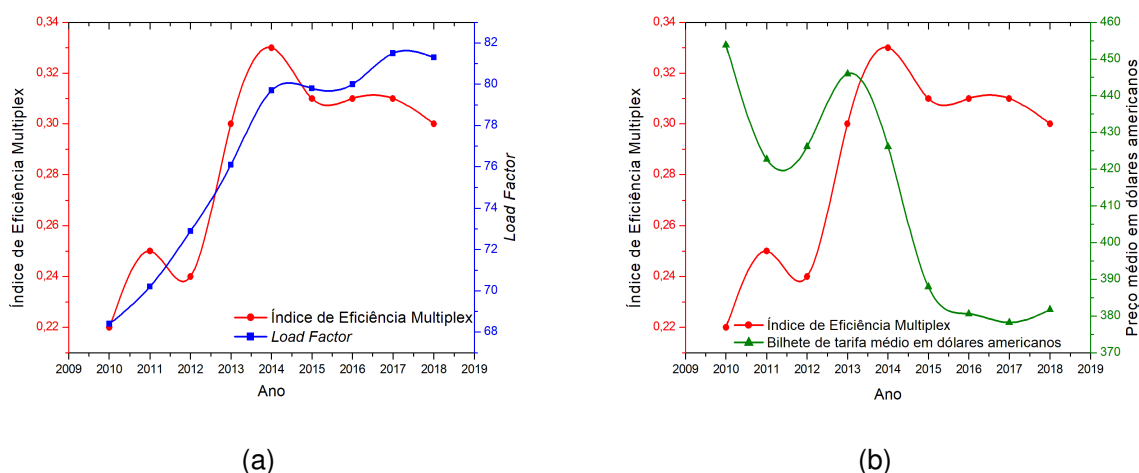


Figura 11 – Evolução dos valores do índice $\mathcal{E}$ e possíveis correlações com outras quantidades da BATMN. **a.** O painel esquerdo mostra os valores $\mathcal{E}$ e o *load factor*. **b.** O painel direito exibe o valor médio das passagens aéreas no Brasil (em dólares americanos) e $\mathcal{E}$.

2014 e 2018, além de investigar a possibilidade de alterações nos valores de $\mathcal{E}$ para os aeroportos que foram privatizados até 2018. Os resultados são mostrados na Tabela 4 e no Apêndice A.

É possível observar grandes variações no *ranking*, promovidas principalmente pelas três fusões de companhias aéreas já relatadas, ocorridas entre 2010 e 2014. Percebemos através da Figura 9a que em 2013 inicia-se uma grande expansão da malha aérea da AZU, que passa a conectar, gradativamente, vários aeroportos secundários, diversificando rotas em relação às demais empresas. Desse modo, AZU torna-se a companhia aérea que contribui com os mais altos valores de diversidade para o sistema a partir de 2014 e a mesma ordem de diversidade ocorre na BATMN entre 2014 e 2018, conforme já descrito. Desse modo, aeroportos que tinham poucas conexões, tornam-se mais conectados desde essa expansão. Além disso, a AZU passa a operar com mais frequência nos aeroportos mais movimentados do país, conectando-os a aeroportos secundários (COSTA; LOHMANN; OLIVEIRA, 2010).

Dependendo da demanda por voos e dos nichos de negócios de cada companhia aérea, pode haver maior ou menor sobreposição de rotas entre suas respectivas malhas e, além disso, a própria rede, como um todo, evolui no decorrer do tempo. Desse modo, variações nas conexões de aeroportos secundários e grandes *hubs* têm sido observadas ao longo dos anos. Desde 1973 os principais aeroportos do país eram administrados pela Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeroportuária - Infraero, uma estatal vinculada ao Ministério da Infraestrutura. A partir de 2011, inicia-se o processo de concessão de aeroportos para a iniciativa privada (INFRAERO, 2013). Quatro aeroportos, atendendo às cidades de Natal, Brasília, Campinas e Guarulhos, foram transferidos ao setor privado entre 2011 e 2012

Tabela 4 – Posição de aeroportos privatizados no *ranking* $\mathcal{E}$ em 2010, 2014 e 2018 e de outros aeroportos que estavam no *top* 10.

Ano de privatização	Aeroporto	Cidade Atendida	2010 <i>Ranking</i>	2014 <i>Ranking</i>	2018 <i>Ranking</i>
2011	SBSG ¹	Natal	17	15	21
2012	SBBR	Brasília	9	36	29
2012	SBKP	Campinas	4	43	4
2012	SBGR	Guarulhos	7	32	39
2013	SBCF	Confins (Belo Horizonte)	12	17	9
2013	SBGL	Rio de Janeiro (Galeão)	3	23	30
2017	SBFL	Florianópolis	6	12	19
2017	SBFZ	Fortaleza	1	18	13
2017	SBPA	Porto Alegre	10	9	7
2017	SBSV	Salvador	11	38	35
-	SBBH	Belo Horizonte (Pampulha)	60	19	3
-	SBCT	Curitiba	8	8	20
-	SBFI	Foz do Iguaçu	48	5	10
-	SBIL	Ilhéus	25	4	8
-	SBJP	João Pessoa	51	7	22
-	SBNF	Navegantes	31	39	6
-	SBPJ	Palmas	44	3	2
-	SBPV	Porto Velho	35	2	43
-	SBRF	Recife	5	16	23
-	SBRP	Ribeirão Preto	13	6	1
-	SBSP	São Paulo (Congonhas)	2	10	15
-	SBUL	Uberlândia	18	1	5

¹SBSG é o novo aeroporto que atende a cidade de Natal a partir de 2014.

([INFRAERO, 2022a](#); [INFRAERO, 2022b](#)). O valor de $\mathcal{E}$ para o Aeroporto Internacional de Viracopos (Campinas) inicialmente aumentou e se estabilizou após 2015 (ver Fig. 27). Os demais aeroportos apresentaram queda no valor de $\mathcal{E}$ no primeiro ano após a privatização, retornando ao nível anterior e estabilizando-se. Os aeroportos que atendem às cidades de Belo Horizonte (Aeroporto Internacional de Confins) e Rio de Janeiro (Aeroporto Internacional do Galeão) foram privatizados em 2013 ([ANAC, 2014a](#); [ANAC, 2014b](#)). O aeroporto de Confins teve um aumento significativo de 22% no índice $\mathcal{E}$ no primeiro ano, permanecendo estável desde então. Já o Aeroporto do Galeão aumentou o valor de $\mathcal{E}$ em 2014, com oscilações inexpressivas, voltando ao patamar anterior (Fig. 28).

Entre os seis aeroportos privatizados analisados, quatro deles mostram tendência a estabilidade do índice $\mathcal{E}$ em um nível maior ou igual ao valor anterior à privatização. No entanto, comparando com a evolução do índice $\mathcal{E}$ de um grande *hub* do país (Aeroporto de Congonhas), que ainda não foi privatizado, observamos o mesmo efeito de estabilização desde 2014. Isso sugere que a privatização dos aeroportos não implica necessariamente em ampliação da heterogeneidade de conexões, mas os investimentos em expansão podem contribuir para esse aumento, uma vez que grandes investimentos ocorreram nos principais aeroportos do país para receber a Copa do Mundo da Fifa de 2014 ([BRASIL. Ministério do Esporte, 2014](#)).

No universo de 154 aeroportos considerados nessa parte do trabalho, a privatização de 6 deles não acarretou um impacto relevante no índice $\mathcal{E}$ para BATMN a nível global.

4.3 A rede brasileira de transporte aéreo de passageiros modelada como rede multiplex direcionada e ponderada

Considerando que as direções dos voos são relevantes no estudo de uma rede de transporte aéreo e que o número de passageiros varia a cada rota — e até em uma mesma rota conforme a companhia aérea que a opera — aplicamos as ferramentas definidas na Subseção 3.2.3 para obter os valores de MEIDW para BATMN. As direções dos voos obtidas através dos dados reais (ANAC, 2022) determinam as direções das arestas de BATMN; o número de passageiros pagantes embarcados em cada rota anualmente, para cada empresa aérea, foi tomado como peso das arestas nas diferentes camadas. Dessa forma, por exemplo, no ano de 2018 a aresta com origem no aeroporto de Brasília e destino a Salvador, tem peso 378 na camada da AZU, 3568 na PTB, 88116 na ONE, 117659 na GLO e 156127 na TAM. Na camada da AZU a aresta de maior peso é a de origem em Viracopos e destino Confins; para GLO e TAM é a referente à Ponte Aérea Rio/São Paulo, que liga os aeroportos Santos Dumont e Congonhas; na camada ONE é Guarulhos/Salvador e para PTB é Guarulhos/Ribeirão Preto. Em todas elas os pesos mais significativos estão nas mencionadas arestas, em ambos os sentidos.

Quando calculamos a matriz DDDN (Subseção 3.2.1) para a rede de transporte aéreo BATMN, cada valor de $\mathcal{N}_i^p(d_d)$ indica a fração de aeroportos acessíveis a partir do aeroporto i , através da companhia aérea p , seguindo o menor caminho, à distância d_d , levando-se em conta as direções dos voos. Assim, $\mathcal{N}_i^p(1_d)$ representa a probabilidade de um passageiro que voa pela companhia aérea p partir do aeroporto i alcançar outros aeroportos na rede com um voo direto, sem escalas ou conexões e sem trocar de companhia aérea; da mesma forma, $\mathcal{N}_i^p(2_d)$ equivale à fração de aeroportos alcançáveis com voos de uma escala; $\mathcal{N}_i^p(3_d)$ a probabilidade de chegar até aeroportos à distância 3, ou seja, com voos de duas escalas e assim sucessivamente, mantendo sempre a mesma companhia aérea. Tomando o número de passageiros que embarcam em cada rota direcionada como peso de cada aresta, os valores obtidos na DWTM (conforme Subseção 3.2.3) representam a probabilidade de um passageiro de uma determinada companhia aérea p , localizado em um aeroporto i embarcar para um aeroporto j , considerando o total de passageiros que partem daquela origem para todos os destinos possíveis, através da companhia p , em voos diretos. Desse modo, por exemplo, na camada AZU em 2021 existem apenas duas rotas partindo de Bauru — com destinos a Campinas (Viracopos) e Porto Seguro, respectivamente (Fig. 12). Houve 30804 passageiros pagantes no percurso Bauru/Campinas e 3053 no trajeto Bauru/Porto Seguro e esses valores correspondem aos pesos das relativas arestas, nessas direções. A

probabilidade de um passageiro da AZU, localizado em Bauru, embarcar para Campinas é de $\frac{30804}{33857} = 0,91$ contra $\frac{3053}{33857} = 0,09$ de tomar o voo para Porto Seguro. Se as arestas não fossem ponderadas, a probabilidade de embarque em ambas as rotas seria de 0,5.

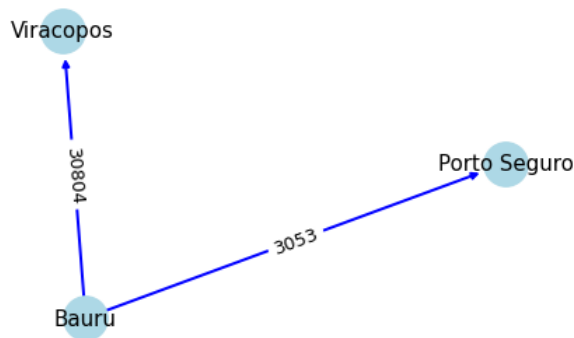
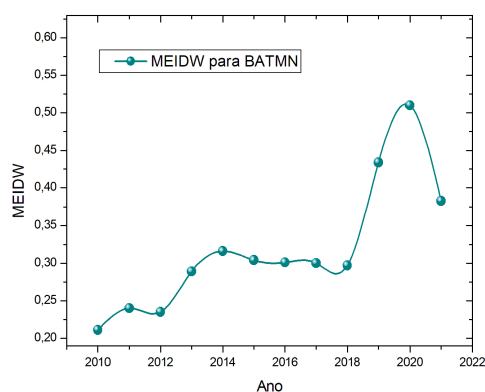


Figura 12 – Ilustração parcial da camada AZU em 2021. Os pesos nas arestas representam o número total de passageiros pagantes da AZU nas respectivas rotas em 2021, segundo dados da [ANAC \(2022\)](#). A probabilidade de um passageiro da AZU, localizado em Bauru, embarcar com destino a Campinas é de 0,91 e, em direção a Porto Seguro, é de 0,09.

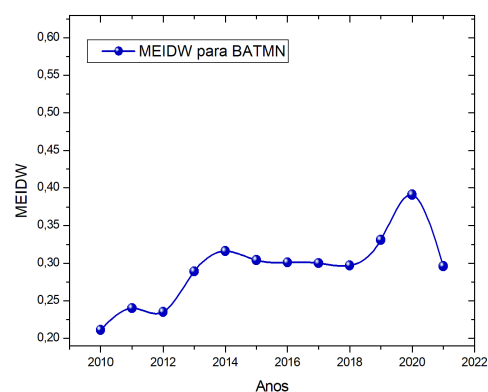
As companhias aéreas participantes da rede, a cada ano, são selecionadas conforme exposto na seção anterior e exibido na Tabela 2.

Em uma abordagem inicial, mantivemos inalterado o conjunto de 154 aeroportos no intervalo que já havíamos trabalhado (2010-2018) e agrupamos os 125 aeroportos que receberam voos entre 2019 e 2021, fixando-os para cada ano dessa segunda etapa (Fig. 13-a). Em uma nova perspectiva, acrescentamos 29 nós isolados à rede entre 2019 e 2021, chegando a 154 nós em todo o período, de 2010 a 2021. O resultado é mostrado na Figura 13-b. Observamos mais uma vez, assim como já relatado na Seção 4.2 para MEI, que a presença de nós isolados na rede reduz os valores de MEIDW por introduzir padrões semelhantes de conexões entre as camadas do sistema multiplex, o que nos conduz a um terceiro experimento com MEIDW para BATMN.

Eliminamos da rede todos os nós de grau multiplex nulo, considerando apenas os aeroportos que receberam voos a cada ano, em todas as etapas analisadas, seguindo as configurações apresentadas na Tabela 3. Os valores de MEIDW tornam-se expressivamente mais altos que nos dois experimentos iniciais (Fig.14). Nos três primeiros anos, vemos que as companhias aéreas presentes na rede operavam com mais sobreposição de rotas e esse cenário se altera à medida em que realizam-se as fusões entre empresas regionais e líderes de mercado, a partir de 2013. Ocorrem então leves oscilações de 2014 a 2018, quando o mesmo grupo de empresas atua na rede e realiza apenas mudanças sutis de reorganização de rotas. Em 2019, ano em que PTB é desconsiderada da rede, observamos um pequeno acréscimo de 8% em MEIDW em relação ao ano anterior. Com a exclusão da ONE e o



(a)



(b)

Figura 13 – Evolução dos valores de MEIDW para BATMN contendo vértices isolados na rede. De 2010 a 2018 a rede foi construída com o mesmo conjunto de 154 aeroportos, contendo nós isolados em todo o período. **a.** A partir de 2019, um novo conjunto de 125 aeroportos, obtido pela união de todos que receberam voos entre 2019 e 2021, é mantido. **b.** São acrescentados 29 nós isolados à rede entre 2019 e 2021, obtendo 154 nós em todos os anos.

retorno de PTB à BATMN em 2020, que foi o ano mais crítico das restrições causadas pela pandemia de COVID-19, ocorreu o pico pronunciado de MEIDW. O índice volta ao patamar anterior em 2021, com o ingresso de IPM à rede, enquanto inicia-se o relaxamento das medidas restritivas de contenção à pandemia, permitindo a retomada gradual das operações de transporte aéreo de passageiros.

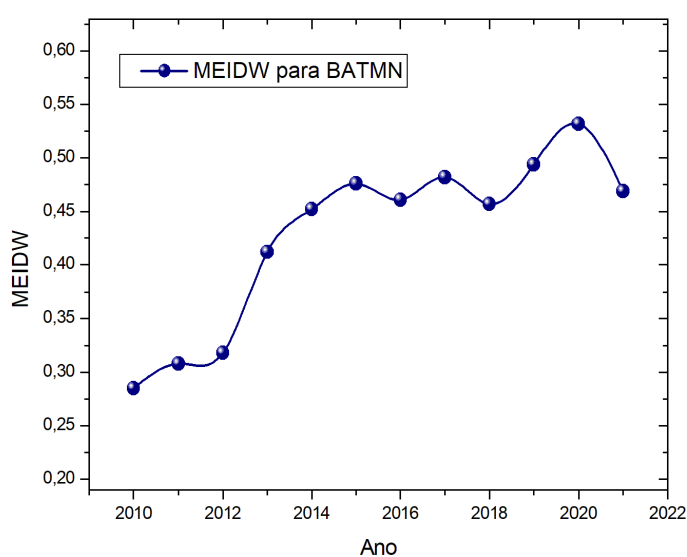


Figura 14 – Valores de MEIDW para BATMN, considerando apenas nós de graus multiplex não nulos.

4.4 B-BATMN: um modelo multiplex para a rede de transporte aéreo mais movimentada do Brasil

Entre 2010 e 2021, BATMN é constituída, em média, por 113 nós. O menor número de nós integrantes da rede é observado em 2017, quando 106 aeroportos receberam voos das companhias consideradas e, no outro extremo, no ano de 2020 a rede conta com 121 nós, que é seu número máximo. Aeroportos de pequeno porte estão incluídos, o que impacta na diversidade de rotas e, por consequência, no valor do índice de eficiência multiplex de BATMN, uma vez que poucas companhias aéreas de grande porte atendem a aeroportos secundários.

Buscando outra perspectiva de análise, selecionamos os aeroportos nos quais o número de embarques domésticos é superior a 0,5% do total de passageiros pagantes de cada ano, obtendo sub-redes formadas por aproximadamente 30 aeroportos, em média, que denominamos “Rede Multiplex de Transporte Aéreo Mais Movimentada do Brasil” (*Busiest Brazilian Air Transportation Multiplex Network* - B-BATMN). As operadoras aéreas que compõem B-BATMN a cada ano são aquelas que transportam mais que 0,5% do total de passageiros anuais nas respectivas redes e, juntas, são responsáveis por mais de 92% desse total. A Tab. 5 apresenta a quantidade de aeroportos e as companhias aéreas incluídas em B-BATMN a cada ano.

Tabela 5 – Número de aeroportos e respectivas companhias aéreas que compõem B-BATMN a cada ano.

Ano	Aeroportos	Companhias aéreas
2010	28	AZU, GLO, TAM, ONE, TIB, WEB
2011	32	AZU, GLO, TAM, ONE, TIB, WEB, PTN, PTB
2012	32	AZU, GLO, TAM, ONE, TIB, WEB, PTN
2013	31	AZU, GLO, TAM, ONE, TIB
2014	31	AZU, GLO, TAM, ONE
2015	31	AZU, GLO, TAM, ONE, PTB
2016	31	AZU, GLO, TAM, ONE
2017	29	AZU, GLO, TAM, ONE
2018	30	AZU, GLO, TAM, ONE
2019	30	AZU, GLO, TAM, ONE
2020	28	AZU, GLO, TAM
2021	29	AZU, GLO, TAM, IPM

Diferentemente do que vimos em BATMN, a PTB integra B-BATMN apenas em 2011 e 2015, pois atua principalmente em aeroportos secundários e, nessa rede, transporta um número reduzido de passageiros. Em 2010 a PTN também não faz parte das companhias selecionadas e assim o número de camadas que compõem B-BATMN varia de 3 a 8 ao longo do período estudado.

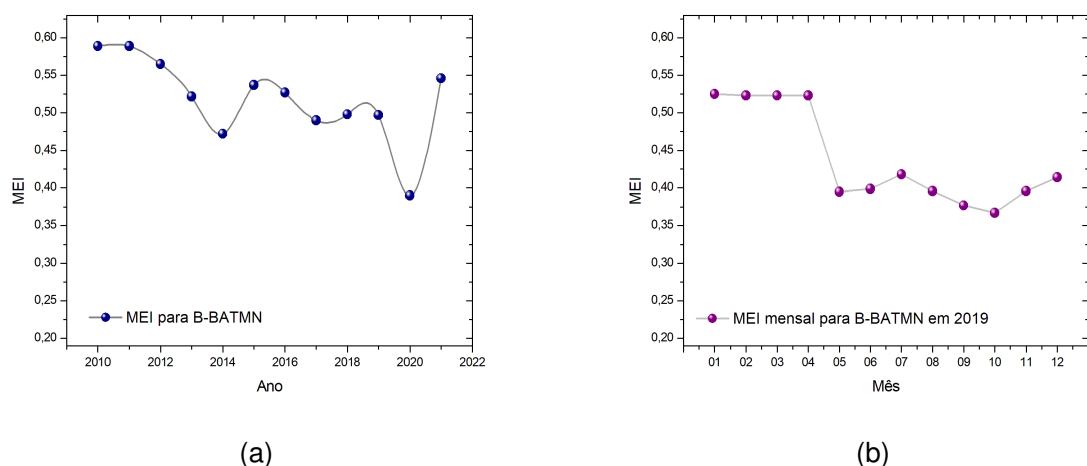


Figura 15 – MEI para B-BATMN. **a.** Valores de MEI para B-BATMN no contexto anual entre 2010 e 2021. **b.** Detalhamento de MEI para B-BATMN em escala mensal no ano de 2019.

Na Figura 15a, que apresenta a variação de MEI para B-BATMN, vemos um cenário completamente diferente do que analisamos em BATMN. Os valores de MEI iniciam a série histórica em um patamar alto e mostram uma tendência a queda com o passar dos anos. Observamos uma redução no índice à medida em que ocorrem as fusões das companhias aéreas entre 2010 e 2013, com uma queda mais pronunciada em 2014, ano da Copa do Mundo Fifa no Brasil, voltando ao patamar prévio no ano seguinte. Isso está em linha com a discussão anterior em que concluímos que as empresas aéreas reorganizaram suas rotas para atender a alta demanda criada nas cidades-sede dos jogos da Copa, uma vez que os aeroportos que servem a essas cidades estão incluídos em B-BATMN (CAMARGO, 2009). Em 2020 há uma abrupta queda de 21,5% do MEI em relação ao ano anterior, com a exclusão da ONE e o advento da pandemia da COVID-19, voltando, posteriormente, a elevar-se a um nível mais alto que no período que antecede esses eventos.

A camada referente à ONE é parte integrante da rede em 2019, pois a empresa ainda preenche os critérios de permanência estabelecidos, mesmo tendo operado apenas até abril daquele ano, como já mencionado. Investigamos então o efeito da exclusão da ONE em B-BATMN através do MEI mensal para 2019. Nesse panorama, aplicamos o mesmo critério de incluir apenas as empresas que transportam acima de 0,5% do total de passageiros pagantes da rede, porém agora computamos a cada mês. Obtemos 4 camadas entre os meses de janeiro e abril, sendo AZU, GLO, TAM e ONE e, após o encerramento das operações, ONE deixa a rede, que passa a contar com 3 camadas referentes às empresas aéreas remanescentes, a partir de maio. Mostramos os resultados encontrados na Figura 15b.

Percebemos que os valores de MEI estão estabilizados nos quatro primeiros meses e a

saída da ONE provoca uma queda superior a 24% no índice para B-BATMN em maio, permanecendo no nível mais baixo a partir daí, com pequenas variações mensais. Consultando a ordem de diversidade vemos que a sequência obtida entre janeiro e abril de 2019 é sempre $O_D = \{GLO, TAM, AZU, ONE\}$ e, portanto, a ONE operava com as rotas mais diversificadas em B-BATMN, em relação às demais operadoras consideradas naqueles meses. A saída da ONE da rede é a principal causa da queda no valor de MEI mensal para maio de 2019 e isso se reflete no plano anual, como vimos na Figura 15a, tendo os valores de MEI mensal equiparados com os valores anuais para 2019 e 2020, além de coincidirem também as camadas componentes de B-BATMN nos dois contextos.

Em 2020, ano mais crítico do *lockdown* devido à pandemia de COVID-19, foram mantidos voos interligando os principais aeroportos do Brasil, ainda que em menor frequência devido à queda de demanda. Como B-BATMN é formada por parte desses aeroportos, as ligações da rede foram preservadas e a pandemia não influenciou significativamente nos valores de MEI na análise anual. Desse modo, a principal causa da grande flutuação em MEI em 2020, observada na Figura 15a, é a exclusão da ONE da rede.

Examinamos a ordem de diversidade para B-BATMN, que é exibida a seguir:

- 2010: TAM, WEB, TIB, AZU, GLO, ONE;
- 2011: GLO, ONE, TIB, PTN, AZU, PTB, WEB, TAM;
- 2012: GLO, WEB, AZU, TIB, ONE, PTN, TAM;
- 2013: GLO, AZU, TIB, TAM, ONE;
- 2014: GLO, TAM, AZU, ONE;
- 2015: GLO, TAM, ONE, PTB, AZU;
- 2016: GLO, TAM, AZU, ONE;
- 2017: TAM, GLO, AZU, ONE;
- 2018: GLO, TAM, AZU, ONE;
- 2019: GLO, TAM, AZU, ONE;
- 2020: GLO, TAM, AZU;
- 2021: GLO, TAM, AZU, IPM.

Vemos que a partir de 2014 as camadas de GLO e TAM apresentam baixa dissimilaridade, o que faz com que estejam sempre próximas na ordem de diversidade, ou seja, ambas

possuem muitas conexões comuns e, como GLO esteve 10 vezes na última posição em diversidade nos 12 anos estudados, concluímos que sua rede possui grande sobreposição de rotas com as demais companhias em B-BATMN. Por outro lado, ONE lidera o *ranking* de diversidade durante 7 dos 9 anos em que participa da rede no período estudado, o que reforça a conclusão de que sua extinção provoca uma forte queda no valor de MEI. A entrada de IPM em B-BATMN aumenta significativamente o valor de MEI, sendo a empresa que lidera o índice em 2021 devido à sua pequena participação nessa rede, contrastando com as demais operadoras.

Em resumo, o comportamento de MEI deixa explícito que as companhias aéreas caminham para um cenário em que operam de forma cada vez mais similar nos aeroportos mais movimentados do país, visivelmente competindo pela demanda por voos nesses terminais.

4.5 Comparação entre MEI e MEIDW para B-BATMN e BATMN

Em nova análise, empregamos os mesmos conjuntos de vértices e companhias aéreas relacionados na Tabela 5 para construir a rede direcionada e ponderada B-BATMN. Assim como na Seção 4.3, usando os dados reais disponíveis na página eletrônica da ANAC (2022), as direções dos voos realizados entre os aeroportos pertencentes à rede estabelecem as direções das arestas de B-BATMN e o número de passageiros pagantes que embarcam em cada rota em voos diretos definem os pesos das arestas. Calculamos então MEIDW para B-BATMN, de acordo com o que definimos em 3.2 e encontramos resultados muito semelhantes aos valores de MEI, assim como ocorreu para BATMN.

Comparamos então os resultados de MEI e MEIDW para B-BATMN e fizemos o mesmo comparativo para BATMN, no contexto em que todos os nós da rede possuem grau multiplex não nulo. Através da imagem exposta na Fig. 16b percebemos que os dois índices apresentam uma correlação quase perfeita para BATMN (coeficiente de correlação de Pearson de 0,99). Em todo o período analisado, os valores de MEI são levemente maiores que os valores de MEIDW, com diferenças inferiores a 4%. Situação semelhante é exibida na Fig. 16a, onde os valores de MEI e MEIDW mostram correlação muito forte, com 0,97 de coeficiente de Pearson para B-BATMN, porém, nesse caso, MEIDW tem valores maiores que MEI na maior parte dos pontos.

Isso ocorre devido à estrutura de cada uma das redes. Em BATMN temos forte presença de aeroportos regionais de pouca expressão no cenário nacional, nos quais apenas uma companhia aérea atua, e esse efeito ocorre em menor escala em B-BATMN. Esses aeroportos aparecem como vértices isolados nas demais camadas do sistema multiplex. Desse modo as matrizes de adjacência das camadas de BATMN são esparsas, ou seja, contam com muitas ocorrências nulas, o que gera semelhança entre as matrizes de transição para

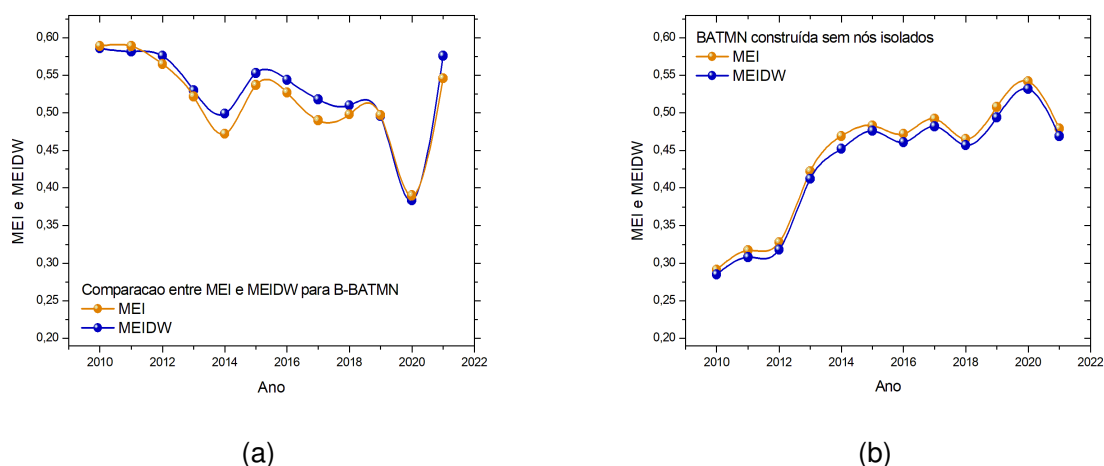


Figura 16 – Comparação entre MEI e MEIDW para B-BATMN e BATMN. **a.** No painel esquerdo vemos a evolução de MEI e MEIDW para B-BATMN, enquanto o painel direito **b** exibe a comparação para BATMN.

as redes ponderada e não ponderada.

Tomando como exemplo o ano de 2019, no qual os valores de MEI e MEIDW são muito próximos (Fig. 16b), temos 114 vértices em BATMN. Enquanto a camada da AZU apresenta apenas 7 nós isolados, a GLO tem 51, a TAM tem 67 e a ONE conta com 86 vértices não conectados. Fizemos a mesma análise para B-BATMN no ano de 2017. Dos 29 vértices da rede, apenas a ONE apresenta 8 nós isolados, enquanto nas outras camadas todos os 29 vértices são conectados. Podemos observar através da Figura 16a que em 2017 ocorre uma diferença mais pronunciada entre os valores de MEI e MEIDW em B-BATMN.

A Figura 17 ilustra os mapas das arestas das camadas referentes às companhias aéreas de BATMN e B-BATMN, nos respectivos anos analisados. As camadas são apresentadas obedecendo a ordem de diversidade para cada uma das redes naqueles anos.

Essa semelhança entre os valores de MEI e MEIDW mostra que, ao mesmo tempo em que nos aeroportos principais há uma ampla gama de rotas e opções de companhias aéreas para atender aos consumidores, existe um grande número de aeroportos em todo o país com opções limitadas de transporte aéreo, de modo que a população tem alternativas escassas nessas regiões.

4.6 A rede mais movimentada construída como rede de camada única e suas centralidades clássicas

Diversos autores já realizaram análises da rede brasileira de transporte aéreo por meio de medidas clássicas de redes complexas, como mencionado no Capítulo 1. Nesta seção,

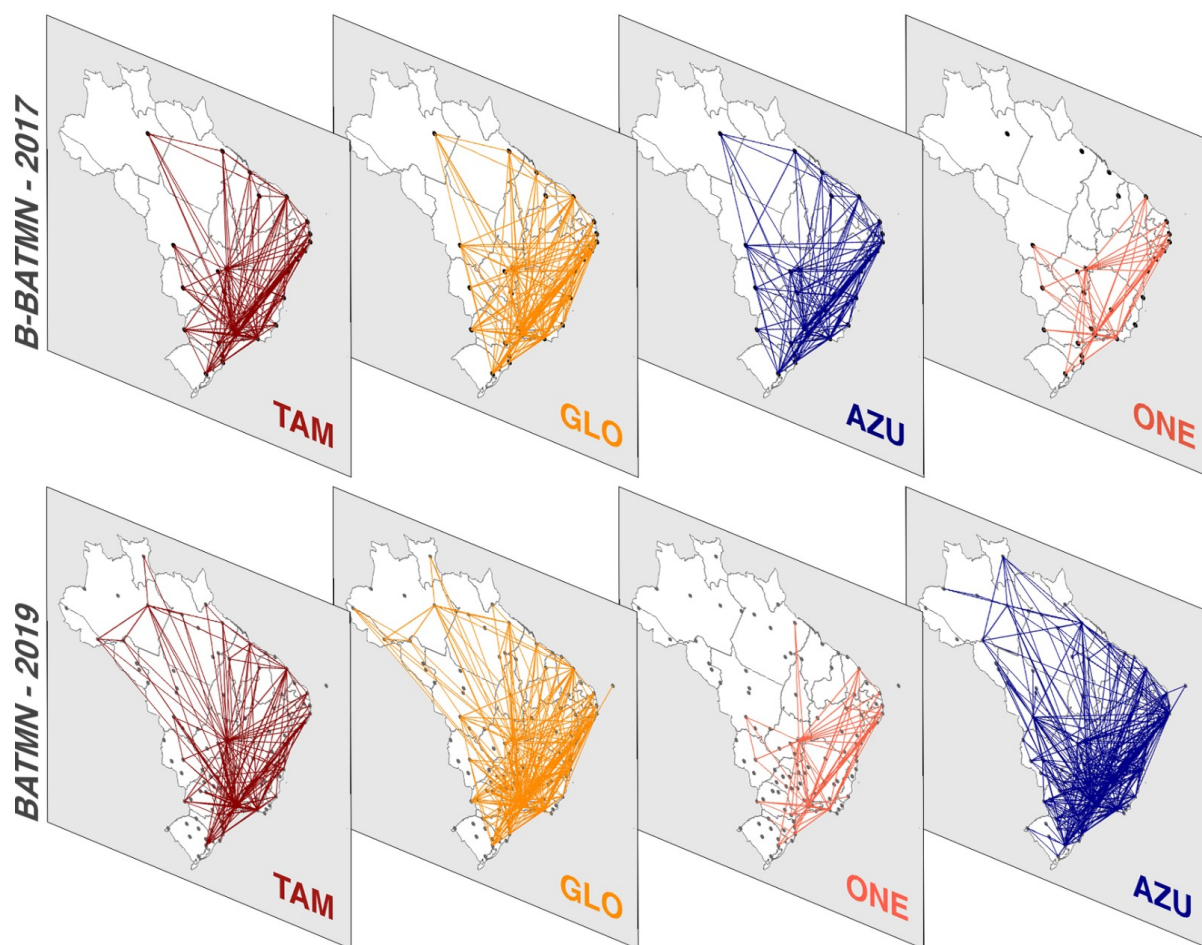


Figura 17 – Ilustração dos *links* de B-BATMN em 2017, ano em que houve a diferença mais significativa entre os valores de MEI e MEIDW e, de BATMN em 2019, último ano anterior à pandemia de COVID-19. As sequências em que as camadas são apresentadas representam a ordem de diversidade em cada versão da rede.

apresentamos algumas avaliações nesse sentido para complementar nossas análises e reforçar nossas conclusões.

Mantendo os mesmos conjuntos de aeroportos e companhias aéreas usados para construir B-BATMN a cada ano, como descrito na Seção 4.4, analisamos essas sub-redes sob a perspectiva de redes complexas não direcionadas e não ponderadas, como estruturas de camada única. Avaliamos algumas medidas clássicas de centralidade, sendo centralidade de grau (*degree centrality*), centralidade de intermediação (*betweenness*) e centralidade de proximidade (*closeness*), com objetivo de estimar a importância dos aeroportos nessas sub-redes ao longo dos anos. Os resultados são apresentados no Apêndice B. Aplicando a medida de centralidade de grau a uma rede de transporte aéreo conseguimos saber quais aeroportos são origens de voos que alcançam a maior quantidade possível de destinos através de voos sem escala, o que faz com que tais aeroportos sejam responsáveis por distribuir passageiros com maior velocidade para toda a rede. Já a centralidade de

intermediação aponta os aeroportos que participam da maior quantidade de rotas curtas entre origem e destino, quando é necessário fazer escalas. Os aeroportos que são *hubs* das companhias aéreas costumam apresentar altos valores de *betweenness* na rede. Para calcular a centralidade de proximidade, tomamos como distância o número de voos (incluindo voos com escalas) necessários para se chegar a cada destino da rede e assim, aeroportos que têm poucas ligações por voos diretos apresentam menores valores para essa medida.

Em particular, observamos a evolução dessas características para o aeroporto de Confins (SBCF), que atende à região metropolitana de Belo Horizonte, Minas Gerais. Em relação à centralidade de intermediação (Fig.30-Apêndice B), verificamos que SBCF está sempre entre os quatro valores mais altos da rede, sendo de importância expressiva nos anos iniciais observados, mas apresentando queda nessa medida de centralidade entre os anos de 2012 e 2014. A partir de 2015, volta a ter importância como um elemento central da rede, chegando a ocupar a primeira posição empatado com outros importantes aeroportos em 2016 e 2019. Fazendo a distribuição da centralidade de intermediação, percebemos que, em geral, essa rede apresenta *betweenness* baixo e a grande maioria dos aeroportos possui valores entre 0 e 0,05. A partir de 2016 observamos uma redução ainda maior nos valores de *betweenness*, voltando a crescer ligeiramente em 2020 e 2021, mostrando que a rede ficou mais concentrada em *hubs* do que no período anterior, quando era exibida uma tendência a ter mais voos diretos entre os aeroportos da rede. Apenas cerca de cinco aeroportos permanecem com os valores mais altos para a centralidade de intermediação, sendo exatamente aqueles que são os mais movimentados da rede, a saber: Aeroporto Internacional do Rio de Janeiro - Galeão (SBGL), Aeroporto Internacional de Viracopos - Campinas (SBKP), Aeroporto Internacional de São Paulo - Guarulhos (SBGR), Aeroporto Internacional de Brasília (SBBR) e Aeroporto Internacional de Belo Horizonte - Confins (SBCF).

Quando avaliamos a centralidade de proximidade (Fig. 32) os mesmos cinco aeroportos se sobressaem em relação aos outros durante todo o período observado, incluindo, entre 2016 e 2018, o Aeroporto de São Paulo - Congonhas (SBSP). Percebemos que a centralidade de proximidade contrasta com a centralidade de intermediação, uma vez que a rede é formada pelos aeroportos mais movimentados do país e, portanto, apresenta alto grau de conexões – o que é visível nos gráficos de proximidade.

Essas análises se tornam mais interessantes quando observamos a centralidade de grau e também a distribuição de graus da rede. Os mesmos cinco aeroportos se destacam novamente, e em 2016, 2017 temos seis aeroportos com a inclusão de SBSP e, posteriormente, em 2021, os cinco já citados e o Aeroporto Internacional do Recife (SBRF) é incluído, mostrando-se um dos mais conectados da rede. Em 2014 observamos um aumento no

número de vértices com graus entre 20 e 25, o que indica aumento na ocorrência de voos diretos entre os aeroportos dessa rede no ano da Copa do Mundo no Brasil. Esse fenômeno volta a ocorrer em 2016, ano das Olimpíadas do Rio. Já em 2020 observamos uma redução no número de vértices com graus mais altos, de modo que a maioria possui entre 10 e 20 conexões, reforçando nossa conclusão de que a rede ficou mais concentrada em *hubs* durante o ano em que ocorreram as medidas mais severas contra a pandemia.

4.7 Publicações

Durante o período de estudos do doutorado, tivemos oportunidade de publicar alguns trabalhos apresentando o MEI e sua aplicação na BATMN.

Inicialmente participamos da conferência internacional *Traffic and Granular Flow - 2019*, com apresentação oral do trabalho intitulado “*Diversity Analysis of the Brazilian Air Transportation Network*”, na cidade de Pamplona, na Espanha em 2019. O artigo completo referente (ver Apêndice D) foi publicado como capítulo do livro de anais da conferência, da série *Springer Proceedings in Physics* (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020a).

Posteriormente publicamos o artigo “*The Multiplex Efficiency Index: unveiling the Brazilian air transportation multiplex network—BATMN*” na revista “*Scientific Reports*” que é classificada como *Qualis A1* na área de avaliação Interdisciplinar (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2020b), que consta no Apêndice C.

Apresentamos o trabalho “Quantificando Eficiência em Redes Multiplex” no “XII Encontro Nacional de Modelagem Computacional” na cidade de Juiz de Fora - MG, com publicação do artigo completo nos anais da conferência (OLIVEIRA; CARPI; ATMAN, 2019), disponível no Apêndice E.

Atualmente estamos preparando outros dois novos artigos baseados nos resultados das seções 3.2 e 5.3.

Para aprimorar nosso estudo da rede brasileira de transporte aéreo, é importante avaliar também a capacidade de difusão da rede de cada companhia aérea e da rede em geral, em todo o país. Assim podemos compreender o desempenho do sistema aéreo nacional de forma mais completa e identificar possíveis áreas de melhoria. Por isso, o próximo capítulo apresentará uma análise da capacidade de difusão do sistema, examinando diferentes possibilidades de conexões de voos entre as diversas companhias aéreas que atuam no país.

Capítulo 5

Capacidade de Difusão em Redes Interconectadas

O processo difusivo pode ser definido de diferentes formas conforme o contexto em que é aplicado, mas, em geral, refere-se ao ato de propagar algo de forma dinâmica através de um meio ([SAYAMA, 2015](#)).

Em redes complexas o processo difusivo é um fenômeno em que uma quantidade se espalha pela rede a partir de um ou mais nós iniciais através das conexões da rede. À medida que a quantidade se difunde, a sua concentração em cada nó é afetada pelas conexões e pelo número de nós no caminho percorrido. Vários fatores influenciam a difusão em redes complexas, como o tamanho da rede, a topologia das conexões, a natureza da quantidade que está sendo difundida, entre outros. A compreensão desse processo é importante para a modelagem e análise de redes complexas em diversas áreas, como nas ciências sociais, biologia, física e engenharia ([M.E.J.NEWMAN, 2010](#)).

Expomos neste capítulo a metodologia recém-desenvolvida por [Schieber et al. \(2021\)](#) para avaliar a capacidade de difusão de redes em diferentes configurações: para redes complexas de camada única e para redes multicamadas em geral, incluindo redes multiplex. Consideramos oportuno aplicar o método para BATMN, a fim de avaliar a capacidade de difusão de cada camada de forma isolada, bem como a análise do sistema multiplex como um todo. Detalhamos também, neste capítulo, os resultados obtidos com a referida análise.

5.1 Capacidade de difusão em uma rede de camada única

Vamos considerar uma rede ponderada $G = (V, E, W)$ que pode ser direcionada ou não, para a qual V é o conjunto de vértices, E o conjunto de arestas e W , o conjunto de pesos.

Por definição, a distância geodésica entre os nós i e j , $D_g(i, j)$ é o número mínimo de

arestas que os separam, e a distância ponderada $D_w(i, j)$, é a soma mínima do inverso dos pesos que os conectam. A partir dessas definições, [Schieber et al. \(2021\)](#) propõem a distribuição de distância de nó ponderada wNDD, considerando inicialmente a razão $\Delta_{i,j} = D_w(i, j)/D_g(i, j)$.

Quando a distância ponderada entre os nós i e j for menor que a distância geodésica, tem-se $\Delta_{i,j} < 1$ e essa diferença é quantificada por $1 - \Delta_{i,j}$. Por outro lado, se a distância ponderada for maior que a distância geodésica, teremos $\Delta_{i,j} > 1$ e então $1 - 1/\Delta_{i,j}$ quantifica diferença.

Agora para cada nó $i \in V$, considere o conjunto $\Gamma_i(d) = \{y \in V \mid D_g(i, y) = d\}$ formado por todos os vértices y que são alcançáveis a partir de i por um caminho mínimo medindo d . Como d representa todas as possíveis distâncias geodésicas de i para os demais nós em V , temos que $d = 1, 2, \dots, |V| - 1, \infty$. Assim a fração de nós desconectados de i é definida como

$$\mathbf{p}_i(\infty) = \frac{|\Gamma_i(\infty)|}{(|V| - 1)}$$

e, para os demais nós de V , para os quais $d \neq \infty$, a fração de nós à distância geodésica d de i é dada por

$$\mathbf{p}_i(d) = \frac{|\Gamma_i(d)|}{(|V| - 1)}$$

e, considerando as distâncias ponderadas para esses nós, é possível construir o vetor $[\mathbf{p}_i^+(d), \mathbf{p}_i^0(d), \mathbf{p}_i^-(d)] = \frac{1}{|V|-1} \sum_{y \in \Gamma_i(d)} \left[\max(1 - \Delta_{i,j}, 0), \min\left(\Delta_{i,j}, \frac{1}{\Delta_{i,j}}\right), \max\left(1 - \frac{1}{\Delta_{i,j}}, 0\right) \right]$,

em que $\mathbf{p}_i^+(d)$ é a fração de nós que estão à distância geodésica fixa d de i , para os quais $d > D_w(i, j)$, assim como $\mathbf{p}_i^-(d)$ é fração daqueles nós que apresentam $d < D_w(i, j)$ e $\mathbf{p}_i^0(d)$ indica a fração dos nós tais que $d = D_w(i, j)$.

No caso extremo em que os pesos tendem ao infinito, $\mathbf{p}_i^+(d) \rightarrow |\Gamma_i(d)|/(|V| - 1)$, $\mathbf{p}_i^-(d) = 0$ e $\mathbf{p}_i^0(d) \rightarrow 0$, independente da configuração topológica da rede.

Desse modo, a distribuição de distância do nó ponderada, wNDD, é definida, para cada nó, como:

$$\mathbb{P}_i = [\mathbf{p}_i^+(1), \mathbf{p}_i^0(1), \mathbf{p}_i^-(1), \dots, \mathbf{p}_i^+(|V| - 1), \mathbf{p}_i^0(|V| - 1), \mathbf{p}_i^-(|V| - 1), \mathbf{p}_i(\infty)]. \quad (21)$$

Para um nó em uma rede totalmente conectada com pesos tendendo ao infinito, a forma da distribuição de distância wNDD é $\mathbb{P}_i = (1, 0, 0, \dots, 0)$, que corresponde à distribuição de distância de um nó na estrutura mais difusiva e, por isso, são consideradas como a estrutura de referência G_{ref} e a distribuição de distância de referência $\mathbb{P}_{ref}$.

Assim, considerando uma rede ponderada G , a capacidade de difusão do nó i , $\Lambda_i(G)$, é definida como o inverso da distância entre $\mathbb{P}_i(G)$ e $\mathbb{P}_i(G_{ref})$, onde G_{ref} é o grafo de

referência do mesmo tamanho que G . A distância entre essas distribuições é medida através da divergência cumulativa de Jensen-Shannon (WANG; VEMURI; RANGARAJAN, 2006), representada por CDD . Portanto, a *capacidade de difusão* do nó $i \in G$, $\Lambda_i(G)$, é dada por

$$\Lambda_i(G) = [CDD(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_{ref})]^{-1} \quad (22)$$

e a *capacidade de difusão da rede* G , $\Lambda(G)$, é a média sobre todos os nós,

$$\Lambda(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} \Lambda_i(G). \quad (23)$$

5.2 Capacidade de difusão em uma rede multicamada

Em uma estrutura multicamada é possível existir caminhos mais curtos entre dois nós percorrendo arestas em mais de uma camada. Quando isso ocorre, Schieber et al. (2021) dizem que o par de nós (i, j) é duplamente conectado ($i \Leftrightarrow j$), contrapondo à situação em que os nós são conectados de forma simples ($i \leftrightarrow j$). Por exemplo, os vértices 1 e 3 da Figura 18 são duplamente conectados porque o caminho mais curto que os conecta contém arestas em mais de uma camada (1–5–6–2–3). Os vértices 5 e 6, por outro lado, não são duplamente conectados porque o caminho mais curto que os conecta percorre apenas uma camada.

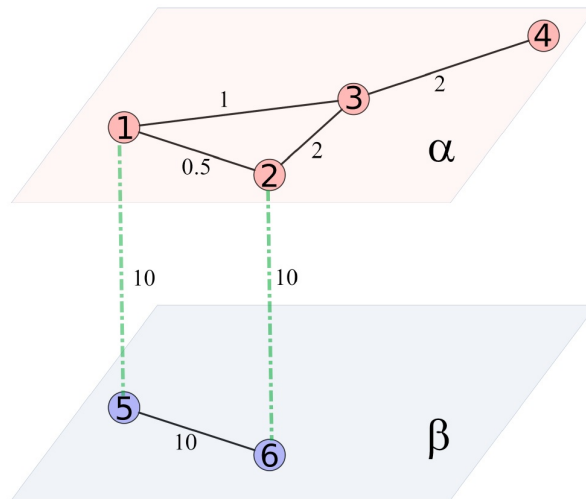


Figura 18 – Ilustração de rede de duas camadas contendo arestas intercamadas. Fonte: Schieber et al. (2021)

Consideremos então uma rede multicamada ponderada composta por um conjunto de M redes ponderadas, $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_M, \mathbb{E})$ onde cada $G_L = (V_L, E_L, W_L)$, com $L = 1, 2, \dots, M$ é, por si só, uma rede composta por seu conjunto de vértices V , arestas E e respectivos pesos W . As camadas de $\vec{G}$ são conectadas por *links* intercamadas ponderados $\mathbb{E} = \{w_{x,y} \mid x \in V_\alpha, y \in V_\beta, \alpha \neq \beta\}$. Para dois nós i e j de uma camada L , são definidas:

- $D_w(i, j)$, é a menor distância sobre todos os caminhos conectando i e j no sistema multicamadas, sendo $\mathbb{P}_i$ sua distribuição de probabilidade correspondente;
- $D_w^\beta(i, j)$ é a distância mais curta sobre todos os caminhos conectando os vértices i e j de modo que pelo menos um nó no caminho pertença a uma camada diferente, G_β , com $\beta \neq L$, e $\mathbb{P}_i^\beta$ é sua distribuição de probabilidade correspondente.

Desse modo, $\mathbb{P}_i$ capta o efeito da redução dos caminhos mais curtos em virtude da estrutura multicamada, enquanto $\mathbb{P}_i^\beta$ capta o impacto causado pelos caminhos nos quais é obrigatório que exista, pelo menos, um *link* conectado especificamente à camada G_β .

Assim como no caso de rede de camada única, para definir a capacidade de difusão em um sistema multicamada, os autores usam uma distribuição de probabilidade de referência, $\mathbb{P}_{ref}$, correspondente à estrutura multicamada mais difusiva.

É necessário observar que, em uma estrutura multicamada, a difusão depende da conectividade entre as diversas camadas. Se não houver conexão entre elas, o tempo de difusão é determinado pela camada mais lenta. Do mesmo modo, quando a força da conexão intercamada é baixa, o processo difusivo pode se tornar excessivamente longo devido às conexões fracas, retardando a dinâmica. No entanto, uma forte interação entre as camadas favorece a difusão (SCHIEBER et al., 2021).

Considerando uma rede multicamadas ponderada $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_M, \mathbb{E})$, para cada nó $i \in V_L$ e para toda camada $L = 1, 2, \dots, M$ são definidos:

1. A capacidade de difusão do nó ($\mathcal{M}_i$):

$$\mathcal{M}_i(\vec{G}) = \left[\frac{1}{2} CDD(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_{ref}) + \frac{1}{2M-2} \sum_{\beta=1, \beta \neq L}^M CDD(\mathbb{P}_i^\beta, \mathbb{P}_{ref}) \right]^{-1} \quad (24)$$

2. A capacidade de difusão da camada L :

$$\mathcal{M}(G_L) = \frac{1}{|V_L|} \sum_{i \in V_L} \mathcal{M}_i. \quad (25)$$

A capacidade de difusão multicamada do nó i , $\mathcal{M}_i(\vec{G})$ é, portanto, representada pela dissimilaridade estrutural e dinâmica entre a conectividade multicamada do nó i em G , e a conectividade multicamada do nó i em G_{ref} .

Para investigar a relação entre as capacidades de difusão simples e multicamada, os autores definem o ganho relativo $\mathcal{G}$ como a razão entre a capacidade de difusão multicamada e a capacidade de difusão da camada isolada. Assim, para um nó i em uma camada G_L :

$$\mathcal{G}_i = \frac{\mathcal{M}_i}{\Lambda_i} \quad (26)$$

e

$$\mathcal{G}_L = \frac{\mathcal{M}(G_L)}{\Lambda(G_L)} \quad (27)$$

Desta forma, $\mathcal{G}_L$ quantifica a variação da capacidade de difusão da camada L quando ela é conectada a um sistema multicamada, em comparação com a capacidade difusiva de sua rede isolada.

5.3 Avaliando a capacidade de difusão da rede brasileira de transporte aéreo

Utilizando a metodologia descrita acima e desenvolvida por [Schieber et al. \(2021\)](#), avaliamos a capacidade de difusão da BATMN direcionada e ponderada, entre 2010 e 2021, de duas formas diferentes. Inicialmente filtramos apenas os aeroportos que são comuns a BATMN a todos os anos analisados, obtendo um conjunto de 77 vértices e agregamos as camadas de BATMN para obter a rede brasileira de transporte aéreo de camada única (*Brazilian Air Transportation Network - BATN*). Posteriormente empregamos os conceitos para a própria BATMN direcionada e ponderada. Os resultados são descritos ao longo deste capítulo. Os gráficos apresentados foram obtidos através do *software Microsoft Excel 2010*.

5.3.1 Capacidade de difusão da rede de camada única BATN

Neste primeiro experimento de cálculo da capacidade de difusão para BATN, utilizamos o número passageiros pagantes PP_{ij} da rota entre os aeroportos de origem i e destino j , como peso da aresta $i \rightarrow j$. Tomando todos os aeroportos j que são alcançáveis a partir de um aeroporto i com voos diretos, ou seja, pares (i, j) de vértices de BATN que estão à distância geodésica 1, definimos $w_{ij} = PP_{ij}$ e assim $D_w(i, j) = \frac{1}{w_{ij}} = \frac{1}{PP_{ij}}$. Como $PP_{ij} \geq 1$ para todo par de vizinhos (i, j) , temos que $D_w(i, j) \leq 1$ em todos os caminhos de distância geodésica 1 da rede. Dessa forma, quanto mais movimentada a rota, menor a distância ponderada entre os aeroportos de origem e destino. Visto que o método, por outro lado, também considera a distância geodésica $D_g(i, j)$, o número de voos realizados com conexões em aeroportos intermediários também é levado em conta durante o cálculo da distribuição de distância de nó ponderada (wNDD) que é baseada na quantidade $\Delta_{i,j} = D_w(i, j)/D_g(i, j)$, razão entre as distâncias ponderada e geodésica entre os nós i e j . Aqui percebemos que teremos sempre $\Delta_{i,j} \leq 1$, uma vez que $D_g(i, j) \geq 1$ para todos os vértices da rede.

Ponderando as arestas dessa maneira, estamos considerando implicitamente outras características que poderiam definir a importância de cada conexão, tais como relevância das cidades de origem e destino no país, capacidade física dos aeroportos ou número

de decolagens ofertadas diariamente em cada rota. A demanda por cada conexão é um indicativo de todos esses atributos.

A Figura 19 traz os valores da capacidade de difusão anual para BATN. Observamos o valor mais baixo em 2010, quando aeroportos de pequeno porte são atendidos principalmente pelas companhias TIB, PTN e PTB. Dentre essas, duas participam das fusões ocorridas nos quatro primeiros anos do período estudado (ver Seção 4.2), sendo que a fusão entre TIB e AZU promove grande expansão da malha da AZU, que passa a atender esses aeroportos, tornando-os mais conectados aos aeroportos mais movimentados, o que contribui para um acréscimo na capacidade de difusão da rede nos anos seguintes. O valor máximo ocorre em 2016, ano em que a AZU aumenta significativamente suas rotas (Fig. 9a), mesmo havendo queda na demanda geral por voos em relação ao ano anterior (Fig. 7), o que se traduz em redução dos pesos das arestas da rede.

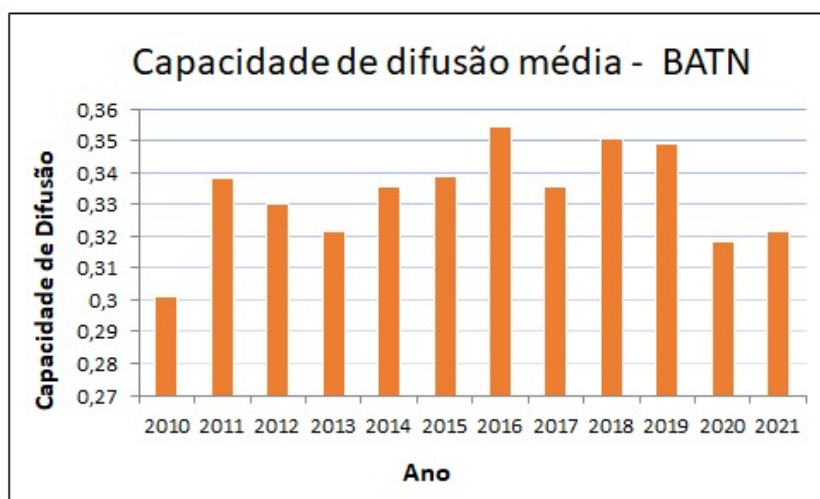


Figura 19 – Valores de capacidade de difusão anual encontrados para BATN, que é uma rede de camada única, direcionada e ponderada, construída a partir de BATMN, agregando-se suas camadas e considerando o mesmo conjunto de vértices em todos os anos analisados.

Dois eventos impactam a rede em 2020, sendo o encerramento das operações da companhia ONE e os efeitos da pandemia de COVID-19, de modo que observamos uma redução na capacidade de difusão da BATN em relação ao valor anterior. Como em 2019 a ONE opera apenas em quatro meses, sua contribuição para compor os pesos das arestas da rede no ano é baixa. Concluímos então que a diferença apresentada em 2020 se dá, principalmente, em virtude da pandemia, que ocasiona uma redução de cerca de 52% no número de passageiros pagantes transportados em relação ao ano anterior, como vemos na Figura 7, e também na oferta de rotas pelas companhias participantes da rede naquele ano (Fig. 9).

5.3.2 Capacidade de difusão da BATMN

Levando em conta agora as características de multiplexidade de BATMN, estudamos sua capacidade de difusão e examinamos o ganho relativo de cada vértice no que diz respeito à sua capacidade difusiva na rede no contexto em que as camadas são acopladas no sistema multiplex, contrastando com a situação em que o vértice é considerado em cada camada isolada. Ressaltamos que os caminhos considerados conectam dois vértices de uma mesma camada, com a possibilidade de percorrer arestas em outra camada ou não, conforme cada situação. Em outras palavras, comparamos a capacidade difusiva de cada aeroporto quando o passageiro tem a possibilidade de realizar conexões utilizando-se dos serviços de mais de uma companhia aérea com o cenário em que as conexões são restritas a uma única companhia, desde o aeroporto de origem até o destino final. Assim encontramos a capacidade difusiva da rede de cada camada considerada de forma independente e quando acoplada ao sistema multiplex, avaliando seu ganho relativo.

A estrutura de BATMN, direcionada e ponderada, segue a descrição feita anteriormente (Tab. 3) e aplicamos como pesos de todas as arestas $i \rightarrow j$ contidas em uma camada p , o número de passageiros pagantes PP_{ij} nas respectivas rotas, na companhia aérea correspondente, ou seja, $w_{ij} = PP_{ij}$, conforme apresentado em 5.3.1.

Para as conexões intercamadas, ligando cada vértice i^p da camada p ao seu correspondente i^q na camada q , avaliamos a força do nó em ambas as camadas, s_i^p e s_i^q , respectivamente e consideramos então $w(i^p, i^q) = \min\{s_i^p, s_i^q\}$ como o peso para as arestas intercamadas em ambos os sentidos, ou seja, $w(i^p, i^q) = w(i^q, i^p)$. Desse modo, o número de passageiros de um aeroporto que migra de uma companhia aérea para outra não excede a capacidade da empresa que recebe esse fluxo naquele terminal.

A Figura 20 exibe a evolução da capacidade de difusão de cada uma das camadas de BATMN, consideradas de forma independente das demais, ao passo que a Figura 21 mostra a progressão da capacidade de difusão delas acopladas ao sistema multiplex. O ganho relativo das camadas é retratado na Figura 22.

Percebemos que a maioria das camadas apresenta ganho relativo próximo a 1 em toda a série histórica, revelando pequeno aumento na capacidade difusiva quando são acopladas ao sistema multiplex. TIB, PTN e PTB destacam-se das demais apresentando altos valores de ganho relativo em alguns anos. No caso de TIB, que é a companhia aérea com a maior oferta de rotas no país entre 2011 e 2013 (Fig. 9a), apresentando a maior cobertura da rede e sendo a mais diversificada de BATMN – conforme mostramos na ordem de diversidade (4.2) – está entre as empresas com maior capacidade de difusão na própria camada até 2013, mas inicia o processo de fusão com a AZU em 2012, de modo que sua capacidade difusiva como rede individual é expressivamente reduzida, fazendo com que haja alto ganho

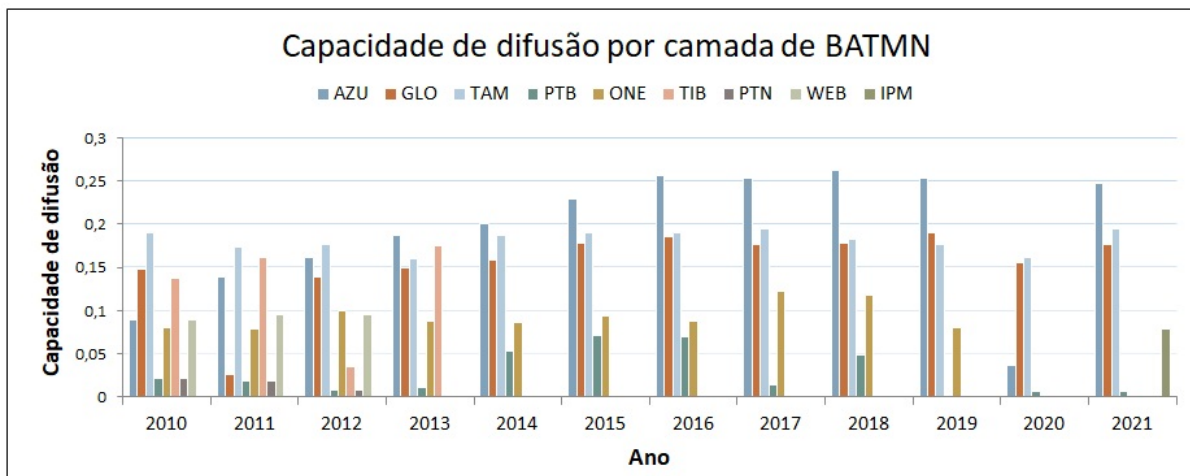


Figura 20 – Capacidade de difusão anual da rede independente de cada camada de BATMN anualmente. Aqui é representada a situação em que todas as conexões aéreas feitas pelos passageiros são realizadas através de uma única empresa aérea.

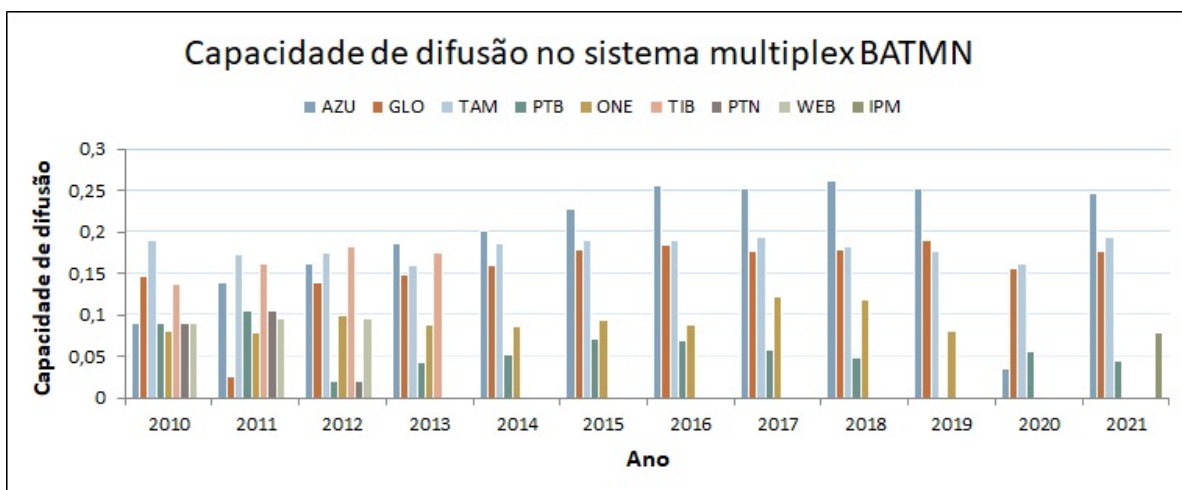


Figura 21 – Capacidade de difusão anual das camadas BATMN acopladas no sistema multiplex. Nesse contexto são consideradas as possibilidades de um passageiro trocar de companhia aérea em um aeroporto durante uma conexão.

relativo quando acoplada à estrutura multiplex. Avaliando os resultados encontrados para PTN, ativa na rede entre 2010 e 2012, vemos que sua capacidade de difusão é baixa na própria rede e apresenta relevante ganho relativo quando consideramos o sistema multiplex. O fato de conectar várias cidades de médio porte a alguns aeroportos de grande movimento de passageiros faz com que ela ganhe capacidade de difusão quando sua rede é acoplada às demais. Percebemos, no entanto, uma queda no ganho relativo em 2012, lembrando que ela foi adquirida pela TAM em 2010 e suas rotas foram gradativamente desativadas em adaptação à nova companhia.

Destacamos a situação da PTB, que apresenta o mais acentuado ganho relativo de uma camada em BATMN, ocorrido em 2020, quando sua capacidade de difusão acoplada ao

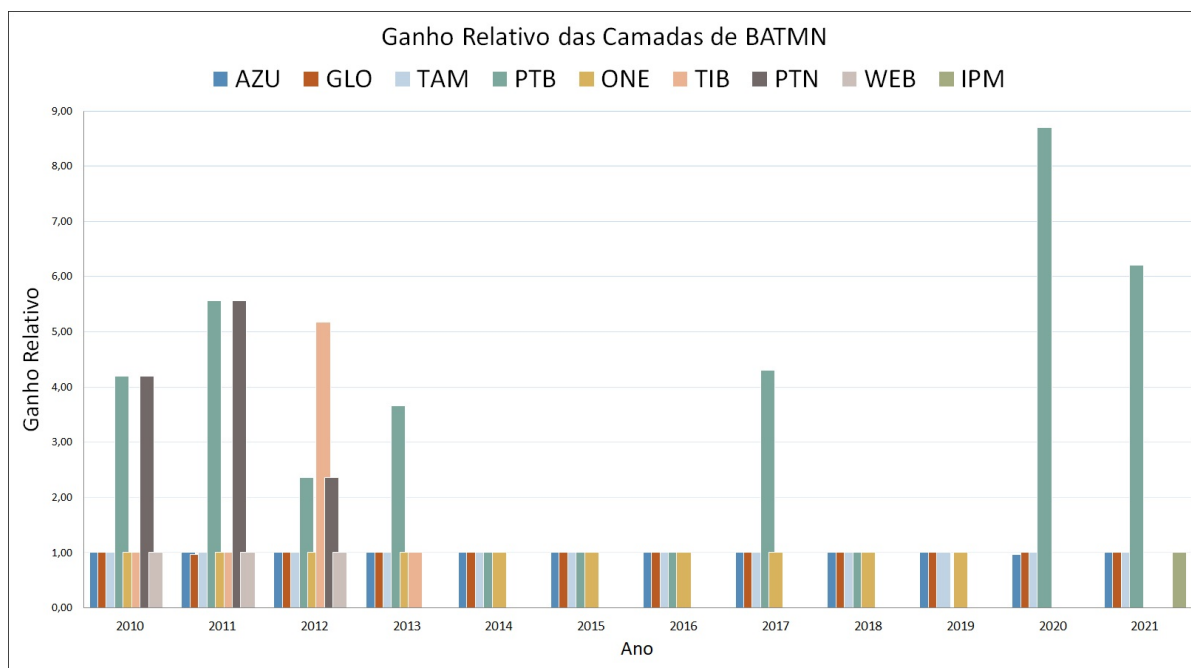


Figura 22 – Evolução do ganho relativo das camadas de BATMN. Quando o ganho relativo da camada é superior a 1, significa que sua capacidade de difusão é ampliada quando acoplada ao sistema multiplex, devido às opções de caminhos mais curtos através de arestas de outras camadas.

sistema multiplex chega a ser 8,7 vezes maior que em sua rede isolada, como mostra a Figura 22. Essa situação ocorre devido ao fato de PTB conectar majoritariamente aeroportos que atendem a cidades de médio porte, focando em voos regionais. Especificamente em 2020, retorna para BATMN após ter comprado a MAP, inaugurando sua presença no aeroporto de Congonhas e expandindo sua malha para a Região Norte do Brasil, mas ainda com poucas conexões nos aeroportos mais importantes do país. Com ganhos relativos dessa magnitude, PTB pode se beneficiar ao estabelecer parcerias estratégicas para compartilhamento de rotas com outras companhias aéreas, possibilitando a expansão de conexões da sua rede e de operadoras parceiras que não atendem aos mesmos aeroportos que a PTB.

Em 2020 observamos que toda a rede perde capacidade de difusão, inclusive no sistema multiplex. A saída da ONE afeta esse resultado mas o que vemos é, principalmente, efeito da pandemia de COVID-19. A AZU, que é a camada que tem crescimento gradativo em sua capacidade de difusão como rede independente ao longo da série histórica, experimenta uma relevante redução em 2020 – da ordem de 85% – em relação ao patamar anterior que mantinha entre 2016 e 2019. Devido à superioridade do número de conexões que AZU apresenta na rede (ver Fig. 17), uma queda desse porte em sua capacidade difusiva impacta o sistema como um todo. Esse fato reforça a análise que fizemos na seção anterior sobre a capacidade de difusão média da rede agregada BATN para 2020 (Fig. 19).

A TAM desperta nossa atenção pela consistência mantida em sua capacidade de difusão, tanto em sua própria rede quanto no sistema multiplex, de modo que obtém pequeno ganho relativo apenas entre 2010 e 2012, enquanto acontecia a fusão com a PTN – que até então apresentava alto ganho relativo. Sua capacidade de difusão sofre um leve declínio em 2020, contrastando com a situação da AZU no cenário da pandemia.

O maior decréscimo da GLO se dá em 2011, quando a companhia passava pela fusão com a WEB, recuperando-se no ano seguinte e acompanhando de perto a média da TAM, inclusive no contexto da pandemia em 2020. A WEB, por sua vez, tinha a capacidade de difusão próxima à da ONE enquanto permaneceu em BATMN. E para finalizar, ONE também não apresenta variações importantes em sua capacidade de difusão durante todo o período estudado e IPM, que participa da rede apenas em 2021, apresenta capacidade de difusão bem superior à PTB, com ganho relativo insignificante quando consideradas as conexões do sistema multiplex.

Para uma análise no nível dos vértices, lembramos que, se um vértice da rede apresenta comportamento superdifusivo em uma camada, ou seja, se seu ganho relativo é positivo (maior que 1), significa que a capacidade de difusão desse vértice quando acoplado ao sistema multiplex é maior que quando consideradas apenas suas conexões nesta camada. Desse modo, um aeroporto apresentar comportamento superdifusivo na rede de uma companhia aérea indica que existem outras alternativas possivelmente mais vantajosas para um passageiro, partindo desse terminal, chegar ao destino que é atendido por essa companhia, fazendo conexões através de outras operadoras.

Na Tabela 6, apresentamos os vértices de BATMN que exibem os mais altos valores de ganho relativo no ano de 2021 para AZU, GLO, IPM e PTB, já que TAM não possui vértices superdifusivos. Nas camadas da AZU, GLO e IPM, embora haja muitos vértices com ganho relativo, os valores são sutis, com variações a partir da quarta casa decimal, portanto, optamos por apresentar somente os cinco primeiros vértices de cada uma dessas camadas. PTB, no entanto, apresenta valores muito expressivos de ganho relativo em todos os vértices de sua camada, de modo que sua capacidade de difusão em um vértice aumenta, no mínimo, 4,9 vezes quando acoplada ao sistema multiplex. Portanto, decidimos expor os dez primeiros vértices de PTB na tabela, além de dois adicionais nos quais ela atua e figuram entre os maiores de outras camadas.

Vemos na Tabela 6 que o mais alto valor de ganho relativo de um vértice em 2021 refere-se ao Aeroporto Internacional de Manaus, na camada da PTB. Na sequência aparecem outros sete aeroportos, todos na Região Norte do país. Em três desses aeroportos, apenas PTB atuou em 2021, ao passo que, nos dois primeiros, Manaus e Santarém, AZU, GLO e TAM também estão presentes. Com exceção de Parnaíba, onde somente a AZU opera, todos os demais destinos listados na Tabela 6, a partir de Brasília, são atendidos por AZU, GLO e

Tabela 6 – Aeroportos com os mais altos valores de ganho relativo por camada de BATMN no ano de 2021.

Aeroporto	Cidade	Estado	Camada	Ganho Relativo
SBEG	Manaus	AM	PTB	11,8955
SBSN	Santarém	PA	PTB; GLO	10,357; 1,0001
SWPI	Parintins	AM	PTB	8,4894
SWEI	Eirunepé	AM	PTB	8,488
SBIH	Itaituba	PA	PTB	8,4844
SBTF	Tefé	AM	PTB	8,4821
SBTB	Oriximiná	PA	PTB	8,4691
SBUA	S G Cachoeira	AM	PTB	8,404
SBBR	Brasília	DF	PTB; GLO; IPM	7,8765; 1,0005; 1,0017
SBGR	Guarulhos	SP	PTB; IPM	7,8036; 1,0005
SBSV	Salvador	BA	PTB; IPM	6,7370; 1,0009
SBRJ	Rio Janeiro	RJ	PTB; AZU	5,5685; 1,0001
SBRF	Recife	PE	IPM; AZU	1,0008; 1,0001
SBCF	Confins	MG	IPM	1,0008
SBKP	Campinas	SP	GLO; AZU	1,0002; 1,0002
SBPJ	Palmas	TO	GLO	1,0001
SBRB	Rio Branco	AC	GLO	1,0001
SBJE	Cruz	CE	AZU	1,0001
SBPB	Parnaíba	PI	AZU	1,0001

TAM e, alguns deles, também por IPM.

Ilustramos, na Figura 23, todos os aeroportos mais relevantes em termos de difusão em 2021, que correspondem aos vértices da camada da PTB em BATMN, cujas arestas também são exibidas, desconsiderando-se as direções. As dimensões dos nós na figura são proporcionais aos valores de ganho relativo de cada aeroporto na camada da PTB – quanto maior o ganho relativo, maior é o tamanho do vértice correspondente. Tomamos como base para a escala de tamanhos dos vértices aqueles nós que não apresentam ganho relativo significativo e estão representados na cor cinza. Vemos que a rede da PTB é desconexa, apresentando dois componentes fracamente conexos (ver Seção 2.1), sendo que um deles contém apenas alguns aeroportos, todos na Região Norte do país e o outro é mais abrangente nas outras regiões, mais ao leste. No componente norte, o aeroporto de Manaus está ligado exatamente às outras sete cidades mencionadas no topo da Tabela 6. Dessa forma a Figura 23 deixa explícita a razão pela qual os mais altos valores de ganho relativo ocorrem precisamente nesses vértices e nesta camada, indicando a possibilidade da ocorrência de superdifusão no sistema multiplex, embora vários desses aeroportos sejam atendidos somente por uma companhia aérea, sendo representados por vértices que possuem conexões em apenas uma camada de BATMN.

Assim, para ocorrer superdifusão a partir de um aeroporto como o de Eirunepé, por exemplo, que é atendido apenas por PTB em 2021, é necessário que um passageiro tome um voo

da PTB em Eirunepé em direção a Manaus e, em Manaus, faça conexão tomando um voo de outra companhia aérea que opera no aeroporto de Manaus, indo para outro destino pertencente ao componente leste da rede PTB – por exemplo, Brasília. Essa rota de outra companhia aérea, que corresponde a uma aresta de outra camada de BATMN, conecta os dois componentes fracamente conexos da rede PTB e amplia o fluxo de passageiros nessa região e no país, ao conectá-los a outros aeroportos de maior expressão no cenário nacional, otimizando a utilização de recursos.

Essa estratégia de compartilhamento de rotas é conhecida como *codeshare* e é comum entre as companhias aéreas. Com ela, os passageiros podem comprar passagens para destinos que não são atendidos diretamente pela empresa aérea com a qual eles estão voando. Isso significa que a PTB poderia expandir sua rede de destinos sem precisar investir em novas rotas ou aeronaves. No entanto, é importante observar que as parcerias precisam ser bem planejadas para que sejam vantajosas para todos os envolvidos. Vemos nessa situação que o cálculo da capacidade de difusão leva em conta conexões secundárias, ou de maior ordem, para avaliar o ganho relativo dos vértices quando acoplados ao sistema multiplex. Desse modo, para que possamos apontar os aeroportos nos quais essas parcerias poderiam ser vantajosas, é necessário fazer um estudo mais detalhado de BATMN, que deixamos para um trabalho futuro. Não por acaso, existem atualmente acordos de *codeshare* entre GLO e PTB ([COMPANHIAS... , 2022](#)), TAM e PTB ([TRADE, 2022](#)) e, durante o período da pandemia, foi firmada a parceria entre TAM e AZU ([FERRARO, 2020](#)). Vimos na Seção 4.2 que GLO e TAM operam de forma similar em suas redes, enquanto PTB e AZU possuem as redes mais diversificadas a nível nacional. A ordem de diversidade de BATMN reflete a tendência de parcerias observada no mercado aéreo nacional, corroborando os resultados da análise de capacidade de difusão.

Olhando agora de forma global, exibimos na Figura 24 a variação da densidade anual de vértices de BATMN que apresentam comportamento superdifusivo. Os mais altos valores ocorrem em 2011, 2013 e 2020 e o mínimo se dá em 2017. A Figura 25 mostra em detalhes a variação dessa densidade para cada camada de BATMN.

Examinando a Figura 25, vemos, em 2017, uma acentuada redução na densidade de vértices superdifusivos da AZU, que é a camada que conecta 102 dos 106 vértices de BATMN no ano – número quase 80% superior ao da segunda camada mais conectada. As demais camadas permanecem no patamar anterior desde 2013. A mudança no cenário da AZU é, portanto, a causa do mínimo que observamos na Figura 24.

Avaliando por outro lado, os anos nos quais ocorrem os mais altos valores na densidade de vértices superdifusivos de BATMN, a Figura 25 também nos mostra que em 2011 todas as camadas apresentam altas frações de vértices superdifusivos. Em particular, TIB, que é a camada mais conectada, conta com mais de 80% de seus vértices superdifusivos. Já em

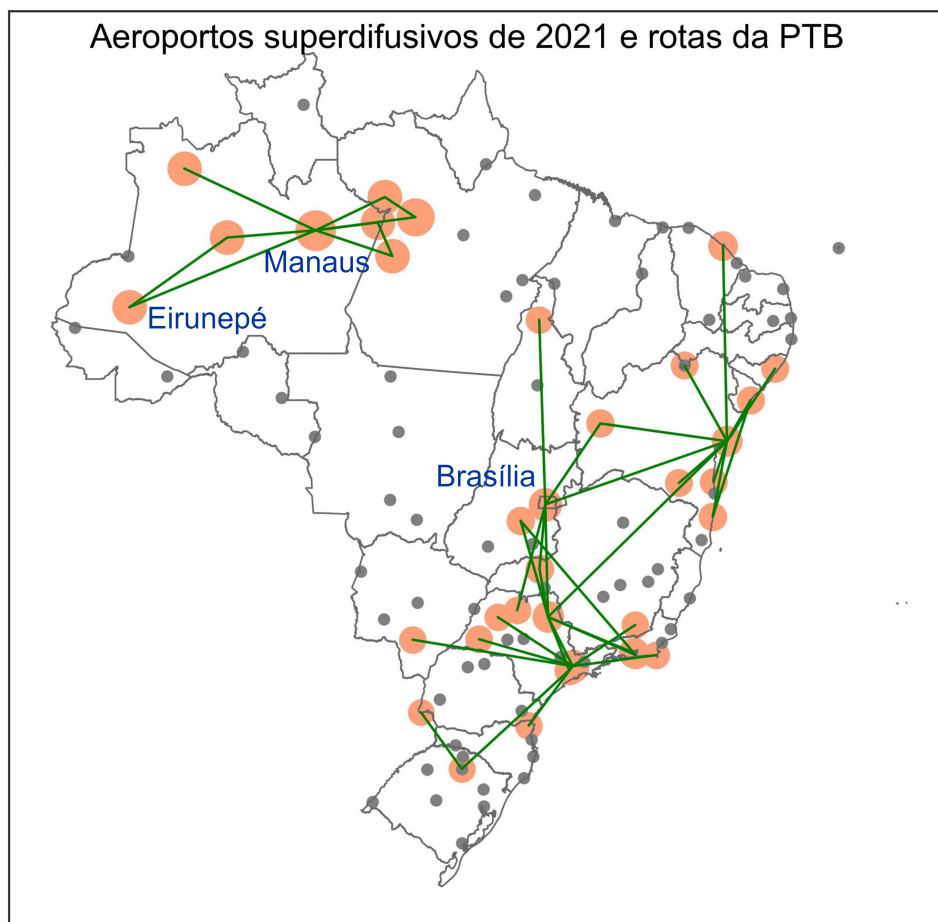


Figura 23 – Ilustração da rede PTB e dos aeroportos de BATMN em 2021 com destaque para aqueles que são mais significativos para a difusão. As dimensões dos vértices são proporcionais aos valores de ganho relativo de cada aeroporto quando acoplado ao sistema multiplex. Em cinza indicamos aqueles que apresentam valores insignificantes de ganho relativo e as arestas, em verde, representam todas as rotas de PTB no ano, desconsiderando-se as respectivas direções. O caminho Eirunepé - Manaus - Brasília, por exemplo, tem uma aresta em outra camada da rede multiplex, provocando superdifusão no sistema ao conectar os dois componentes fracamente conexos de PTB.

2013, a TAM não apresenta nenhum vértice superdifusivo, mas TIB e AZU, que possuem, cada uma, aproximadamente 90% dos vértices de BATMN no ano, têm alta densidade de vértices superdifusivos. Além disso, GLO também contribui para o aumento dessa densidade na rede. Já no ambiente da pandemia em 2020, vemos que a camada da AZU volta a apresentar alta fração de vértices superdifusivos – acima de 90% – e PTB retorna à rede conectando um número mais alto de vértices, também contribuindo com a alta densidade que observamos para BATMN em 2020.

Em particular, a Figura 25 nos mostra também que na rede da TAM as maiores frações de vértices superdifusivos ocorrem entre 2010 e 2012, até a conclusão da fusão com a PTN. A partir desse ponto, essa fração diminui consideravelmente, chegando a não ter

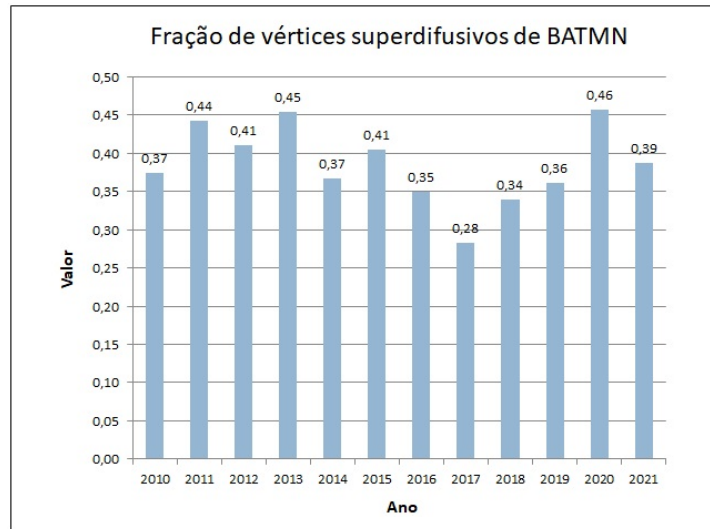


Figura 24 – Valores anuais da densidade de vértices de BATMN que apresentam ganho relativo maior que 1. Esses vértices correspondem aos aeroportos que revelam aumento na capacidade de difusão quando se consideram todas as companhias aéreas que operam nele (rede multiplex), quando comparada com sua capacidade difusiva por meio de uma única empresa aérea (em cada camada).

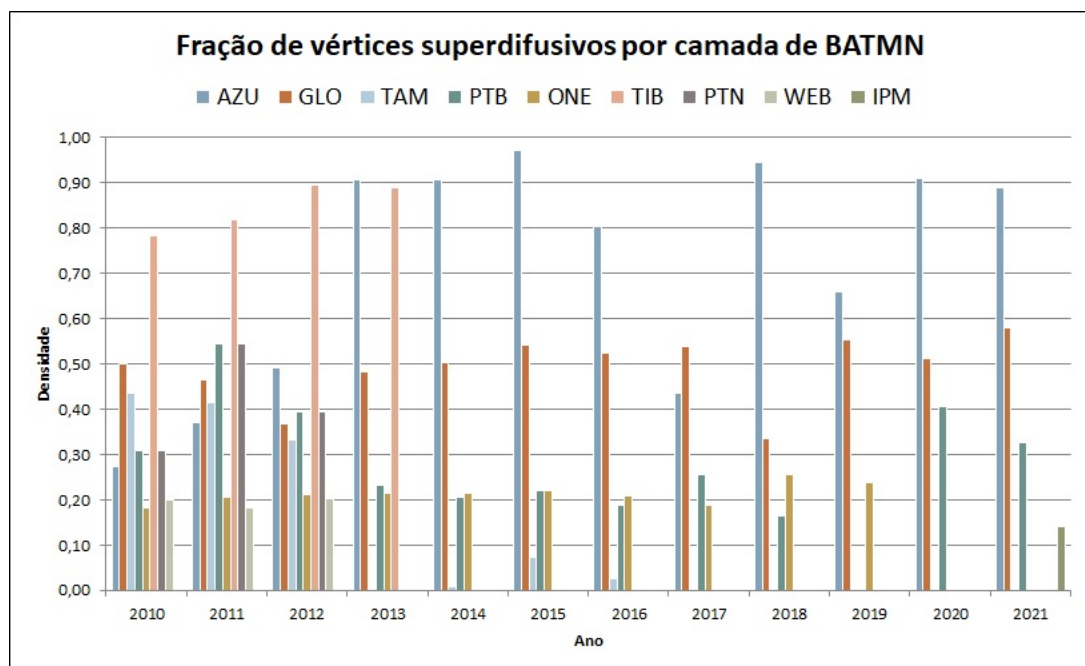


Figura 25 – Densidade anual de vértices superdifusivos em cada camada de BATMN.

mais vértices superdifusivos, o que está de acordo com o que discutimos em relação à sua capacidade de difusão.

Por fim, enquanto observamos a maior densidade de vértices superdifusivos em BATMN no ano de 2020 (Fig. 24), a capacidade de difusão média da rede agregada BATN revela uma queda (Fig. 19). Ou seja, o sistema multiplex mostra, mais uma vez, que é possível otimizar a difusão da rede através de conexões que passem por mais de uma camada.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

A estrutura de redes multiplex é ideal para modelar redes de transporte, pois permite extrair informações que não são claras em uma rede de camada única. Neste trabalho usamos um modelo multiplex para analisar a rede de transporte aéreo de passageiros no Brasil, BATMN, entre os anos de 2010 e 2021. Além disso, foi proposto o Índice de Eficiência Multiplex (MEI), que, combinado com a ordem de diversidade, é um instrumento eficaz para avaliar a eficiência de uma rede multiplex independentemente do número de camadas que a compõem.

O MEI permite quantificar a cobertura e heterogeneidade da conectividade em uma rede multiplex em uma escala de 0 a 1, ao passo que a ordem de diversidade indica a relevância de cada camada ou vértice para a diversidade global do sistema. Quanto mais heterogêneos são os padrões de conectividade de uma rede, maior será sua eficiência, indicando a existência de caminhos mais diversificados para explorar a estrutura.

Adicionalmente, estendemos o conceito de diversidade para redes multiplex direcionadas e/ou ponderadas e propomos os índices MEID, MEIW e MEIDW, que são versões do MEI para redes multiplex em diferentes configurações relativas à direção e peso das arestas. Quanto menor a reciprocidade das arestas de uma rede, maior será a distinção entre os valores de MEI e MEID. Do mesmo modo, a disparidade entre os pesos das arestas conectadas a cada vértice da rede distingue os valores de MEI e MEIW.

Aplicamos os índices MEI e MEIDW à BATMN em diferentes abordagens, para avaliar a evolução da diversificação de rotas das diferentes companhias aéreas que atuam no Brasil. Percebemos que a presença de vértices isolados na rede altera os valores desses índices por introduzir semelhança de conexões ao sistema.

Verificamos que quanto maior a densidade de arestas nessa rede, maior a probabilidade de serem sobrepostas entre as camadas. Isso é esperado em redes de transporte aéreo, pois se deve à tendência de competição entre as companhias aéreas por rotas que co-

nectam aeroportos que apresentam maior demanda por voos. Apesar de se acreditar que a competição entre as empresas aéreas seja o principal fator que determina os preços das passagens aéreas, vemos que a diversidade das rotas é um aspecto importante a ser considerado. A análise de correlação entre os valores de MEI, da taxa de ocupação das aeronaves e do preço médio dos bilhetes aéreos indica que quanto maior a diversificação de rotas, maior a chance de ter uma alta taxa de utilização de assentos das aeronaves, o que, por sua vez, influencia os preços das passagens aéreas.

Avaliamos o possível impacto da privatização de alguns aeroportos brasileiros na heterogeneidade de conexões da rede através do MEI. Os resultados nos mostram que não houve alteração relevante no índice para BATMN a nível global. Em outras palavras, a privatização de aeroportos não implica necessariamente em ampliação ou retração da diversificação de rotas. Constatamos, porém, que investimentos em expansão dos terminais aeroportuários podem contribuir para essa reestruturação da rede, uma vez que grandes investimentos ocorreram nos principais aeroportos do país para receber a Copa do Mundo da Fifa de 2014 e os Jogos Olímpicos do Rio de 2016. O MEI capta o movimento de concentração de rotas feito pelas companhias aéreas para atender à demanda criada pelos jogos da Copa do Mundo em 2014 e a repercussão do encerramento das operações da Avianca, em 2019. Além disso, indica a tendência das companhias aéreas a oferecer rotas cada vez mais semelhantes entre os aeroportos mais movimentados do país, competindo pela demanda por voos nesses terminais, enquanto, por outro lado, regiões fora desses centros têm poucas opções de transporte aéreo.

Esse desequilíbrio na oferta de transporte aéreo no país pode ser amenizado através do planejamento de rotas com conexões em aeroportos estratégicos através dos serviços de mais de uma companhia aérea. Com a análise da capacidade de difusão na BATMN, foi possível identificar as companhias aéreas que podem impulsionar esse processo de integração do sistema aéreo nacional. Em um trabalho futuro pretendemos investigar com mais detalhes os aeroportos através dos quais essas conexões podem ser ampliadas.

Devido à pandemia de COVID-19, o ano de 2020 apresentou um *outlier* em todos os quantificadores que aplicamos. Portanto, é importante tratar com parcimônia os dados referentes a esse ano em qualquer estudo da rede aérea brasileira. Uma análise criteriosa sobre o impacto da pandemia na rede de transporte aéreo é fundamental para fornecer informações às autoridades e contribuir para a reorganização do sistema em caso de emergência. Pretendemos futuramente realizar um estudo abrangente da variação da capacidade de difusão da rede de transporte aéreo brasileira em 2020, a fim de compreender como ela se reorganizou diante do alto índice de cancelamentos de voos naquele ano e buscar possíveis melhorias para essa reorganização futura.

Além disso, pretendemos investigar detalhadamente os índices MEI, MEID, MEIW e MEIDW

por meio de simulações computacionais, com o objetivo de identificar as características de redes multiplex que possam influenciar seus valores.

O modelo multiplex que propomos para a rede de transporte aéreo brasileira oferece diversas possibilidades para estudos que podem ser desenvolvidos nesse contexto de multiplexidade. A análise de eficiência e da capacidade de difusão multiplex permitem otimizar a distribuição de rotas, melhorando as conexões da rede, o que pode levar à redução de custos do transporte aéreo, além de possibilitar análises sobre possíveis fusões de companhias aéreas ou mesmo a avaliação da possibilidade de cartelização do setor, para citar algumas aplicações. É importante destacar ainda que os índices de eficiência multiplex que introduzimos permitem não apenas analisar as redes de transporte aéreo sob nova perspectiva, mas também quantificar a eficiência de redes multiplex em todas as áreas de pesquisas.

Referências

- ABEAR. **Glossário**. 2021. Publicações da Associação Brasileira das Empresas Aéreas. <<https://www.abear.com.br/imprensa/dados-e-fatos/glossario/>>. Acesso em: 21 de maio de 2022. Citado na página 40.
- ANAC. **Confins**. 2014. Agência Nacional de Aviação Civil. <<https://www.anac.gov.br/assuntos/paginas-tematicas/concessoes/aeroportos-concedidos/Confins>>. Acesso em: 15 de junho de 2022. Citado na página 42.
- ANAC. **Galeão (RJ)**. 2014. Agência Nacional de Aviação Civil. <<https://www.anac.gov.br/assuntos/paginas-tematicas/concessoes/aeroportos-concedidos/galeao>>. Acesso em: 15 de junho de 2022. Citado na página 42.
- ANAC. **Alocação de slots em Congonhas é definida**. 2019. Agência Nacional de Aviação Civil. <<https://www.anac.gov.br/noticias/2019/alocacao-de-slots-em-congonhas-e-definida>>. Citado na página 33.
- ANAC. **Consulta Interativa – Indicadores do Mercado de Transporte Aéreo**. 2019. Agência Nacional de Aviação Civil. <<http://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/mercado-de-transporte-aereo/consulta-interativa/demanda-e-oferta-ranking-de-aeroportos>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 40.
- ANAC. 2020. Disponível em: <https://www.anac.gov.br/A_Anac/institucional>. Acesso em: 07 fev. 2020. Citado na página 2.
- ANAC. **Dados Estatísticos**. 2022. Agência Nacional de Aviação Civil. <<http://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/dados-estatisticos/dados-estatisticos>>. Citado 6 vezes nas páginas 29, 30, 33, 43, 44 e 49.
- ARINIK, N.; FIGUEIREDO, R.; LABATUT, V. Multiple partitioning of multiplex signed networks: Application to European parliament votes. **Social Networks**, v. 60, p. 83 – 102, 2020. ISSN 0378-8733. Social Network Research on Negative Ties and Signed Graphs. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378873318300303>>. Citado na página 14.
- AZUL e Trip assinam acordo de associação. **Imprensa Azul**, 2012. Disponível em: <<https://www.voeazul.com.br/imprensa/releases/azul-e-trip-assinam-acordo-de-associacao-1383\348194485>>. Acesso em: 18 de maio de 2019. Citado na página 32.
- BARTHÉLEMY, M. et al. Characterization and modeling of weighted networks. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 346, n. 1, p. 34–43, 2005. ISSN 0378-4371. Statphys - Kolkata V: Proceedings of the International Conference on Statistical Physics: "Complex Networks: Structure, Function and Processes". Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104011598>>. Citado na página 12.
- BOCCALETTI, S. et al. The structure and dynamics of multilayer networks. **Physics Reports**, Elsevier, v. 544, n. 1, p. 1–122, 2014. Citado na página 14.

BRASIL. Lei nº 14.034, de 5 de agosto de 2020: Dispõe sobre medidas emergenciais para a aviação civil brasileira em razão da pandemia da COVID-19 [...]. **Presidência da República: Secretaria-Geral**, Poder Executivo, Brasília, DF, 05 ago 2020. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2019-2022/2020/lei/L14034.htm#view>. Acesso em: 27 de abril de 2022. Citado na página 33.

BRASIL. Ministério do Esporte. **Balanco Final para as Ações da Copa do Mundo da FIFA Brasil 2014 (6ºBalanço)**. Brasília, DF, 2014. 28 p. Disponível em: <http://arquivo.esporte.gov.br/arquivos/assessoriaEspecialFutebol/copa2014/6_Balanco_Copa_dez_2014.pdf>. Acesso em: 18 de abril de 2022. Citado na página 42.

BRASIL. Ministério do Planejamento. **Veja as obras nos aeroportos para Copa 2014**. Brasília, DF, 2012. Disponível em: <<http://www.pac.gov.br/noticia/b1bbf26d>>. Acesso em: 20 de abril de 2022. Citado na página 2.

BRASIL. Ministério do Planejamento e Orçamento.IPEA. **Taxa de câmbio - Real/Dólar comercial - venda - média**. [S.l.], 2019. Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br/ExibeSerie.aspx?serid=31924>>. Acesso em: 23 de agosto de 2019. Citado na página 40.

CADE. **Ato de Concentração nº 08012.000321/2010-67, da 473ª Sessão Ordinária de Julgamento**. 2010. Conselho Administrativo de Defesa Econômica. <<https://www.jusbrasil.com.br/diarios/8064250/pg-54-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-17-09-2010>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2022. Citado na página 31.

CADE. **Cade aprova, com restrição, compra da Webjet pela Gol**. 2012. Conselho Administrativo de Defesa Econômica. <<http://www.cade.gov.br/noticias/cade-aprova-com-restricao-compra-da-webjet-pela-gol>>. Citado na página 32.

CADE. **Cade aprova, com restrições, fusão entre Azul e Trip**. 2012. Conselho Administrativo de Defesa Econômica. <<http://www.cade.gov.br/noticias/cade-aprova-com-restricoes-fusao-entre-azul-e-trip>>. Citado na página 32.

CAJUEIRO, D. O. et al. Markov chain approach to model intertemporal choices and coverages in air transport markets. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 100, p. 062303, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.100.062303>>. Citado na página 4.

CAMARGO, R. FIFA anuncia as 12 cidades sedes da Copa de 2014. **Portal de Notícias UOL**., 2009. Disponível em: <<https://congressoemfoco.uol.com.br/projeto-bula/reportagem/fifa-anuncia-as-12-cidades-sedes-da-copa-de-2014/>>. Acesso em: 12 de março de 2022. Citado na página 47.

CARDILLO, A. et al. Emergence of network features from multiplexity. **Scientific Reports**, v. 03, 2013. Citado na página 3.

CARDILLO, A. et al. Modeling the multi-layer nature of the European air transport network: Resilience and passengers re-scheduling under random failures. **The European Physical Journal Special Topics**, Springer, v. 215, p. 23–33, 2013. Citado na página 3.

CARPI, L. C. et al. Assessing diversity in multiplex networks. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 1, p. 4511, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 4, 14, 16, 17, 19, 22 e 35.

CHI, L. P.; CAI, X. Structural changes caused by error and attack tolerance in US airport network. **International Journal of Modern Physics B**, v. 18, n. 17n19, p. 2394–2400, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217979204025427>>. Citado na página 3.

CICHOCKI, A.; AMARI, S.-i. Families of alpha-beta-and gamma-divergences: Flexible and robust measures of similarities. **Entropy**, Molecular Diversity Preservation International, v. 12, n. 6, p. 1532–1568, 2010. Citado na página 17.

COMPANHIAS Aéreas Parceiras. **VoeGol**, 2022. Disponível em: <<https://www.voegol.com.br/informacoes/companhias-aereas-parceiras>>. Acesso em: 5 de dezembro de 2022. Citado na página 65.

COMPARIN, J. **As companhias aéreas no Brasil se aprontam para a Copa do Mundo de Futebol**. 2014. Terminal de Embarque. <<https://terminaldeembarque.com/2014/01/08/voce-no-tde-as-companhias-aereas-no-brasil-se-aprontam-para-a-copa-do-mundo-de-futebol/>>. Citado na página 34.

COSTA, T. F.; LOHMANN, G.; OLIVEIRA, A. V. A model to identify airport hubs and their importance to tourism in Brazil. **Research in Transportation Economics**, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 3–11, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 41.

COUTO, G. S. et al. Structural properties of the Brazilian air transportation network. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, SciELO Brasil, v. 87, p. 1653–1674, 2015. Citado na página 4.

COZZO, E. et al. **Multiplex Networks: Basic Formalism and Structural Properties**. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2018. 121 p. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 14.

DIOP, I. M. et al. Revealing the component structure of the world air transportation network. **Applied Network Science**, Springer, v. 6, p. 1–50, 2021. Citado na página 2.

DU, W.-B. et al. Analysis of the Chinese provincial air transportation network. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 465, p. 579–586, 2017. Citado na página 3.

FERRARO, J. Codeshare. **Revista Azul**, 2020. Disponível em: <<https://revistaazul.voeazul.com.br/universo-azul/azul-e-latam-assinam-acordos-de-codeshare-e-programas-de-fidelidade/e>>. Acesso em: 12 de janeiro de 2021. Citado na página 65.

FREITAS, L. Q. de. **Medidas de Centralidade em Grafos**. 103 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://objdig.ufrj.br/60/teses/coppe_m/LeandroQuintanilhaDeFreitas.pdf>. Acesso em: 03 de janeiro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

FUGLEDE, B.; TOPSOE, F. Jensen-Shannon Divergence and Hilbert space embedding. In: IEEE. **International Symposium on Information Theory, 2004. ISIT 2004. Proceedings**. [S.l.], 2004. p. 31. Citado na página 13.

G1. Avianca brasil entra com pedido de recuperação judicial. **Portal de Notícias G1**, 2018. Disponível em: <<https://g1.globo.com/economia/noticia/2018/12/11/avianca-entra-com-pedido-de-recuperacao-judicial.ghtml>>. Acesso em: 13 de maio de 2019. Citado na página 38.

- GALVÃO, O. J. de A. Desenvolvimento dos transportes e integração regional no Brasil—uma perspectiva histórica. **Planejamento e Políticas Públicas**, n. 13, 1996. Citado na página 1.
- GOMEZ, S. et al. Diffusion dynamics on multiplex networks. **Physical Review Letters**, APS, v. 110, n. 2, p. 028701, 2013. Citado na página 13.
- GUIDA, M.; MARIA, F. Topology of the Italian airport network: A scale-free small-world network with a fractal structure? **Chaos, solitons & fractals**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 527–536, 2007. Citado na página 2.
- GUIMERÀ, R. et al. The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities' global roles. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 102, n. 22, p. 7794–7799, 2005. Disponível em: <<https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0407994102>>. Citado na página 2.
- HOSNI, A. I. E.; LI, K.; AHMAD, S. Minimizing rumor influence in multiplex online social networks based on human individual and social behaviors. **Information Sciences**, v. 512, p. 1458 – 1480, 2020. ISSN 0020-0255. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002002551931031X>>. Citado na página 14.
- HOSSAIN, M. et al. Australian airport network robustness analysis: a complex network approach. In: **Proceeding of the 36th Australasian Transport Research Forum, Brisbane, Australia**. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 3.
- INFRAERO. **40 anos servindo pessoas, empresas e o Brasil**. 2013. Secretaria de Aviação Civil da Presidência da República. <<http://www.infraero.gov.br/portal/images/stories/Infraero/INFRAERO40ANOS.pdf>>. Acesso em: 15 de junho de 2022. Citado na página 41.
- INFRAERO. **Aeroporto Internacional de Brasília DF**. 2022. Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeroportuária. <<https://www4.infraero.gov.br/aeroportos/aeroporto-internacional-de-brasilia/>>. Acesso em: 17 de junho de 2022. Citado na página 42.
- INFRAERO. **Aeroporto Internacional Natal RN**. 2022. Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeroportuária. <<https://www4.infraero.gov.br/aeroportos/aeroporto-internacional-de-natal>>. Acesso em: 17 de junho de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 78.
- JIA, T.; QIN, K.; SHAN, J. An exploratory analysis on the evolution of the US airport network. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 413, p. 266–279, 2014. Citado na página 2.
- LEE, K.-M.; MIN, B.; GOH, K.-I. Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks. **European Physical Journal B**, Springer, New York, 88, n. 2, 2015. ISSN 1434-6028. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.
- MACEDO, D. Autorizada incorporação da pantanal linhas aéreas pela tam. **Exame**, 2013. Disponível em: <<https://exame.abril.com.br/negocios/autorizada-incorporacao/-da-pantanal-linhas-aereas-pela-tam>>. Citado na página 32.
- MALIK, H. A. M. et al. Analysis of airport network in Pakistan utilizing complex network approach. **International Journal of Advanced Computer Science and Applications**, Science and Information (SAI) Organization Limited, v. 10, n. 1, 2019. Citado na página 2.

M.E.J.NEWMAN. **Networks - An Introduction**. New York: Oxford University Press Inc., 2010. 1042 p. ISBN 978-0-19-920665-0. Citado 3 vezes nas páginas 6, 10 e 54.

MIN, B. et al. Link overlap, viability, and mutual percolation in multiplex networks. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 72, p. 49 – 58, 2015. ISSN 0960-0779. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077914002367>>. Citado na página 15.

MUCHA, P. J. et al. Community structure in time-dependent, multiscale, and multiplex networks. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 328, n. 5980, p. 876–878, 2010. Citado na página 13.

OLIVEIRA, A. V.; LOHMANN, G.; COSTA, T. G. Network concentration and airport congestion in a post de-regulation context: A case study of Brazil 2000–2010. **Journal of Transport Geography**, Elsevier, v. 50, p. 33–44, 2016. Citado na página 4.

OLIVEIRA, I. M.; CARPI, L. C.; ATMAN, A. P. Quantificando eficiência em redes multiplex. In: ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 22., 2019, Juiz de Fora. **Anais ENMC 2019**. Juiz de Fora, 2019. p. 1959–1968. Disponível em: <<http://enmc.fadep.org.br/>>. Acesso em: 23 jan. 2020. Citado na página 53.

OLIVEIRA, I. M.; CARPI, L. C.; ATMAN, A. P. F. Diversity analysis of the Brazilian air transportation network. In: ZURIGUEL, I.; GARCIMARTIN, A.; CRUZ, R. (Ed.). **Traffic and Granular Flow 2019**. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 555–562. ISBN 978-3-030-55973-1. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 53.

OLIVEIRA, I. M.; CARPI, L. C.; ATMAN, A. P. F. The Multiplex Efficiency Index: unveiling the Brazilian air transportation multiplex network – BATMN. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 10, n. 1, p. 13339, 2020. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41598-020-69974-0>>. Citado 5 vezes nas páginas 2, 14, 16, 18 e 53.

PEREIRA, D. d. S.; MELLO, J. C. C. B. S. Comparative evaluation of the Brazilian air transport system centrality. **Case Studies on Transport Policy**, Elsevier, v. 9, n. 4, p. 1672–1676, 2021. Citado na página 2.

ROCHA, L. E. Structural evolution of the Brazilian airport network. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2009, n. 04, p. P04020, 2009. Citado na página 3.

SALINAS, S. R. A. **Introduction to Statistical Physics**. New York, NY: Springer New York, 2001. 308 p. ISBN 978-1-4757-3508-6. Citado na página 13.

SAYAMA, H. **Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems**. Geneseo, NY: Open SUNY Textbooks, 2015. 478 p. Citado 3 vezes nas páginas 6, 8 e 54.

SCHIEBER, T. A. et al. Network diffusion capacity unveiled by dynamical paths. **arXiv preprint arXiv:2104.10736**, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 54, 55, 56, 57 e 58.

SILVA, P. C. V. da et al. Epidemic spreading with awareness and different timescales in multiplex networks. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 100, p. 032313, Sep 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.100.032313>>. Citado na página 14.

SIOZOS-ROUSOULIS, L.; ROBERT, D.; VERBEKE, W. A study of the US domestic air transportation network: temporal evolution of network topology and robustness from 2001 to 2016. **Journal of Transportation Security**, Springer, v. 14, p. 55–78, 2021. Citado na página 3.

TOLEDO, M. Passaredo compra MAP linhas aéreas e passa a ter 26 operações diárias em Congonhas. **Folha de São Paulo**, 2019. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2019/08/passaredo-compra-a-map-linhas-aereas-e-passa-a-ter-26-operacoes-diarias-em-congonhas.shtml>>. Acesso em: 10 de setembro de 2021. Citado na página 33.

TRADE, L. Codeshare. **LATAM Trade**, 2022. Disponível em: <https://www.latamtrade.com/pt_us/procom/Codeshare>. Acesso em: 5 de janeiro de 2023. Citado na página 65.

VARGA, I. Weighted multiplex network of air transportation. **The European Physical Journal B**, Springer, v. 89, p. 1–5, 2016. Citado na página 2.

WANDELT, S.; SUN, X.; ZHANG, J. Evolution of domestic airport networks: a review and comparative analysis. **Transportmetrica B: Transport Dynamics**, Taylor & Francis, v. 7, n. 1, p. 1–17, 2019. Citado na página 4.

WANG, F.; VEMURI, B. C.; RANGARAJAN, A. Groupwise point pattern registration using a novel CDF-based Jensen-Shannon Divergence. In: IEEE. **2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'06)**. [S.l.], 2006. v. 1, p. 1283–1288. Citado na página 56.

WANG, J. et al. Exploring the network structure and nodal centrality of China's air transport network: A complex network approach. **Journal of Transport Geography**, Elsevier, v. 19, n. 4, p. 712–721, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

WILKINSON, S. M.; DUNN, S.; MA, S. The vulnerability of the European air traffic network to spatial hazards. **Natural hazards**, Springer, v. 60, p. 1027–1036, 2012. Citado na página 3.

XU, Z.; HARRISS, R. Exploring the structure of the US intercity passenger air transportation network: a weighted complex network approach. **GeoJournal**, Springer, v. 73, p. 87–102, 2008. Citado na página 2.

YANG, Y.; XU, K.-J.; HONG, C. Network dynamics on the Chinese air transportation multilayer network. **International Journal of Modern Physics C**, World Scientific, v. 32, n. 05, p. 2150070, 2021. Citado na página 3.

Apêndices

APÊNDICE A – Análise do Índice de Eficiência Multiplex para aeroportos privatizados

Apresentamos aqui a evolução do MEI local para os aeroportos que foram privatizados entre 2011 e 2017.

O Aeroporto Internacional Governador Aluísio Alves, localizado em em São Gonçalo do Amarante, região metropolitana de Natal (RN), é o primeiro terminal aéreo brasileiro a ser concedido à iniciativa privada, em 2012 ([INFRAERO, 2022b](#)). A Figura mostra a evolução do índice $\mathcal{E}$ para esse aeroporto até 2018.

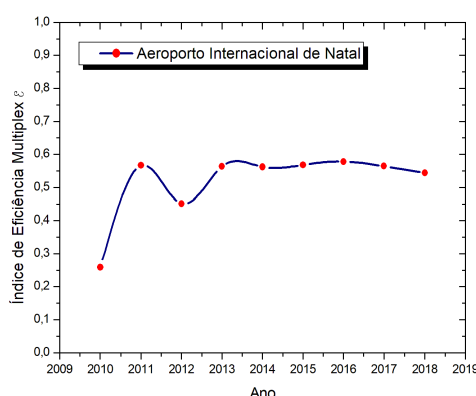


Figura 26 – Evolução do índice $\mathcal{E}$ para o Aeroporto Internacional Governador Aluísio Alves, conhecido como Aeroporto Internacional de Natal.

Em 2012, outros três aeroportos foram privatizados:

- Aeroporto Internacional de Brasília (DF),
- Aeroporto Internacional de São Paulo/Guarulhos (SP),
- Aeroporto Internacional de Viracopos - Campinas (SP).

Os valores de $\mathcal{E}$ para esses aeroportos no período de 2010 a 2018 são mostrados na Fig. [27](#).

Finalmente, outros dois terminais aéreos são privatizados em 2013 e a Fig. [27](#) mostra o índice $\mathcal{E}$ ao longo do período considerado para cada um desses aeroportos:

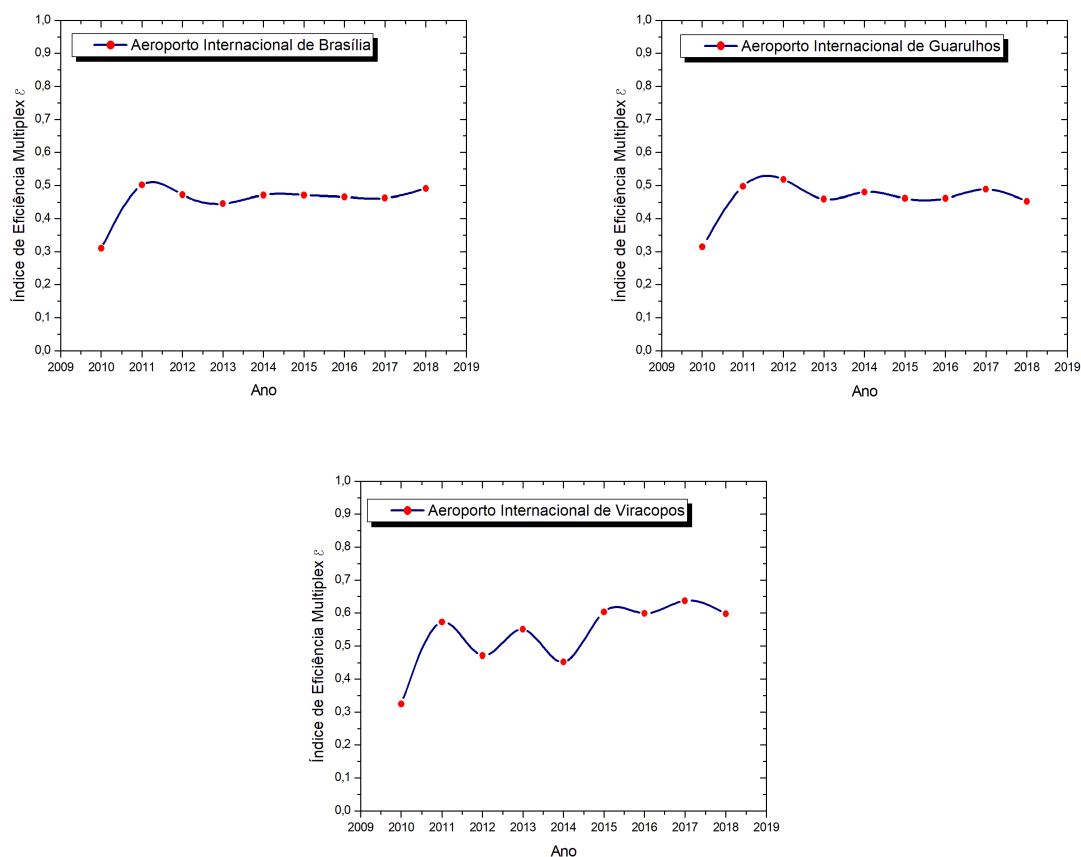


Figura 27 – Progressão dos valores do índice ε local para os aeroportos de Brasília, Guarulhos e Viracopos.

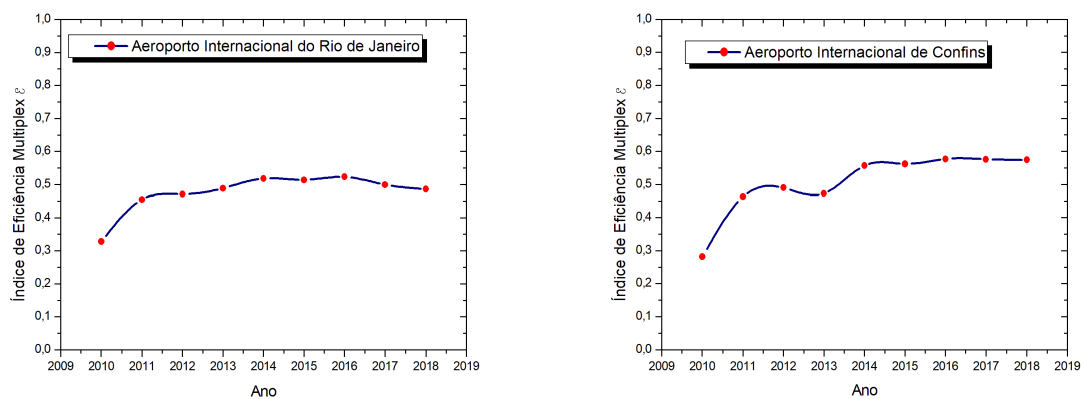


Figura 28 – Evolução de ε para os aeroportos Galeão e Confins.

- Aeroporto Internacional do Rio de Janeiro (RJ) – Galeão – Antônio Carlos Jobim,
- Aeroporto Internacional de Belo Horizonte/Confins (MG) –Tancredo Neves.

Para efeito de comparação, observamos a evolução de MEI para o Aeroporto de São Paulo/Congonhas (Fig. 29), que é um hub da rede brasileira de transporte aéreo de passa-

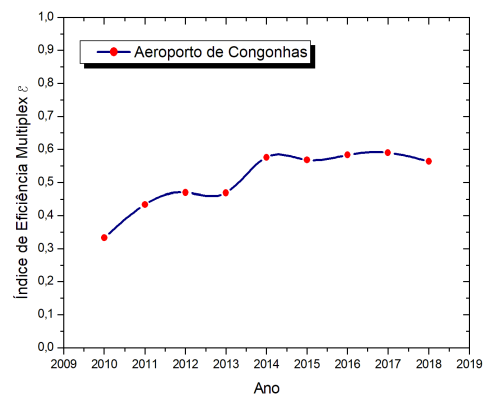


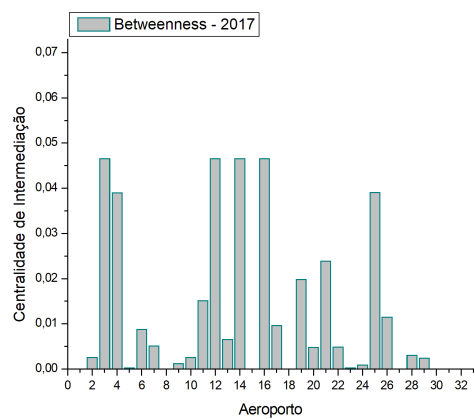
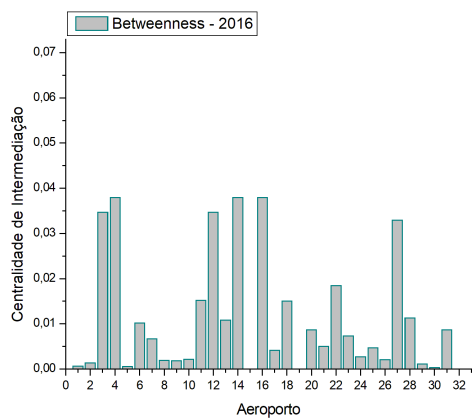
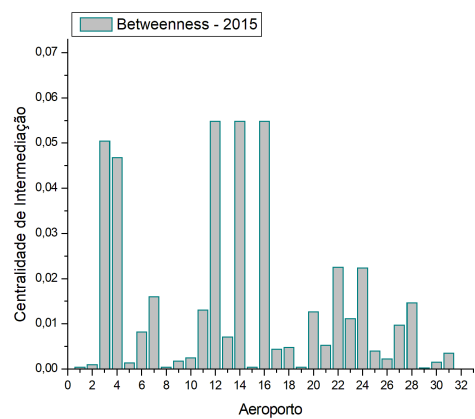
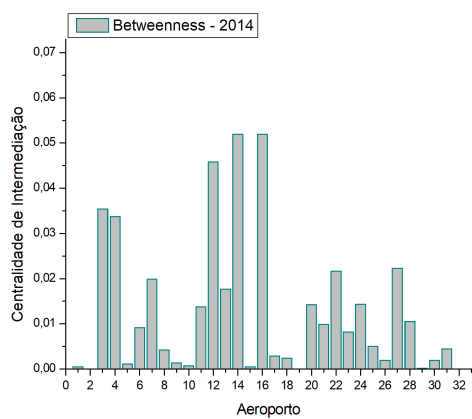
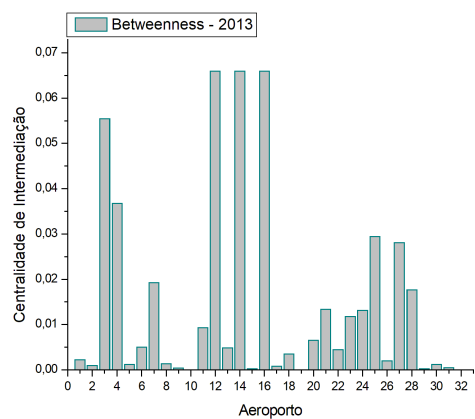
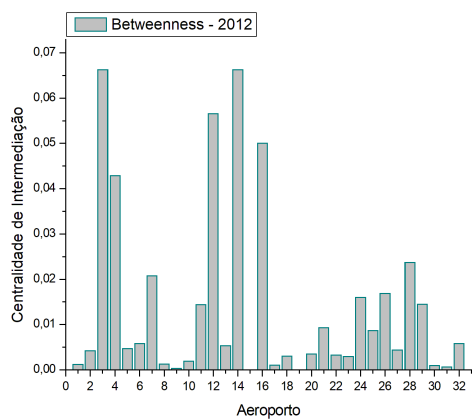
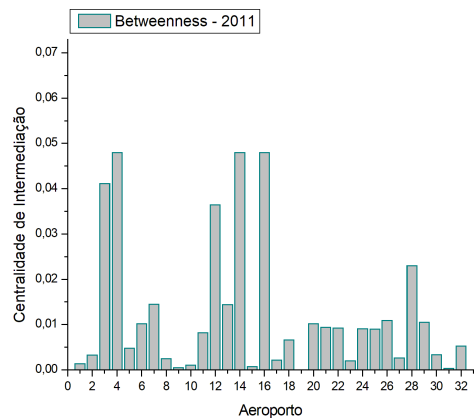
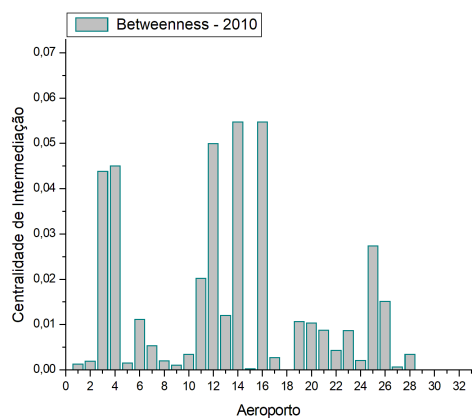
Figura 29 – MEI local para o Aeroporto de Congonhas até o ano de 2018.

geiros e ainda não foi privatizado.

APÊNDICE B – Gráficos de centralidades para B-BATMN

A seguir apresentamos as figuras que mostram a evolução dos valores de centralidades para os aeroportos que compõem B-BATMN entre os anos de 2010 e 2021. Na Figura 30 mostramos os valores de centralidade de intermediação; na Figura 31, a distribuição da centralidade de intermediação; já a Figura 32 exibe os valores da centralidade de proximidade; a centralidade de grau é mostrada na Figura 33 e, para finalizar, a distribuição de graus é apresentada na Figura 34.

O número de aeroportos na rede varia conforme mencionado na Tabela 5. Observamos que ao aeroporto de Confins (SBCF) é sempre atribuído o número 4, em todos os anos estudados.



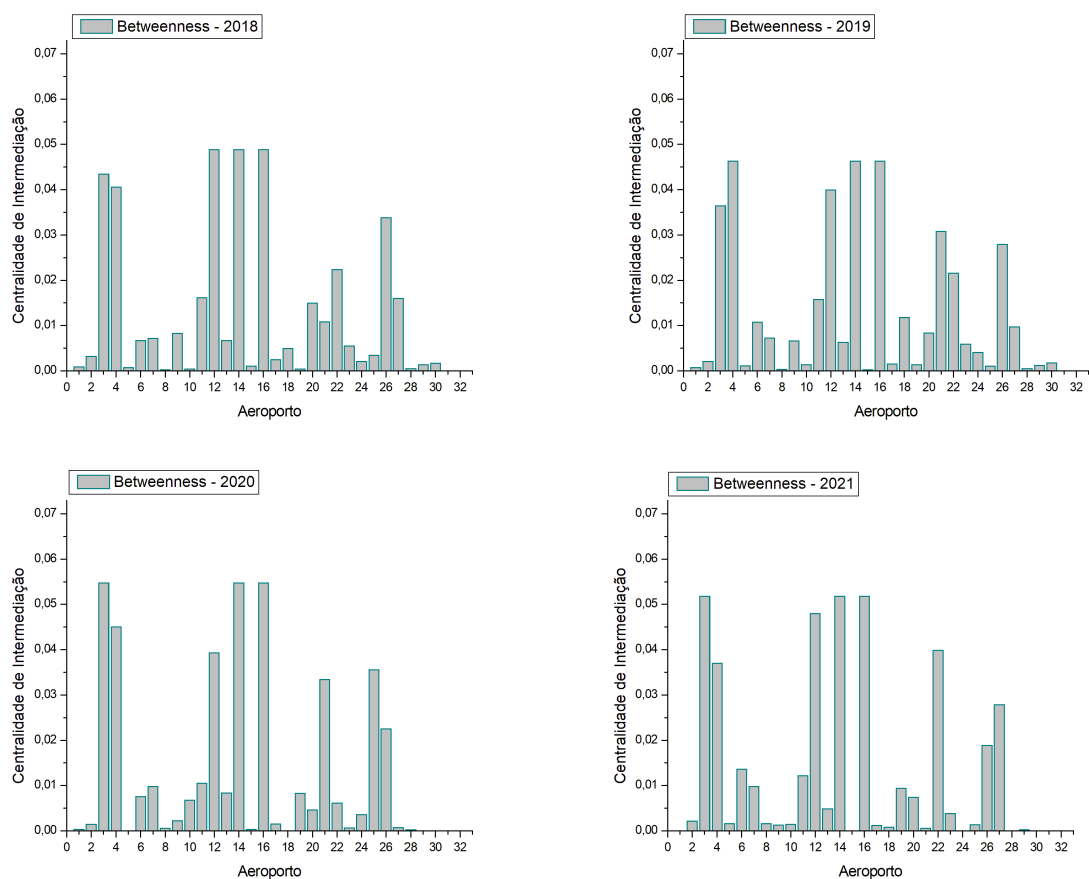
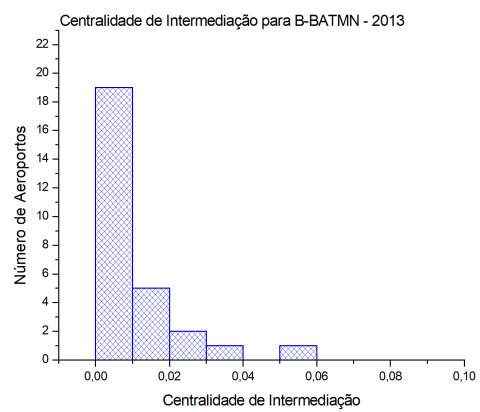
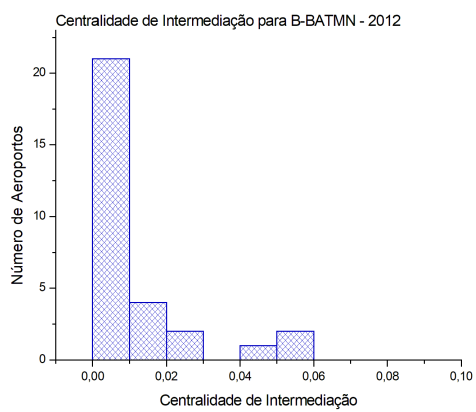
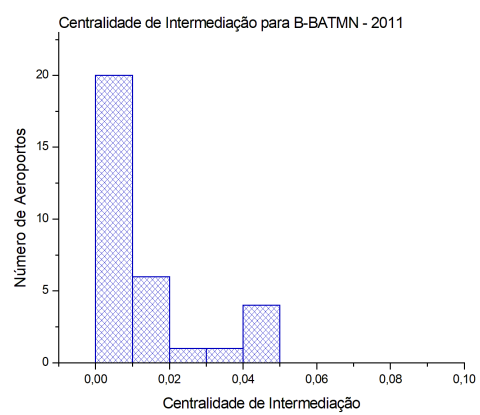
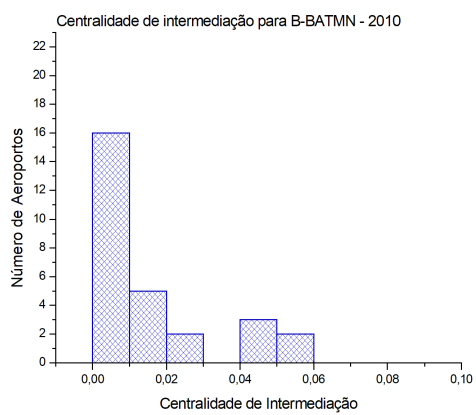


Figura 30 – Valores da centralidade de intermediação (*betweenness*) para os aeroportos componentes de B-BATMN de 2010 a 2021.



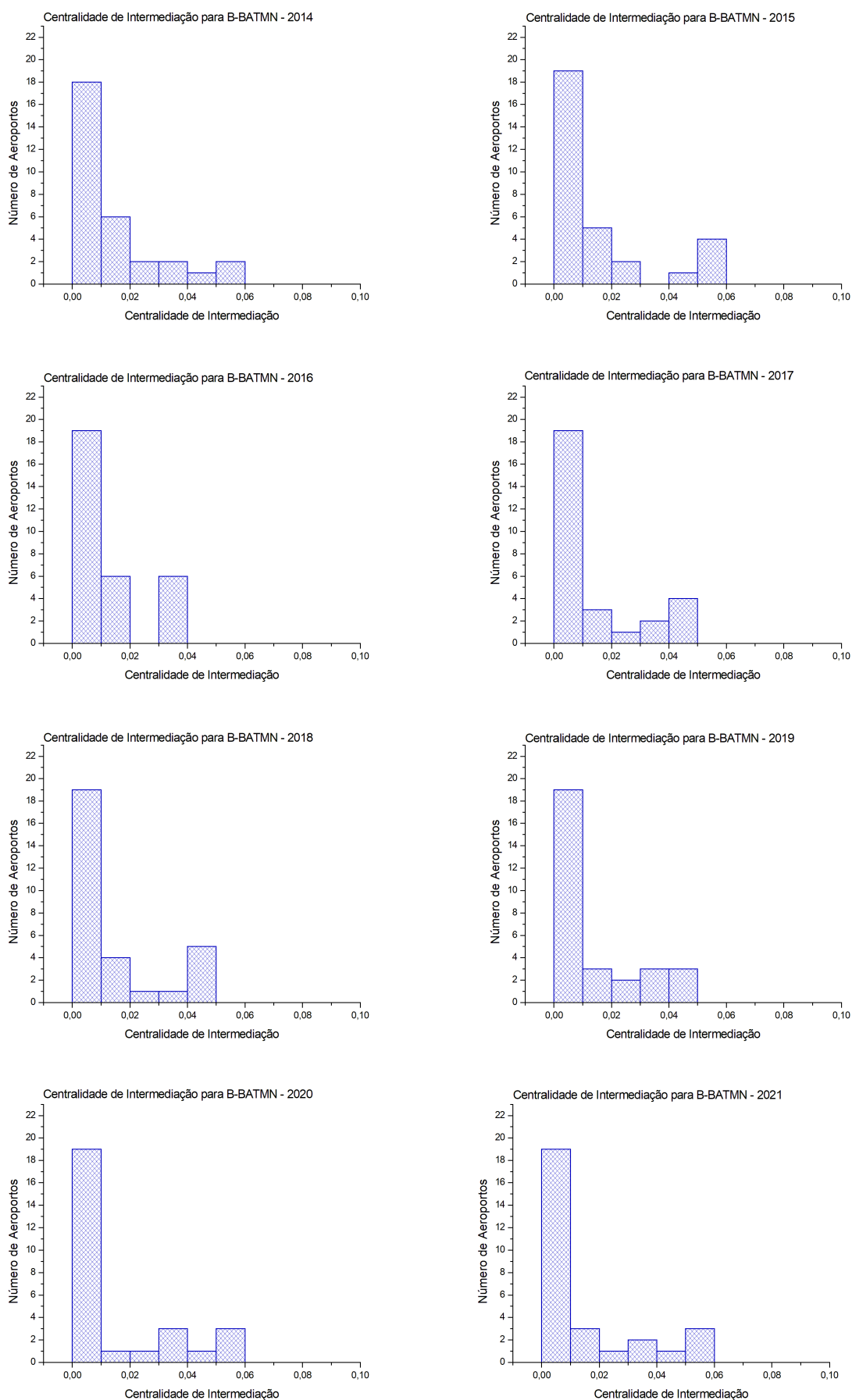
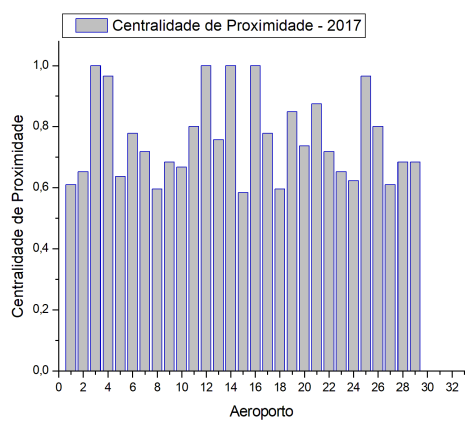
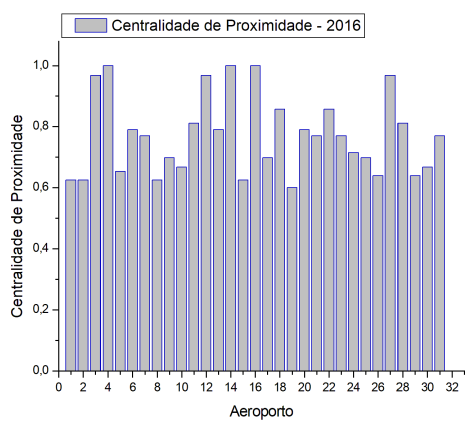
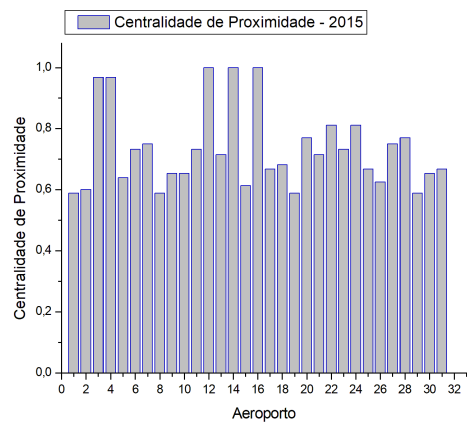
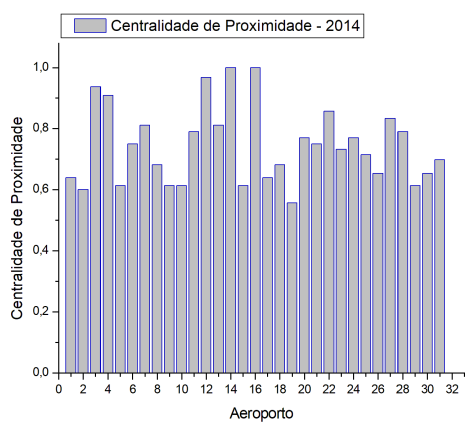
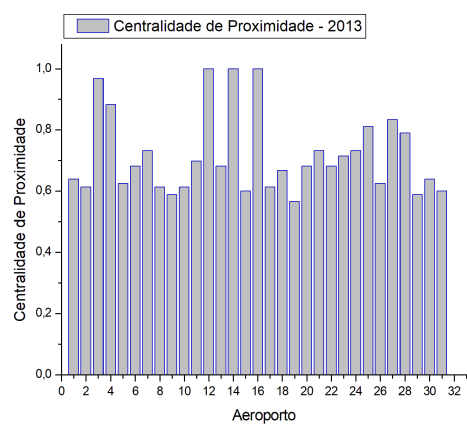
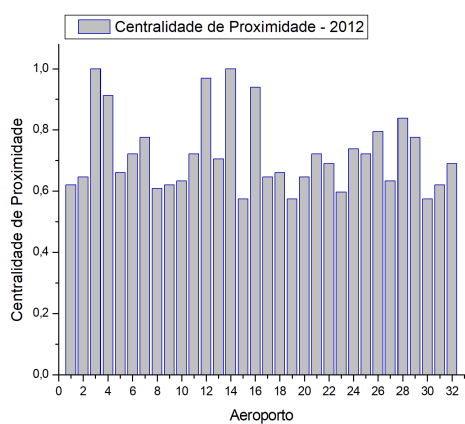
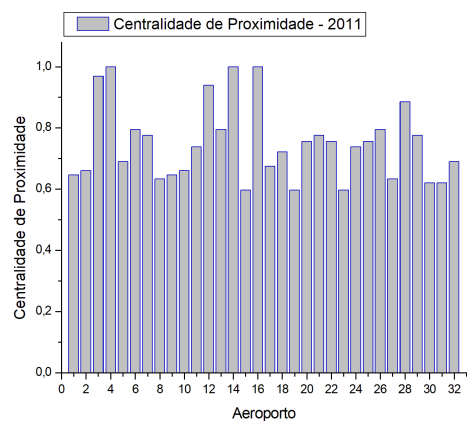
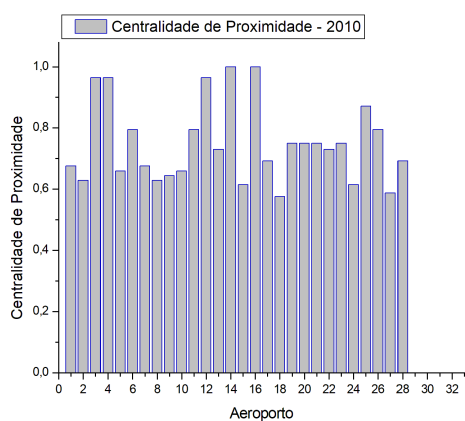


Figura 31 – Distribuição da centralidade de intermediação (*betweenness*) para os aeroportos componentes de B-BATMN de 2010 a 2021.



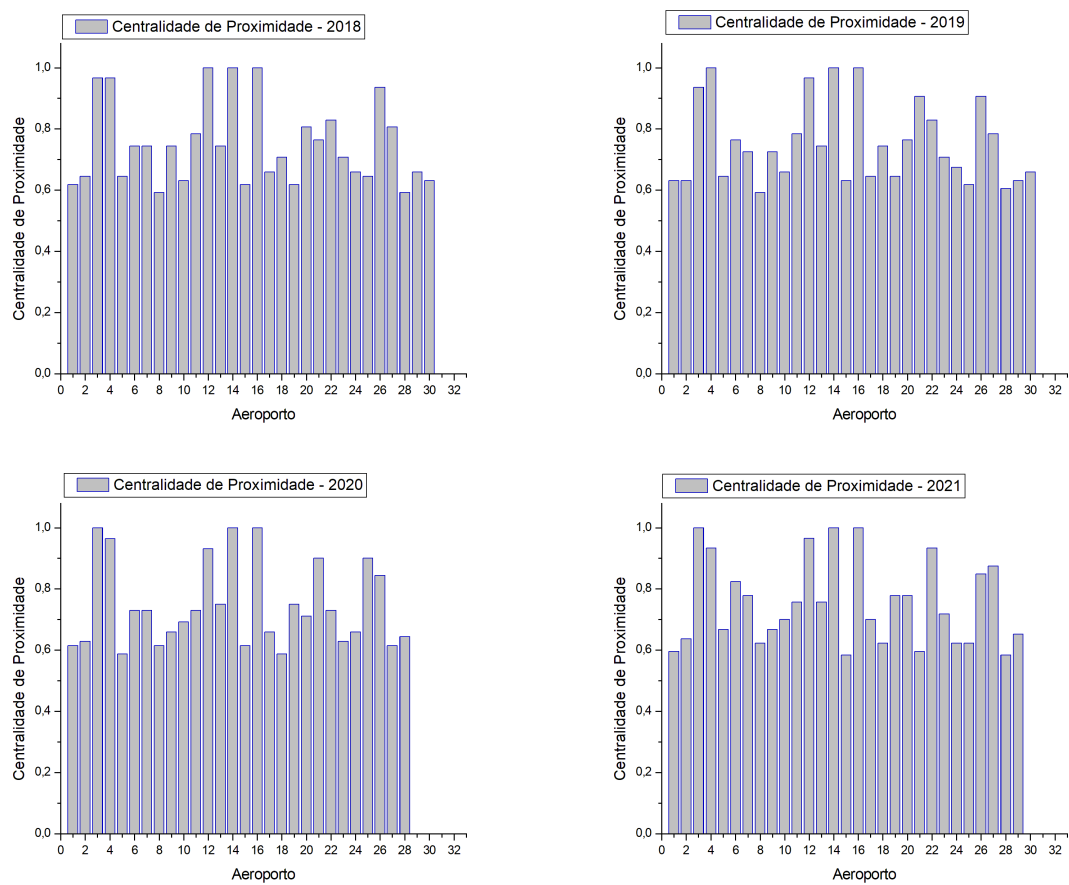
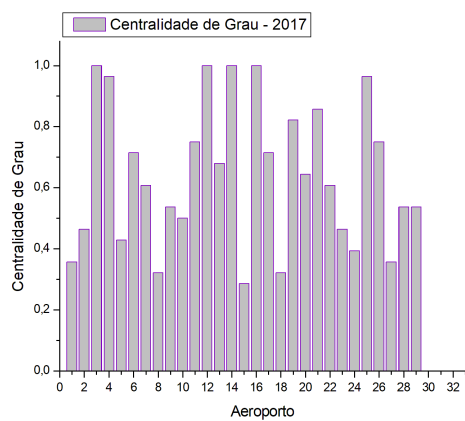
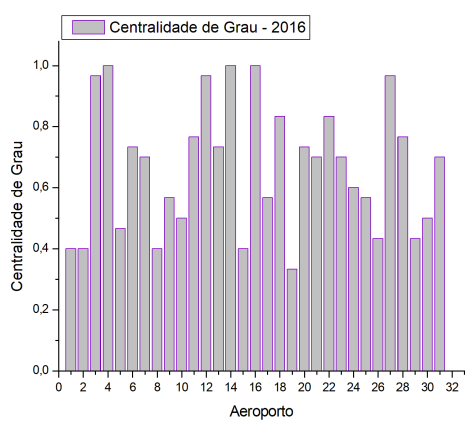
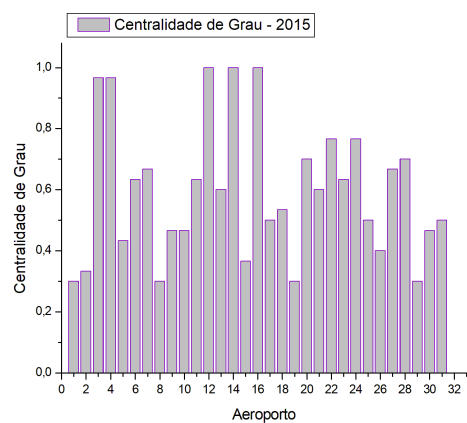
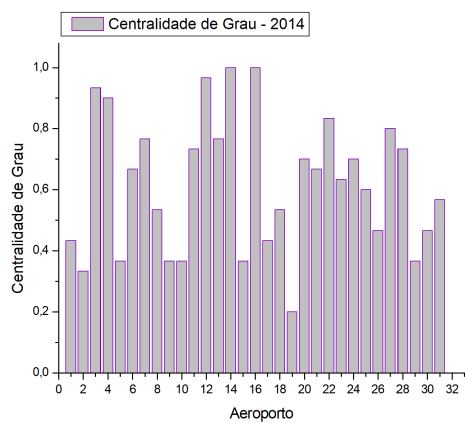
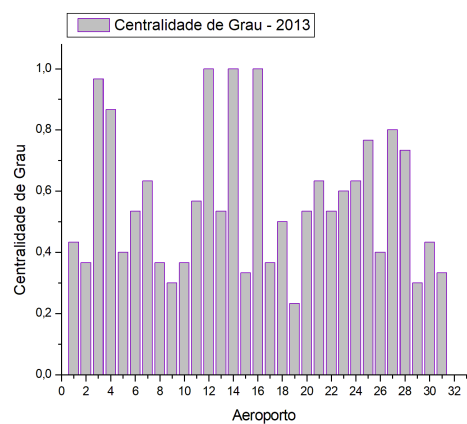
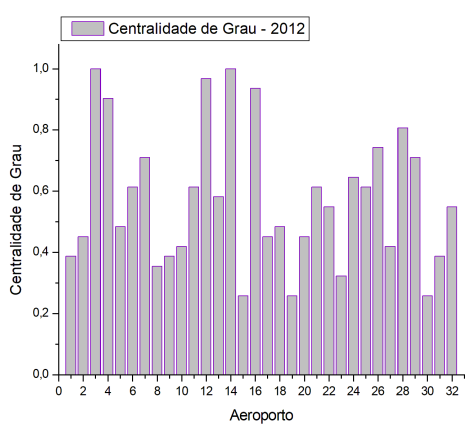
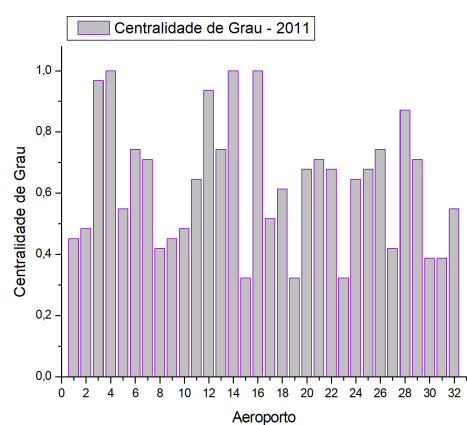
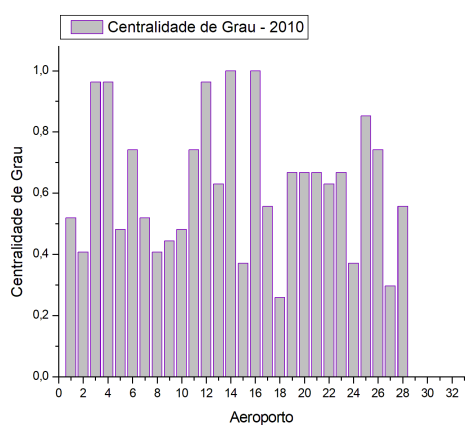


Figura 32 – Centralidade de proximidade (*closeness*) para os aeroportos componentes de B-BATMN de 2010 a 2021.



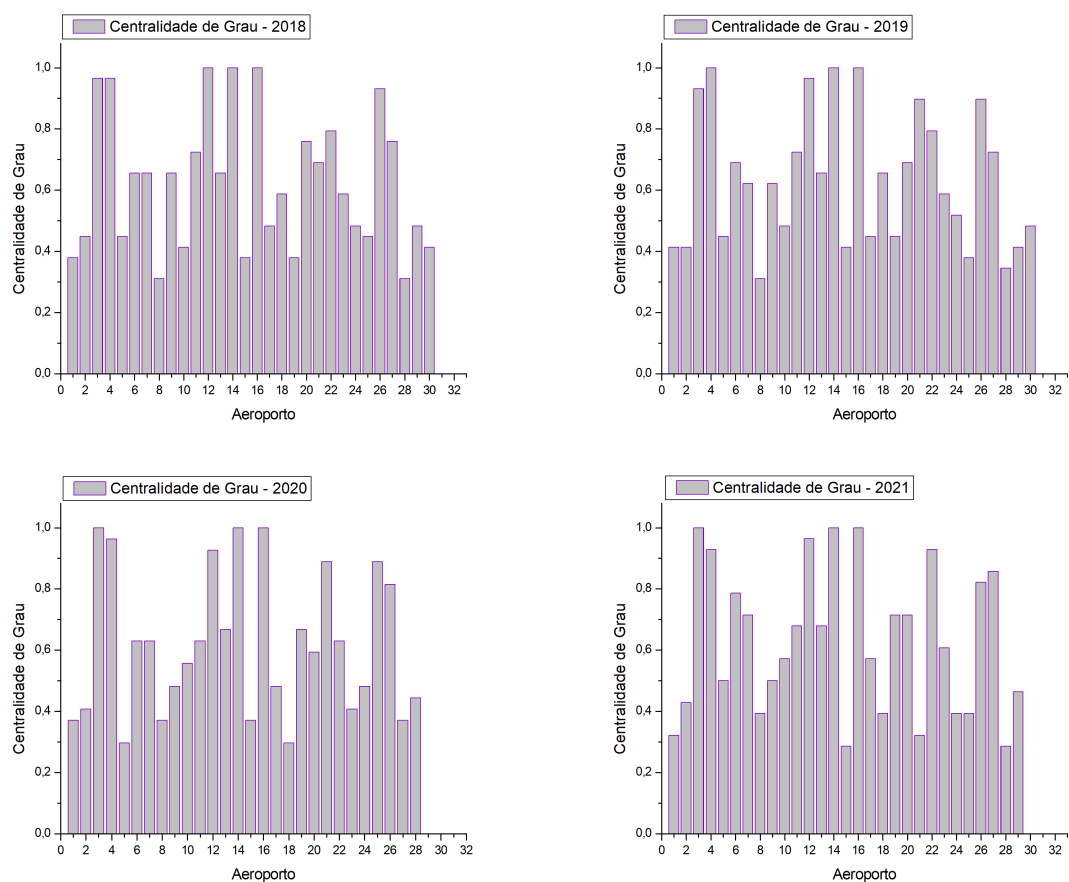
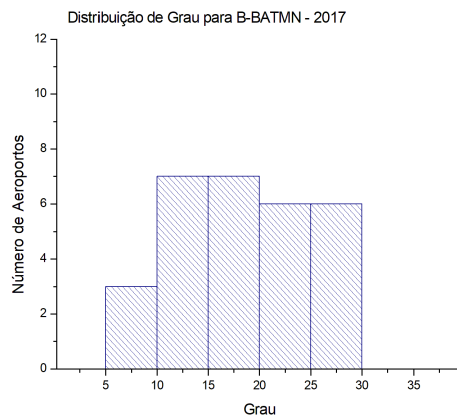
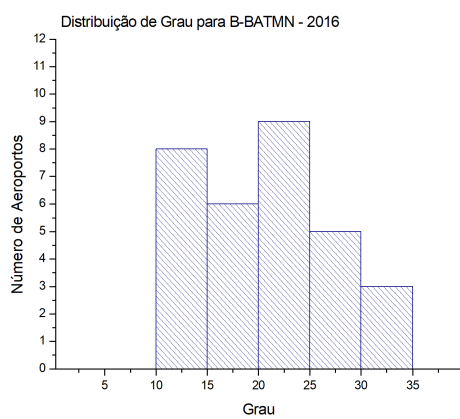
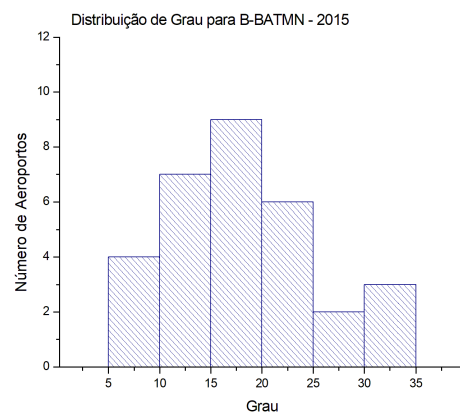
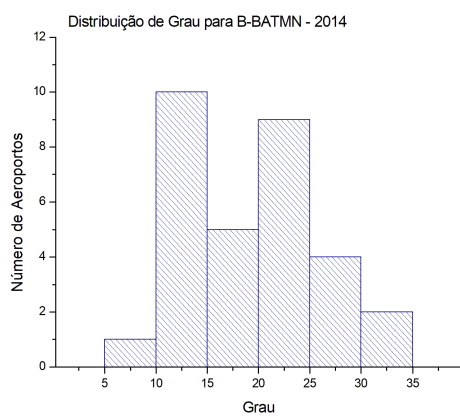
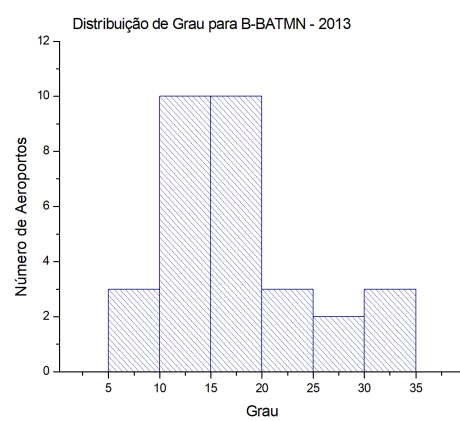
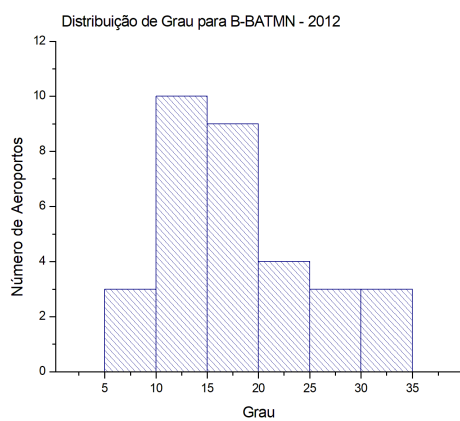
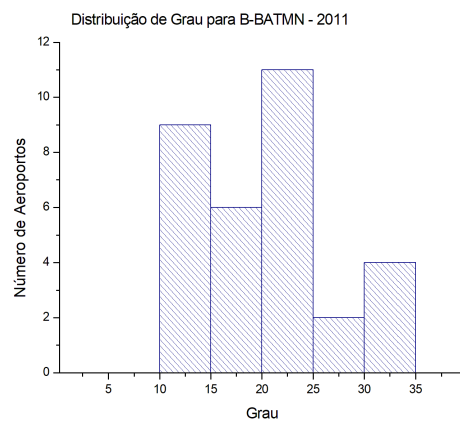
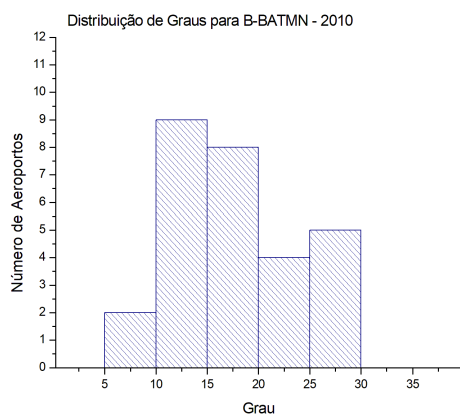


Figura 33 – Centralidade de grau (*degree centrality*) para os aeroportos componentes de B-BATMN de 2010 a 2021.



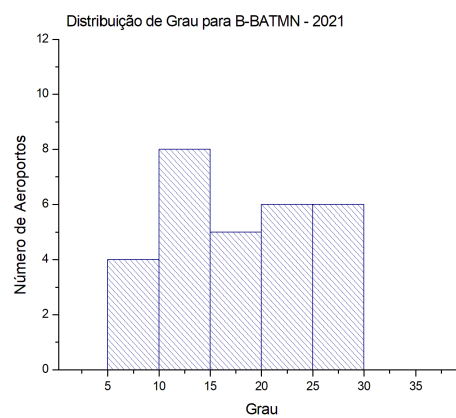
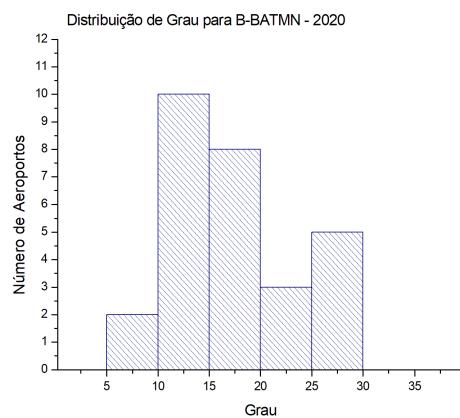
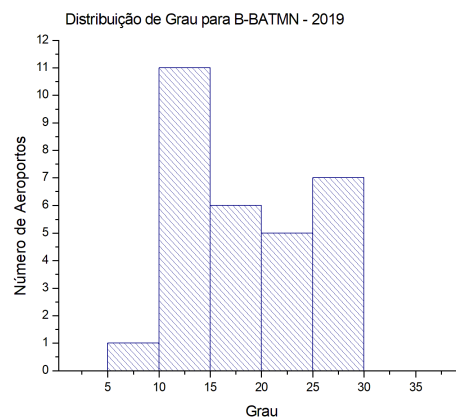
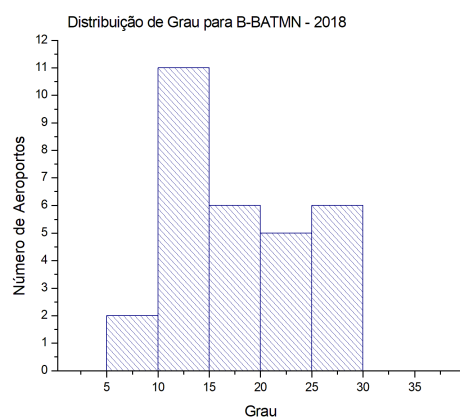


Figura 34 – Distribuição de graus para os aeroportos componentes de B-BATMN de 2010 a 2021.

**APÊNDICE C – Artigo: The Multiplex
Efficiency Index: Unveiling the Brazilian
Air Transportation Multiplex
Network—BATMN**



OPEN

The Multiplex Efficiency Index: unveiling the Brazilian air transportation multiplex network—BATMN

Izabela M. Oliveira^{1,2}✉, Laura C. Carpi^{2,4,5} & A. P. F. Atman^{2,3,4,5}

Modern society is increasingly massively connected, reflecting an omnipresent tendency to organize social, economic, and technological structures in complex networks. Recently, with the advent of the so-called multiplex networks, new concepts and tools were necessary to better understand the characteristics of this type of system, as well as to analyze and quantify its performance and efficiency. The concept of diversity in multiplex networks is a striking example of this intrinsically interdisciplinary effort to better understand the nature of complex networks. In this work, we introduce the Multiplex Efficiency Index, which allows quantifying the temporal evolution of connectivity diversity, particularly when the number of layers of the multiplex network varies over time. Using data related to air passenger transportation in Brazil we investigate, through the new index, how the Brazilian air transportation network has been changing over the years due to the privatization processes of airports and mergers of airlines in Brazil. Besides that, we show how the Multiplex Efficiency Index is able to quantify fluctuations in network efficiency in a non-biased way, limiting its values between 0 and 1, taking into account the number of layers in the multiplex structure. We believe that the proposed index is of great value for the evaluation of the performance of any multiplex network, and to analyze, in a quantitative way, its temporal evolution independently of the variation in the number of layers.

Efficiency, according to the Cambridge Dictionary is “the condition or fact of producing the results you want without waste, or a particular way in which this is done” or, by Oxford, “the quality of doing something well with no waste of time or money”. In the context of complex networks, efficiency refers to the navigability of the network, based on the distance from the nodes, so that networks with smaller shortest paths are more efficient^{1–3}. In the case of multiplex networks, a special case of multilayer structure in which the same set of nodes is connected by more than one type of relations in a layered structure⁴, it is shown that structural aspects, such as overlapping edges, number of layers and degree correlations between layers, influence the efficient exploration of the network through random walkers⁵. The concept of efficiency in multiplex networks can be related to the level of diversification of the network paths in the different layers. A greater diversification implies the presence of less overlapping links between layers, reducing the redundancy of the connections, and expanding the possibilities of using different paths to explore the structure in a more efficient way.

In this sense, supported by the definition of diversity of a multiplex network introduced in a recent work⁶, we present the Multiplex Efficiency Index ($\mathcal{E}$ -index), which is a modified version of the diversity measure capable of quantifying the connectivity patterns of a multiplex network on a normalized scale from 0 to 1, which is independent of the number of layers.

In this way, an $\mathcal{E}$ -index value close to 1 is indicative of a high paths diversification. On the contrary, if $\mathcal{E}$ -index is close to 0, connecting paths possess more redundancy. The $\mathcal{E}$ -index is thought to evaluate temporal evolution

¹Departamento de Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG, Av. Amazonas, 7675, Belo Horizonte, MG CEP: 30.510-000, Brazil. ²Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, PPGMMC, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brazil. ³Departamento de Física, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brazil. ⁴Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos, INCT-SC, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brazil. ⁵These authors contributed equally: Laura C. Carpi and A.P.F. Atman. ✉email: izabelamarques@cefetmg.br

of multiplex networks when the number of layers changes over time. Therefore, the novelty introduced by this measure is the advantage of allowing the comparison between multiple multiplex networks, regardless of the number of layers present in the structure.

There are numerous possibilities of applications of the $\mathcal{E}$ -index in different areas. For example, to quantify connection differences in social networks⁷, showing user sets that have similar or distinct connections, to analyze networks of criminal relationships⁸, to point out similarities (or differences) between the preferences of a group of people or to verify the protein interactions of the human HIV-1 virus⁶, to check the supply of transportation modalities for a given region⁹, among many others.

In this work we apply the $\mathcal{E}$ -index to analyze the Brazilian passenger air transportation network. This mode of transportation is fundamental for Brazil, since from the 1950s the Brazilian government has discouraged rail passenger transportation, making the country highly dependent on road transportation¹⁰. This lack of rail passenger transport linking the different regions of the world's fifth largest country and the high cost of route maintenance which leaves many highways in poor condition, has created a heavy reliance on air transportation for internal mobility. Therefore, the evaluation of the efficiency of the air transportation network is of crucial importance to guarantee a competent performance of the service.

In the first decade of the twentieth century, the Brazilian air market underwent changes in its structure, caused by regulatory policies and other factors. Low-cost companies began operating in the country and large traditional companies closed their activities, increasing the concentration of the air market¹¹.

Between 2010 and 2012, eight airlines carried more than 99% of the number of passengers in the country. In 2013, after mergers, that number dropped to six, and since 2014, only four combined companies have already exceeded 99% of passengers carried¹². Currently, one of these companies is experiencing financial difficulties and have stopped its operations, leading to a dispute for their routes among the other companies¹³. This indicates an even greater concentration of the Brazilian domestic air market in the short term, which may lead to a reduction in the supply of transportation for the population.

Each airline operates with its own strategic business model. Some have a regional profile, others focus on the demand of large cities, or work with many routes to medium-sized city destinations, among other possibilities. According to data released by the Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), the number of domestic flight passengers has grown from around 140 billion in 2010 to over 187 billion in 2018¹². This means that an increasing number of people have fewer and fewer options of domestic flights in Brazil. The objective of this work is to present the $\mathcal{E}$ -index and apply it to investigate the efficiency of the coverage of the Brazilian territory by the air passenger service.

Several papers studied the Brazilian air transportation network by means of statistical mechanics tools and different objectives. L.E.C. Rocha, investigates the structure and evolution of the Brazilian airports network (BAN), between 1995 and 2006, concluding that the network has undergone a strong reconnection in accordance with the changes in demand¹⁴. In addition, the author noted that the size of the network was decreasing (fewer routes), while the number of passengers increased, causing a higher level of occupation of aircraft or the need of larger aircrafts¹⁴. Oliveira et al.¹⁵ analyze the concentration of the Brazilian air transportation market before and after the period known as the 2006–2007 aerial “big blackout”. This period was marked by many flight delays and cancelations, culminating in two major air crashes in the country. These facts gave rise to the crisis of flight controllers, who complained about the lack of public investments in the sector. The authors conclude that the Brazilian air transportation market was already moving toward concentration even before the aforementioned crisis, but this process accelerated especially at the end of that decade.

In another sense, S.Wandelt, X. Sun and J. Zhang analyze and compare the evolution of air networks (including the Brazilian one) during the period of 2002 and 2013¹⁶. They found a decrease in average degree and attributed it to efforts to consolidate the Brazilian air transportation business and the privatization of airports, which began in 2010. They also found that the Brazilian network underwent many changes in the period, probably attributed to attempts of reorganization of the airlines after the crisis of air traffic controllers between 2006 and 2007, with repercussion up to 2010.

In the context of the global air transportation network, several works have been carried out in an attempt to analyze the network structure, measuring its complexity. We highlight the work of Sales-Pardo et al.¹⁷, which analyzes the multilevel modular structure of the global network and Verma et al.¹⁸ that verifies the vulnerability of the system through the extraction of network hierarchies. Although both works study network structures in levels, none of them used multiplex approach, which allows us to verify the influence of different airlines in the network and to measure the efficiency of the air service.

We believe that the methodology presented here is useful not only for analyzing air transportation networks from another perspective, but also to quantify multiplex network efficiency in a general unbiased way.

Methods

Multiplex Efficiency Index ($\mathcal{E}$). Next we present the $\mathcal{E}$ -index, which is based on the concept of multiplexed network diversity⁶. Diversity, as a general concept, can be understood as the level of heterogeneity of a system^{19,20}. In the case of multiplex networks, diversity is related to the variety of connectivity patterns present in the structure. Thus, a greater diversity value implies configurations that exhibit more heterogeneous connectivity patterns within the layers.

Formally, a multiplex network with M layers, each one having the same set of nodes N , is represented by adjacency matrices $\mathcal{A} = \{A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[M]}\}$. From these adjacency matrices it is possible to calculate the distance distribution of nodes (NDD)⁶ for each node i in the layer $\bar{p}(\mathcal{N}_i^{\bar{p}}(d))$. It corresponds to the fraction of nodes that are at distance d (shortest path) of node i in layer $\bar{p}$; and the Transition Matrix ($\mathcal{T}_i^{\bar{p}}(j)$) provides the probability that the node j in the layer $\bar{p}$ can be reached, in a single step, by a random walker located in node i

in $\bar{p}$. These probability distributions describe the local and global connectivity properties of the i node in the different layers and can be used to calculate the dissimilarity of the connectivity configurations of the node i ($\mathcal{D}_i$) in layers $\bar{p}$ and $\bar{q}$: $\mathcal{D}_i(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{\sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{A}_i^{\bar{p}}, \mathcal{A}_i^{\bar{q}})} + \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{T}_i^{\bar{p}}, \mathcal{T}_i^{\bar{q}})}}{2\sqrt{\log(2)}}$, where $\mathcal{J}$ is the Jensen-Shannon (JS) divergence²¹ that measures the distance between two probability distributions. $\mathcal{D}_i(\bar{p}, \bar{q}) = 0$ if node i has identical connectivity configuration in layers $\bar{p}$ and $\bar{q}$; while $\mathcal{D}_i(\bar{p}, \bar{q}) = 1$, if node i is not connected in one layer, and connected to all nodes in the other.

The average value of $\mathcal{D}_i(\bar{p}, \bar{q})$ calculated over all the nodes corresponds to the dissimilarity between the layers $\bar{p}$ and $\bar{q}$, called layer distance (LD):

$$\mathcal{D}(\bar{p}, \bar{q}) = \langle \mathcal{D}_i(\bar{p}, \bar{q}) \rangle_i.$$

If $\mathcal{D}(\bar{p}, \bar{q}) = 0$, it implies that the layers $\bar{p}$ and $\bar{q}$ are identical; otherwise, if $\mathcal{D}(\bar{p}, \bar{q}) = 1$, one of the layers is fully connected, and the other is totally disconnected.

For completeness, the definition of diversity requires quantifying the distance of a set of elements S for an element $\bar{g}$ that does not belong to S , as proposed by Carpi et al.⁶, should be taken as the minimum distance between the element $\bar{g}$ for any element $\bar{S}_i$ in the set S :

$$\mathcal{D}(\bar{g}, S) = \min_{\bar{S}_i \in S} \mathcal{D}(\bar{g}, \bar{S}_i). \quad (1)$$

The diversity function $U: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is defined recursively as

$$U(S) = \max_{\bar{S}_i \in S} \{U(S \setminus \bar{S}_i) + \mathcal{D}(\bar{S}_i, S \setminus \bar{S}_i)\} \quad (2)$$

for all $S \in \tilde{S}$ with $|S| \geq 2$, where $|S|$ represents the cardinality of the set, and $U(S) = 0$, for all $S \in \tilde{S}$ such that $|S| = 1$.

The Eq. (2) shows that the diversity calculation is obtained by summing $M - 1$ positive values between 0 and 1. Thus, the value of U is upper bounded by $M - 1$. Thus, it follows that the number of layers considered in the multiplex analysis influences the value of diversity.

The $\mathcal{E}$ -index corresponds to a weighted diversity value, avoiding then, the intrinsic bias due to diversity definition. $\mathcal{E}$ -index is defined as the ratio between the diversity value and the number of layers, as:

$$\mathcal{E} = \frac{U}{M - 1} \quad (3)$$

where $0 \leq \mathcal{E} \leq 1$.

Thus, it is possible to compare the $\mathcal{E}$ -index between networks without the influence of the number of layers, both at the level of nodes (local) and at the level of layers (global). For networks where there is a large overlap of links, the value of $\mathcal{E}$ -index will be close to 0 (low efficiency). On the other hand, when there is a greater diversification of connections between the layers present in the network, the $\mathcal{E}$ -index value will be closer to 1 (high efficiency). Synthetic examples of the calculation of $\mathcal{E}$ -index are presented in Note S1 of the Supplementary Information.

Brazilian air transportation multiplex network (BATMN). After the crisis of 2006 and 2007, the Brazilian domestic air network had to reorganize^{16,22}. Since then, a notable increase in domestic demand has been observed in the Brazilian air network (BAN), reaching a maximum during two major events: the 2014 FIFA World Cup and the Rio 2016 Olympic Games¹². The Brazilian government invested in the renovation and expansion of airports in the main cities and, as of 2011, started the project of concession of airports for the private sector²³. This scenario led to a major reorganization of BAN, which motivated the present analysis in order to evaluate quantitatively the evolution of the domestic BAN between 2010 and 2018 from the multiplex perspective.

In this way, we constructed the Brazilian air transportation multiplex network (BATMN), through the database available on the ANAC website¹². During the study period, the same set of 154 airports was considered each year, representing the network nodes. The links symbolize the existing routes and the layers correspond to the different airlines. As we consider non-directed networks, if a route connecting two airports exists, a link between them is created. According to ANAC, a group of only 8 airlines transported in 2010, more than 99% of passengers, carrying each of them, at least 0.5% of that number. Focusing on the analysis on these companies, we decided to adopt 0.5% of the total number of passengers per year as the lower limit to include an airline as a multiplex network layer. We constructed monthly networks that correspond to a multiplex structure containing all routes existing for each company in that month, and annual networks that correspond to the multiplex structure considering all the routes traveled for each company throughout the year. In view of these criteria, the diversity measure was computed for an 8-layer network between 2010 and 2012, a 6-layer network in 2013 and a 5-layer network in the following years, until 2018. From this, we calculate the $\mathcal{E}$ -index of BATMN.

As Brazil is a member of the International Civil Aviation Organization (ICAO) their airports and airlines are identified by ICAO codes. Table 1a shows the airlines considered in this work and their respective ICAO code, and Table 1b shows the companies considered as layers of BATMN in each year.

(a)		(b)	
ICAO Code	Airline Names	Year	Airlines considered
AZU	Azul Linhas Aéreas Brasileiras	2010	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM, TIB, PTN, WEB
GLO	Gol Linhas Aéreas	2011	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM, TIB, PTN, WEB
ONE	Avianca Brasil	2012	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM, TIB, PTN, WEB
PTB	Passaredo Transportes Aéreos	2013	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM, TIB
PTN	Pantanal Linhas Aéreas	2014	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM
TAM	TAM Linhas Aéreas	2015	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM
TIB	TRIP Linhas Aéreas	2016	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM
WEB	Webjet Linhas Aéreas	2017	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM
		2018	AZU, GLO, ONE, PTB, TAM

Table 1. List of airlines considered in this study. Panel **a** shows the analysed airlines and their respective ICAO codes, and panel **b** displays the airlines of BATMN considered each year.

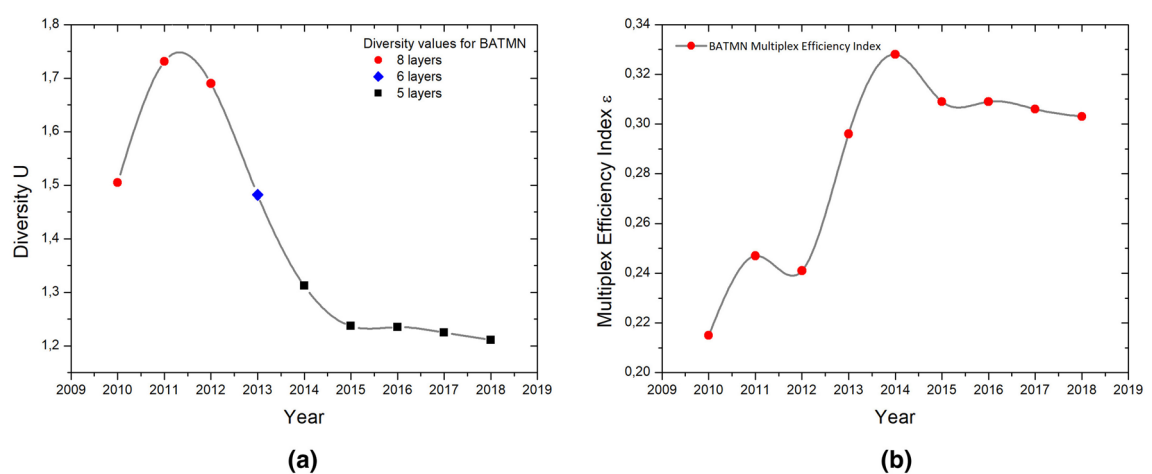


Figure 1. Analysis of the evolution of BATMN connectivity patterns. **(a)** Left panel: annual diversity values for BATMN, which are influenced by the number of layers present in the network. **(b)** Right panel: annual evolution of the $\mathcal{E}$ -index for BATMN, which takes into account the number of layers of the network and therefore shows an unbiased result.

Results and discussions

First, we show the evolution of BATMN's annual diversity values calculated between 2010 and 2018—Fig. 1a. Clearly, diversity values strongly correlate with the number of layers in the structure. BATMN is composed of 8 airlines between 2010 and 2012 (red discs), 6 airlines in 2013 (blue disc) and 5 airlines from 2014 to 2018 (black discs).

$\mathcal{E}$ -index displays a completely different scenario when the number of layers is taken into account by Eq. (3). Thus, an unbiased analysis of the efficiency of BATMN can be performed, as shown in Fig. 1b. We can see a local peak of $\mathcal{E}$ -index in 2011, followed by a decrease in 2012 and a progressive increase, peaking in 2014. After that peak, the $\mathcal{E}$ -index slightly drops in 2015, remaining stationary until 2018.

The $\mathcal{E}$ -index is independent of the number of layers, so just reducing layers in BATMN does not lead to an increase in the $\mathcal{E}$ -index values. To illustrate this, we show an example in Supplementary Information (Note S1), in which, by excluding a layer from the network, the value of the $\mathcal{E}$ -index decreases.

In analyzing the BAN panorama, it is possible to describe some factors that help explain the observed changes in the $\mathcal{E}$ -index values for BATMN. Basically, the merger between companies over the first four years analyzed explains the fluctuations on the efficiency of the network until 2014. Three major merger events were held during this period. In 2010, TAM acquired PTN²⁴ which was a regional airline operating between Congonhas Airport (located in São Paulo) and medium-sized cities. As of 2011, TAM began to deactivate the PTN routes, until 2013, when the company PTN ceased to operate, with all its routes being incorporated by TAM through ANAC's authorization^{25,26}. In 2011, GOL acquired 100% of the shares of WEB²⁷ and, in 2012, consolidated this merger²⁸, definitively closing the airline WEB. Finally, AZU merged with TIB in 2012²⁹ and started to control 15% of the domestic market. According to the rules established by ANAC, the pre-existing share flights (code-share) between TIB and TAM was gradually shut down by 2014, encouraging competition between AZU and other airlines³⁰.

To better analyze the effects of these and other events on the network, we perform the monthly calculation of $\mathcal{E}$ -index for BATMN, building the network from the routes present in each month, from 2010 to 2018 (see Fig. 2). We found a strong jump in the values of $\mathcal{E}$ -index from December 2012 to January 2013 and another smaller jump from November to December 2013, which coincides, in the first case, with the exclusion of PTN

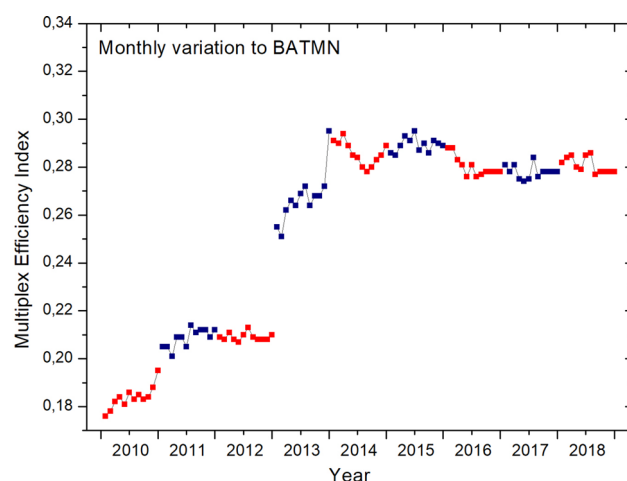


Figure 2. Variation of the $\mathcal{E}$ -index for BATMN in a monthly network panorama. The dots represent the values of the $\mathcal{E}$ -index in consecutive months, and alternating colors delimit different years.

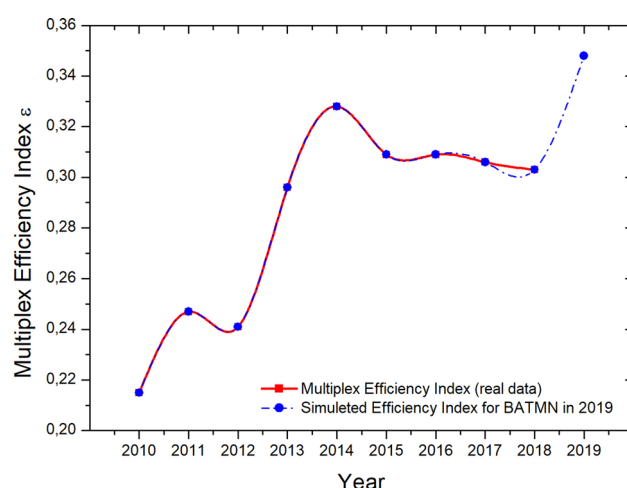


Figure 3. Simulation of the annual $\mathcal{E}$ -index values for BATMN in 2019, maintaining the layer configurations of 2018 and excluding the airline ONE.

and WEB from the network and, in the second, with the exclusion of TIB. It is also possible to observe in Fig. 2 that the highest monthly value of $\mathcal{E}$ -index corresponds to December 2013 and then there is a stabilization of the $\mathcal{E}$ -index, with considerably smaller variations. Reorganization of the routes caused by the mergers of the airlines led to an increase in the values of $\mathcal{E}$ -index, that is, an increase in the diversification of routes between the participating airlines and, subsequently, the consolidation of this group of companies.

An interesting behavior of the $\mathcal{E}$ -index can be seen in 2014. Monthly values show a pronounced minimum, as they decrease from March to August, increasing in the following months (Fig. 2). This suggests a correlation with the concentration of air routes to meet the growing demand for air transportation to the host cities of the FIFA World Cup games³¹, held in July. In the annual context, shown in Fig. 1b, it can be observed that the highest $\mathcal{E}$ -index value corresponds to the conclusion of airline mergers in 2014, followed by a stability period in the diversification of routes.

Another reduction in the number of airlines operating in the domestic passenger market in Brazil, occurred in 2019 when ONE ended its operations, following a judicial liquidation process initiated in late 2018³². As an exercise to estimate the influence of the removal of this layer from BATMN, we simulated the annual network efficiency in 2019 excluding ONE and maintaining the configurations of remaining layers of 2018—Fig. 3. We can see that the value of $\mathcal{E}$ -index increases after the exclusion of ONE, which means that the network coverage is similar, however, with fewer layers. ONE has 91 routes (BATMN links) in 2018, of which only 4 are exclusive of their layer, and therefore 95.6% of routes overlap with the other layers. Thus, the increase of $\mathcal{E}$ -index reflects the exclusion of one layer with high link overlap in relation to the others. This analysis indicates that an increased efficiency does not always translates into benefits for the air transportation user, as in this case there will be less availability of mobility options.

In order to better understand the influence of each airline on the efficiency of the network, we observe the diversity ordering for each year of the period considered. The diversity ordering indicates the elements in order of their contribution to the diversity of the set, and is obtained by calculating a method based on lexicographic distance⁶. The following list shows the ascending sequence of the BATMN layers according to their contribution to the diversity value each year.

- 2010: ONE, WEB, PTN, TAM, AZU, PTB, GLO, TIB;
- 2011: WEB, PTN, TAM, ONE, AZU, PTB, GLO, TIB;
- 2012: PTN, WEB, TAM, ONE, GLO, AZU, PTB, TIB;
- 2013: TAM, ONE, AZU, GLO, PTB, TIB;
- 2014: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2015: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2016: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2017: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU;
- 2018: ONE, TAM, GLO, PTB, AZU.

From the list, it is clear that PTN and WEB are among the airlines that less contribute to the value of diversity, and TIB leads this ranking while they are present on the network. In Fig. 4a are depicted all layers with their corresponding links for years 2010, 2014 and 2018, and the Fig. 4b shows the participation of each layer in terms of contribution to the diversity value. These observations are in line with previous discussions made from the analysis of the $\mathcal{E}$ -index.

Following the merger between AZU and TIB, AZU became the leader in diversity in 2014 (see Fig. 4b). It is worth noting that during the time that the PTN was in the network, there was a progressive decrease of its contribution to the diversity of the multiplex network. Between 2010 and 2012, PTN fell from the 6th to the 8th position in a group of 8 airlines. This observation coincides with the fact that TAM has reallocated PTN routes to meet its business needs²⁶, causing a decrease in the diversity of the companies. It should be noted that in 2013 PTN was still operating, however, as it represents less than 0.5% of the total number of passengers, it was not considered in the calculation of diversity.

We see that from 2014 ONE is the layer that contributes less to the diversity of BATMN (see Fig. 4). Carpi et al.⁶ mention that when a layer is removed, there is a change in diversity that is at least equal to the value of the distance between the corresponding layer and the remaining set, as can be deduced from the Eq. (1). We then conclude that there is a great overlap of routes between ONE and the other airlines, in agreement with the results already discussed and shown in Fig. 3.

We investigated the influence of the number of network links on the values of the $\mathcal{E}$ -index, analyzing the number of routes (BATMN links), as shown in Fig. 5a. In 2011 and 2012, TIB was the airline with the largest number of routes and in the following year, TIB and AZU led the number of routes. From 2014, after the merger of these two companies, AZU takes the lead with a significant relative growth. Not surprisingly, TIB was the leader in ordering diversity by 2013 and, from 2014, AZU is leading the network diversity as shown in Fig. 4b and the previous list.

After the merger between TAM and PTN, consolidated in 2013, the growth in the number of TAM routes was not as significant. There was a slight increase in 2014, returning to the same level in 2015. This increase may have been influenced by the FIFA World Cup in 2014. Except for 2014, there is a downward trend in the number of TAM routes.

In the third merger in the system, between WEB and GLO, completed in 2012, the number of GLO routes increases from 2013, outperforming TAM, its closest competitor. Both components had almost the same number of routes in 2014. Thereafter, the number of GLO routes exceeded that of TAM, increasing further in 2016, when the Rio Olympic Games occurred, returning to the level of 2015 in the following years.

The airline ONE did not show significant changes in the number of routes. It increased in 2014 (FIFA World Cup) and declined in 2016, the year of the Rio Olympic Games. Curiously, its number of routes increased in 2018, the year in which the airline opened the process of judicial administration.

To conclude this analysis, the PTB is the airline that has the lowest number of routes, with a peak in 2011, coinciding with the local peak of the $\mathcal{E}$ -index value for BATMN, and falling next. From 2013, its number of routes stabilizes.

We can conclude that, in the case of BATMN, as of 2011, the airline that have a greater number of routes is the one that contribute most to the $\mathcal{E}$ -index of the network, since the surplus of routes cause network diversification.

A remarkable result was obtained by adding the number of routes of the airlines and comparing with the calculation of the diversity. We have verified that there is a high correlation between the total number of routes and the value of the network diversity for the BATMN, as shown in Fig. 5b. We can observe that a larger number of routes occur when there are lower $\mathcal{E}$ -index values. Hence we realize that higher link density on the network leads to a higher probability of link overlap. In 2016, the number of routes increases significantly, probably driven by the Olympic Games in Rio, while the value of diversity and the $\mathcal{E}$ -index value increase slightly, which indicates that most new routes correspond to previously existing routes on the network.

All these analyzes demonstrate the utility and importance of the $\mathcal{E}$ -index to plan and analyze air mobility in BATMN, as well as in other networks of the same kind.

In a final experiment, we look at the evolution of the local $\mathcal{E}$ -index for the six airports that were privatized before 2017³³. The corresponding figures are shown in the Supplementary Information (Note S2). An increase in $\mathcal{E}$ -index value for a (local) node means that there is an increase in the connectivity difference between the layers for that node. That is, different airlines serve different cities linked to the same airport.

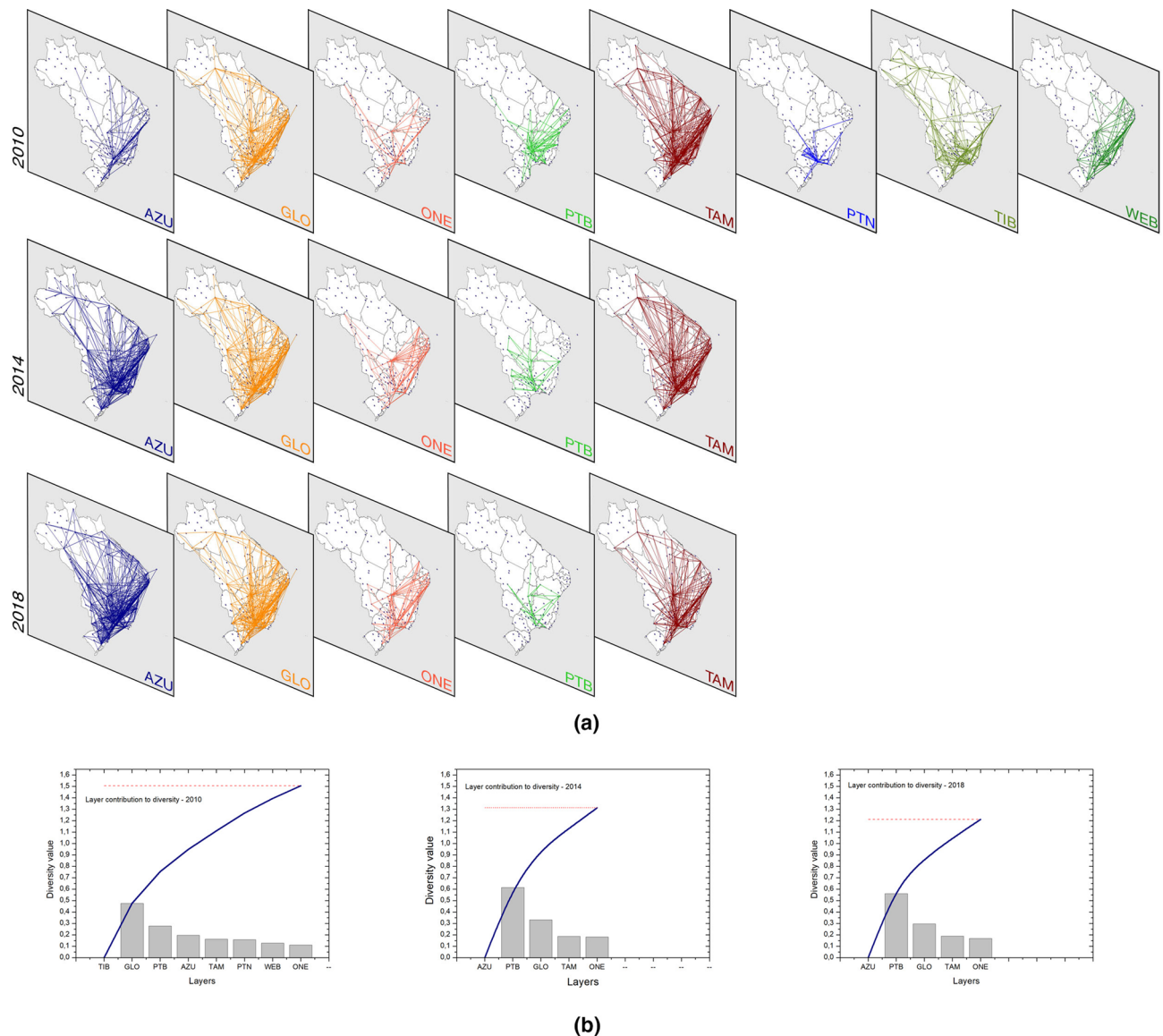


Figure 4. BATMN layer evolution for each airline in 2010, 2014 and 2018. **(a)** Illustration of BATMN links in each of the three years. **(b)** Diversity ordering for BATMN in a quantitative way. The columns represent the contribution values of each layer when calculating the network diversity, according to the Eq. (1). The blue curve shows the cumulative values of these distances at each step of the calculation, as given by Eq. (2). In the red line we have the final value of the global diversity for BATMN.

Four airports are granted to the private sector between 2011 and 2012, serving the cities of Natal, Brasília, Campinas and Guarulhos³³. The value of $\mathcal{E}$ -index for Campinas (Viracopos International Airport) initially increases and stabilizes after 2015. The other airports show a decrease in the $\mathcal{E}$ -index value in the first year after privatization, returning to the previous level, and then, stabilizing.

The airports serving the cities of Belo Horizonte (Confins International Airport) and Rio de Janeiro (Galeão International Airport) are privatized in 2013³³. Confins airport registers a significant increase in the $\mathcal{E}$ -index in the first year (22%), remaining stable thereafter. Galeão airport increases the value of $\mathcal{E}$ -index in 2014, with inexpressive oscillations, returning to the previous level.

Among the six privatized airports analyzed, four of them tend to stabilize the $\mathcal{E}$ -index at a greater or equal value than the observed prior to privatization. However, observing the evolution of $\mathcal{E}$ -index for an important hub in the country (Congonhas Airport²²), which has not yet been privatized, we find the same stabilizing effect since 2014. We conclude then, that privatizations of airports do not necessarily imply changes in the $\mathcal{E}$ -index, but the expansion of airports may contribute to this increase, since large investments occurred in the airports of the country to receive the Fifa World Cup of 2014³⁴.

In a universe of 154 airports considered in this work, the privatization of 6 of them did not imply a significant impact on the BATMN $\mathcal{E}$ -index at the global level.

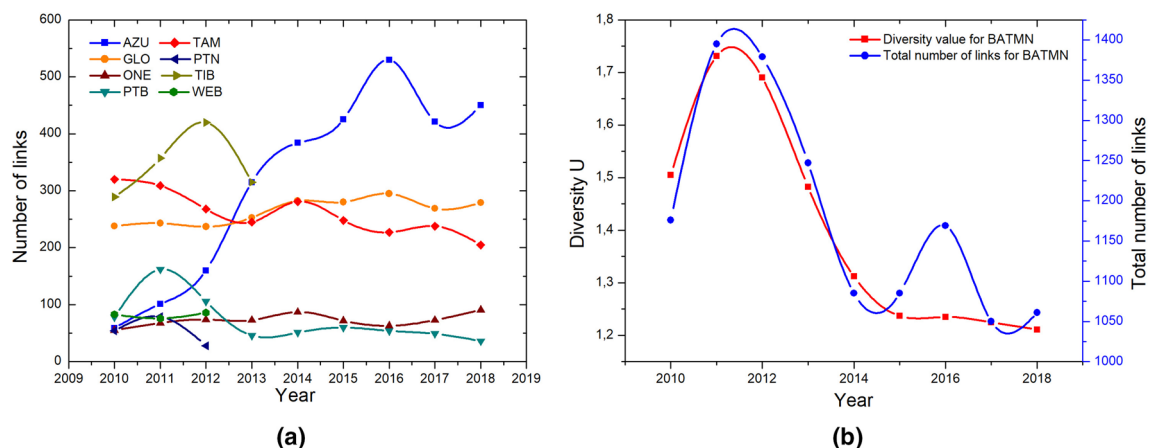


Figure 5. Analysis of the number of routes (links) of BATMN. **(a)** Number of links of the airlines studied from 2010 to 2018. The color lines show the number of routes of each airline, specified in the legend. **(b)** Comparison between the total number of links (blue line) of considered airlines and diversity value for BATMN (red line), for each year from 2010 to 2018.

Conclusions

Combining the $\mathcal{E}$ -index and diversity ordering, we have found a way of analyzing the efficiency of multiplex network, regardless of the number of layers. The $\mathcal{E}$ -index allows quantifying the network connectivity heterogeneity and coverage while the diversity ordering indicates the level of contribution of each layer, to the diversity of the system. The greater the difference in connectivity patterns between the layers, the greater the value of the $\mathcal{E}$ -index, ranging from 0 to 1.

Applying the $\mathcal{E}$ -index to the Brazilian domestic passenger air transportation network, we observed that, during the period considered, BATMN exhibited a reorganization of the network in the first four years due to airline mergers. In 2011, regional airlines expanded the number of routes and this fact, combined with the results presented in diversity ordering, explain the local peak observed in annual $\mathcal{E}$ -index profile. After all the mergers concluded, the annual value of $\mathcal{E}$ -index reaches its maximum in 2014, decreasing slowly to a plateau from 2015. When considering BATMN with monthly temporal precision during the same period, we notice jumps in the values of $\mathcal{E}$ -index, which compared to the annual scenario, reflect the fact that the network was reorganizing itself as the new airlines consolidated. The influence of the FIFA World Cup on BATMN is clear when looking at the monthly variation of $\mathcal{E}$ -index during 2014, when airlines redirected their routes to meet the demand added by the games. By simulating the shutdown of one airline in 2019 while maintaining the same outlook as 2018 for other airlines, we see an increase in annual $\mathcal{E}$ -index value. This means that the airline excluded from the network operates a large number of routes overlapping with other airlines. In this context of market concentration, there is no significant reduction of routes, but there is a loss in the offer of airlines to the population.

Finally, we conclude that the $\mathcal{E}$ -index is not influenced by airport privatizations; however, investments in airport expansion can impact it, especially if the offer of routes increases. In addition, fluctuations in the $\mathcal{E}$ -index of a small fraction of network nodes that do not have a significant impact on the global $\mathcal{E}$ -index.

Data availability

The datasets analysed during the current study are available on the ANAC³⁵ website.

Received: 19 July 2019; Accepted: 30 June 2020

Published online: 07 August 2020

References

- Vragović, I., Louis, E. & Díaz-Guilera, A. Efficiency of informational transfer in regular and complex networks. *Phys. Rev. E* **71**, 036122 (2005).
- Hollingshead, N. W., Turalska, M., Allegrini, P., West, B. J. & Grigolini, P. A new measure of network efficiency. *Physica A Stat. Mech. Appl.* **391**, 1894–1899 (2012).
- Latora, V. & Marchiori, M. Efficient behavior of small-world networks. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 198701 (2001).
- Min, B., Lee, S., Lee, K.-M. & Goh, K.-I. Link overlap, viability, and mutual percolation in multiplex networks. *Chaos Solitons Fractals* **72**, 49–58. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2014.12.016> (2015).
- Battiston, F., Nicosia, V. & Latora, V. Efficient exploration of multiplex networks. *New J. Phys.* **18**, 043035 (2016).
- Carpi, L. C. et al. Assessing diversity in multiplex networks. *Sci. Rep.* **9**, 4511 (2019).
- Lee, K.-M., Lee, S., Goh, K.-I. & Kim, J. Y. *Networks of Networks: The Last Frontier of Complexity* Vol. 340 (Springer, Berlin, 2014).
- Toledo, A., Carpi, L. C. & Atman, A. Diversity analysis exposes unexpected key roles in multiplex crime networks. In *Complex Networks XI*, 371–382 (Springer, 2020).
- Aleta, A., Meloni, S. & Moreno, Y. A multilayer perspective for the analysis of urban transportation systems. *Sci. Rep.* **7**, 44359 (2017).
- Georgiou, I. Mapping railway development prospects in Brazil. *Transp. Rev.* **29**, 685–714. <https://doi.org/10.1080/01441640902752813> (2009).

11. Pereira, R. R. D. *Método de análise de vulnerabilidade utilizando redes complexas: aplicação na rede de transporte aéreo brasileira*. Master's thesis, Universidade de Brasília, Brasília (2016).
12. ANAC. Consulta interativa – Indicadores do mercado de transporte aéreo. *Brazilian Government Publications*. <http://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/mercado-de-transporte-aereo/consulta-interativa/demanda-e-oferta-ranking-de-aeroportos> (2019).
13. Portal G1. Latam e Gol vão entrar na disputa por ativos da Avianca Brasil. *Portal de Notícias G1*. <https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/04/03/latam-e-gol-vaio-entrar-na-disputa-por-ativos-da-avianca-brasil.ghtml> (2019).
14. Da Rocha, L. E. Structural evolution of the Brazilian airport network. *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2009**, P04020 (2009).
15. Oliveira, A. V., Lohmann, G. & Costa, T. G. Network concentration and airport congestion in a post de-regulation context: a case study of Brazil 2000–2010. *J. Transp. Geogr.* **50**, 33–44 (2016).
16. Wandelt, S., Sun, X. & Zhang, J. Evolution of domestic airport networks: a review and comparative analysis. *Transpometr. B Transp. Dyn.* **7**, 1–17 (2019).
17. Sales-Pardo, M., Guimera, R., Moreira, A. A. & Amaral, L. A. N. Extracting the hierarchical organization of complex systems. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **104**, 15224–15229 (2007).
18. Verma, T., Araújo, N. A. & Herrmann, H. J. Revealing the structure of the world airline network. *Sci. Rep.* **4**, 5638 (2014).
19. Weitzman, M. L. On diversity. *Q. J. Econ.* **107**, 363–405 (1992).
20. Page, S. E. *Diversity and Complexity* 1st edn. (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010).
21. Cichocki, A. & Amari, S.-I. Families of alpha-beta-and gamma-divergences: flexible and robust measures of similarities. *Entropy* **12**, 1532–1568 (2010).
22. Costa, T. F., Lohmann, G. & Oliveira, A. V. A model to identify airport hubs and their importance to tourism in Brazil. *Res. Transp. Econ.* **26**, 3–11 (2010).
23. ANAC. Dúvidas sobre as concessões? *Brazilian Government Publications*. ANAC - Agência Nacional de Aviação Civil. <http://www.anac.gov.br/noticias/2011/duvidas-sobre-as-concessoes> (2011).
24. Portal Estadão. CADE aprova compra da Pantanal pela Tam. *Portal de Notícias Estadão*. <https://www.estadao.com.br/blogs/jt-seu-bolso/2010/08/18/cade-aprova-compra-da-pantanal-pela-tam/> (2010).
25. Casa Civil da Presidência da República. *Imprensa Nacional: Diário Oficial da União*. <http://www.in.gov.br/leitura/jornal?data=28-03-2013&secao=do1> (2013).
26. Exame Abril. Autorizada incorporação da Pantanal Linhas Aéreas pela Tam. *Portal de Notícias Exame/Abril*. <https://exame.abril.com.br/negocios/autorizada-incorporacao-da-pantanal-linhas-aereas-pela-tam/> (2013).
27. Portal Brasil. Aviação: Webjet linhas aéreas. *Portal Brasil*. https://www.portalbrasil.net/aviacao_webjet.htm (2010).
28. CADE. CADE aprova, com restrição, compra da Webjet pela Gol. *Brazilian Government Publications*. Conselho Administrativo de Defesa Econômica. <http://www.cade.gov.br/noticias/cade-aprova-com-restricoes-compra-da-webjet-pela-gol> (2012).
29. Imprensa Azul. Azul e Trip assinam acordo de associação. *Voe Azul: Publication*. <https://www.voeazul.com.br/imprensa/releases/azul-e-trip-assinam-acordo-de-associacao-1383348194485> (2012).
30. CADE. CADE aprova, com restrições, fusão entre Azul e Trip. *Brazilian Government Publications*. Conselho Administrativo de Defesa Econômica. <http://www.cade.gov.br/noticias/cade-aprova-com-restricoes-fusao-entre-azul-e-trip> (2012).
31. Terminal de Embarque. As companhias aéreas no Brasil se aprontam para a copa do mundo de futebol. *Terminal de Embarque*. <https://terminaldeembarque.com/2014/01/08/voce-no-tde-as-companhias-aereas-no-brasil-se-aprontam-para-a-copa-do-mundo-de-futebol/> (2014).
32. Portal G1. Avianca Brasil entra com pedido de recuperação judicial. *Portal de Notícias G1*. <https://g1.globo.com/economia/noticia/2018/12/11/avianca-entra-com-pedido-de-recuperacao-judicial.ghtml> (2018).
33. ANAC. Concessões. *Brazilian Government Publications*. Agência Nacional de Aviação Civil. <https://www.anac.gov.br/assuntos/paginas-tematicas/concessoes> (2018).
34. Ministério do Planejamento. Veja as obras nos aeroportos para Copa 2014. *Brazilian Government Publications*. Ministério do Planejamento. <http://www.pac.gov.br/noticia/b1bbf26d> (2012).
35. ANAC. Dados estatísticos. *Brazilian Government Publications*. ANAC - Agência Nacional de Aviação Civil. <http://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/dados-estatisticos/dados-estatisticos> (2016).

Acknowledgements

Research partially supported by Brazilian agencies FAPEMIG, CAPES, and CNPq. LC and IMO thanks for CEFET-MG for financial support. LC thanks CAPES and FAPEMIG by financial support. APFA thanks to FAPEMIG and CNPq agencies by financial support. APFA thanks CNPq research grant 308792/2018-1.

Author contributions

I.M.O. planned the experiments, collected data, manipulated data, performed experiments, researched references, interpreted the data and results, constructed figures and tables, and wrote the text. L.C. planned experiments, interpreted data and results and wrote the text. A.P.F.A. planned experiments, interpreted the results and wrote the text. All authors reviewed the manuscript.

Competing interests

The authors declare no competing interests.

Additional information

Supplementary information is available for this paper at <https://doi.org/10.1038/s41598-020-69974-0>.

Correspondence and requests for materials should be addressed to I.M.O.

Reprints and permissions information is available at www.nature.com/reprints.

Publisher's note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons license and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

© The Author(s) 2020

Supporting information material: The Multiplex Efficiency Index: unveiling the Brazilian Air Transportation Multiplex Network - BATMN

Izabela M. Oliveira,^{1,2,*} Laura Carpi,² and Allbens Atman Picardi Faria^{2,3,4}

¹*Departamento de Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG. Av. Amazonas, 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil. CEP: 30.510-000.*

²*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, PPGMMC, CEFET-MG.*

³*Departamento de Física, CEFET-MG.*

⁴*Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos, INCT-SC, CEFET-MG.*

NOTE S1. EXAMPLE OF MULTIPLEX EFFICIENCY INDEX CALCULATION

We created two synthetic multiplex structures to illustrate the computation of the $\mathcal{E}$ -index (see Fig. S1). As proposed in [1], we calculated the dissimilarities between every pair of layers (shown in matrix LD) and then, the $\mathcal{E}$ -index values and the diversity ordering of each structure.

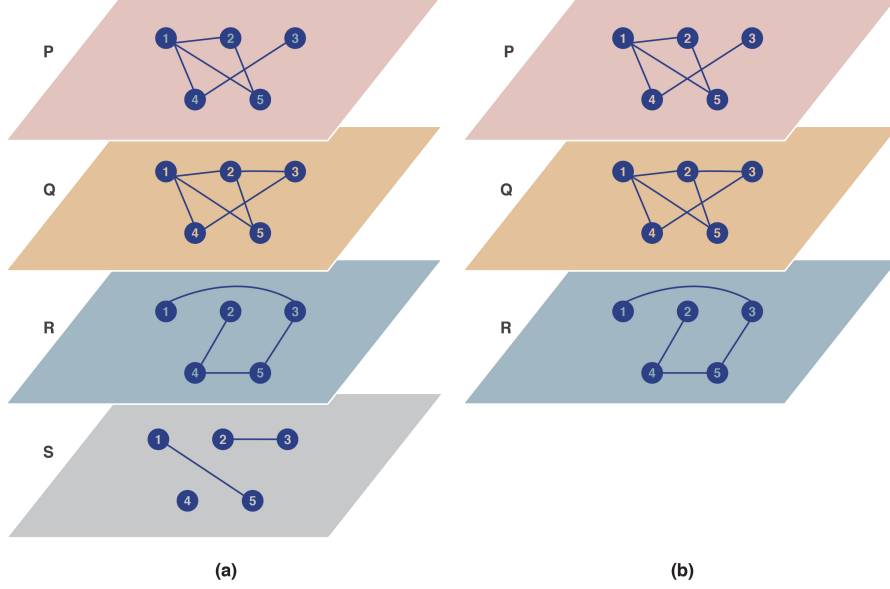


FIG. S1: Illustration of synthetic networks analyzed in experiments 1 and 2. **(a)** Representation of the four-layers multiplex network, used in Experiment 1. As it can be seen in this structure, layers P and Q possess high link overlapping, very similar degree and distance distribution, among other characteristics. The system's diversity ordering $O_D = \{Q, P, R, S\}$ indicates that layer S is the one that contribute the most to the heterogeneity of the multiplex system, as, although it has two redundant links, the degree and distance distribution are very dissimilar to all others, then increasing its $\mathcal{E}$ -index ($\mathcal{E} = 0.64$). **(b)** Representation of the three-layers multiplex network used in Experiment 2, obtained from the Experiment 1 network, excluding layer S . This structure is highly redundant in its connectivity patterns. Its diversity ordering $O_D = \{Q, P, R\}$ indicates that R layer is the one that most contributes to the $\mathcal{E}$ -index of the system ($\mathcal{E} = 0.49$).

Experiment 1: A four-layer network structure, in which layers P and Q have high link overlap and, consequently, the lowest dissimilarity value (Figure S1-a). The R layer has no overlapping links to the others and presents the greatest dissimilarity for S , as can be seen in the LD_1 matrix.

$$LD_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & Q & R & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.271 & 0.702 & 0.849 \\ 0.271 & 0 & 0.693 & 0.705 \\ 0.702 & 0.693 & 0 & 0.935 \\ 0.849 & 0.705 & 0.935 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Organizing the distances of each layer in ascending order, are:

$$\mathcal{D}(P, S_1) = \{0; 0.271; 0.702; 0.849\},$$

$$\mathcal{D}(Q, S_1) = \{0; 0.271; 0.693; 0.705\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_1) = \{0; 0.693; 0.702; 0.935\},$$

$$\mathcal{D}(S, S_1) = \{0; 0.705; 0.849; 0.935\},$$

so that S_1 represents the set of layers present in the network at this stage. Thus, the smallest positive value is $\mathcal{D}(P, Q) = 0.271$ which represents the distance between the layers P and Q . Looking at the distance sets of both, we realize that Q has the next shortest distance to another layer and, therefore, the order of diversity receives the first element: $O_D(S) = \{Q\}$, because we add the first value for the recursive calculation of diversity $U = 0.271$.

Next, we eliminate the Q layer and look at the remaining set S_2 .

$$\mathcal{D}(P, S_2) = \{0; 0.702; 0.849\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_2) = \{0; 0.702; 0.935\},$$

$$\mathcal{D}(S, S_2) = \{0; 0.849; 0.935\},$$

Now, the smallest LD-value is $D(P, R) = 0.702$. Thus, $U = 0.271 + 0.702$ and, following the lexicographic order, layer P is the closest to another layer, and therefore $O_D(S) = \{Q, P\}$. We now have the remaining S_3 set of layers after deleting P . Thus, we have:

$$\mathcal{D}(R, S_3) = \{0; 0.935\},$$

$$\mathcal{D}(S, S_3) = \{0; 0.935\}.$$

Clearly, 0.935 is the last amount to be added at $U = 0.271 + 0.702 + 0.935 = 1.908$ and therefore $\mathcal{E} = 0.64$, according to equation (3) of the main text. For the ascending sequence of components of the calculation of $\mathcal{E}$, we observe that the layer R was the "closest" of the set S_2 in the previous step and then $O_D = \{Q, P, R, S\}$. This means that S is the layer that adds highest diversity to the multiplex, while layer Q is the one that less contributes.

Experiment 2: From the system shown in the previous experiment, we eliminated layer S , which was the most significant in calculating the value of diversity. The LD_2 matrix displays the dissimilarity values for the new situation.

$$LD_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & Q & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ Q \\ R \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.271 & 0.701 \\ 0.271 & 0 & 0.693 \\ 0.701 & 0.693 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Following the sequence of steps already shown in Experiment 1, we have:

$$\mathcal{D}(P, S_1) = \{0; 0.271; 0.701\},$$

$$\mathcal{D}(Q, S_1) = \{0; 0.271; 0.693\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_1) = \{0; 0.693; 0.701\},$$

then, in this first stage, $U = 0.271$ and $O_D = \{Q\}$. Next,

$$\mathcal{D}(P, S_2) = \{0; 0.701\},$$

$$\mathcal{D}(R, S_2) = \{0; 0.701\},$$

and finally, $U = 0.271 + 0.701 = 0.972$ therefore, $\mathcal{E} = 0.49$ and $O_D = \{Q, P, R\}$. We conclude that layer R is the one that more contributes to the $\mathcal{E}$ -index value of the system.

NOTE S2. EVOLUTION OF THE LOCAL MULTIPLEX EFFICIENCY INDEX FOR PRIVATIZED AIRPORTS

We show here the evolution of the local $\mathcal{E}$ -index for the airports that were privatized before 2017 [2].

Initially only Natal International Airport (serving the city of Natal - RN and region) is privatized in 2011. Figure S2 shows the evolution of the $\mathcal{E}$ -index for this airport.

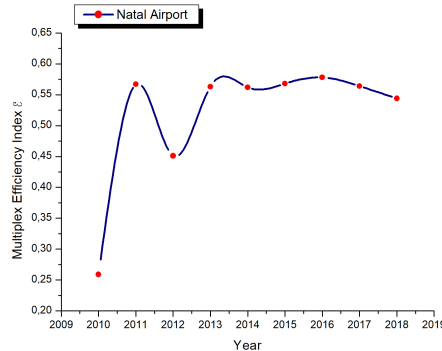


FIG. S2: Evolution of $\mathcal{E}$ -index for Natal airport.

In 2012 three airports are privatized:

- Brasilia International Airport,
- São Paulo/Guarulhos International Airport,
- Viracopos International Airport (Campinas - SP).

The $\mathcal{E}$ -index for these airports is shown in Fig. S3.

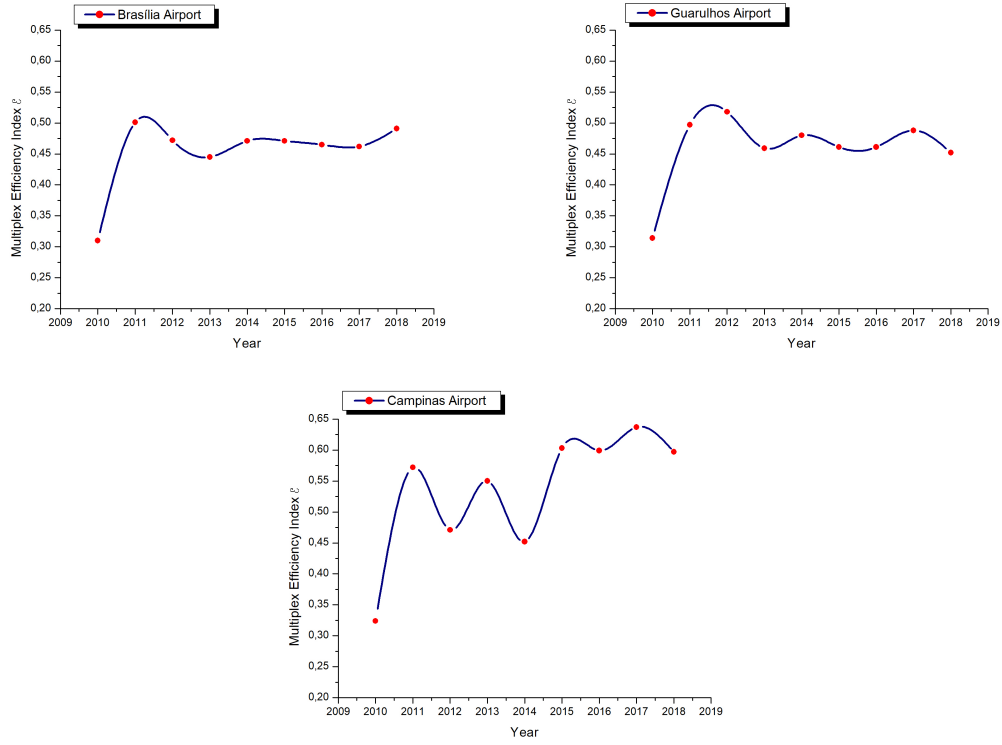


FIG. S3: $\mathcal{E}$ -index for Brasilia International Airport, São Paulo/Guarulhos International Airport and Viracopos International Airport.

Finally, two other airports are privatized in 2013 and the Fig. S4 shows the $\mathcal{E}$ -index over the period considered for each of these airports:

- Rio de Janeiro/Galeão International Airport, Rio de Janeiro - RJ
- Belo Horizonte/Confins International Airport, MG.

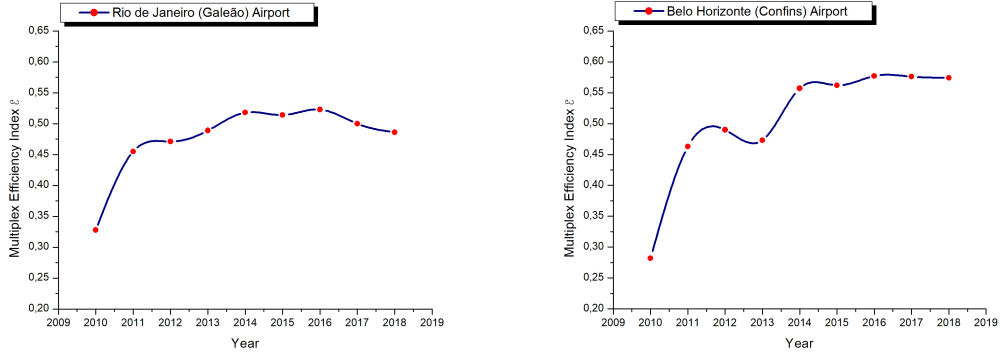


FIG. S4: $\mathcal{E}$ -index for Rio de Janeiro/Galeão International Airport and Belo Horizonte/Confins International Airport.

For comparison, we observe the evolution of the $\mathcal{E}$ -index for the São Paulo/Congonhas Airport, which was not privatized (Figure S5). This is a hub in the Brazilian air transportation network [3].

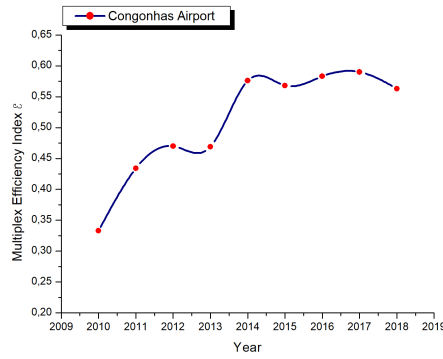


FIG. S5: $\mathcal{E}$ -index values to Congonhas Airport.

* izabelamarques@cefetmg.br

- [1] L. C. Carpi, T. A. Schieber, P. M. Pardalos, G. Marfany, C. Masoller, A. Díaz-Guilera, and M. G. Ravetti, Scientific Reports **9**, 4511 (2019).
- [2] “Dúvidas sobre as concessões?” *Brazilian Government Publications. ANAC - Agência Nacional de Aviação Civil*. <http://www.anac.gov.br/noticias/2011/duvidas-sobre-as-concessoes> (2011).
- [3] T. F. Costa, G. Lohmann, and A. V. Oliveira, Research in Transportation Economics **26**, 3 (2010).

APÊNDICE D – Artigo: Diversity Analysis of the Brazilian Air Transportation Network

Chapter 68

Diversity Analysis of the Brazilian Air Transportation Network



Izabela M. Oliveira, Laura C. Carpi, and A. P. F. Atman

Abstract In recent years, air transportation networks have been studied with tools from complex networks theory. In this work, the Brazilian domestic air transportation network is analyzed in the period 2010–2018, considering a multiplex approach. Through a recently proposed quantifier, the Multiplex Efficiency Index $\mathcal{E}$, the diversity of Brazilian air transportation routes is studied. Changes in the efficiency of the system are analyzed and discussed, especially considering airport privatization processes and events such as the exclusion of companies, with a case study of a company withdraw with real data. Alternatives for reorganizing routes between the remaining companies are considered to find the most efficient combination. Correlations between the $\mathcal{E}$ -index, aircraft seat occupancy rate and airline ticket prices are investigated, highlighting topological features influenced by real factors.

I. M. Oliveira (✉)

Departamento de Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG. Av. Amazonas, 7675 Belo Horizonte, MG, Brazil
e-mail: izabelamarques@cefetmg.br

I. M. Oliveira · L. C. Carpi · A. P. F. Atman

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, PPGMMC, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brazil

L. C. Carpi · A. P. F. Atman

Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos, INCT-SC, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brazil

A. P. F. Atman

Departamento de Física, CEFET-MG, Belo Horizonte, Brazil

© Springer Nature Switzerland AG 2020

I. Zuriguel et al. (eds.), *Traffic and Granular Flow 2019*,
Springer Proceedings in Physics 252,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-55973-1_68

555

68.1 Introduction

The Brazilian air transportation network has undergone major changes in the last fifteen years. Important airlines have closed their operations, while several low-cost companies have started operating in the country, changing the global scenario [1]. Airports privatizations and financial investments in infrastructure, have also influenced the air transportation market [2]. As a consequence, several new policies have been implemented by the National Civil Aviation Agency (ANAC) [3], to improve the performance of the system. The air transportation assumes a capital importance in Brazil for two main reasons: the continental dimensions of the country and the lack of an efficient rail transportation system [4].

The FIFA World Cup in 2014, brought thousands of people to Brazil, requiring transportation strategies to reach the cities where the games took place [5]. In a previous work [6], we evaluated the evolution of the Brazilian air transportation network, analysing the coverage of the national territory and the overlap of airline routes between 2010 and 2018. For this, the Brazilian Air Transportation Multiplex Network (BATMN) was built and the Multiplex Efficiency Index $\mathcal{E}$ was used to quantify the network efficiency during the studied period. The $\mathcal{E}$ -index allows to measure the level of heterogeneity of the system connections in a multiplex approach, on a scale of 0–1, in such a way that a more “efficient” network is one that has more diverse connections between its layers.

This work investigates other factors that may have influenced $\mathcal{E}$ for BATMN, as is the case of ticket prices and the aircraft occupancy ratio. Exploring the values of $\mathcal{E}$ at node levels, the ranking of the most efficient airports of the period is showed, as well as the evolution of the airports efficiency that were privatized up to 2018.

In addition, in 2019, a BATMN airline (Avianca Brasil, ICAO code: ONE) halted operations, concentrating the network in just 4 major airlines, reducing the options offered to the population. Several routes were extinguished, and the slots (landing and takeoff rights) operated by ONE at *Congonhas* airport, which is one of Brazil’s main airports, were distributed between two competing airlines. Simulations using real data related to this new slot distribution and route rearrangements were performed to investigate changes in the Multiplex Efficiency Index $\mathcal{E}$ for BATMN.

68.2 Methodology

BATMN was built with a multiplex network approach, so that the nodes represent the 154 Brazilian airports that participated in domestic passenger transportation between 2010 and 2018. The links connecting nodes are the different airline routes with a share of the Brazilian domestic air market exceeding 0.5% of the total number of annual passengers, according to real ANAC data [7]. Thus, each airline has its own network, which is represented as a layer of the multiplex structure. BATMN is composed by 8 layers during the period 2010–2012, 6 layers in 2013, and 5 layers from 2014 to

2018. The airlines considered are: AZU, GLO, ONE, PTB, TAM, TIB, PTN and WEB, so 3 companies were merged with others over the period. For more details about the participating airlines, see Oliveira et al. [6].

To calculate the Multiplex Efficiency Index $\mathcal{E}$ we consider a multiplex network with M layers, each one containing the same set of N nodes. It is possible to obtain the local $\mathcal{E}$ -index, at the node level, and global, which is at the network layer level. For this, two probability distributions are extracted from the network, as proposed in a recent work [8]:

1. *Node Distance Distribution*: for each node i in layer p , $\mathcal{N}_i^p(d)$ corresponds to the fraction of nodes reachable from node i , by the shortest path d ;
2. *Transition Matrix*: $T_i^p(j)$ is the probability that node j will be reached in one step by a random walker located at node i , at the layer p .

Then, through the Jensen-Shannon divergence, the node distance (ND) in layers p and q is measured:

$$\mathcal{D}_i(p, q) = \frac{\sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{N}_i^p, \mathcal{N}_i^q)} + \sqrt{\mathcal{J}(T_i^p, T_i^q)}}{2\sqrt{\log(2)}} \quad (68.1)$$

for each node i from 1 to N . The difference in connectivity paths between two layers p and q (layer distance—LD) is obtained by averaging over all values of $\mathcal{D}_i$ obtained by Eq. 68.1: $\mathcal{D}(p, q) = \langle \mathcal{D}_i(p, q) \rangle_i$. Then the distance between an element g and a set S is used, defined as the shortest distance between g , not belonging to S , and some element of S :

$$\mathcal{D}(g, S) = \min_{s_i \in S} \mathcal{D}(g, s_i). \quad (68.2)$$

When the elements considered are the network nodes, the ND measure (Eq. 68.1) is used to obtain the distance referred to by Eq. 68.2. In another situation, for the distance between the layers of the network, the LD measure is used. Next, the system diversity value $U(S)$ is calculated by the recursive equation $U(S) = \max_{s_i \in S} \{U(S \setminus s_i) + \mathcal{D}(s_i, S \setminus s_i)\}$. The code for the diversity calculation of a system is freely available in [9]. Finally, we obtain the value of the Multiplex Efficiency Index $\mathcal{E}$, which relates to the value of the system diversity, considering the number of layers present in the network:

$$\mathcal{E} = \frac{U(S)}{M - 1}, \quad (68.3)$$

so that $0 \leq \mathcal{E} \leq 1$. The greater the network edge overlap, the closer to 0 will be the value of $\mathcal{E}$. On the other hand, in networks where links are more diversified between layers, the value of $\mathcal{E}$ will approach 1 [6, 10].

In the case of air transportation, at the layer level, $\mathcal{E}$ -values close to 0 mean that airlines present on the network operate with very similar routes, while $\mathcal{E}$ -values close to 1 indicate that airlines work with very different routes. At the node level, airports

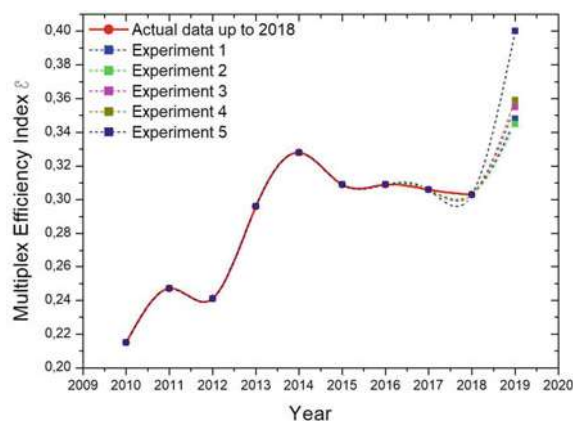
with $\mathcal{E}$ -values close to 0 have routes very similar connecting them to other airports considering each airline. Airports with higher $\mathcal{E}$ -values are linked in a diversified manner by the routes of the airlines that serve them.

68.3 Results and Discussions

We calculated the value of the Multiplex Efficiency Index for BATMN from 2010 to 2018, which is shown in Fig. 68.1. We found that from 2013 to 2018, $\mathcal{E}$ reaches a plateau and remains around it, with a peak in 2014, which coincides with the year of the FIFA World Cup in Brazil, in agreement with Oliveira et al [6]. With the termination of airline ONE's operations in 2019, its routes are excluded and its 41 slots at *Congonhas* airport, that were used with 9 routes, were redistributed to AZU and PTB, according to the current rules from ANAC [11]. Slots are arrival and departure times available or authorized for flights at busy airports, which are distributed by a regulatory agency [3]. Each airline uses the slots according to its business, creating routes between the airports in which it operates and, thus, the same route can occupy several slots, at different times [7]. The 15 slots received by AZU were all allocated on a single route: the *Rio/São Paulo* air bridge, which connects the airports *Congonhas* and *Santos Dumont*, and is one of the most profitable routes in the country [12]. PTB received 26 slots (14 for PTB and 12 for MAP, which now belongs to PTB [11]) starting operations at *Congonhas* airport with 7 routes, in which 5 of them correspond to links not present in BATMN in 2018. Five experiments were performed using data from 2018, as shown in Fig. 68.1, with 4 layers left in 2019, taking into account the exclusion of ONE from BATMN, which had 91 links in the network, of which only 4 were exclusive to the ONE layer.

- **Experiment 1:** Just the ONE layer is excluded, and the links are not added in any other layer;

Fig. 68.1 Evolution of the multiplex efficiency index for BATMN, using real data between 2010 and 2018 (*full line*). Results of the 5 experiments conducted from airline ONE's departure from the network in 2019 (*dotted lines*)



- **Experiment 2:** All links belonging to ONE in 2018, are distributed to the 4 remaining BATMN airlines (3 airlines get 23 links each, and one gets 22);
- **Experiment 3:** ONE is deleted and a link between *Congonhas/Santos Dumont* is added to the AZU and the 7 links that were created by PTB in 2019, are added to the PTB layer, from *Congonhas* airport. This is the situation most similar to what actually happened with the network in 2019, with the ONE exclusion.
- **Experiment 4:** The 82 links belonging to ONE in 2018, except those at the *Congonhas* airport, are equally distributed in the network of experiment 3 among GLO and TAM.
- **Experiment 5:** Excludes ONE and creates 41 random links from *Congonhas* airport (equivalent number of redistributed slots), 15 to AZU and 26 to PTB, to airports that previously did not receive routes linked to *Congonhas*.

It is possible to observe that the $\mathcal{E}$ -values found are similar, with small variations in the second or third decimal place, except in the last experiment. In all cases, the value of $\mathcal{E}$ increases with the exclusion of ONE, as it is the airline that has the most overlapping routes with other airlines in the last 5 years [6]. In other words, the 5 airlines present in BATMN in 2018 had more route overlapping than the 4 airlines present in 2019, according to the simulations.

The $\mathcal{E}$ -values found in experiments 1 and 2 are equivalent, showing that excluding ONE or redistributing its routes to other companies does not modify the diversification of network links, since 96% of its links already exist in the other layers. In Experiment 3, the creation of new links to PTB, which did not previously operate at *Congonhas* airport, slightly increases the value of $\mathcal{E}$, compared to Experiment 2, due to the creation of 5 new routes in its layer. The addition of the *Congonhas/Santos Dumont* route of AZU does not significantly increase the value of $\mathcal{E}$, since this link already existed in other layers. The $\mathcal{E}$ -value of experiment 4 is equivalent to that of experiment 3, due to the high overlap of the 82 links that belonged to ONE. The highest growth, 32% above $\mathcal{E}$ in 2018, can be seen in experiment 5, when 41 different routes are created for PTB and AZU, which are the most diversified layers of the network [6]. Comparing the scenarios of experiments 5 and 1, there is an increase of 15%, whereas from experiment 3 to 1 the increase is only 2%. It can be concluded that releasing slots from one airline to another has no significant effect on the network efficiency as it is not synonymous to route diversification.

To investigate other causes of fluctuations in the Multiplex Efficiency Index, we studied possible correlations between the $\mathcal{E}$ values, the average airfare price (in US dollars) and the load factor, which represents the utilization rate of the seats offered on the aircraft [7]. The strong Pearson's correlation coefficient between $\mathcal{E}$ and the load factor (0.92) is evident from Fig. 68.2a. When comparing the average value of tickets with $\mathcal{E}$, it is found anti-correlation (-0.89) until 2014 and strong correlation (0.96) after 2014 (Fig. 68.2b). As ticket prices fall, the load factor is expected to increase, and vice versa. The novelty here is that the Multiplex Efficiency Index followed the load factor. This points to the fact that the greater the diversification of routes, the higher the rate of aircraft seat utilization, and this is strongly related to ticket prices.

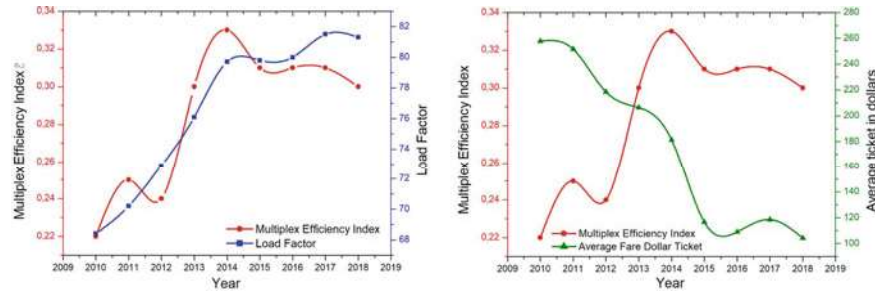


Fig. 68.2 Evolution of $\mathcal{E}$ -index values and possible correlations with other BATMN quantities. **a** The left panel shows the $\mathcal{E}$ values and Load Factor. **b** The right panel displays the average value of BATMAN airline tickets (US dollar) and $\mathcal{E}$

By analyzing the node-level Multiplex Efficiency Index, it is possible to get the ranking of the most efficient airports on the network. In this article, the first 10 airports of 2010 and 2018, and also of 2014 are displayed, when the maximum value of $\mathcal{E}$ occurs. In addition to the top 10, airports that were privatized up to 2018 are highlighted [6]. It is possible to observe large variations in the ranking, caused by the merge of three airlines between 2010 and 2014. In 2013, begins a major expansion of AZU, gradually connecting many secondary airports and diversifying routes to other airlines. AZU became the airline contributing to the system from 2014, high diversity values. The same diversity order occurs over the last 5 years, as found by Oliveira et al., in [6]. Airports that had few connections, are more connected since this expansion. In addition, AZU operates more frequently at busiest airports in the country, connecting them to secondary airports. Depending on the demand for corporate flights and business niches, there may be more or less route overlap between airlines. Thus, changes in the connections of secondary airports and large hubs have been observed over the years (Table 68.1).

68.4 Conclusions

According to the construction of BATMN, it is noticed that there was a market concentration, reducing the number of airlines from 8 airlines in 2010 to only 4 airlines in 2019. The Multiplex Efficiency Index shows that as merges occur, the diversification of routes increases. Depending on the niche of each company, there was more or less diversification of routes from each airport, regardless of whether it is secondary or a network hub. Airports privatizations did not significantly influence the diversification of network links. With the exclusion of ONE, the network efficiency increases because many ONE's routes were overlapping the others. In other words, the remaining airlines have more diverse routes to each other. The growth in the network's

Table 68.1 Placement of privatized airports in the $\mathcal{E}$ ranking in 2010, 2014 and 2018 and other airports that were in the top 10

Year of privatization	ICAO Airport	Served City	2010 ranking	2014 ranking	2018 ranking
2011	SBSG ¹	Natal	17	15	21
2012	SBBR	Brasília	9	36	29
2012	SBKP	Campinas	4	43	4
2012	SBGR	Guarulhos	7	32	39
2013	SBCF	Confins (Belo Horizonte)	12	17	9
2013	SBGL	Rio de Janeiro (Galeão)	3	23	30
2017	SBFL	Florianópolis	6	12	19
2017	SBFZ	Fortaleza	1	18	13
2017	SBPA	Porto Alegre	10	9	7
2017	SBSV	Salvador	11	38	35
–	SBBH	Belo Horizonte (Pampulha)	60	19	3
–	SBCT	Curitiba	8	8	20
–	SBFI	Foz do Iguaçu	48	5	10
–	SBIL	Ilhéus	25	4	8
–	SBJP	João Pessoa	51	7	22
–	SBNF	Navegantes	31	39	6
–	SBPJ	Palmas	44	3	2
–	SBPV	Porto Velho	35	2	43
–	SBRF	Recife	5	16	23
–	SBRP	Ribeirão Preto	13	6	1
–	SBSP	São Paulo (Congonhas)	2	10	15
–	SBUL	Uberlândia	18	1	5

¹SBSG is the new airport serving Natal city from 2014

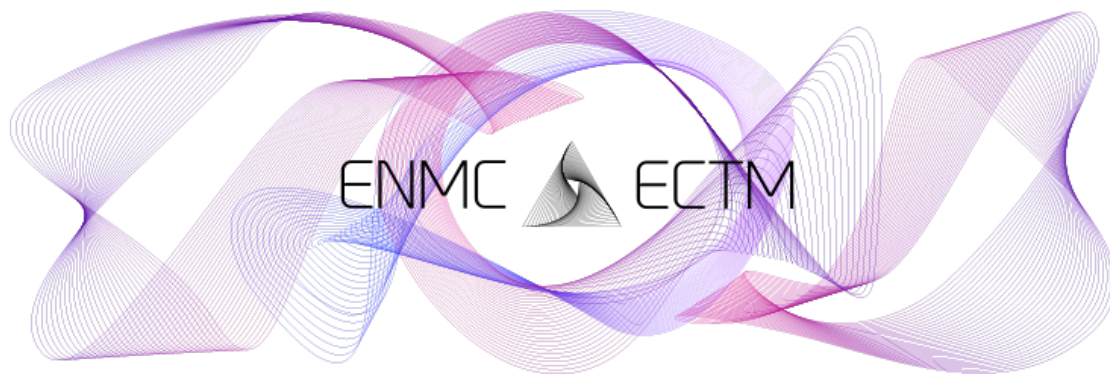
Multiplex Efficiency Index means greater route diversification among airlines. Thus, the occupancy rate of the aircraft also increases and this fact influences the prices of airline tickets.

References

1. T.F. Costa, G. Lohmann, A.V. Oliveira, Res. Transp. Econ. **26**(1), 3 (2010)
2. Brazilian Government Publications. Ministério do Planejamento (2012). <http://www.pac.gov.br/noticia/b1bbf26d>

3. Brazilian Government Publications. ANAC (2010). https://www.anac.gov.br/A_Anac/institucional
4. Agência M Brasil, <http://agenciabrasil.com.br/2019/02/sobre-o-transporte-ferroviario-de-passageiros-entre-sao-paulo-rio-de-janeiro-e-belo-horizonte> (2019)
5. El País (2014). https://brasil.elpais.com/brasil/2014/07/15/economia/1405381188_257885.html
6. I.M. Oliveira, L.C. Carpi, A.P.F. Atman, The multiplex efficiency index: unveiling the Brazilian air transportation multiplex network—batmn Sci. Rep. **10**(1), 13339 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-020-69974-0>
7. Brazilian Government Publications. ANAC (2016). <http://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/dados-estatisticos/dados-estatisticos>
8. L.C. Carpi, T.A. Schieber, P.M. Pardalos, G. Marfany, C. Masoller, A. Díaz-Guilera, M.G. Ravetti, Sci. Rep. **9**(1), 4511 (2019)
9. L.C. Carpi et al., Github **9**(1), 4511 (2019). https://github.com/tischieber/assessing_diversity_in_multiplex_networks/
10. I.M. Oliveira, L.C. Carpi, A.P.F. Atman, in *Anais ENMC 2019* (Encontro Nacional de Modelagem Computacional, Juiz de Fora, 2019), pp. 1959–1968. <http://enmc.fadep.org.br/anais>
11. Brazilian Government Publications. ANAC (2019). <https://www.anac.gov.br/noticias/2019/alocacao-de-slots-em-congonhas-e-definida>
12. Portal de Notícias Uol (2017). <https://airway.uol.com.br/ponte-aerea-rio-sao-paulo-e-rotas-mais-movimentada-das-americas/>

APÊNDICE E – Artigo: Quantificando Eficiência em Redes Multiplex



08 a 11 de Outubro de 2019
Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - MG

QUANTIFICANDO EFICIÊNCIA EM REDES MULTIPLEX

Izabela Marques de Oliveira^{1,2} - izabelamarques@cefetmg.br

Laura Corina Carpi² - lauracarpi@gmail.com

Allbens Atman Picardi Faria^{2,3,4} - atman@cefetmg.br

¹Departamento de Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG. Av. Amazonas, 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil. CEP: 30.510-000.

²Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, PPGMMC, CEFET-MG.

³Departamento de Física, CEFET-MG

⁴Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Sistemas Complexos, INCT-SC, CEFET-MG.

Resumo. O crescente interesse pelo estudo de sistemas complexos interconectados através de estruturas multiplex, trouxe também a necessidade de novas medidas que auxiliem na sua análise. Nesse sentido, o índice de eficiência multiplex $\mathcal{E}$ foi recentemente introduzido e é apresentado aqui de forma mais detalhada e generalizada. Utilizando o índice $\mathcal{E}$ é possível comparar as taxas de heterogeneidade de conexões de duas ou mais redes multiplex, independentemente do número de camadas que elas possuem, permitindo assim a análise da sua evolução temporal quando o número de camadas varia ao longo do tempo. A combinação do índice $\mathcal{E}$ com a ordem de diversidade apresentada em um recente trabalho, oferece poderoso instrumento para quantificar a eficiência de uma rede multiplex, considerando a diversidade dos padrões de conexões das camadas e da cobertura global dos links existentes. Dessa forma é possível identificar as camadas que mais incrementam a eficiência do sistema, viabilizando a inclusão ou exclusão de camadas conforme o objetivo desejado. O cálculo de $\mathcal{E}$ e da ordem de diversidade são apresentados em um exemplo teórico e também na rede europeia de transporte aéreo. Mudanças nos valores de eficiência da aliança aérea Star Alliance são estudados considerando a inclusão e exclusão de diferentes companhias aéreas.

Keywords: Índice de eficiência multiplex, Rede multiplex, Medida de eficiência, Diversidade em redes, Redes complexas

1. INTRODUÇÃO

Redes complexas têm sido alvo de pesquisas nos últimos anos, devido à sua utilidade para estudar diferentes ligações entre entidades. Podemos citar, por exemplo, as redes sociais, que interligam usuários através de diferentes conexões; redes de pesquisadores, conectados através das citações; redes de transportes, nas quais as estações de trem ou terminais rodoviários são ligados pelas rotas entre si, além de muitos outros tipos.

Quando o mesmo conjunto de entidades, que são representados por nós, é interligado através de diferentes conexões, como por exemplo, o mesmo conjunto de pessoas (nós) interligado de diferentes formas por várias redes sociais, tais como *Facebook*, *Instagram*, *Twitter*, redes de trabalho, família, escola e outras, podemos considerar que cada uma dessas redes são camadas interconectadas, e assim temos uma rede multiplex. Rede multiplex é uma classe de redes que modela sistemas nos quais o mesmo conjunto de nós é conectado por mais de um tipo de links (Kyu-Min Lee et al., 2015).

Com o crescimento da utilização desse conceito no estudo de redes complexas, novas medidas tem sido necessárias para analisar essa interconexão. Em um trabalho que contempla conceitos introdutórios ao tema e aplicações, Kyu-Min Lee et al. (2015) exibem algumas formulações e medidas matemáticas para essas classe de redes, tais como representação matricial, grau multiplex, correlações entre layers e medidas baseadas em distância.

Nicosia & Latora (2015) introduzem métodos para medir e modelar correlações entre camadas de redes multiplex, aplicando a redes do mundo real. Em Cellai et al. (2013) é mostrado que a robustez de um sistema multiplex pode ser melhorada através da sobreposição de camadas, interferindo no comportamento crítico da transição de fase de percolação.

Recentemente, surgiram novas medidas de distância entre redes, tais como no trabalho de Shimada et al. (2016), que emprega uma matriz laplaciana para captar propriedades estruturais de sistemas dinâmicos. Nessa mesma direção, medidas de dissimilaridades foram introduzidas por Schieber et al. (2017), permitindo quantificar diferenças entre as distribuições de probabilidade de distância extraídas das redes.

Carpi et al. (2019) introduziram a medida de diversidade para uma rede multiplex, no intuito de mensurar o nível de heterogeneidade de um sistema, identificando os componentes mais relevantes para o valor global de diversidade, e que pode ser aplicado para grandes estruturas multiplex. A medida de diversidade proposta por Carpi et al. (2019) contribui significativamente para quantificar diferenças entre padrões de conectividade de redes multiplex, porém esse valor é influenciado pelo número de camadas presentes na rede. Este problema é resolvido por Oliveira et al (2019) ao introduzir o índice de eficiência multiplex $\mathcal{E}$ (Multiplex Efficiency Index), que relaciona o valor de diversidade das conexões da rede multiplex com o número de camadas presentes na rede, possuindo inúmeras aplicações, e, portanto, ele é generalizado no presente trabalho.

O índice de eficiência multiplex é uma normalização da diversidade em relação ao número de camadas. Nesse sentido, é possível avaliar diferenças entre padrões de conectividade de uma mesma rede evoluindo ao longo do tempo, ou entre redes diferentes. Para se ter uma ideia, ao calcular a diversidade de uma rede com M camadas, o valor encontrado será um número U tal que $0 \leq U \leq M - 1$. Dessa forma, para uma rede com 10 camadas, por exemplo, o valor da diversidade U está entre 0 e 9; já para uma rede com 4 camadas, U será um valor entre 0 e 3. Assim, não é possível aferir se uma rede é mais diversa do que outra, sem esbarrar na influência exercida pelo número de camadas participantes da rede. Empregando o índice de eficiência multiplex proposto por Oliveira et al (2019), obtemos um valor de $\mathcal{E}$ que estará sempre entre 0 e 1 e, portanto, é possível quantificar as diferenças entre os padrões de conectividade de uma rede e comparar com outra. Se as ligações entre os nós de uma rede for pouco diferenciada entre as camadas, ou seja, os links entre os nós nas diferentes camadas são semelhantes, então o valor do índice $\mathcal{E}$ será próximo de 0. Por outro lado, se ocorrer menor sobreposição de links, variando mais as conexões de uma camada para outra, então o valor do índice $\mathcal{E}$ será mais próximo de 1. É preciso observar que valores de $\mathcal{E}$ próximos de 1 só ocorrerão em redes com pequena sobreposição de links e, portanto, muito heterogênea em suas conexões. Além disso, em redes

da mesma natureza é esperado que os valores de $\mathcal{E}$ não sejam discrepantes, conforme o sistema em questão tenha característica de alta (ou baixa) sobreposição de links.

Uma análise da rede de transporte aéreo da Europa foi conduzida por Carpi et al. (2019), com o estudo de algumas alianças de companhias aéreas e possíveis alterações provocadas pela inclusão ou exclusão de empresas na *Star Alliance*. Refazemos aqui essa análise, sob o ponto de vista do índice de eficiência multiplex, que possibilita nova abordagem.

2. METODOLOGIA

Em um recente trabalho, Carpi et al. (2019) apresentaram a medida de diversidade de uma rede multiplex. Sabemos que uma rede multiplex é constituída por um mesmo conjunto de N elementos, que são chamados nós, interligados de diferentes maneiras, definindo assim, as M camadas da rede, e é representada por um conjunto de $M_{N \times N}$ matrizes de adjacência, $\mathcal{A} = \{A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[M]}\}$. Com a proposta de Carpi et al. (2019) é possível medir a diversidade local (no nível dos nós) ou a diversidade global do sistema (no nível das camadas), captando a variedade de padrões de conectividade entre os elementos da rede e, para isso, são empregadas medidas de distâncias entre pares de elementos do sistema. Para tanto, foram definidas duas distribuições de probabilidade que são extraídas da rede. Na primeira delas, chamada “*Node Distance Distribution*” (NDD), estão contidas informações sobre a topologia geral da camada: para cada nó i na camada p , $\mathcal{N}_i^p(d)$ corresponde à fração de nós alcançáveis a partir do nó i , pelo menor caminho d . A segunda distribuição de probabilidade, denominada “*Transition Matrix*” (TM), refere-se a informações locais sobre a conectividade da camada: $\mathcal{T}_i^p(j)$ é a probabilidade de que o nó j seja alcançado, em um passo, por um *random walker* localizado no nó i . $\mathcal{T}^p$ é a matriz de adjacência da camada p re-escalada pelo grau de cada nó.

De posse dessas distribuições que descrevem os grafos de cada camada, é possível calcular a diferença dos caminhos de conectividade do nó i nas camadas p e q , chamada *Node Difference* (ND), empregando a divergência de Jensen-Shannon (Cichocki & Amari, 2010) para medir a distância entre duas distribuições de probabilidade, a saber:

$$\mathcal{D}_i(p, q) = \frac{\sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{N}_i^p, \mathcal{N}_i^q)} + \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{T}_i^p, \mathcal{T}_i^q)}}{2\sqrt{\log(2)}}. \quad (1)$$

A partir da Eq. (1), fica claro que $0 \leq \mathcal{D}_i(p, q) \leq 1$. Se $\mathcal{D}_i(p, q) = 0$ significa que as conexões do nó i são idênticas nas duas camadas p e q ; no outro extremo, se $\mathcal{D}_i(p, q) = 1$, então o nó i está totalmente conectado em uma camada e é um nó isolado na outra.

Para computar a diferença entre duas camadas, Carpi et al. (2019) definem a *Layer Distance* (LD) que quantifica a diferença de caminhos de conectividade entre as camadas p e q . Para isso, tomam a média de $\mathcal{D}_i(p, q)$ sobre todos os nós i , de 1 a N . Assim,

$$\mathcal{D}(p, q) = \langle \mathcal{D}_i(p, q) \rangle_i. \quad (2)$$

Novamente obtemos uma medida tal que $0 \leq \mathcal{D}(p, q) \leq 1$. Quando $\mathcal{D}(p, q) = 0$, significa que as camadas p e q são idênticas; por outro lado, $\mathcal{D}(p, q) = 1$, implica que uma camada é totalmente conectada, enquanto a outra é completamente desconectada.

Para definir diversidade, Carpi et al. (2019) empregam a distância entre um elemento g e um conjunto S , definida como a menor distância entre o elemento g , não pertencente a S e algum elemento de S :

$$\mathcal{D}(g, S) = \min_{s_i \in S} \mathcal{D}(g, s_i). \quad (3)$$

Quando os elementos envolvidos são os nós da rede, usa-se a medida ND dada na Eq. (1) para calcular a distância referida pela Eq. (3); em outra situação, para obter a distância entre camadas da rede (Eq.3), emprega-se a distância LD dada pela Eq. (2). Desse modo, obtem-se sempre valores tais que $0 \leq \mathcal{D}(g, S) \leq 1$.

Finalmente, a função diversidade $U(\tilde{S} \rightarrow \mathbb{R})$ é definida recursivamente como

$$U(S) = \max_{s_i \in S} \{U(S \setminus s_i) + \mathcal{D}(s_i, S \setminus s_i)\}, \quad (4)$$

para todo $S \in \tilde{S}$, que é o conjunto de todas as entidades consideradas, de tal modo que o conjunto S contenha, pelo menos, dois elementos. Observamos pela definição dada em Eq. (4) que o valor da diversidade é calculado através da soma de $M - 1$ distâncias obtidas através da Eq. (3), e, portanto, é limitado superiormente por $M - 1$, onde M é o número de camadas da rede multiplex. Se a rede analisada tiver, por exemplo, 10 camadas, o valor de U será um número real entre 0 e 9; ao passo que, se a rede tiver 5 camadas, U será um valor entre 0 e 4. Sendo assim, para comparar a eficiência destas estruturas no sentido de diversidade de conexões, é necessário obter uma medida não dependente do número de camadas.

Neste sentido, Oliveira et al (2019) introduzem o conceito de *índice de eficiência multiplex* ($\mathcal{E}$), que leva em conta a quantidade de camadas da rede, relacionando o valor de diversidade do sistema e o número de camadas envolvidas:

$$\mathcal{E} = \frac{U(S)}{M - 1}, \quad (5)$$

de modo que $0 \leq \mathcal{E} \leq 1$. Assim é possível comparar os valores do índice de eficiência multiplex entre redes, sem a influência das camadas, além de facilitar a análise do valor encontrado. Para redes nas quais haja grande sobreposição de arestas em suas camadas, ou seja, muita semelhança nos padrões de conectividade, o valor do índice $\mathcal{E}$ será próximo de 0 e, por outro lado, em redes onde as conexões sejam mais diversas quando olhamos para as diferentes camadas, o valor de $\mathcal{E}$ será mais próximo de 1.

Ao computar o valor de diversidade através da Eq. (4), os elementos considerados são levados em conta a partir daquele que é “mais próximo” aos outros, até o último, que será o “mais distante” dos demais, considerando *distância* no sentido dado pela Eq. (3). Desse modo, Carpi et al. (2019) definiram o conceito de *ordem de diversidade*, que é dado através do conjunto de entidades da rede ordenado de forma crescente, à medida em que cada uma contribui para a composição do valor final da diversidade. Essa ferramenta é extremamente útil para identificar quais são as camadas (ou nós) que adicionam mais (ou menos) diversidade de links à rede e, assim, possibilita a tomada de decisões de excluir ou acrescentar elementos à rede, conforme o objetivo desejado, que seja adicionar ou reduzir a eficiência da rede, no sentido de diversificação de conexões e cobertura da rede.

Carpi et al. (2019) disponibilizam livremente os algoritmos para o cálculo do valor de diversidade dado pela Eq. (4) em um repositório em Carpi et al. (2018).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Fizemos alguns experimentos para avaliar o índice de eficiência multiplex para redes em três situações diferentes, que são exibidas na Fig. 1. Aplicando os códigos para o cálculo de diversidade disponibilizados por Carpi et al. (2018) obtemos o valor da diversidade da rede e também a matriz de distâncias dadas pela Eq. (3), que representa as distâncias entre cada par

de camadas presentes na rede. Através dessa matriz, podemos obter a *ordem de diversidade* e, posteriormente, o valor da eficiência medido pela Eq. (5). Exemplificamos esses cálculos, a partir da matriz de distâncias, para o Experimento 2. Apresentamos a seguir os três estudos realizados.

Experimento 1. Inicialmente criamos uma rede com três camadas, contendo o mesmo conjunto de cinco nós em cada uma, ilustrado na parte esquerda da Fig. 1. Na primeira camada (p) todos os nós são conectados, de modo que é possível, a partir de um nó, chegar a qualquer outro; na segunda camada (q), temos alguns nós desconectados e as únicas arestas presentes já fazem parte da primeira camada e, finalmente, na terceira camada (r), temos também alguns nós desconectados, porém, diferentes daqueles da camada q e uma única aresta, que não está presente nas demais camadas. Sabemos que o valor da diversidade para essa rede encontra-se no intervalo $0 \leq U \leq 2$ e o valor encontrado foi $U(S) = 1,65$. Ao aplicar a Eq. (5), encontramos $\mathcal{E} = 0,83$. Temos, portanto, uma rede na qual o valor do índice de eficiência $\mathcal{E}$ é próximo de 1, o que significa que existe alta cobertura da rede, do ponto de vista global, através das arestas existentes e grande diferença de conexões entre as camadas. A ordem da contribuição de cada camada para a diversidade é $O_D = \{q, p, r\}$, sendo que a camada q é a que menos adiciona diferenças à rede, enquanto r é a que mais contribui para esse valor.

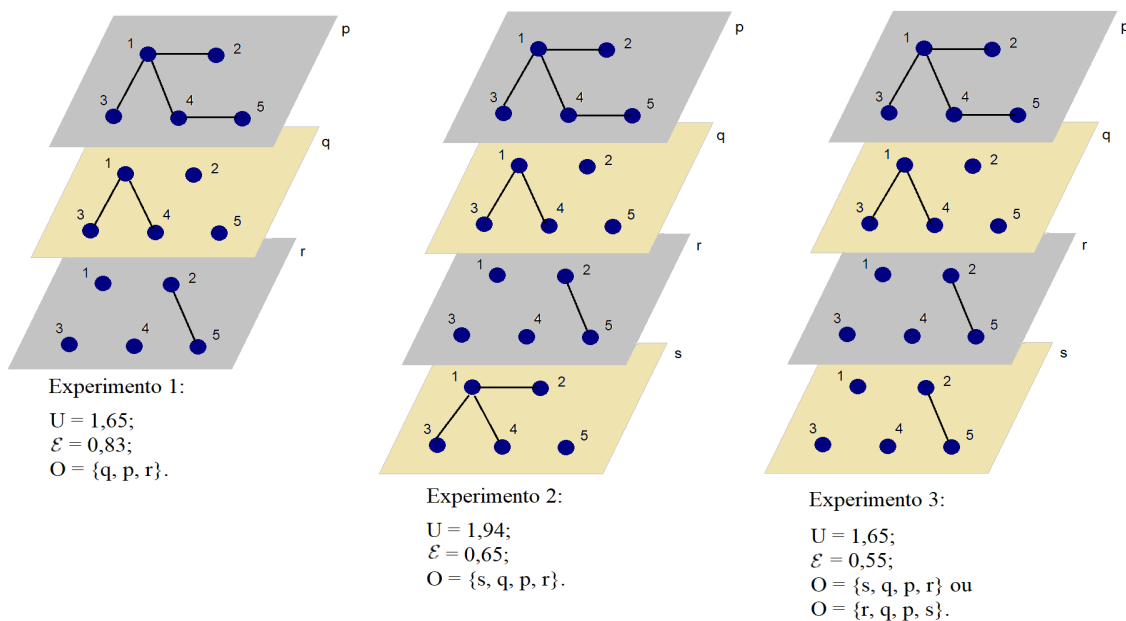


Figura 1- Ilustração de redes multiplex analisadas sob a ótica da diversidade e do índice de eficiência multiplex. Os três experimentos estão ordenados da esquerda para a direita, sendo o primeiro experimento correspondente à figura da esquerda e assim por diante.

Experimento 2. Realizamos então um segundo experimento, criando uma rede com as mesmas três camadas anteriores e adicionando uma quarta camada (s), cujas conexões são muito semelhantes àsquelas da camada p , de maneira que nenhuma “nova” aresta foi adicionada à rede (veja Fig. 1, parte central). Todas as arestas presentes na camada s fazem parte da camada p e algumas delas, também são sobrepostas à camada q . A matriz de distâncias para essa rede é apresentada abaixo, de modo que as linhas e colunas são dadas conforme a sequência das

camadas p, q, r, s :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0,68 & 0,97 & 0,45 \\ 0,68 & 0 & 0,74 & 0,29 \\ 0,97 & 0,74 & 0 & 0,82 \\ 0,45 & 0,29 & 0,82 & 0 \end{bmatrix}$$

Organizando gradativamente as distâncias para cada camada, obtemos:

$$\mathcal{D}(p, S_1) = \{0; 0,45; 0,68; 0,97\},$$

$$\mathcal{D}(q, S_1) = \{0; 0,29; 0,68; 0,74\},$$

$$\mathcal{D}(r, S_1) = \{0; 0,74; 0,82; 0,97\},$$

$$\mathcal{D}(s, S_1) = \{0; 0,29; 0,45; 0,82\},$$

onde S_1 representa o conjunto de camadas presentes na rede nessa etapa. Assim, o menor valor positivo é $\mathcal{D}(q, s) = 0,29$ representando a distância entre as camadas q e s . Analisando os conjuntos de distâncias de ambas às demais camadas, percebemos que s tem a próxima menor distância e, portanto, nesse passo do cálculo, $U = 0 + 0,29$ e a ordem de diversidade recebe a primeira componente: $O_D(S) = \{s\}$. No próximo passo, eliminando os valores correspondentes às distâncias para s , temos:

$$\mathcal{D}(p, S_2) = \{0; 0,68; 0,97\},$$

$$\mathcal{D}(q, S_2) = \{0; 0,68; 0,74\},$$

$$\mathcal{D}(r, S_2) = \{0; 0,74; 0,97\},$$

sendo S_2 o conjunto de camadas excluindo-se a s . Agora o menor valor de distância é $\mathcal{D}(p, q) = 0,68$, que será incluído em $U = 0 + 0,29 + 0,68$. Pela ordem lexicográfica, q está mais próxima de outra camada e, portanto, é a próxima componente da ordem: $O_D(S) = \{s, q\}$. Eliminando agora os valores correspondentes às distâncias até a camada q , resta:

$$\mathcal{D}(p, S_3) = \{0; 0,97\},$$

$$\mathcal{D}(r, S_3) = \{0; 0,97\},$$

e assim chegamos ao último passo do cálculo, onde S_3 é o conjunto contendo as duas camadas restantes para análise. O último valor a ser acrescentado a U é $0,97$ e encontramos então o resultado: $U = 0 + 0,29 + 0,68 + 0,97 = 1,94$. Verificando as distâncias de p e r à última camada excluída anteriormente, vemos que p está mais próxima e, portanto, a ordem final é $O_D(S) = \{s, q, p, r\}$. O valor da diversidade para essa nova rede foi de $U = 1,94$, pertencente ao intervalo $0 \leq U \leq 3$ e agora, através da Eq. (5) é possível obter o valor do índice de eficiência multiplex $\mathcal{E} = 0,65$.

Embora nenhuma nova aresta tenha sido adicionada à rede quando comparada àquela do primeiro experimento, o valor da diversidade aumentou, pelo fato de ter adicionado uma nova camada (influência do número de camadas). Por outro lado, o índice de eficiência multiplex, calculado através da Eq. (5) reduziu para $\mathcal{E} = 0,65$. Isso nos permite concluir que a cobertura da rede não foi ampliada, mas o número de camadas, sim, portanto, o valor de $\mathcal{E}$ nos informa que são empregadas mais camadas sem diversificar a cobertura já existente. Observando a ordem de diversidade, vemos que a camada s , que foi adicionada, realmente é a que menos contribui para a diversificação de links, sendo r e p as que mais adicionam heterogeneidade à rede.

Experimento 3. Finalmente conduzimos um terceiro experimento, partindo das três camadas usadas no primeiro caso e adicionando uma quarta camada s idêntica à camada r , cuja ilustração é mostrada na parte direita da Fig. 1. Dessa forma, nenhuma nova conexão foi acrescentada à rede e temos duas camadas cujo valor da distância entre ambas, calculada pela Eq. (3), é zero, o que faz com que o valor da diversidade seja exatamente igual ao encontrado quando tínhamos apenas três camadas, ou seja, $U(S) = 1,65$. Porém, nesse caso, $0 \leq U \leq 3$ e então

o valor do índice $\mathcal{E}$ cai para $\mathcal{E} = 0,55$ pelo fato de ter uma camada a mais do que no primeiro caso, mantendo exatamente o mesmo padrão de conectividade, o que conduz à menor eficiência da rede. Desse modo, houve redução na diferença entre os padrões de conectividade da rede como um todo, e isso foi captado pelo índice de eficiência multiplex $\mathcal{E}$. A ordem de diversidade para essa rede é $O_D = \{r, q, p, s\}$ ou $O_D = \{s, q, p, r\}$, pois as camadas r e s são iguais. É interessante ressaltar que a camada s não adicionou heterogeneidade à rede e, assim, aparece como a primeira na sequência de contribuição para a eficiência do sistema. Se excluirmos essa camada, teremos exatamente a rede do primeiro experimento, com os mesmos valores de U , $\mathcal{E}$ e o mesmo conjunto O_D .

Comparando os valores de $\mathcal{E}$ encontrados no segundo e terceiro experimentos, fica claro que a segunda rede possui ligações mais heterogêneas, pois apresenta maior valor de $\mathcal{E}$ (ver parte central da Fig. 1).

Aplicação. Para uma aplicação em redes do mundo real, refizemos o experimento conduzido por Carpi et al. (2019), analisando a rede de transporte aéreo europeia, agora sob o ponto de vista do índice de eficiência multiplex. Naquele trabalho, foram apresentados os valores de diversidade para três alianças entre companhias aéreas europeias: Star Alliance (SA), One World (OW) e Skyteam (ST). Tais alianças são representadas por redes multiplex, nas quais os aeroportos europeus são os nós, ligados por rotas (links) existentes entre eles; a rede de rotas de cada companhia aérea participante da correspondente aliança, representa uma camada da rede multiplex. Dessa forma, foram obtidas redes com 9 camadas para a SA e 4 camadas para OW e ST, respectivamente. Portanto, os valores de diversidade apresentados são influenciados pelos números de camadas e a comparação entre eles é tendenciosa. Assim, aplicamos a Eq. (5) e obtemos valores passíveis de comparação entre as três alianças. A Tabela 1 exibe os respectivos valores de diversidade e do índice de eficiência multiplex encontrados para as três alianças, a partir dos resultados mostrados no trabalho de Carpi et al. (2019).

Tabela 1- Valores de diversidade U e índice de eficiência multiplex $\mathcal{E}$ para três alianças de companhias aéreas europeias.

Aliança	U	$\mathcal{E}$
Star Alliance	0,97	0,121
One World	0,34	0,113
Skyteam	0,33	0,110

Apesar dos valores de $\mathcal{E}$ serem muito semelhantes, podemos agora afirmar que SA exibe maior eficiência do que as demais alianças, ou seja, sua taxa de cobertura do território europeu é maior do que das outras duas analisadas. Essa conclusão concorda com o que foi apresentado por Carpi et al. (2019), porém, valores de $\mathcal{E}$ próximos de 0 indicam que a cobertura do território é relativamente pequena, e existe grande sobreposição de rotas entre as empresas participantes de cada aliança. Isso também pode ser visto observando que o valor de diversidade para SA poderia ser tal que $0 \leq U \leq 8$ e o valor encontrado foi $U = 0,97$ e, portanto, SA e as demais alianças consideradas apresentam alta sobreposição de rotas. É esperado que, em redes da mesma natureza, os valores de $\mathcal{E}$ não sejam díspares e, nesse caso de redes de transporte aéreo, tal como foram construídas, é natural que haja alto grau de sobreposição de links (rotas), pois várias companhias aéreas podem atender à mesma rota em horários diferentes e com custos diferentes para os usuários, conforme necessidades do mercado de transporte aéreo. Além

disso, determinadas cidades e aeroportos apresentam maior demanda do que outras, recebendo vôos de várias empresas aéreas e, portanto, os nós correspondentes serão conectados em várias camadas da rede, o que conduz a valores baixos na medida de eficiência.

Após essa análise, Carpi et al. (2019) estudaram o impacto no valor da diversidade da SA quando excluem-se duas camadas, que são referentes à companhia aérea que menos contribui para a diversidade e àquela que mais contribui. Para identificar quais são essas empresas, empregam a ordem de diversidade, encontrando $O(SA) = \{Brussels Airlines (BEL), Swiss Air (SWR), Polish Airlines (LOT), Air Portugal (TAP), Aegean Airlines (AEE), Austrian Airlines (AUA), Scandinavian Airlines (SAS), Turkish Airlines (THY), Lufthansa (DLH)\}$. Assim estudaram o impacto causado pela remoção da Brussels Airlines e, posteriormente, pela exclusão da Lufthansa e concluíram que a remoção de Brussels causa menor impacto no valor final da diversidade da SA, do que a exclusão da Lufthansa, que causa um impacto significativo. Outra análise foi feita ao inserir diferentes empresas aéreas externas ao grupo. Porém, se queremos avaliar que acontece com estes sistemas nestas situações de mudanças na estrutura de camadas, o índice $\mathcal{E}$ se torna mais adequado por levar em consideração o número de camadas da rede.

Refazendo esses experimentos, a partir dos valores mostrados naquele trabalho, encontramos que, ao excluir a Lufthansa, o valor de $\mathcal{E}$ torna-se $\mathcal{E} = 0,11$, enquanto que, com a retirada da Brussels, $\mathcal{E} = 0,13$. O valor de $\mathcal{E}$ para SA sem remover nenhuma das empresas é $\mathcal{E} = 0,12$. Percebemos então, que a remoção da Lufthansa implica em perda de eficiência na rede, por se tratar da camada que mais se diferencia das demais. Já a exclusão da Brussels aumenta a eficiência, por ser a camada que tem mais sobreposições de links com as outras, ou seja, é possível realizar o trabalho de cobertura da rede com número menor de companhias aéreas, aumentando assim a diferença entre os padrões de conexões das rotas entre as diferentes empresas.

Quanto à inclusão de empresas externas à SA, quando adicionamos Iberia à rede, o valor de $\mathcal{E} = 0,12$ é encontrado, enquanto a inclusão da Ryanair resulta em $\mathcal{E} = 0,14$. Comparando com o valor original de $\mathcal{E}$ para SA ($\mathcal{E} = 0,12$), percebemos que adicionar Iberia à aliança reduz a eficiência, o que nos leva a concluir que as rotas da Iberia são altamente sobrepostas a outras já existentes na rede e, portanto, temos uma cobertura próxima da já existente, com uma camada a mais na rede. Por outro lado, ao incluir a Ryanair, o valor de $\mathcal{E}$ aumenta, o que é explicado por Carpi et al. (2019) através do fato da Ryanair ter a maior diferença (medida pela Eq. (3)) em relação a todas as outras companhias aéreas investigadas, principalmente por utilizar aeroportos secundários, destacando-se das demais. Portanto, a inclusão da Ryanair aumenta a eficiência da rede, ampliando sua cobertura.

4. CONCLUSÕES

Redes com estrutura multiplex são úteis para analisar diferentes tipos de conexões entre um mesmo conjunto de elementos, em várias áreas do conhecimento, tais como transportes, ecologia, biologia, redes sociais etc.

Com o índice de eficiência multiplex $\mathcal{E}$ apresentado aqui, é possível obter a taxa de cobertura da rede, quantificando a diferença entre padrões de conectividade presentes nas diversas camadas da rede multiplex. Ele permite comparar os níveis de heterogeneidade de duas ou mais redes, independentemente do número de camadas que as compõem. Além disso, é possível avaliar a evolução temporal de um mesmo sistema, ainda que sua estrutura de camadas varie com o tempo. Quanto maior a heterogeneidade de links, maior a eficiência, possibilitando a transferência de informações entre as camadas.

Empregando o índice de eficiência multiplex e a ordem de diversidade, que exhibe a sequência de camadas conforme a contribuição de cada uma delas para a composição do valor final da diversidade da rede, obtemos uma poderosa combinação de ferramentas para avaliar quantitativa e qualitativamente os padrões de conectividade de redes multiplex, possibilitando a tomada de decisões sobre aumento ou redução de eficiência das conexões da rede.

Agradecimentos

Pesquisa parcialmente suportada pelas agências CAPES, CNPq e FAPEMIG. Izabela Marques de Oliveira e Laura Carpi agradecem ao CEFET-MG. Laura Carpi agradece a CAPES e FAPEMIG. Allbens Atman Picardi Faria agradece às agências FAPEMIG e CNPq e a concessão de pesquisa do CNPq 308792/2018-1.

REFERÊNCIAS

- Bossert, W., Pattanaik, P. K. & Xu, Y. (2001), “The measurement of diversity”.
- Carpi, L. C. et al (2018), “Assessing Diversity in Multiplex Networks - Codes, Datasets and Examples”. Disponível em: https://github.com/tischieber/assessing_diversity_in_multiplex_networks/
- Carpi, L. C. et al (2019), “Assessing diversity in multiplex networks”. Scientific Reports, 9(1):4511.
- Cellai D. et al. (2013), “Percolation in multiplex networks with overlap”. Physical Review E, 88(5):052811.
- Cichocki, A. & Amari, S.-i. (2010), “Families of alpha-beta-and gamma-divergences: Flexible and robust measures of similarities”. Entropy 12, 1532–1568.
- Kyu-Min Lee, Byungjoon Min, and Kwang-Il Goh (2015), “Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks”. “The European Physical Journal B”, 88(2):48.
- Nicosia, V. and Latora, V. (2015), “Measuring and modeling correlations in multiplex networks”. Physical Review E, 92(3):032805, 2015.
- Oliveira I.M., Carpi L., and Atman A.P.F. (2019), “The Multiplex Efficiency Index: unveiling the Brazilian Air Transportation Multiplex Network - BATMN”. Artigo submetido para revisão.
- Page, S. E. (2010), “Diversity and Complexity”, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1st edn.
- Schieber, T.A. et al. (2017), “Quantification of network structural dissimilarities”. Nature Communications, 8:13928.
- Shimada, Y. et al. (2016), “Graph distance for complex networks”. Scientific Reports, 6:34944.
- Weitzman, M. L. (1992), “On diversity”, Quarterly Journal of Economics 107, 363–405.

QUANTIFYING EFFICIENCY IN MULTIPLEX NETWORKS

Abstract. *The growing interest of the study of interconnected complex systems multiplex network structures brought the need of novel measures to assist in their. In this direction, the multiplex efficiency index $\mathcal{E}$ has recently been introduced and is it here presented in a more detailed and generalized way. Using index $\mathcal{E}$ it is possible to compare the heterogeneity rates of connections of two or more networks, regardless of the number of layers they have, allowing, for example, the analysis the temporal of the system, when the number of layers change over time. The combination of index $\mathcal{E}$ with the diversity ordering, presented in a recent work, offers a powerful tool for the quantification of the efficiency of a multiplex structure, considering the diversity of the layers connectivity patterns and network global coverage. In this way, it is possible to identify the layers that most increase the efficiency of the system enabling the inclusion or exclusion of layers according to a desired objective. The computation of the index $\mathcal{E}$ and the diversity ordering are presented in both, theoretical examples and in the study of the European air transportation network. Changes in the global efficiency value of the Star Alliance network are studied considering the inclusion and exclusion of different airlines.*

Keywords: *Multiplex efficiency index, Multiplex network, Efficiency measure, Network diversity, Complex networks*