

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



ARTHUR GOMES ARAÚJO

**ENSINO DE TRANSIÇÃO: o desenvolvimento do Pensamento
Matemático Avançado**

Belo Horizonte
2025

ARTHUR GOMES ARAÚJO

**ENSINO DE TRANSIÇÃO: o desenvolvimento do Pensamento Matemático
Avançado**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador(a):

Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora:

Dra. Celi Aparecida Espasandin Lopes

Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira

Dra. Eliane Scheid Gazire

Dr. Gilmer Jacinto Peres

Belo Horizonte
2025

A663e Araújo, Arthur Gomes
Ensino de transição: o desenvolvimento do pensamento matemático avançado /
Arthur Gomes Araújo. – 2025.
224 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais.

1. Matemática – Estudo e ensino (Médio) – Teses. 2. Desempenho acadêmico –
Teses. 3. Matemática – Aspectos psicológicos – Teses. I. Ferreira, Fernanda
Aparecida. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.
III. Título.

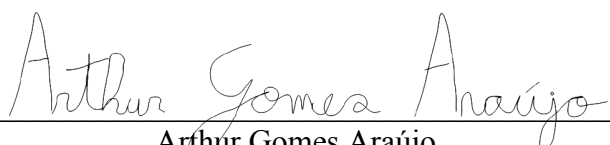
CDD 510.7

ARTHUR GOMES ARAÚJO

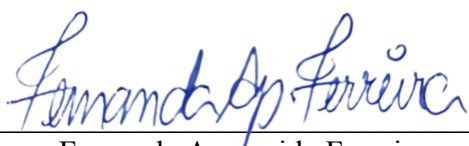
**ENSINO DE TRANSIÇÃO: o desenvolvimento do Pensamento Matemático
Avançado**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 13 de junho de 2025.



Arthur Gomes Araújo
(Autor)



Fernanda Aparecida Ferreira
(Orientadora)

Belo Horizonte
2025

Dedico este trabalho aos meus próximos, família, amigos, alunos, professores, colegas de mestrado e de trabalho, orientadora, comunidade, que me apoiaram incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira, minha maravilhosa orientadora que me conduziu nesta pesquisa, elevando sempre as minhas reflexões com suas inúmeras considerações. Fernanda tem a sabedoria de produzir diamantes, tanto na etapa da pressão elevada do desafio de se fazer pesquisa quanto na etapa de lapidação das palavras, criando interfaces de perspectivas que reluzem para o cerne da Educação.

Agradeço ao professores Carlos Magno Martins Cosme, Dênis Emanuel da Costa Vargas, Éden Santana Campos Amorim, Fernanda Aparecida Ferreira, Frederico Augusto Menezes Ribeiro, Gilmer Jacinto Peres, Izabela Marques de Oliveira, Jane Lage Bretas, Jônathas Douglas Santos de Oliveira, Luiz Gustavo Perona Araújo e Sandra Mara Alves Jorge que ministraram magnificamente as disciplinas do PROFMAT.

Agradeço aos professores Gilmer Jacinto Peres e Davidson Paulo Azevedo Oliveira pelas contribuições significativas que dialogamos por todo este percurso de investigação..

Agradeço aos coordenadores do PROFMAT Pedro Henrique Pereira Daldegan e Fernanda Aparecida Ferreira e ao secretário Pedro Falci Cardoso pelo acompanhamento administrativo, essencial para a execução do programa.

Agradeço aos meus colegas de PROFMAT da turma de 2023: Cinthia, Dinalva, Florence, Joel, Jorge, Marcos, Welison e especialmente aos apóstolos – da matemática – Pedro e Paulo, parceiros de diversos trabalhos.

Agradeço ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) e seus diversos setores gerenciados por técnicos administrativos competentes.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação nacional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A proposta desta dissertação é discorrer sobre as possibilidades do ensino de Matemática Acadêmica para alunos do Ensino Médio. Nossa revisão de literatura é sustentada por três bases teóricas: Ensino de Transição, Matemática Escolar e Acadêmica e Pensamento Matemático Avançado. Tomando a pesquisadora Ghislaine Gueudet como referência principal, entendemos o Ensino de Transição como um campo da pesquisa em Educação Matemática que investiga as dificuldades relacionadas aos processos de mudanças epistemológicas, cognitivas, socioculturais, institucionais e didáticas da jornada escolar e propõe ações para suavizá-las. Para investigar a mudança epistemológica na Transição Ensino Médio-Superior, reunimos concepções de Matemáticas Escolar e Acadêmica demarcadas nesse campo. Para investigar a mudança cognitiva, acarretada pela epistemológica, focamos na teoria de David Tall acerca do Pensamento Matemático Elementar e Avançado. Esse arcabouço teórico fundamentou a elaboração de um Projeto de Ensino, nosso Recurso Educacional, com o objetivo de tornar a matemática dos cursos de Ciências Exatas mais acessível e atraente para os alunos secundaristas que desejam ingressar no Ensino Superior. Optamos por trabalhar com o Princípio de Indução Matemática, um tópico de Transição, porque tem os lados algorítmico (Elementar) e intuitivo (Avançado). Destacamos que configuramos uma base cognitiva para uma metodologia adequada, com elementos combinados de Matemática Escolar e Acadêmica, com intuito de tornar suave essa Transição. Por fim, anunciamos um adendo à teoria cognitiva de Tall, que denominamos “conceito cristalino imagético”, um suporte cognitivo para uma nova metodologia para o Ensino de Transição a ser desenvolvida futuramente.

Palavras-chave: Ensino de Transição. Transição Ensino Médio-Superior. Matemática Escolar e Acadêmica. Pensamento Matemático Avançado.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to discuss the possibilities of teaching Academic Mathematics to high school students. Our literature review is supported by three theoretical bases: Transition Teaching, School and Academic Mathematics, and Advanced Mathematical Thinking. Taking researcher Ghislaine Gueudet as the main reference, we understand Transition Teaching as a field of research in Mathematics Education that investigates the difficulties related to the processes of epistemological, cognitive, sociocultural, institutional, and didactic changes in the school journey and proposes actions to soften them. To investigate the epistemological change in the High School–Higher Education Transition, we brought together concepts from School Mathematics and Academic Mathematics demarcated in this field. To investigate the cognitive change, brought about by the epistemological change, we focused on David Tall's theory about Elementary and Advanced Mathematical Thinking. This theoretical framework was the basis for the development of a Teaching Design, our Educational Resource, with the aim of making mathematics in Exact Sciences courses more accessible and attractive to High School students who wish to enter Higher Education. We chose to work with the Principle of Mathematical Induction, a Transitional topic, because it has both algorithmic (Elementary) and intuitive (Advanced) sides. We emphasize that we have configured a cognitive basis for an appropriate methodology, with combined elements of School and Academic Mathematics, with the aim of making this Transition smooth. Finally, we announce an addendum to Tall's cognitive theory, which we call “imagery crystalline concept”, a cognitive support for a new methodology for Transition Teaching to be developed in the future.

Keywords: Transitional Education. Secondary-Tertiary Transition. School and Academic Mathematics. Advanced Mathematical Thinking.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

BH – Belo Horizonte

CEFET-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CEP – Comitê de Ética em Pesquisa

CNS – Conselho Nacional de Saúde

CONEP – Comissão Nacional de Ética em Pesquisa

DEPT – Diretoria de Educação Profissional Tecnológica

ENADE – Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

EPTNM – Educação Profissional Técnica de Nível Médio

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

IEMG – Instituto de Educação de Minas Gerais

OMS – Organização Mundial de Saúde

PAPMEM – Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede

PUC Minas – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

SISU – Sistema de Seleção Unificada

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esboço do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático pesquisador.....	58
Figura 2 – A ampla maturação das estruturas de prova.....	62
Figura 3 – Os Três Mundos da Matemática ilustrados por aspectos selecionados.....	69
Figura 4 – Espectro de resultados decorrentes do aumento da compressão do simbolismo....	70
Figura 5 – Três vertentes de desenvolvimento conceitual: corporificado, simbólico e formal.....	72
Figura 6 – Corrida dos números primos.....	87
Figura 7 – Quantas regiões em cada um desses círculos?.....	88
Figura 8 – Regiões de um círculo com 6 pontos.....	89
Figura 9 – Números hex.....	91
Figura 10 – Canto de pilha cúbica.....	92
Figura 11 – Triminó.....	96
Figura 12 – Quadrados 2X2.....	97
Figura 13 – Quadrado 4X4 retirado um quadradinho (preto).....	97
Figura 14 – Polígono de 7 lados dividido em 5 triângulos.....	107
Figura 15 – Polígonos.....	108
Figura 16 – Torre de Hanói com cinco discos.....	109
Figura 17 – Torre de Hanói utilizada.....	115
Figura 18 – Resposta à situação 1 do aluno A.....	124
Figura 19 – Resposta à situação 1 do Aluno B.....	125
Figura 20 – Resposta à situação 1 do Aluno C.....	126
Figura 21 – Resposta à situação 1 do Aluno D.....	127
Figura 22 – Resposta à situação 1 do Aluno E.....	127
Figura 23 – Resposta à situação 1 da Aluna F.....	128
Figura 24 – Resposta à situação 2 do Aluno G.....	129
Figura 25 – Resposta à situação 2 do Aluno H.....	129
Figura 26 – Resposta à situação 2 do Aluno I.....	130
Figura 27 – Resposta à situação 2 do Aluno J.....	131
Figura 28 – Resposta à situação 5 do Aluno J.....	133
Figura 29 – Resposta à situação 5 do Aluno C.....	134

Figura 30 – Resposta à situação 5 do Aluno A.....	135
Figura 31 – Resposta à situação 7 do Aluno A.....	137
Figura 32 – Resposta à situação 7 da Aluna L.....	137
Figura 33 – Resposta à situação 9 da Aluna F.....	139
Figura 34 – Resposta à situação 9 do Aluno D.....	140
Figura 35 – Resposta à situação 9 do Aluno M.....	141
Figura 36 – Resposta à situação 10 do Aluno A.....	144
Figura 37 – Resposta à situação 10 da Aluna N.....	144
Figura 38 – Resposta à situação 10 do Aluno E.....	145
Figura 39 – Resposta à situação 10 do Aluno O.....	146
Figura 40 – Resposta de alguns estudantes para o caso 8X8.....	148
Figura 41 – Resposta do estudante ao caso 16X16.....	150
Figura 42 – Resposta ao exercício 1 do Aluno A.....	152
Figura 43 – Resposta ao exercício 5 do Aluno A.....	153
Figura 44 – Resposta ao exercício 2 do Aluno C.....	154
Figura 45 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno Q.....	156
Figura 46 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno R.....	157
Figura 47 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno S.....	158
Figura 48 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno D.....	159
Figura 49 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno T.....	160
Figura 50 – Conceito cristalino imagético.....	166
Figura 51 – Conceito cristalino imagético no esboço do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático pesquisador.....	167
Figura 52 – Conceito cristalino imagético na ampla maturação do desenvolvimento das estruturas de prova.....	169

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Motivação dos estudantes para participar no projeto.....	118
Gráfico 2 – Expectativas dos estudantes em relação ao curso.....	119
Gráfico 3 – Autoavaliação de desempenho dos estudantes sobre sua vida escolar.....	120
Gráfico 4 – Resposta à situação 1 dos estudantes.....	130
Gráfico 5 – Resposta à situação 2 dos estudantes.....	131
Gráfico 6 – Resposta à situação 5 dos estudantes.....	136
Gráfico 7 – Resposta à situação 7 dos estudantes.....	138
Gráfico 8 – Resposta à situação 9 dos estudantes.....	142
Gráfico 9 – Resposta à situação 10 dos estudantes.....	146

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Teoria de Ball et al. (2008).....	46
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Análise quantitativa dos cursos técnicos dos sujeitos da pesquisa por ano escolar.....	117
---	-----

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
1.1 Memorial.....	16
1.2 Justificativa.....	18
2 ENSINO DE TRANSIÇÃO.....	22
2.1 Concepções de Transição e Ensino de Transição.....	22
2.2 Dificuldades relacionadas ao professor e ao aluno.....	28
2.3 Soluções para as dificuldades.....	37
3 TRANSIÇÃO EPISTEMOLÓGICA: CONCEPÇÕES SOBRE MATEMÁTICA ACADÊMICA E MATEMÁTICA ESCOLAR.....	42
3.1 Conhecimento matemático em Transição.....	44
3.2 Contribuições do campo Ensino de Transição para as concepções.....	47
4 TRANSIÇÃO COGNITIVA: PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO.....	51
4.1 Imagem de conceito e Definição de conceito.....	51
4.2 Crescimento cognitivo na Transição da escola para o Ensino Superior.....	56
4.3 Conceitos cristalinos.....	59
4.4 Set-befores, met-befores e os três mundos da matemática.....	64
5 O PROJETO DE ENSINO.....	77
5.1 A elaboração do Projeto de Ensino sobre Indução Matemática.....	80
5.1.1 Justificativa do Projeto de Ensino.....	80
5.1.2 Concepções norteadoras do Projeto de Ensino.....	82
5.1.3 Estruturação do Projeto de Ensino.....	83
5.2 Primeira aula: A lei forte dos pequenos números e exemplo dos dominós.....	85
5.3 Segunda aula: Problema dos Quadrados e Princípio de Indução Matemática.....	94
5.4 Terceira aula: Exercícios de Indução e Torre de Hanói.....	101
6 APLICAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS.....	112
6.1 Contexto de aplicação: o CEFET-MG.....	112
6.2 Etapas para a organização do projeto.....	113
6.3 Análise dos resultados.....	116
6.3.1 Sujeitos da pesquisa.....	116
6.3.2 Análise da primeira aula.....	122
6.3.3 Análise da segunda aula.....	147
6.3.4 Análise da terceira aula.....	151
6.4 Autoavaliação do Projeto de Ensino.....	160
6.5 Avaliação do Projeto de Ensino pelos estudantes.....	161
7 CONCEITO CRISTALINO IMAGÉTICO.....	165
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	172
REFERÊNCIAS.....	175

APÊNDICE A – Projeto de Ensino.....	180
APÊNDICE B – Questionário de seleção de estudantes para a participação no Projeto de Ensino.....	182
APÊNDICE C – Listas de situações do Projeto de Ensino.....	186
APÊNDICE D – Slides do Projeto de Ensino.....	206
APÊNDICE E – Termo de Assentimento (para estudantes menores de 18 anos).....	219
APÊNDICE F – Termo de Consentimento (para o responsável legal).....	220
APÊNDICE G – Termo de Consentimento (para estudantes maiores de 18 anos).....	221
APÊNDICE H – Questionário de avaliação do Projeto de Ensino.....	222

1 INTRODUÇÃO

A Transição do Ensino Médio para o Superior é mais latente do ponto de vista institucional: o estudante migra de uma escola para uma universidade. Essa Transição educacional provoca mudanças, como a relação do aluno com o conhecimento e com o professor, a necessidade do educando desenvolver a autonomia, as características da instituição, incluindo sua infraestrutura maior, a realidade sociocultural, entre outras. Todo esse processo acarreta adaptação ao novo cenário, por vezes uma evolução truculenta. Isso vale tanto para o jovem que ingressa na faculdade ano(s) após se formar no Ensino Médio, quanto para adultos e idosos¹ que ingressam após décadas.

Nesta pesquisa, nos aprofundamos no campo de pesquisa chamado **Ensino de Transição** que se preocupa em tratar das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao passarem por Transições e propõe intervenções via projetos de ensino para solucioná-las. (Re)Conhecemos essas dificuldades tendo em vista a experiência social/pessoal, para depois analisar a realidade brasileira e internacional marcada na literatura acadêmica investigada, convertendo a experiência em investigação.

Escolhemos revisar a literatura de dois vieses da Transição do Ensino Médio para o Superior: (1) a mudança epistemológica, calcada sobre a hipótese de que a matemática muda, e (2) a mudança cognitiva, calcada sobre a hipótese de que há exigência de um desenvolvimento intelectual para acompanhar essa matemática.

Tendo por base esse arcabouço teórico, elaboramos um Projeto de Ensino, nosso Recurso Educacional, com vistas a *suavizar* os efeitos da Transição. O conteúdo escolhido foi o Princípio de Indução Matemática, tópico de Transição para o Pensamento Matemático Avançado.

Para dar sustentação a algumas escolhas da pesquisa, partimos de um relato pessoal, um memorial descritivo, para expor reflexões acompanhadas de motivações, histórias e situações-problema que levaram ao anseio de dissertar sobre esse tema.

¹ Essa é uma demanda crescente, pois “No Brasil, entre 2012 e 2021, o número de estudantes idosos na graduação aumentou 56%. De acordo com o Censo da Educação Superior de 2012, do Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), naquele ano havia 28.041 estudantes com 60 anos ou mais regularmente matriculados no ensino superior; em 2021, esse número havia aumentado para 43.722 matrículas.” Disponível em: <https://agenciadenoticias.uniceub.br/educacao/idosos-buscam-nova-jornada-na-universidade/>. Data de acesso: 13 de mai. de 2025.

1.1 Memorial

Iniciei² minha trajetória pessoal e acadêmica em Belo Horizonte/MG. Em verdade, todas as instituições de ensino que me formaram estão em BH, embora tenha atuado profissionalmente em outras duas cidades da região metropolitana, Contagem e Betim.

Minhas maiores inspirações para a escolha de ser docente foram meus pais. Minha mãe é pós-graduada em Pedagogia no Instituto de Educação de Minas Gerais (IEMG); hoje é aposentada porque foi professora por 30 anos na Rede Municipal de Educação de Belo Horizonte. Meu pai graduou-se em Filosofia e História pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), porém lecionou por pouco tempo. Eu considero que os meus pais também me formaram como docente, junto à universidade. Penso que os saberes de práticas de ensino, educação, política, economia e cultura dos meus pais formaram um corpo de conhecimento crítico para fazer análise de conjuntura e tomar decisões razoáveis, analisando as escolhas e a contingências (tema da pós-graduação de meu pai).

A escolha de ser docente também tem raízes na minha experiência discente. Estudei em escolas particulares, onde fui tomando gosto cada vez mais de estar dentro do espaço educativo. Sempre li muito e, num desses livros sobre orientação vocacional, dizia que a pessoa deveria analisar os seus interesses e sobretudo o espaço que mais gostava de passar o tempo. O espaço-tempo da escola era sinônimo de bem-estar, desafio, entusiasmo, conhecimento, conforto, amizade e dedicação, adjetivos que também me definem.

No Ensino Médio, eu mudei de colégio pela primeira vez, minha primeira Transição institucional. Fui para uma escola maior, com nome mais reconhecido, também particular, com bastante gente. No 1º ano, perguntei ao professor de matemática se ele aconselhava fazer o curso de Licenciatura e ele disse que não. Respondeu: “jovem, na primeira oportunidade eu saí do curso. Não faça não.” Ele chamava todo mundo de jovem, sem decorar nomes, e era um bom professor. Consegui tirar 97 em matemática no boletim final, considero uma ótima nota para o 1º ano do Ensino Médio, indicativo de aptidão e dedicação à matemática. No 2º ano, a professora de matemática gostava tanto de mim que nos momentos de trabalhos e exercícios ela me deixava andar pela sala ajudando meus colegas de classe. Ali já fui percebendo que eu adorava ensinar matemática. No 3º ano, a professora de matemática corria com a matéria por causa do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O ano do vestibular é bem pesado em conteúdos e psicologicamente. É o fim da escola para muitos e quem deseja ficar mais tempo

² Por se tratar das vivências e experiências do autor desta dissertação, essa seção foi escrita em primeira pessoa do singular.

na escola são os futuros professores, obviamente. Perguntei à professora sobre ser professor e ela me incentivou, como a professora anterior. Na verdade, perguntei a quase todos os professores sobre a profissão e as considerei para entrar no curso de Licenciatura. Nesta dissertação, aprendi que a comunidade em torno do estudante precisa ajudá-lo nas suas Transições.

No Ensino Superior, a Transição para a Matemática Acadêmica foi um choque logo de início. Na primeiríssima aula de Cálculo Diferencial e Integral, o professor nos pediu para provar que a função $f(x) = x^2$ não era limitada superiormente. O desespero me fez pensar: “vou desistir e fazer o ENEM de novo”. Criaram uma expectativa em mim de que “o professor da faculdade faria uma revisão dos conteúdos escolares para nos ajudar no começo”. O baque, resultado da diferença entre a expectativa e a realidade, é uma das inquietações para a existência desta dissertação. Contudo, minha jornada na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) foi de bom rendimento nas disciplinas e dedicação a muitos projetos e estágios, experiências que me formaram como docente, embora eu acredite na formação continuada, na autoformação do corpo docente escolar e na pesquisa de pós-graduação.

O último estágio que eu tive foi no projeto de extensão *Transitando pela Matemática: do Ensino Médio ao Ensino Superior* da UFMG, o qual participei da formulação em 2021. O objetivo principal do projeto, ainda em vigência, é preparar alunos do Ensino Médio para as disciplinas de Ciências Exatas do Ensino Superior. Professores do Ensino Superior que participaram (e também há literatura que investiguei para esta dissertação) deram testemunho sobre as dificuldades que os alunos ingressantes têm em relação às disciplinas iniciais. Isso porque todos os cursos de Exatas requerem um conhecimento aprofundado de Matemática Escolar e Acadêmica³. Portanto, resolveram criar esse projeto, inspiração para esta dissertação. Os alunos atendidos pelo projeto eram provenientes de escolas públicas e particulares renomadas de Belo Horizonte, excelentes no aspecto da aprendizagem.

Dentre os fundadores do projeto, quatro eram professores de Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx), liderados pelo Prof. Dr. Marcelo Montenegro, um era mestrando em Matemática na UFMG, meu amigo André Abreu, e eu, já licenciado em Matemática e cursando bacharelado em Física na UFMG. Sendo assim, era o único com formação acadêmica que refletia sobre a Educação. Portanto, eu era o porta-voz da Educação num projeto com cinco matemáticos, com objetivo de conceber uma metodologia inovadora, com linguagem adequada que mediava Matemática Escolar e Acadêmica.

³ Exploraremos a diferença desses termos no capítulo 3.

Depois da formação inicial, tomei posse em um cargo público como professor de matemática na Rede Municipal de Educação de Contagem/MG, transitando para a vida profissional docente de forma mais oficial, além dos estágios. Diferentemente do cenário privilegiado, em se tratando de qualidade de aprendizagem dos alunos, tornei-me professor de escola pública em 2022 no pós-pandemia. Meus alunos do 6º ano tinham defasagem de leitura, escrita, interpretação e matemática, conhecimentos base para outras disciplinas. Foi um ano difícil na questão da indisciplina: as crianças voltaram para a escola após dois anos em casa e a maioria não sabia socializar. Acredito que o ano de 2022 foi desafiador para a educação escolar, considerando os impactos da pandemia da COVID-19. Este foi o único ano da minha vida que não estive matriculado em uma instituição de ensino formal. Logo depois, adentrei o mestrado.

Em 2023, ingressei no Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) no polo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), transitando para a pós-graduação. Desde o Ensino Médio, meu objetivo era fazer mestrado. A escolha pelo PROFMAT se deu pela discussão sobre Ensino de Matemática, campo de pesquisa e atuação profissional que influencia diretamente na melhoria da Educação. Os mestrados profissionais intentam articular teoria e prática laboral, com compromisso político, pedagógico, social e econômico intrínseco à atualidade.

Minhas inquietações provocaram o início desta pesquisa, cuja justificativa encontra-se a seguir.

1.2 Justificativa

Primeiramente, a jornada pessoal e acadêmica descrita no memorial aduz muito da justificativa da nossa investigação. A percepção social/pessoal de que existe uma dificuldade inerente ao acompanhamento dos primeiros passos na matemática universitária para um sem-número de alunos ratifica a demanda por essa pesquisa, que examina outras nesse sentido. Essa dificuldade dos estudantes tem como consequência os altos índices de reprovação em disciplinas iniciais e evasão dos cursos de Exatas. Intentamos encontrar algumas das raízes dessas adversidades.

Em segundo lugar, a Matemática Acadêmica tem uma nova aparência para quem entra no Ensino Superior, principalmente porque há um aprofundamento no uso da linguagem e da lógica. Geralmente, a disciplina primordial dos cursos de Ciências Exatas, o Cálculo Diferencial e Integral, inicia os calouros nessa linguagem.

Alguns cursos de graduação têm disciplinas anteriores ao Cálculo Diferencial e Integral, chamadas Fundamentos da Matemática Elementar e Argumentação e Lógica Matemática (como na Universidade do Estado de Minas Gerais – UEMG), Iniciação à Matemática e Resolução de Problemas (UFMG, somente para o curso de Matemática) para ensinar essa linguagem (UFMG, 2013a, 2013b; UEMG, 2024). Destacamos o objetivo da disciplina Iniciação à Matemática:

Objetivos: estabelecer o contato do estudante recém-ingresso no curso com a matemática de nível superior, esclarecendo a utilização da lógica formal dedutiva como linguagem básica. Apresentar ao estudante a natureza e a necessidade das hipóteses, dos sistemas axiomáticos e das demonstrações em matemática. (UFMG, 2013a).

A nossa proposta dialoga com essas disciplinas e relaciona-se com o objetivo supracitado. Entretanto, há apenas essa oferta nos cursos de Matemática nessas universidades públicas. Não encontramos disciplinas com objetivos semelhantes em outros cursos de Ciências Exatas nessas instituições.

Em geral, não há uma disciplina ou curso livre para ensinar a linguagem matemática, estratégias de demonstração, lógica formal, fundamentos da álgebra, etc., (o que apresentaremos nesta dissertação no capítulo 3 como a base da Matemática Acadêmica) na maioria dos cursos de graduação. Esses tópicos são essenciais para uma boa execução das disciplinas do primeiro ano de uma graduação em Exatas. Pesquisamos as possibilidades – cognitivas – de ensinar esses tópicos no contexto do Ensino Médio.

Investigamos pela literatura acadêmica ações didáticas proporcionadas pelas instituições de Ensino Superior para solucionar as dificuldades dessa defasagem de aprendizagem de matemática (ou melhor, Matemática Escolar, como se encontra no capítulo 3), chamadas *cursos ponte* (Wood, 2001). A questão é que a maioria dos trabalhos acadêmicos denunciam a ineficácia desses cursos rápidos de Matemática Escolar ministrados por professores do Ensino Superior.

Pensamos em inverter a lógica, proporcionando um curso (Projeto de Ensino) de Matemática Acadêmica ministrado por professores da Educação Básica. Para isso, tivemos muito cuidado na escolha do conteúdo a ser ensinado e em delinear uma metodologia de ensino apropriada, uma vez que não encontramos na literatura acadêmica ações didáticas semelhantes. Com viés inovador, nossa investigação explora as possibilidades do ensino de Matemática Acadêmica para alunos secundaristas.

A questão orientadora da pesquisa é: **“O ensino da Matemática Acadêmica no Ensino Médio pode contribuir para uma Transição de maneira *mais suave*, sendo um estímulo ao ingresso no Ensino Superior?”**.

Aqui, a palavra *estímulo* está empregada nos sentidos “aquilo que incentiva alguém a fazer alguma coisa” e também “o que impulsiona o desenvolvimento de ...” (Estímulo, 2025). Através deste projeto, esperamos ajudar os secundaristas a compreender a Matemática Acadêmica como uma ferramenta importante para o seu desempenho no Ensino Superior, particularmente nos cursos da área de Exatas. Antecipadamente, o curso pode gerar ou não *estímulo* ao Ensino Superior no campo das Exatas para cada estudante. O *estímulo* será oferecido para contribuir na decisão dos estudantes sobre sua jornada acadêmica com criticidade, uma forma de vislumbrarem o que é a área de Exatas (com mais profundidade que o Médio) antes de entrarem no Ensino Superior.

Definimos como objetivo geral: **investigar as possibilidades do Ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio para *suavizar* a Transição para o Ensino Superior**. A partir desse objetivo geral, definimos os objetivos específicos:

1. investigar o campo de pesquisa Ensino de Transição, focando na caracterização por seus interesses e proposições;
2. explorar as concepções de Matemática Escolar e Acadêmica demarcadas na literatura;
3. compreender a teoria do Pensamento Matemático Avançado na perspectiva de David Tall;
4. elaborar, aplicar e analisar um Projeto de Ensino para estabelecer o contato inicial de secundaristas com a Matemática Acadêmica e desenvolver a *intuição lógica* (uma etapa do Pensamento Matemático Avançado).

Apesar de não ter sido um objetivo específico inicialmente delineado, também propomos uma discussão para uma inovadora metodologia para o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio contribuindo para a Transição.

Já situando o leitor sobre o Projeto de Ensino, ele foi elaborado e aplicado no contexto do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) para estudantes das três séries do Ensino Médio integrado ao curso Técnico. Nesse sentido, o Projeto de Ensino foi elaborado de modo diligente, considerando as características dos alunos e alterado ao longo do curso quando foi necessário.

Propomos o seguinte cronograma:

- Etapa I: revisão da bibliografia;
- Etapa II: construção dos instrumentos de pesquisa (listas de situações e burocracia);
- Etapa III: construção da sequência de atividades e a aplicação;
- Etapa IV: análise do material coletado (protocolos de pesquisa e verbalizações);
- Etapa V: redação do trabalho final.

Para apresentar compreensões acerca da nossa questão de investigação, estruturamos a dissertação em oito capítulos, cada um alinhado aos objetivos delineados. O primeiro, esta Introdução, contém o memorial descritivo do autor da dissertação, o processo de elaboração e justificativa da ideia de investigação, a questão e os objetivos da pesquisa, bem como a estruturação da dissertação.

O segundo capítulo é dedicado à revisão de literatura sobre o Ensino de Transição, tendo como principal aporte teórico os trabalhos de Gueudet (2008) e Gueudet et al. (2016). Esse campo discute sobre a preparação dos estudantes para compreender um novo processo de ensino e aprendizagem quando fazem a passagem para um novo nível de ensino.

No terceiro capítulo, apresentamos concepções sobre Matemática Acadêmica e Escolar (Moreira; David, 2008, 2011; David et al., 2013), demarcando as características dessas “Matemáticas”. Complementando, mostramos como autores notáveis do campo Ensino de Transição as percebem. Destacamos que a definição de Matemática Escolar tem suporte na teoria do Conhecimento Matemático para o Ensino de Ball et al. (2008).

O quarto capítulo aborda a teoria do Pensamento Matemático Avançado de David Tall, focando no desenvolvimento cognitivo ocasionado pela Transição epistemológica apontada no capítulo anterior. Essa revisão de literatura perpassa os trabalhos de Tall em ordem cronológica, mostrando o aprimoramento da Teoria.

No quinto capítulo, discorremos sobre o Projeto de Ensino, o Recurso Educacional que procedeu desta pesquisa, elencando sua concepção e elaboração em consonância com os referenciais.

No sexto capítulo analisamos descritiva e interpretativamente a aplicação do Projeto de Ensino, trazendo dados da percepção do pesquisador dessa aplicação e dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

No sétimo, apresentamos um adendo à teoria do Pensamento Matemático Avançado que denominamos *conceito cristalino imagético*. Por fim, fazemos as considerações finais desta dissertação.

2 ENSINO DE TRANSIÇÃO

O objetivo dos três primeiros capítulos é dialogar com as produções acadêmicas da nossa revisão de literatura a fim de traçar um referencial teórico basilar para a concepção, desenvolvimento e execução do Projeto de Ensino: *Princípio de Indução Matemática: aproximação com a Matemática Acadêmica*. Neste capítulo, primeiramente definimos o que é Transição e o que é Ensino de Transição, com o apoio da literatura. Em seguida, discorreremos sobre as dificuldades inerentes ao processo de Transição experienciado por alunos e professores de Matemática. Por fim, dissertamos sobre algumas soluções para as dificuldades apresentadas.

2.1 Concepções de Transição e Ensino de Transição

A palavra “transição” tem origem no latim *transitio*, uma declinação do verbo *transeo*, que é composto por *trans*+*eo*, no qual *trans* significa “do outro lado”, “por cima”, “através”, “além” (sem ideia de movimento) e *eo* significa “ir”, “prosseguir”, “seguir caminho”, “passar”. Logo, *transeo* quer dizer passar ou atravessar de um lugar para outro (Dictionary, 1968).

A educação escolar brasileira (e de outros países) têm por característica a divisão em dois níveis de ensino: (1) educação básica – obrigatória e organizada em Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio; (2) educação superior (Brasil, 1996). A passagem entre os dois níveis e seus estágios de educação formal é denominada Transições, no sentido da pesquisa em Educação e em Ensino de Matemática. Desse modo, Transição é um processo de mudança entre estágios diferentes (Gueudet et al., 2016).

Nesta pesquisa estamos interessados, em especial, na passagem do Ensino Médio para o Ensino Superior e, em particular, do ensino de matemática nesses dois estágios, ou seja, da matemática enquanto disciplina curricular para alunos do Ensino Médio e para alunos do Ensino Superior (seja em cursos de graduação como Licenciatura/Bacharelado em Matemática, Física, Química, Engenharia, Economia, Estatística, Administração, Ciências da Computação, entre outros).

Assim, daqui em diante referimos a Ensino de Transição como ensino de matemática na Transição do Ensino Médio para o Superior. Para Gueudet (2008), essa Transição ocorre entre dois anos antes e dois anos após o ingresso na universidade.

Rupturas significativas podem acontecer em diferentes momentos. Por esta razão, toda a pesquisa educacional relativa a um período de tempo entre dois anos antes de entrar na universidade e dois anos depois provavelmente estabelecerá resultados sobre questões de transição. (Gueudet, 2008, p. 238, tradução nossa).⁴

Assim é delimitado um período temporal, que também é um contexto cultural de mudança; portanto, descrevemos a Transição como um período-contexto. Outros autores definem outros períodos-contextos para essa Transição.

Clark e Lovric (2008) sugerem um modelo teórico para entender o processo de Transição do Secundário (Ensino Médio) para o Terciário (Ensino Superior), baseado na modernização dos *ritos de passagem*.

Um rito de passagem consiste em eventos e atividades que auxiliam a pessoa que passa a alcançar as mudanças necessárias, e esse processo de alcançar as mudanças necessárias (acompanhado de vários rituais) constitui a chamada fase liminar do rito de passagem. (p. 26, tradução nossa).⁵

Assim sendo, Clark e Lovric (2008) reconhecem a Transição como um rito de passagem. Isso porque esse período-contexto é composto por eventos (cerimônias de iniciação), costumes e atividades (como atividades de orientação) que envolvem diferentes membros da comunidade (família, professores, instrutores universitários) para reduzir as “dores” dessa passagem. Os autores usam o modelo teórico dos *ritos de passagem* para analisar os problemas da Transição em três estágios:

- 1) *Separação* (do Ensino Médio): esta etapa ocorre enquanto os alunos ainda estão no Ensino Médio e inclui a antecipação da vida universitária vindoura;
- 2) *Fase Liminar* (do Ensino Médio ao Superior): inclui o final do Ensino Médio, o tempo entre o Ensino Médio e o Superior e o início do primeiro ano na universidade;
- 3) *Incorporação* (na universidade): inclui, aproximadamente, o primeiro ano em uma universidade.

⁴ No original: “Significant ruptures can happen at different moments. For this reason, all the educational research concerning a period of time between two years before entering university and two years after is likely to establish results about transition issues.”

⁵ No original: “A rite of passage consists of events and activities that assist the person undergoing it to achieve necessary changes, and this process of achieving necessary changes (accompanied by various rituals) constitutes so-called liminal phase of the rite of passage.”

As mudanças quando se entra no Ensino Superior fazem parte dos *ritos de passagem*. Muitos universitários separam-se de suas famílias e comunidade indo morar em outra localidade, abandonam muitos aspectos da sua vida e assumem novos papéis na vida acadêmica. Essa é a fase de *Separação*⁶ do rito de passagem (Clark; Lovric, 2008). Há um evidente (e necessário) desenvolvimento da autonomia e amadurecimento, tanto na vida pessoal como na acadêmica, do estudante. Outras mudanças relacionadas ao Ensino de Matemática serão abordadas nos próximos capítulos separadamente.

As questões principais nas pesquisas sobre Transição são os problemas e dificuldades enfrentadas durante esse período-contexto de adaptação. O objetivo dessas pesquisas geralmente é analisar e aprimorar a eficácia desse processo. Acontece que os dois estágios são completamente diferentes e a pessoa que passa por uma Transição precisa da assistência da comunidade.

[...] O rito de passagem não pode ser bem sucedido sem um contexto social adequado e sem o envolvimento das comunidades (relevantes). O objetivo principal das cerimônias que acompanham um rito de passagem é ajudar a pessoa a passar de uma posição bem definida, estabelecida e aceita na vida para outra, que seja igualmente bem definida, estabelecida e aceita. O sucesso do rito depende, em grande medida, da assistência “logística” que os interessados sejam capazes de oferecer ao indivíduo submetido ao rito de passagem. (Clark; Lovric, 2008, p. 26, tradução nossa).⁷

Nossa pesquisa partiu do interesse em oferecer assistência para os secundaristas se incorporarem no Ensino Superior de maneira *mais suave*. Nesse sentido, a revisão de literatura do campo Ensino de Transição foi estabelecida como o seu primeiro alicerce.

Segundo Gueudet (2008), as pesquisas sobre Transição podem ser classificadas em duas categorias: (1) observação e análise das dificuldades dos estudantes e (2) proposta e avaliação de projetos de ensino (*teaching designs*). Na nossa investigação seguimos essa linha de pesquisa porque discorreremos sobre as dificuldades dos estudantes nas próximas subseções no campo teórico e concebemos um Projeto de Ensino, nosso Recurso Educacional, para assistenciar estudantes nessa Transição. Discutiremos a Transição considerando as mudanças

⁶ Chamamos de Separação porque há certa inconsistência dos autores: por vezes as questões relacionadas à Separação dizem respeito estritamente ao ensino e por vezes à transição de forma ampla. Afirmamos que nosso projeto está calcado na fase de Separação porque, tal como na fase, estamos fazendo “antecipação da vida universitária”, ensinando Matemática Acadêmica no Ensino Médio, pensando no ensino de matemática do aluno que ingressará na universidade, propondo sua “separação” do Médio.

⁷ No original: “Rite of passage cannot be successful without a proper social context and without the involvement of (relevant) communities. The primary purpose of ceremonies that accompany a rite of passage is to help the person pass from one well-defined, established and accepted position in life to another, which is equally well-defined, established and accepted. The success of the rite depends, in large measure, on the ‘logistical’ assistance that the parties interested are able to offer to the individual undergoing the rite of passage.”

no grau de escolaridade e em relação ao ensino e aprendizagem de uma área de conhecimento específica, no nosso caso, a matemática (Gueudet et al., 2016).

Em verdade, as dificuldades dos alunos são a centralidade nos estudos sobre Transição, pois indicam os seus problemas. Gueudet et al. (2016) revelam que as pesquisas têm três abordagens teóricas diferentes para analisar as dificuldades dos estudantes, a saber: (a) institucional e didática, (b) epistemológica e cognitiva, (c) sociocultural. Dependendo da abordagem, as investigações entendem a *dificuldade* dos estudantes de maneira única e propõem soluções dentro da sua lente de análise (referencial teórico).

As investigações de abordagem sociocultural diferenciam as Matemáticas Escolar e Externa (ou do Cotidiano, como em David et al. (2013))⁸, e questionam comportamentos individuais. Compreendem a matemática como uma linguagem ou gênero de discurso e entendem que a Transição é “um conjunto de processos pelos quais os indivíduos ‘cruzam fronteiras’ de um contexto ou comunidade cultural ou, mais especificamente, educacional para outro” (Gueudet et al., 2016, p. 22, tradução nossa)⁹.

As investigações de abordagem institucional e didática diferenciam as Transições no sistema de Educação: da pré-escola para o Primário (Ensino Fundamental), do Primário para a Secundário (Ensino Médio), do Secundário para o Terciário (Ensino Superior), da escola profissionalizante ou do Ensino Superior para o trabalho, etc. Aqui a Transição pode ser entendida em diversos sentidos, tais como, mudança de local da instituição de ensino; número e tipos de professores; número e tipos de estudantes; relações entre estudante e professores; e “podem ocorrer mudanças no tipo de conhecimento e saber-fazer ensinado, bem como nas atividades didáticas específicas relacionadas a esse conhecimento e saber-fazer” (Gueudet et al., 2016, p. 16, tradução nossa)¹⁰. A exemplo, Clark e Lovric (2008) trabalham no sentido de investigações de abordagem institucional e didática.

As investigações de abordagem epistemológica e cognitiva¹¹ diferenciam o conhecimento ingênuo/novato do conhecimento de um *expert*, interpretam a aprendizagem como uma mudança na estrutura conceitual e entendem que “qualquer processo de mudança ou transição pode ser (ou parecer) contínuo (ou discreto, mas composto de etapas sucessivas a

⁸ Exploraremos mais esse assunto nos capítulos 3 e 4.

⁹ No original: “[...] set of processes whereby individuals “cross borders” from one cultural or more specifically educational context or community to another”.

¹⁰ No original: “[...] changes may occur in the kind of knowledge and know-how that is taught, as well as in the specific didactic activities related to this knowledge and know-how”.

¹¹ Exploraremos mais esse assunto no capítulo 4.

serem cumpridas) ou descontínuo, com rupturas ou lacunas identificadas” (Gueudet et al., 2016, p. ix, tradução nossa)¹².

Gueudet et al. (2016) caracterizam o processo de aprendizado como descontínuo e sustentam essa ideia com base nos chamados *obstáculos epistemológicos*. “Os obstáculos epistemológicos são dificuldades inevitáveis na aprendizagem que se manifestam como interpretações erradas ou inadequadas persistentes por parte dos alunos.” (p. 6, tradução nossa)¹³.

Por outro lado, a percepção de *continuidade* no processo de Transição cognitiva compreende pequenos passos de construção intervenientes, como num “filme”. Para os defensores da *continuidade*, aprender é tecer de linhas ingênuas de pensamento em um tecido mais sistemático (Gueudet et al., 2016).¹⁴

Essa visão de *continuidade* é oposta à ciência, porque a história da ciência é repleta de exemplos em que um fenômeno é visto de formas diferentes antes e depois de uma revolução científica. Entretanto, “a razão para a dificuldade da mudança não está apenas nas diferenças entre pontos de vista antes e depois da revolução, mas no fato de a ciência, em qualquer momento, ser um todo coerente” (ibidem, p. 6, tradução nossa)¹⁵. As revoluções científicas e avanços no conhecimento são como o aprendizado: ocorrem rupturas com o conhecimento historicamente produzido.

Resumindo, o ponto de vista continuísta vê a aprendizagem e a mudança conceptual como complexas, mas abertas a possibilidades que simplesmente não têm sido muito exploradas, devido ao domínio histórico da descontinuidade como pressuposto central. Da perspectiva continuísta, podemos (devemos!) explorar mais amplamente para encontrar caminhos produtivos para a especialização. Mesmo que alguns bloqueios para a aprendizagem sejam razoavelmente caracterizados como “obstáculos”, podem ser melhor conceituados como longas jornadas, em vez de muros a escalar aqui e agora, ou abismos a ultrapassar de alguma forma. (Gueudet et al., 2016, p. 10, tradução nossa).¹⁶

¹² No original: “[...] any change or transition process can be (or seem) either continuous (or discrete but composed of successive steps to be accomplished) or discontinuous, with identified ruptures or gaps”.

¹³ No original: “Epistemological obstacles are unavoidable difficulties in learning that manifest as persistent wrong or inappropriate interpretations by learners.”

¹⁴ No capítulo 4, voltaremos a esse debate com a contribuição da teoria de David Tall.

¹⁵ No original: “The reason for difficulty of change is not just in the differences between views before and after the revolution, but that science, at any point in time, is a coherent whole”.

¹⁶ No original: “To sum up, the continuist point of view sees learning and conceptual change as complex, but open to possibilities that have simply not been pursued very much, owing to the historical dominance of discontinuity as a core assumption. From the continuist perspective, we can (we must!) explore more widely to search out productive paths to expertise. Even if some blocks to learning are fairly characterized as “obstacles,” they may be better conceptualized as long journeys, rather than walls to scale right here and right now, or chasms to somehow jump over.”

A nossa percepção, manifestada no capítulo anterior, de que a Transição do Ensino Médio para o Superior é marcada por mudanças abruptas na aprendizagem de matemática condiz com a perspectiva da *descontinuidade*, assumindo os *obstáculos epistemológicos* nas disciplinas iniciais da graduação como seu indício. Essa mudança ocorre simultaneamente a diversas outras no período-contexto de Transição, assinaladas na literatura nacional e internacional.

Para delinear as concepções de Transição e Ensino de Transição assumidas nesta investigação, realizamos uma pesquisa do tipo Estado do Conhecimento¹⁷ sobre as concepções de Ensino de Transição de Matemática do Ensino Médio para o Superior nas produções acadêmicas brasileiras, em particular nos artigos de periódicos.

Essa pesquisa, de caráter bibliográfico, nos abriu caminhos para entender, por meio da revisão sistemática dos artigos, como os pesquisadores brasileiros apropriam-se do termo Ensino de Transição; quais referenciais teóricos mais utilizados; quais as experiências da prática ou da formação acadêmica utilizam para basear suas concepções; quais pesquisadores/autores e grupos de pesquisa estão interessados nessa temática, entre outras características. Nosso Estado do Conhecimento sobre as concepções de Ensino de Transição das investigações brasileiras verificou que elas aproximam-se da ideia de *descontinuidade*.

O estudo das descontinuidades encontradas na transição entre instituições de ensino pode ser organizado de acordo com diferentes níveis de especificidade, dependendo se afetam os conteúdos centrais de aprendizagem e ensino, que chamaremos de *nível didático*; se afetam a organização dos temas, que chamaremos de *nível pedagógico*; ou se afetam a organização mais global das actividades de aprendizagem e ensino na instituição educativa, que chamaremos de *nível escolar*, conferindo à escola um sentido amplo de “lugar de instrução”. (Gueudet et al., 2016, p. 16, tradução nossa e grifo do original).

A maior parte das pesquisas sobre Transição propõem “formas de construir uma *ponte* ou *suavizar* as descontinuidades entre instituições de ensino, também é importante notar que as descontinuidades são inerentes aos processos educativos” (Gueudet et al., 2016, p. 17, tradução e grifo nosso)¹⁸. Os conceitos de *ponte* e *suave* apareceram de modo relevante na nossa revisão de literatura.

Em concordância com Gueudet et al. (2016), o modelo teórico de *ritos de passagem* de Clark e Lovric (2008) dizem que a Transição do Secundário para o Terciário é *descontínua* e que esse “choque” é inevitável, pois o estudante muda de contexto, muda de cenário. Os

¹⁷ Submetida e em análise para a publicação em periódico.

¹⁸ No original: “[...] ways to bridge or smooth the discontinuities between schools, it is also important to notice that discontinuities are inherent to educational processes”.

autores deixam claro que, de acordo com o modelo de *ritos de passagem*, uma transição não é *suave*, e não precisa ser *suave*. E isso é natural em todos os *ritos de passagem* que fazemos na vida.

Nossa pesquisa pretende deixar essa Transição *mais suave*¹⁹ por motivos descritos na sequência. Clark e Lovric (2008) recusam a ideia de deixar *mais suave* porque analisam a mudança do Ensino Médio para o Superior na perspectiva dos *ritos de passagem*, que vão além do Ensino de Transição. A passagem não é *suave*, é desconfortável, são vários choques e mudanças. Queremos diminuir esse choque na matemática para que não tenha um impacto tão grande no desempenho acadêmico do aluno. A nossa proposta de *suavizar* é neste sentido, mais estrito que a teoria antropológica dos *ritos de passagem*, porém ampliando o diálogo no campo investigativo intitulado Ensino de Transição.

Assim, denominamos Ensino de Transição de Matemática, com base nos estudos feitos, como as atividades didáticas sistemáticas e intencionais com objetivo de preparar os estudantes secundaristas ou calouros da graduação a compreender a Matemática Acadêmica e o (novo) processo de ensino e aprendizagem do Ensino Superior, oferecendo assistência para uma Transição adequada, menos frustrante, mais *suave* e melhorando o seu desempenho acadêmico.

Para estabelecer ações didáticas nesse sentido, (re)conheceremos as dificuldades relacionadas aos professores, aos alunos e à relação professor-aluno no período-contexto da Transição na próxima seção.

2.2 Dificuldades relacionadas ao professor e ao aluno

Esta seção tem como foco apresentar um cenário de pesquisas no campo da Educação e do Ensino de Matemática que tratam das dificuldades enfrentadas pelos principais atores da Transição, os alunos e os professores, e algumas soluções. Aqui nossa análise será de abordagem institucional (Gueudet et al., 2016), sendo que as análises epistemológica e cognitiva ficarão para os capítulos seguintes.

A Transição do Ensino Médio para o Superior muda a conjuntura da sala de aula de Matemática. As principais mudanças apontadas ao longo da nossa revisão de literatura são:

- a quantidade de alunos por turma;
- a didática dos professores;
- a proximidade na relação professor-aluno;

¹⁹ Explicamos o que queremos dizer com *mais suave* no capítulo 5 – O Projeto de Ensino.

- o anonimato do aluno diante da magnitude da universidade;
 - a autonomia do estudante;
 - a questão do estudante fazer boa parte das atividades sozinho;
 - o novo contrato didático;
 - a passagem da Matemática Escolar/Elementar para a Matemática Científica/Acadêmica;
 - o objetivo do ensino e aprendizagem de matemática (por exemplo, na escola deve-se aplicar a matemática em exercícios e na universidade, entender teoremas axiomáticos-dedutivos e aplicar em contextos complexos);
 - o estado cognitivo (Pensamento Matemático Elementar e Avançado);
 - os professores da Educação Básica são formados em cursos de Licenciatura, portanto preparados para ensinar, enquanto professores do Ensino Superior geralmente não passam por uma formação pedagógica e didática;
- entre outros.

As dificuldades dos estudantes para se adaptarem a essa nova conjuntura são consequências das práticas das instituições de ensino (Gueudet, 2008). Essa conclusão parte da constatação de que essas dificuldades não são casos isolados, individuais, mas um processo universal. Vale lembrar que os problemas na/da Transição são o centro das discussões da literatura nesse campo, tema de interesse crescente em diversas universidades do mundo.

A exemplo, segundo Oliveira e Raad (2012), existe uma *cultura de reprovação* histórica para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Essa cultura extrapola os problemas relacionados à didática do professor. A questão é considerada crônica devido aos baixos índices de aprovação na disciplina. Além disso, os universitários e os professores universitários normalizaram a reprovação. Uma das consequências da reprovação em Cálculo é a evasão dos cursos, que também passou a ser normalizada.

Vale ressaltar que, mesmo normalizando, muitas propostas metodológicas são pensadas para reverter ou *suavizar* esse quadro, como mostrado na próxima subseção. Porém, os resultados investigados na literatura demonstram-se pouco satisfatórios quando realizados no contexto do Ensino Superior. E, nesse sentido, nossa pesquisa propõe algo que pode contribuir para essa questão, realizando ações no contexto do Ensino Médio.

Ademais, o desempenho satisfatório, em termos de aprovação em disciplinas matemáticas básicas do primeiro ano da vida universitária, não necessariamente indica que os estudantes tiveram o seu potencial acadêmico atingido, ou mesmo o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Mesmo os alunos que conseguem ser aprovados nas disciplinas de matemática podem não conseguir atingir o seu potencial acadêmico se não conseguirem adaptar-se. Este ajustamento depende de muitos fatores relacionados com a origem dos alunos: status socioeconômico, gênero, origem étnica, expectativas dos pais, escolaridade, grupo de pares e assim por diante. Depende também da motivação do aluno para estudar matemática. (Wood, 2001, p. 88, tradução nossa).²⁰

Outra questão explicitada na literatura foi a recente inclusão de uma diversidade de estudantes no Ensino Superior nas últimas décadas. Isso aconteceu aqui no Brasil²¹ e em outras “reformas” educacionais pelo mundo (Wood, 2001). Alguns autores entendem que a Transição é mais danosa aos alunos pertencentes a grupos sociais mais vulneráveis, podendo interromper trajetórias acadêmicas (Gueudet et al., 2016). Guzmán et al. (1998) dizem que “Em muitos países, a democratização do ensino teve como consequência o acesso de muitos estudantes fracos à universidade” (p. 756, tradução nossa).

A seguir, restringimos o termo *dificuldade* no sentido das dificuldades relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem na Transição. Gueudet (2008) usa o termo *dificuldade* para “significar a associação de uma produção matemática inadequada e de vários níveis de fatores que provavelmente causaram essa produção” (p. 239, tradução nossa)²². Assim, diferentes pesquisas sobre as dificuldades dos alunos propõem ações didáticas levando o pesquisador a estabelecer uma concepção de Transição.

A ideia a priori leva naturalmente o pesquisador a observar diferentes dificuldades dos alunos e a desenvolver diferentes meios de ação didática. Este processo eventualmente produz uma visão específica da transição. Esses três tipos de resultados de pesquisa, a saber, dificuldades observadas, ação didática e visão de transição, estão certamente interligados e também modificam a ideia a priori de dificuldades. (Gueudet, 2008, p. 239, tradução nossa).²³

²⁰ No original: “Even students who can successfully pass mathematics subjects may not be able to reach their academic potential if they are unable to adjust. This adjustment depends on many factors in the students’ background: socioeconomic status, gender, ethnic background, parental expectations, schooling, peer group and so on. It also depends on the motivation of the student to study mathematics.”

²¹ Sobre isso, sugerimos a leitura de Heringer e Ferreira (2011) sobre o histórico e a análise das políticas de inclusão de estudantes negros no Ensino Superior, Oliveira e Silva (2017) sobre as políticas de inclusão social para a democratização do Ensino Superior brasileiro para classes sociais menos favorecidas e Wainer e Melguizo (2018) sobre o desempenho (pelo que apontam seus resultados, equivalente) de alunos cotistas e não cotistas no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade). Essas questões de políticas públicas educacionais certamente são pertinentes para o debate da Transição.

²² No original: “[...] the association of an inadequate mathematical production and of various levels of factors likely to have caused this production.”

²³ No original: “The a priori idea naturally leads the researcher to observe different students’ difficulties, and to develop different means of didactical action. This process eventually yields a specific view of transition. These three kinds of research outcomes, namely, difficulties observed, didactical action, and view of transition are certainly intertwined, and they also modify the a priori idea of difficulties.”

Como supracitado, existem *obstáculos epistemológicos* no processo da aprendizagem em matemática. Podem ser definidos como certos equívocos das produções matemáticas dos estudantes encontrados amplamente em salas de aula pelo mundo todo, durante séculos passados e perdurarão no futuro. A título de exemplo, quem já ensinou adição de frações para alunos do Ensino Fundamental sabe que muitos alunos farão a soma dos numeradores e dos denominadores em vez de obter frações equivalentes e usar um múltiplo comum antes de adicionar.

Segundo Gueudet (2008), na passagem entre o Ensino Fundamental e o Médio, os professores dos dois estágios dialogam e compartilham atividades para *suavizar* essa Transição. Assim, o processo de adaptação e as dificuldades dos estudantes são principalmente atribuídas às características da escola e ao trabalho pedagógico dos professores. Cria-se uma pressão para que o início do Ensino Médio seja mais próximo do Ensino Fundamental. Percebemos uma pressão semelhante no que se refere à Transição do Médio para o Superior: muitos querem que o primeiro ano da graduação seja semelhante ao Ensino Médio.

Para atenuar os efeitos dessa ruptura do Médio para o Superior, muitas universidades buscam solucionar essa situação utilizando cursos de revisão da Matemática Escolar – por exemplo, *cursos propedêuticos* ou *Matemática Zero* (Serrano et al., 2005), *bridging courses* ou *cursos ponte* (Wood, 2001; Clark; Lovric, 2008; Gueudet et al., 2016), *cursos de pré-requisitos* (Sierpinska et al., 2008), *Pré-Cálculo* (Wood, 2001). Exploraremos as definições dos autores/pesquisadores e os problemas relacionados às experiências práticas enunciados nas escritas.

Em Wood (2001), os *cursos ponte* têm como principal público alvo os alunos maduros que retornaram a estudar ou que abandonaram a escola e não tem o nível adequado de matemática para acompanhar o seu curso de graduação. Lembremos que o tempo entre a conclusão do Ensino Médio e o ingresso no Ensino Superior pode demorar meses ou anos. Esses cursos acontecem antes ou durante o primeiro ano do Terciário.

Eles são denominados *cursos ponte* porque “fazem a ponte entre as necessidades acadêmicas da escola e do estudo no terciário” (ibidem, p. 89, tradução nossa)²⁴. “Estudar cursos ponte é naturalmente relevante para a transição” (Gueudet, 2008, p. 238, tradução nossa)²⁵. Os *cursos ponte* têm por objetivos: preparar os estudantes para conceitos acadêmicos, habilidades e atitudes específicas dos seus cursos de graduação, preencher

²⁴ No original: “[...] they bridge between the academic needs of school and tertiary study.”

²⁵ No original: “Studying bridging courses is naturally relevant for transition.”

lacunas no conhecimento, revisar ou estudar habilidades e fatos esquecidos da Matemática Escolar, ensinar a linguagem da Matemática Acadêmica para lerem e entenderem livros/aulas e também se comunicarem verbalmente e através da escrita, ensinar tópicos que são “ponte” para o Pensamento Matemático Avançado (Wood, 2001). Dessa forma, os *cursos ponte* são de interesse em nossa pesquisa na condição de análise da literatura, pois são fontes metodológicas para a elaboração de um Projeto de Ensino sob tal perspectiva.

Nos Estados Unidos, historicamente os *cursos ponte* surgiram após a Segunda Grande Guerra (1939-1945) para os soldados que retornaram aos estudos. Nos anos 1970, os *cursos ponte* ajudaram mulheres de 30, 40 e 50 anos a ingressarem e terem sucesso no Ensino Superior e a conquistarem oportunidades de emprego (Wood, 2001). Outros *cursos ponte* foram criados para os nativos americanos, hispânicos e refugiados. “Com o aumento do acesso às universidades e a ênfase na igualdade de oportunidades para os grupos desfavorecidos, o número e a variedade de cursos ponte explodiram”²⁶ (ibidem, p. 89, tradução nossa).

Podemos afirmar que os *cursos ponte*, estratégia de ensino voltada para a Transição, teve efeitos na história da humanidade, movimentando os cenários sociais. Aqui se dá a relevância das investigações nesse campo da Educação, cujo objetivo maior é a transformação política e social, promovendo a igualdade de oportunidades e direitos. “Esta ideia de *cursos ponte* como forma de compensar a discriminação ainda é a filosofia dominante em muitas universidades.” (ibidem, p. 89, tradução nossa)²⁷.

A literatura acadêmica do campo Ensino de Transição discute muito sobre o sucesso dos *cursos ponte*. Na perspectiva de Wood (2001), um curso intensivo não pode suprir as lacunas de conhecimento de anos, há dúvidas sobre os efeitos de longo prazo dos *cursos ponte* e a revisão dos temas pré-requisitos deve ser feita regularmente para atingir o domínio da Matemática Acadêmica. Outras experiências de *cursos ponte* contribuirão com considerações sobre os seus resultados.

Sierpiska et al. (2008) investigaram as *frustrações* dos estudantes para com os *cursos ponte* ou de pré-requisitos (no caso, os PMC - *Prerequisite Mathematics Courses*). Os autores entendem que a *frustração* não é apenas um processo psicológico, mas uma “situação” experienciada; é uma emoção que acompanha decepção ou desapontamento. Os autores afirmam que “toda aprendizagem envolve não apenas processos cognitivos, mas também

²⁶ No original: “With an increased access to universities and an emphasis on equal opportunity for disadvantaged groups, the number and variety of bridging courses has exploded.”

²⁷ No original: “This idea of bridging courses as a way of compensating for discrimination is still the dominant philosophy in many universities.”

emocionais e sociais” (p. 5, tradução nossa)²⁸. A pesquisa é sobre atitudes em relação à matemática e crenças sobre a matemática, mais do que sobre emoções.

Sierpinska et al. (2008) descrevem o programa dos PMC e a quem é ofertado assim:

São cursos de álgebra elementar, álgebra linear, funções e cálculo de uma variável. Eles são oferecidos pelo departamento de matemática da Universidade²⁹ para candidatos que, por algum motivo, não os cursaram no ensino médio ou superior e agora precisam deles como pré-requisitos para programas acadêmicos de sua escolha. (p. 3, tradução nossa).³⁰

Para 92% dos entrevistados pelos autores, a maior causa da *frustração* é o ritmo (*pace*) dos cursos PMC. Isso acontece porque a expectativa é o ensino em um ritmo mais lento, como no Ensino Médio, porém o curso é intensivo. Os professores desses cursos têm pouco tempo para revisar a Matemática Escolar e esperam que os estudantes estudem por si. Essa crença dos professores relaciona-se com o posicionamento de Clark e Lovric (2008) em que o estudante deve criar autonomia e maturidade para superar os *ritos de passagem* por si.

Várias fontes de frustração foram identificadas como importantes no grupo de entrevistados: o ritmo acelerado dos cursos, estratégias de aprendizagem ineficientes, a necessidade de mudar formas de pensar previamente adquiridas, dificuldade de relacionamento com a verdade e o raciocínio em matemática, ser forçado a cursar cursos de pré-requisitos de matemática, apoio acadêmico e moral insuficiente por parte dos professores e baixo desempenho. (Sierpinska et al., 2008, p. 1, tradução nossa).³¹

Depois da *frustração* com a velocidade dos cursos, em segundo lugar – 71% dos participantes – está a *frustração* com a estratégia de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, está a decepção em tentar aprender seguindo os exemplos do professor, a falta de tempo causa o não entendimento dos conceitos, cria-se a dependência do professor em julgar se a solução é válida ou não. Daí a *frustração* transfere-se para a matemática em aspectos psicológicos e epistemológicos (Sierpinska et al., 2008).

Do lado epistemológico, o conhecimento matemático é visto pelos estudantes como estático, não pode ser mudado, não é feito de opinião individual, não dá liberdade de

²⁸ No original: “[...] all learning involves not only cognitive, but also emotional and social processes”.

²⁹ Sierpinska et al. (2008) refere-se a toda universidade norte-americana grande e urbana.

³⁰ No original: “These are courses in elementary algebra, linear algebra, functions and one variable calculus. They are offered by the mathematics department of The University for candidates who, for some reason, hadn’t taken them in secondary school or college, and now need them as prerequisites to academic programs of their choice.”

³¹ No original: “Several sources of frustration were identified as important in the group of respondents: the fast pace of the courses, inefficient learning strategies, the need to change previously acquired ways of thinking, difficult rapport with truth and reasoning in mathematics, being forced to take prerequisite mathematics courses, insufficient academic and moral support on the part of teachers and poor achievement.”

expressão, porque a “matemática” é quem decide a validade do raciocínio. Entretanto, a matemática tem espaço para a criatividade e liberdade de escolha da abordagem para modelar um problema. Do lado psicológico, a matemática é vista pelos estudantes como um desafio cognitivo, difícil, o que “não apareceu como uma grande fonte de frustração no grupo de entrevistados” (Sierpinska et al., 2008, p. 30, tradução nossa)³². Nós discutiremos mais esses aspectos nos próximos capítulos.

Outra mudança na Transição que causa *frustração* é na relação entre o professor e o aluno. Os alunos se frustram com a falta de suporte moral (no sentido de entender que estão passando por uma Transição) e a falta de *feedback* (retorno) em relação às suas soluções. A diminuição na proximidade é um importante aspecto dos problemas na/da Transição (Sierpinska et al., 2008).

Sierpinska et al. (2008) analisam as emoções relacionadas ao “estar errado” na Matemática. “Estar errado significa não ter conhecimento ou não ser inteligente o suficiente.” (p. 33, tradução nossa)³³. Além disso, o estudante que “está errado” terá uma punição, uma nota ruim. Posto isso, usar os termos “verdadeiro” e “falso” em vez de “certo” e “errado” é mais adequado tanto na relação interpessoal professor-aluno quanto na perspectiva da matemática (pensando que a matemática é baseada na lógica proposicional).

Sobre os *cursos ponte* ofertados pelas universidades, Clark e Lovric (2008) acreditam que eles devem ser repensados ou removidos, pois na perspectiva antropológica dos *ritos de passagem*, esta atividade envergonha, constrange e decepciona (como comprovado por Sierpinska et al. (2008)), e deveria acontecer o contrário: empoderar os participantes/estudantes. Ao adentrarem no Ensino Superior, muitos estudantes pensam que o estilo de ensino será como o do Ensino Médio, mas ficam surpresos com a rapidez dos cursos/disciplinas (Sierpinska, 2008).

Assim como é um erro por parte dos professores universitários tentar trazer uma linguagem realizada no Ensino Médio para tratar conteúdos da Matemática Acadêmica. Essa maneira pode causar equívocos de ordem, inclusive conceituais, acarretando mais problemas que benefícios. Guzmán et al. (1998) acreditam que a solução não é o professor do Ensino Superior aproximar-se do estilo do Ensino Médio e sim o inverso, com o intuito de preparar os estudantes para a autonomia no aprendizado – aqui reside uma fala mais próxima dos objetivos desta dissertação.

³² No original: “[...] did not appear as a major source of frustration in the group of respondents.”

³³ No original: “Being wrong means not being knowledgeable or not smart enough.”

Guzmán et al. (1998) fizeram um questionário para os estudantes a fim de investigar as dificuldades que os estudantes encontram na matemática universitária. A hipótese dos autores é que as dificuldades seriam ligadas a três aspectos: à forma como os professores apresentam a Matemática Acadêmica e à organização da sala de aula; às mudanças nas formas matemáticas de pensar em nível superior; e à falta de ferramentas adequadas para aprender matemática. Este questionário foi aplicado em universidades de diferentes partes do mundo.

Os resultados da pesquisa de Guzmán et al. (1998) indicaram que a Transição para a Matemática Acadêmica “[...] parece mais suave para estudantes de Engenharia do que para professores do ensino secundário em formação inicial ou para alunos do programa de matemática” (p. 749, tradução nossa)³⁴. Além disso, 70% concordam parcialmente ou totalmente que há tempo insuficiente em sala de aula para compreender a Matemática Acadêmica, o mesmo problema denunciado por Sierpinska et al. (2008).

O ritmo veloz dos cursos é inversamente proporcional à concepção do conhecimento matemático, pois estudar matemática é um processo lento. A própria Matemática Acadêmica tem uma velocidade de pesquisa mais lenta à medida que o conhecimento fica mais específico. Mais uma vez, a falta de tempo faz com que os estudantes não a compreendam.

Guzmán et al. (1998) dão voz a alunos e professores para que exponham os problemas vivenciados na Transição. Os alunos entrevistados disseram que os professores universitários:

- não têm habilidades pedagógicas como os do Ensino Médio;
- não ensinam fatos evidentes para eles que não o são para os alunos³⁵;
- não ligam se os estudantes entenderam ou não;
- são muito abstratos e não apresentam exemplos concretos;
- acreditam que os estudantes “sabem provar”, mesmo não vivenciando essa prática no Secundário.

Acreditamos que essas opiniões permeiam as universidades em certa medida.

Já os professores relataram que a maioria dos estudantes têm dificuldade com a Matemática Acadêmica, não sabem estudar, não têm conhecimentos prévios necessários, não estão interessados na matemática e sim em passar nos exames, não sabem organizar e consolidar conhecimento matemático e têm dificuldade em adquirir autonomia (Guzmán et al., 1998).

³⁴ No original: “[...] much smoother for engineering students than for preservice secondary school teachers or for students of the mathematics program.”

³⁵ Sobre isso, na seção 4.4 falaremos sobre conhecimentos prévios (*met-befores*) na relação professor-aluno.

Guzmán et al. (1998) enunciam profusas dificuldades no âmbito didático. Primeiramente, os estudantes não sabem tomar notas ou ler um livro didático de forma adequada. Além disso, observa-se uma falta de conhecimento pedagógico e de habilidades didáticas por parte dos pesquisadores matemáticos. Há também uma carência de métodos inovadores de ensino voltados para a Matemática Acadêmica. A situação é agravada pela falta de *feedback* e interação entre professor e aluno, bem como pela ausência de habilidades adequadas de avaliação, tanto por parte dos estudantes quanto dos professores. Finalmente, há um descuido evidente na concepção dos cursos, ponto que é também questionado por Serrano et al. (2005).

Os *cursos propedêuticos*, preparatórios ou chamados de *Matemática Zero* que foram avaliados por Serrano et al. (2005) são de curta duração e anseiam facilitar a Transição dos alunos entre as instituições, “completando” ou “remendando” conteúdos de Matemática Escolar com os da Matemática Acadêmica, uma ambiciosa missão na visão dos autores. Para os autores, a instituição universitária concebeu esses cursos para não se adaptar ao egresso do Ensino Médio, que foi reformado na Espanha em 1990, contexto dos autores. Essa posição está de acordo com a constatação de Gueudet et al. (2016):

[...] as dificuldades dos alunos na passagem do EM para o ES também são propostas para serem superadas pelas mudanças no EM (o nível inferior), como se o ensino e as organizações matemáticas na universidade fossem inquestionáveis e, portanto, intocáveis. (p. 20, tradução nossa).³⁶

Serrano et al. (2005) consideram que os alunos chegam na universidade com “incompletude” das *organizações matemáticas* que estudaram no Ensino Médio uma vez que sua bagagem matemática é atomizada e rígida. Essa incompletude está relacionada com a *incompletude didática* – no Médio – que promove um ensino de *organizações matemáticas* pontuais e rígidas, isolando as tarefas em meras aplicações de técnicas, sem conectá-las. Contudo, o Ensino Superior não remedia as incompletudes do Secundário e alguns dispositivos didáticos criados para *suavizar* a Transição agravam a rigidez e atomização das *organizações matemáticas*.

Os problemas dos cursos aferidos por Serrano et al. (2005) estão relacionados à instituição e à didática dos professores, vertente das pesquisas sobre Ensino de Transição. Eles fazem listas de exercícios enormes, “bombardeiam” recordações de técnicas, ensinam

³⁶ No original: “[...] students’ difficulties in the passage from S to U are also proposed to be overcome by changes in S (the lower level), as if the teaching and mathematical organizations at the university were unquestionable and thus untouchable.”

organizações matemáticas sem conectá-los. Ou seja, pretendem ensinar, em poucos dias, vários temas que se supõe que alunos deveriam saber de antemão.

Por fim, após este levantamento sobre as dificuldades relacionadas ao professor e ao aluno na Transição, angariamos soluções para essas dificuldades e as expomos na próxima seção. Essa organização escrita foi inspirada num movimento análogo à premissa de Paulo Freire, da denúncia ao anúncio, transitando das dificuldades para as soluções.

2.3 Soluções para as dificuldades

De nossas leituras, destacamos algumas soluções de caráter pedagógico para *suavizar* a Transição:

1. uso de modelagem e aplicações,
2. uso extensivo de computadores no ensino e aprendizado,
3. trabalhos em grupo,
4. *peer teaching* (uma abordagem entre pares na qual o estudante assume a posição de ensinar e aprender com o outro),
5. aplicação de provas diagnósticas para identificar as lacunas e promover exercícios para remediá-las.

Para Wood (2001), outras assistências que devem ser ofertadas pelas instituições são:

- A. sessões com psicólogos especializados na aprendizagem dos alunos,
- B. aulas particulares,
- C. fazer grupos com alunos com problemas similares e dar uma aula tutorial semanalmente somente para esses,
- D. oficinas (*workshops*) curtos para grupos,
- E. materiais de autoestudo,
- F. os funcionários das universidades podem dar recomendações para os estudantes no momento de matrícula na transição entre períodos.

Ainda, ao final do Ensino Médio, os estudantes deveriam vivenciar experiências com maior autonomia e liberdade e menos direcionamentos, como forma de prepará-los para a vida universitária (Wood, 2001).

Sierpinska et al. (2008) indicam algumas possíveis soluções para as *frustrações* dos estudantes no Ensino de Transição. Em primeiro lugar, dado o maior fator de *frustração* indicado em sua pesquisa, o ritmo, os *cursos ponte* ou de pré-requisitos deveriam ter um

tempo estendido, pelo menos por dois semestres. O formato de cursos *online* no modelo instrucional permite que alunos estudem no próprio ritmo e estimula a autonomia.

Os autores exprimem que aulas baseadas em discussão são efetivas para estudantes de alto desempenho ou nível socioeconômico alto, mas podem ter impacto negativo para o aprendizado de estudantes de nível socioeconômico baixo ou sem autoconfiança. Os professores devem propor atividades que exigem mais autonomia e problemas de “investigação” e “exploração” (também como opcionais e extracurriculares); mudar a linguagem de “certo” e “errado” para “verdadeiro” e “falso”; fazer *quizzes* rápidos e frequentemente.

Em contraposição à ideia supracitada de que o Ensino Superior deveria se aproximar do Ensino Médio, Guzmán et al. (1998) propõem que o ensino de matemática na escola seja num nível mais “alto” e mais abstrato para se aproximar do estilo da universidade. Os autores destacam a necessidade de *cursos ponte* para grupos específicos de estudantes “para preencher as suas lacunas no que diz respeito ao conteúdo, à metodologia e às competências”. (p. 759, tradução nossa)³⁷.

Os *cursos ponte* levam tempo para preparar os estudantes com conhecimentos e habilidades básicas para aprender a Matemática Acadêmica. Porém, o universitário já está investindo parte do seu tempo limite de conclusão do curso para fazê-lo. Assim sendo, os frequentadores dos *cursos ponte* deveriam ter tempo extra (pelo menos um ano a mais) para se formar e aproveitar esses cursos como créditos no histórico (Wood, 2001).

Uma proposta institucional que não vemos no Brasil é a orientação. Um orientador (não no sentido de projeto de pesquisa) pode ser um ator importante na Transição, instruindo e incentivando os novatos de maneira mais pessoal. Podendo ser um aluno veterano ou um professor, sua experiência contribuirá e muito para a permanência e sucesso acadêmico dos calouros. Guzmán et al. (1998) acreditam que devemos oferecer aos alunos atividades e documentos de orientação.

Isto pode começar já no ensino secundário, por exemplo, através da criação de atividades que ajudem os alunos a escolher individualmente o percurso que lhes parece mais adequado, na perspectiva da sua futura carreira universitária. Os estudantes universitários que chegam devem ser recebidos com informações que os ajudem a compreender melhor o lugar da matemática na sua educação universitária. Num determinado curso, um documento de orientação pode permitir explicitar aos alunos as expectativas do professor, por exemplo que os alunos devem trabalhar logo desde o primeiro dia de aulas. (p. 759, tradução nossa).³⁸

³⁷ No original: “[...] to fill their gaps with regard to content, methodology and skills”.

³⁸ No original: “This can begin already in secondary school, for example by setting up activities in order to help students individually to choose the track that seems the most appropriate for them, in the perspective of their

Os conselheiros/orientadores podem ajudar na organização da vida acadêmica dos novatos antes da matrícula, ajudando a resolver problemas práticos comuns e divulgando os *cursos ponte* (Wood, 2001). Clark e Lovric (2008) propõem seguir o exemplo da Universidade de Tecnologia de Sydney, Austrália, da criação do “Semestre Zero”, que acontece na *Fase Liminar* da Transição, na prática, durante o intervalo entre o Ensino Médio e o Superior.

Guzmán et al. (1998) apresentam um conjunto de soluções viáveis para facilitar a Transição. Entre elas, destacam-se o estabelecimento do diálogo entre professores do Secundário e do Terciário e entre matemáticos e pessoas que usam matemática, como engenheiros. A nível institucional, sugerem a disseminação de “histórias de sucesso” de instituições com excepcional performance pedagógica e que conseguiram desenvolver uma cultura favorável para facilitar a Transição. Também, ofertar cursos de formação pedagógica generalista para professores do Ensino Superior. A nível didático, ajudar estudantes a usar recursos para obterem informações na *internet* e livros, diminuir a quantidade de conteúdo para aprofundar e aprender adequadamente e promover atividades metacognitivas para que os estudantes aprendam a aprender. Em suma, é preciso mudar a “cultura” dos estudantes (como aprendem matemática) e dos professores (com metodologias para ensinar matemática).

Os professores também devem ser sensíveis à importância de tornar explícito aos alunos o que exatamente estão fazendo e aprendendo, e para onde estão indo. Em outras palavras, devem fornecer aos alunos objetivos identificáveis, não esperando que tais percepções surjam naturalmente por si próprios. (Guzmán et al., p. 754, tradução nossa).³⁹

Agora, apresentaremos uma solução que a nossa instituição de ensino, o CEFET-MG, está discutindo para se adequar a um cenário novo. Os alunos ingressantes no Ensino Superior dos últimos anos apresentaram defasagens na aprendizagem de matemática, também em razão do ensino remoto, realidade educacional do período pandêmico⁴⁰. À vista disso, em 2023 o CEFET-MG reestruturou algumas disciplinas iniciais dos cursos de Exatas. Consultamos

future university career. In-coming university students should be welcomed with information helping them to better understand the place of mathematics in their university education. In a given course, an orientation document can allow to make explicit to the students the expectations of the teacher, for example that students should work right from the very first day of classes.”

³⁹ No original: “Teachers must also be sensitive to the importance of making explicit to the students what exactly they are doing and learning, and where they are heading. In other words, they must provide students with identifiable goals, not expecting such insights to emerge naturally by themselves.”

⁴⁰ A Organização Mundial de Saúde (OMS) decretou a COVID-19 como pandemia em 11 de março de 2020 e declarou o fim da emergência de saúde pública em 5 de maio de 2023. Mais informações em: <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>. Data de acesso: 12 de mai. de 2025.

docentes do Departamento de Matemática que estiveram envolvidos com a reestruturação dos currículos e obtivemos as seguintes informações relevantes para a nossa pesquisa, todavia nem todas são registradas em documentos oficiais.

Em primeiro lugar, as disciplinas Cálculo 1, de 90 horas/aula, e Geometria Analítica e Álgebra Vetorial, de 90 horas/aula, foram reformuladas. Agora, com a nova nomenclatura de Cálculo com Funções de Uma Variável Real, de 90 horas, um terço da disciplina é uma revisão de conteúdos de Matemática Escolar, o que antes era feito em duas semanas. Os representantes dos cursos de graduação pediram para que os conteúdos limite e derivada continuassem nessa disciplina do primeiro período, pois caso contrário atrasariam uma série de disciplinas que usam esses tópicos (CEFET-MG, 2023a). Assim, o acordo estabelecido foi que essa disciplina contivesse a revisão, limite e derivada, passando o conteúdo integração para o segundo período.

Entretanto, o segundo período dos cursos de Exatas agora têm duas disciplinas de Cálculo de 60 horas/aula, Integração e Séries (CEFET-MG, 2023d) e Cálculo com Funções de Uma Variável Real I (CEFET-MG, 2023b). A outra disciplina teve a nova nomenclatura Geometria Analítica e Álgebra Linear e teve redução da carga horária e dos conteúdos ensinados, passando a ter 60 horas/aula (CEFET-MG, 2023c). É interessante realizar uma análise curricular minuciosa dessas mudanças, o que não cabe com tal profundidade nesta dissertação; destacamos o movimento institucional de adequação curricular ao recente e adverso cenário educacional da Transição Ensino Médio-Superior.

Até a data desta escrita, foram quatro semestres da vigência desta reformulação. A instituição ainda não organizou estudos estatísticos internos sobre os impactos dessas mudanças. Os docentes do Departamento de Matemática apontam que, apesar desse esforço institucional, a taxa de reprovação continua “muito alta”. Ademais, alguns estudantes estão tendo êxito em recuperar as aprendizagens na parte revisional ampliada implementada. Entretanto, perceberam que esse período revisional ainda é insuficiente para muitos. Consideram que esse movimento de adequação não “diminuiu” (*sic*) a quantidade de conteúdos matemáticos ensinados na graduação, na verdade o distribuiu ao longo dos cursos, diminuindo a “pressão” (*sic*) do primeiro período, que era bem maior.

Segundo eles, o contato com outras instituições de Ensino Superior sinaliza que também estão fazendo movimentos de reformulação curricular pelo mesmo motivo, a defasagem de aprendizagem do pós-pandemia, amoldando a seus contextos. Essa é uma oportuna solução institucional para uma Transição *mais suave* para o Ensino Superior, considerando as novas circunstâncias que envolvem o ensino de matemática.

Após discussão sobre as dificuldades e soluções encontradas no cenário do Ensino de Transição, especificamente na sala de aula, notamos que todas as pesquisas consultadas diferenciam as “Matemáticas” ensinadas e aprendidas no Ensino Médio e no Ensino Superior. Sendo assim, fomos impelidos a dialogar com referenciais teóricos sobre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica, o que apresentaremos no próximo capítulo.

3 TRANSIÇÃO EPISTEMOLÓGICA: CONCEPÇÕES SOBRE MATEMÁTICA ACADÊMICA E MATEMÁTICA ESCOLAR

O objetivo deste capítulo é trazer as concepções sobre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica encontradas na literatura (Moreira; David, 2008, 2011; David et al., 2013; Gueudet, 2008). Articular esses conhecimentos será essencial para a discussão sobre o aspecto cognitivo e o contexto de Transição entre eles, sequência desta subseção.

Entendemos por *concepções* como em Abbagnano (2007) “tanto o ato do conceber quanto o objeto concebido, mas, preferivelmente, o ato de conceber e não o objeto, para o qual deve ser reservado o termo conceito” (p. 169). Também, nos apropriamos de Lalande (1977), em que o vocábulo *concepção* é assim definido:

1º Como operação: A. Todo ato de pensamento aplicado a um objeto. B. Mais especificamente, operação do entendimento, oposta àquelas da imaginação, seja reprodutiva, seja criativa (concepção de diferença; concepção de mundo). C. Ainda mais especificamente, operação que consiste em apreender ou formar um conceito. 2º D. E. F. Respectivo resultado de cada uma dessas operações. (Lalande, 1997, p. 161, tradução nossa).⁴¹

Moreira e David (2011)⁴² traçam as dissonâncias e conflitos entre os conhecimentos matemáticos Acadêmico e Escolar, sendo este associado à prática dos professores e ao campo da Educação Matemática e aquele associado à prática dos matemáticos e ao campo das Ciências Exatas. Após o reconhecimento desses conflitos, construiremos um ponto de discussão que não necessariamente faz parte da “integração” entre eles, mas permitirá uma incipiente harmonia entre esses conhecimentos no período-contexto da Transição, tendo como finalidade sempre beneficiar os estudantes, os professores e as instituições de ensino.

Para David et al. (2013), a Matemática Escolar é

[...] vista como um conjunto de práticas e saberes associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática (que não se restringem ao que se ensina aos alunos na escola, porque inclui também, por exemplo, os saberes profissionais vinculados ao trabalho docente nesse processo). (p. 45).

⁴¹ No original: “1º En tant qu'opération: A. Tout acte de pensée s'appliquant à un objet. B. Plus spécialement, opération de l'entendement, opposée à celles de l'imagination, soit reproductrice, soit créatrice (conception d'une différence; conception du monde). C. Plus spécialement encore, opération consistant à saisir ou à former un concept. 2º D. E. F. Résultat respectif de chacune de ces opérations.”

⁴² O artigo Moreira e David (2011) é uma tradução dos autores do artigo Moreira e David (2008).

Há quem considere que a Matemática Escolar é composta pelas Matemáticas Acadêmica e do Cotidiano, transplantando as situações cotidianas para a sala de aula e didatizando/simplificando o conteúdo acadêmico. Entretanto, Moreira e David (2011) marcam as dissonâncias, antagonismos e a falsa harmonia entre elas. Logo, a Matemática Escolar é um corpo de conhecimento proveniente da escola, não sendo independente nem dependente das Matemáticas Acadêmica e do Cotidiano.

A Matemática Acadêmica pode ser definida como “um corpo de conhecimentos científicos tal como produzido e organizado pelos matemáticos profissionais” (Moreira; David, 2011, p. 193). Uma outra definição mais recente dos autores é “um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal” (David et al., 2013, p. 45)⁴³.

Para o professor da Educação Básica, a Matemática Acadêmica faz parte do currículo na formação na Licenciatura, porém sabemos que é necessário incorporar outros conhecimentos para ser útil na sua prática profissional. Nesta dissertação, que está na esfera do Mestrado Profissional, pretendemos agregar a Matemática Acadêmica com as teorias cognitivas do Pensamento Matemático Avançado, de David Tall, e sobre Ensino de Transição, de Ghislaine Gueudet, para incentivar essa utilidade.

De um lado, a Matemática Acadêmica está relacionada com a construção de conceitos pelo rigor e pela lógica. Nela, os conceitos foram historicamente produzidos, partindo de conceitos primitivos (axiomas ou postulados) e é através de uma cadeia de resultados logicamente deduzidos que é criada mais Matemática Acadêmica. Uma simples mudança nos conceitos primitivos podem alterar toda a Matemática produzida⁴⁴, mas a estrutura que permanece é a lógica-dedutiva.

De outro, a Matemática Escolar está relacionada com a construção de conceitos pelos estudantes e é flexível, quando há negociações em sala de aula de compreensões “erradas” que podem ser revistas no futuro. “A flexibilidade permite reconhecer em certas ideias ‘erradas’ dos estudantes um passo pedagogicamente legítimo na direção do desenvolvimento

⁴³ David et al. (2013) também definem a Matemática do cotidiano como “um conjunto de ideias, saberes e práticas (frequentemente, mas nem sempre, com um correspondente na matemática escolar) utilizadas em situações do cotidiano (dia a dia, trabalho, etc.) fora da escola” (p. 45).

⁴⁴ Um caso muito evidente disso é o axioma das paralelas de geometria euclidiana: na tentativa de prová-lo ao invés de assumi-lo como axioma, as tentativas geraram novas geometrias (hiperbólica e esférica).

pleno da noção matemática em questão” (Moreira; David, 2011, p. 207), algo pouco considerado no âmbito da Matemática Acadêmica.

É evidente que a Matemática Acadêmica exige um formalismo; o risco dessa exigência é que o estudante do Ensino Superior é convencido das regras sem entender seus princípios. Como nossa discussão está inserida no campo da Educação Matemática, percebemos que o discente avista as regras da linguagem da matemática como algo despótico e incontestável: existem um grupo (social) de matemáticos e uma literatura para conservar o formalismo. Em contraste, as negociações supracitadas são permitidas na Matemática Escolar uma vez que o currículo da disciplina é em espiral⁴⁵, sempre ampliando e aprofundando e também reformulando conceitos e práticas.

Entretanto, todo esse rigor no contexto Acadêmico também pode variar.

Segundo Dreyfus (1999), os professores universitários e os livros didáticos, os quais moldam o comportamento dos estudantes, não os ajudam a estabelecer “normas sociomatemáticas”, o que significa, neste contexto, critérios compartilhados por alunos e professores para decidir se uma prova é válida ou não, o que é uma explicação satisfatória, etc. Nos cursos a que ele se refere, dar aos alunos os meios para aprenderem a construir provas e a controlar a sua validade não aparece como um objetivo explícito. Esses aspectos da matemática parecem ser deixados sob a responsabilidade dos alunos. Variações de rigor na prova podem ser observadas até mesmo em livros didáticos universitários. Assim, as regras não são claras para os alunos. (Gueudet, 2008, p. 243, tradução nossa).⁴⁶

3.1 Conhecimento matemático em Transição

Gueudet (2008) fala sobre a mudança da matemática na Transição. A autora ilustra a percepção dos calouros para com Matemática Acadêmica como um novo “país”, com nova linguagem e novas regras/leis, que os fazem se sentirem estrangeiros. Para os estudantes, os matemáticos profissionais são as referências de como se comunicar (elaborando provas matemáticas) em conformidade com essa linguagem e essas regras/leis. Obviamente, a habilidade de comunicação está intrinsecamente ligada à habilidade cognitiva, no caso, o Pensamento Matemática Avançado. No Ensino Médio, poucos estudantes conseguem elaborar

⁴⁵ Isso significa que “[...] as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes”. (Brasil, 2018, p. 299).

⁴⁶ No original: “According to Dreyfus (1999), college teachers and textbooks, which shape the students’ behavior, do not help them to establish “socio-mathematical norms,” which means in this context, criteria shared by students and teachers to decide whether a proof is valid or not, what is a satisfactory explanation, etc. In the courses he refers to, giving students the means to learn to construct proofs, and to control their validity does not appear as an explicit aim. These aspects of mathematics seem to be left under the students’ responsibility. Variations of rigor in proof can be observed even in university textbooks. Thus the rules are not made clear for students.”

provas matemáticas, “mas o ensino adequado pode ajudá-los a evoluir para esquemas de provas analíticas, onde a convicção depende da dedução lógica”⁴⁷ (p. 243), que é um dos objetivos do Ensino de Transição.

Outro aspecto que as distingue é a estabilidade da Matemática Acadêmica em contraposição ao movimento da Matemática Escolar. Na Matemática Acadêmica, as construções “visam produzir uma abstração que expresse formalmente as características essenciais de um objeto que, a menos da construção formal, já é conhecido.” (Moreira; David, 2011, p. 208). Já na Matemática Escolar, o conhecimento matemático está sempre em movimento na sala de aula, no sentido de que progressivamente um professor apresenta expansões dos conceitos, revendo e aprofundando ideias. Como exemplo, Moreira e David (2011) citam o caso da extensão progressiva no ensino de números, iniciando pelos números naturais, passando pelos racionais e findando nos reais (ou complexos). Muitas vezes na escola quando um conceito aprendido não consegue solucionar um problema, ensina-se um novo conceito, mais geral, que abarca as situações inéditas e as anteriores; isso pode ser evidenciado no ensino de análise combinatória, por exemplo⁴⁸.

Além disso, o intento da Matemática Acadêmica é sintetizar e generalizar ideias o máximo possível. Assim, a Matemática Acadêmica compõe-se de estruturas, propriedades, postulados, definições, teoremas, axiomas, deduções, provas, demonstrações, melhor se forem escritas à luz do Princípio da Economia, ou Navalha de Ockham⁴⁹. Além disso, algumas vezes enfatiza as estruturas e relações entre os objetos ante a natureza de seus elementos (Moreira; David, 2011).

Todavia, a Matemática Escolar objetiva decompor o conceito em subconstrutos, ampliar as possibilidades de discussão, mostrando situações concretas diversificadas (Moreira; David, 2011). A exemplo, a ideia “meio” em matemática pode significar, no contexto da educação básica, a fração $\frac{1}{2}$, o número decimal 0,5, o ponto médio de um segmento de reta, o centro de uma circunferência, a divisão por 2, etc., todos conduzindo para o aprendizado do estudante. Aqui percebe-se uma diferença entre definir um conceito, prática acadêmica, e explicar um conceito, prática escolar.

⁴⁷ No original: “But appropriate teaching can help them to evolve towards analytical proof schemes, where conviction relies on logical deduction.”

⁴⁸ Mais informações sobre essa abordagem podem ser vistas no *link*: <https://www.youtube.com/watch?v=3guo7lg7igI>. Data de acesso: 12 de mai. de 2025.

⁴⁹ O Princípio da Economia, ou Navalha de Ockham, “consiste no axioma lógico-metodológico segundo o qual “a pluralidade não deve ser postulada sem necessidade” [...] ou, ainda, que “inutilmente se faz por mais o que se pode fazer por menos [...]” (Borges, 2022, p. 130).

Outra distinção que Moreira e David (2011) fazem sobre as “Matemáticas” é na perspectiva das duas em relação à abstração e ao concreto. Por um lado, a Matemática Acadêmica detém relações entre seus entes abstratos que não precisam ter relações com a realidade concreta; daí, faz-se a sua “bifurcação” em Matemática Pura e Aplicada. Por outro lado, a Matemática Escolar precisa trazer significados concretos dos objetos matemáticos, pelo menos no início do processo de ensino e aprendizagem, para um progresso na direção da abstração. Essas perspectivas são diferentes porque as práticas e os objetivos são distintos de professores de matemática e matemáticos. O ato de pensar matemática abstratamente é sofisticado, assim como o é elaborar situações didáticas que a realidade concreta (cotidiana) alude a conceitos abstratos.

Pesquisadores da Universidade de Michigan, liderados por Deborah Ball, desenvolveram o conceito *Conhecimento Matemático para o Ensino* (MKT - *Mathematical knowledge for teaching*) (Ball et al., 2008). Para Ball e seus colegas o *Conhecimento Matemático para o Ensino* se estruturaria em seis domínios: três pertencentes ao *Conhecimento Específico do Conteúdo* (*Subject Matter Knowledge*) e três pertencentes ao *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (*Pedagogical Content Knowledge*), explicitado no Quadro 1.

Quadro 1 – Teoria de Ball et al. (2008)

Conhecimento Matemático para o Ensino	
Conhecimento Específico do Conteúdo	Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK – <i>Common content knowledge</i>)	Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS – <i>Knowledge of content and students</i>)
Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK – <i>Specialized content knowledge</i>)	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT – <i>Knowledge of content and teaching</i>)
Conhecimento do Horizonte do Conteúdo (HCK – <i>Horizon content knowledge</i>)	Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC – <i>Knowledge of content and curriculum</i>)

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Ball et al. (2008)

A Matemática Escolar compreende quatro domínios, segundo David et al. (2013), com referência no trabalho de Ball et al. (2008):

- o *Conhecimento Comum do Conteúdo*: conhecimento do conteúdo disciplinar ensinado pelos professores e que outros profissionais também possuem e envolve as habilidades de saber resolver exercícios e problemas, saber utilizar notações e termos

corretamente, saber identificar no livro-texto definições incorretas e saber identificar resposta incorreta do aluno;

- o *Conhecimento Especializado do Conteúdo*: conhecimento do conteúdo que é específico para o ensino, não sendo necessário para outras atividades ou profissões e envolve as habilidades de saber analisar se a estratégia utilizada pelo aluno pode ser generalizada, reconhecer padrões nos erros dos alunos, saber avaliar se afirmações feitas pelos alunos são pertinentes, reconhecer as consequências da utilização de uma representação específica para o ensino de um determinado assunto, adaptar o conteúdo matemático presente nos livros didáticos;
- o *Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos*: conhecimento das relações entre os alunos e a matemática e envolve as habilidades de saber antecipar possíveis dificuldades dos alunos, saber prever o que os alunos acharão motivador e interessante em um exemplo, conhecer concepções prévias e concepções equivocadas⁵⁰ dos alunos sobre conteúdos matemáticos específicos;
- e o *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino*: combina o conhecimento sobre ensinar e conhecimento sobre matemática e envolve as habilidade de avaliar as vantagens e desvantagens na utilização de determinadas representações, analisar as contribuições que diferentes métodos e procedimentos proporcionam para a aprendizagem, saber quando utilizar um comentário feito por um estudante para discutir uma questão matemática, saber quando fazer uma nova pergunta para aprofundar o conhecimento dos alunos.

Assim sendo, a Matemática Escolar é um corpo de conhecimentos que vai além do currículo de Matemática para o ensino de Educação Básica.

3.2 Contribuições do campo Ensino de Transição para as concepções

Agora, dissertamos sobre como a mudança de ambiente, do Ensino Médio para o Ensino Superior, pelo educando o faz mudar de atitudes e percepções para com a matemática. Esse período-contexto de Transição traz um conflito de percepção sobre as duas Matemáticas, por onde caminharemos a seguir. Clark e Lovric (2008) destacam diversos pontos de mudanças que afetam a Transição da matemática do Secundário para o Terciário, a saber:

⁵⁰ Como os *obstáculos epistemológicos* de Gueudet et al. (2016).

- A. Mudanças nos estilos de ensino e aprendizagem, tipo de Matemática ensinada, níveis de compreensão conceitual e quantidade de Pensamento Matemático Avançado necessário.
- B. Nos cursos superiores de Matemática, os alunos são expostos à introdução e/ou utilização rotineira de conceitos abstratos, ideias e raciocínio abstrato; eles testemunham uma ênfase crescente em representações múltiplas de objetos matemáticos, na precisão da linguagem matemática necessária e no papel central das provas.
- C. Os alunos em Transição são expostos a inúmeras diferenças didáticas nas abordagens de ensino, bem como a uma grande variedade de estilos de ensino individuais dos instrutores e a mudanças nas características do conhecimento.
- D. Os estudantes em Transição passam por mudanças pessoais que exigem um ajuste das estratégias de aprendizagem, competências de gestão do tempo e uma mudança para uma vida e estudo mais independentes.
- E. Mudanças sociais e culturais com o advento de turmas grandes, mudança constante de turmas (ao contrário do Ensino Médio), nível de maturidade exigido, exposição a uma cultura diferente da sua e grau de competitividade.

No Ensino Médio, os estudantes precisam produzir resultados em avaliações contendo problemas idealizados da realidade. No Ensino Superior, é exigida uma responsabilidade cada vez maior em relação ao conhecimento ensinado, pois esse será levado para o trabalho, o mundo, e impactará o meio sociocultural (Gueudet, 2008).

No Ensino Médio, o aluno imita a estratégia ensinada pelo professor ou mostrada no livro didático; nos Estados Unidos, existem listas de exercícios chamadas *drills* (treinos), exercícios repetidos para fixação da aprendizagem. No Ensino Superior, o aluno também imita as estratégias aprendidas, a exemplo dos exercícios repetitivos de cálculo de derivadas e integrais; porém o entendimento dos teoremas e suas demonstrações podem ser “deixados de lado” porque o que é exigido é a aplicação prática, sobremaneira para as carreiras profissionais que usam a Matemática.

Frequentemente, eles [estudantes] não conseguirão relacionar seu curso de cálculo ou álgebra linear com sua profissão prevista. O instrutor precisa abordar essa questão e convencer os alunos da importância da matemática para sua carreira (Guzmán et al., 1998, p. 756, tradução nossa).⁵¹

⁵¹ No original: “They will often be at a loss to relate their calculus or linear algebra course to their foreseen profession. The instructor needs to address this issue and convince students of the importance of mathematics for their career.”

No Ensino Médio, a manipulação e a aplicação do conceito, por vezes provadas pelos professores, é a parte central da aula. Alguns problemas são apresentados divididos em tarefas mais simples, como um caminho para chegar à resolução; e isso não desenvolve a plena autonomia do aluno (Gueudet, 2008). No Ensino Superior, as provas e demonstrações são a parte central da aula, pois deve-se provar as ferramentas que serão usadas nos problemas e exercícios, geralmente em tarefas extraclasse. As provas também têm um papel central na construção da cultura da Matemática Acadêmica, seus métodos e resultados (Gueudet, 2008).

[...] a matemática universitária como sendo mais focada na organização teórica do conteúdo matemático, nos fundamentos do conhecimento e na apresentação de provas e teoremas como ferramentas para abordagem de problemas. Em contrapartida, a matemática do secundário enfatiza a produção de resultados e o aspecto prático das atividades matemáticas, atribuindo um papel mais “decorativo” aos axiomas, definições e provas. (Gueudet et al., 2016, p. 20, tradução nossa).⁵²

No Ensino Médio, os estudantes resolvem problemas e preferem seguir um algoritmo de procedimentos. No Ensino Superior, os estudantes precisam ter mais criatividade para resolver problemas, embora a falta de interesse na matemática e nas suas regras resulta na supressão da liberdade para escolher qual o melhor modelo para a resolução (Sierpinska et al., 2008).

A Matemática Acadêmica não tem “receitas” como esperado pelos estudantes que estão em Transição. O que gera uma confusão: os estudantes do Ensino Superior entendem que os exemplos mostrados pelos professores são parecidos com “receitas” e os memorizam. (Sierpinska et al., 2008). Porém, nem todos os exemplos podem ser generalizados e eles não têm a maturidade e experiência para distinguir. Portanto, o aprendizado da Matemática Acadêmica requer sobretudo o entendimento aprofundado dos resultados demonstrados, inclusive da própria demonstração.

Daí a importância de se apresentar teoremas e suas demonstrações nos dois níveis de ensino, bem como problemas típicos, ferramentas e técnicas práticas. Somente que, novamente, hodiernamente o ensino no Secundário está concentrado na resolução de problemas e o ensino no Terciário, nas demonstrações. A Transição da Matemática Escolar para a Matemática Acadêmica pode ser mais *suave* se equilibrarmos essas diferenças,

⁵² No original: “[...] university mathematics as being more focused on the theoretical organization of mathematical content, the foundations of knowledge, and presenting proofs and theorems as tools to approach problems. In contrast, secondary mathematics 4 Transitions Between Teaching Institutions 19 stresses the production of results and the practical aspect of mathematical activities, assigning a more “decorative” role to axioms, definitions, and proofs.”

aumentando o papel dos problemas e da aplicação no Ensino Superior e aumentando o papel das provas e demonstração no Ensino Médio, já pavimentando o caminho.

Diante o exposto, o nosso Recurso Educacional tem por objetivo a elaboração e o desenvolvimento de um Projeto de Ensino para auxiliar no ensino do Princípio da Indução Matemática para alunos do Ensino Médio. A justificativa dessa escolha é fundamentada na natureza desse método, que por um ponto de vista parece um algoritmo com dois passos (caso base e passo indutivo)⁵³ – algo procedimental e mais próximo do Ensino Médio. Por outra perspectiva, a Indução é uma ferramenta importantíssima para a Matemática Acadêmica, uma vez que existem quatro principais métodos de demonstração na matemática: Direta, Indireta, por Absurdo e por Indução.

Mas podemos nos perguntar: será que a introdução de elementos de Matemática Acadêmica, aqueles mais “próximos” do ensino na escola, e em quantidade adequada pode contribuir para o desenvolvimento mais refinado do pensamento matemático do estudante?

Sobre isso, o próximo capítulo descreve possibilidades e desafios do nosso objetivo, tendo por base uma teoria cognitiva na Educação Matemática.

⁵³ O método de Indução está melhor explicado no capítulo 6.

4 TRANSIÇÃO COGNITIVA: PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

As discussões deste capítulo são baseadas na teoria de David Tall sobre o Pensamento Matemático Avançado. O pesquisador desta teoria aborda as Transições entre os estados cognitivos, do concreto para o abstrato, do informal para o formal, do imagético para o linguístico, das percepções e ações sobre objetos para protótipos visuoespaciais e processos simbólicos, trajetória percorrida da infância à maturidade. De início, afirma-se que um matemático maduro tem de ser capaz de fazer conexões entre grandes porções de conhecimento e articulá-las em sequências de argumentos dedutivos (Tall, 1991), o que está relacionado com o entendimento e a feitura de provas matemáticas.

Organizamos este capítulo de revisão de literatura em quatro seções, justapondo as discussões de David Tall e seus colegas em ordem cronológica de publicação dos artigos e livros. Esta decisão de organização da escrita relaciona-se com a ordem das leituras e permite aos leitores uma trajetória percorrida da teoria, suas mudanças de estágio e aprofundamentos ao longo dos anos. Formar-se-á um todo coerente que sustentará o Projeto de Ensino elaborado.

4.1 Imagem de conceito e Definição de conceito

Pesquisas na área de psicologia e neurologia demarcaram dois lados do cérebro, intitulados “direito” e “esquerdo”, mas não nos referimos com esses nomes, somente às duas diferentes formas de processar. Um dos lados é lógico, analítico, conceitual, processa sequencialmente; o outro lado é analógico, sintético, intuitivo, visuoespacial, processa múltiplas imagens simultaneamente (Tall, 1991). Essas percepções não cessam o debate do pensamento matemático.

A questão é que a Matemática Acadêmica exige a utilização das “duas” partes do cérebro (Tall, 1991). Dizemos, em nível de senso comum e natureza da Matemática, que ela é concebida baseada na lógica dedutiva, portanto seria mais afeita àquela parte do cérebro. Entretanto, a elaboração do Pensamento Matemático Avançado também carece de intuição para resolver problemas, mas não uma intuição sem lógica ou rigor.

Mas o psicólogo vê a possibilidade de intuições mais sofisticadas (secundárias) surgirem de imagens conceituais refinadas que podem incluir imagens mentais de lógica e dedução. Assim, também aspectos da lógica podem ser aprimorados para se tornarem mais “intuitivos” para a mente matemática. O desenvolvimento desta intuição lógica refinada deveria ser um dos principais objetivos da educação matemática mais avançada. (Tall, 1991, p. 11, tradução nossa).⁵⁴

Um dos objetivos desta dissertação e do Projeto de Ensino é investigar e desenvolver a *intuição lógica*. Uma das formas de melhorar a intuição é trabalhar o poder de visualização dos conceitos matemáticos, mostrando suas propriedades e não-propriedades, suas forças e fraquezas, numa maneira que faça parecer uma necessidade lógica de formular uma teoria. Uma aula de cálculo, por exemplo, deve ter desenhos de quando um conceito funciona e desenhos de contraexemplos para então chegar num teorema com todas as hipóteses necessárias (Tall, 1991).

Os professores de Matemática do Ensino Superior devem compreender que há dificuldades na apropriação e no uso da Matemática Acadêmica, no período-contexto da Transição. A tarefa ideal do professor de Matemática é tomar uma ideia matemática complexa e “simplificá-la”, quebrando-a em pedaços menores, ensinando-os em uma sequência lógica. Um matemático maduro consegue enxergar esses pedaços articulados como parte de um todo; um principiante vê os pedaços isoladamente (Tall, 1991). Unir esses pedaços de forma consistente/coerente é nosso desafio.

Além disso, o professor deve fornecer problemas gradualmente mais aprofundados, que ajudem os estudantes a criar confiança e desejo de fazer mais problemas. Sabemos que problemas do escopo da Matemática Acadêmica demoram mais tempo para serem resolvidos, pois exigem reflexão por partes (como supracitado, “pedaços”) logicamente conduzidas para uma finalidade. As experiências graduais trarão a percepção e criticidade ao estudante quando pensar: “esses passos já foram concluídos, mas faltam alguns para finalizar a demonstração” ou “todos esses passos já concluíram a demonstração”.

Tall e Vinner (1981) discutem a evolução cognitiva na aprendizagem da Matemática Acadêmica no período-contexto do Ensino de Transição no material do curso da Universidade de Cambridge sobre Matemática Avançada. Primeiramente, notamos que a matemática é uma ciência precisa na descrição dos conceitos para fundamentar a teoria matemática. Entretanto,

⁵⁴ No original: “But the psychologist sees the possibility of more sophisticated (secondary) intuitions arising from refined concept images which can include the mental imagery of logic and deduction. Thus aspects of logic too can be honed to become more “intuitive” to the mathematical mind. The development of this refined logical intuition should be one of the major aims of more advanced mathematical education.”

acontece que as produções cognitivas variam de indivíduos, que concebem imagens mentais personalizadas. Sendo assim, marcam-se distinções entre os conceitos matemáticos e os processos cognitivos que os concebem.

Inicialmente, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática usamos alguns conceitos sem definição formal e, mais tarde, serão refinados através de experiências sensoriais, questões desafiantes e superações de conflitos cognitivos. Entretanto, um conceito matemático é mais do que uma imagem mental construída nesse processo (Tall; Vinner, 1981). Os autores compreendem que essa jornada cognitiva parte das *imagens de conceito*, para então alcançar a *definição de conceito*.

O termo *imagem de conceito* (*concept image*) é usado para descrever “a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades associadas e processos.” (ibidem, p. 2, tradução nossa)⁵⁵. Também, “[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem do conceito [...]”. (ibidem, p. 2, tradução nossa)⁵⁶.

Já a *definição de conceito* (*concept definition*) é “uma forma de palavras usada para especificar esse conceito” (ibidem, p. 2, tradução nossa)⁵⁷. Essa definição pode ser pessoal ou formal, sendo formal se aceita amplamente pela comunidade de matemáticos. Ainda, esse arranjo de palavras deve ser algo apreensível pelos interlocutores. O mais relevante é que “para cada indivíduo, uma definição de conceito gera sua própria imagem de conceito” (ibidem, p. 2, tradução nossa)⁵⁸. Assim, novas experiências aprimoram as *imagens de conceito* para que o estudante aprimore sua *definição de conceito*.

As *imagens de um conceito* são evocadas por estímulos sensoriais que despertam caminhos neurais e inibem outros. Porém, em certos momentos podem ocorrer conflitos cognitivos entre *imagens de conceito* que são evocadas simultaneamente, não sendo coerente com o todo. O senso de desconforto é um conflito, em alguns casos, habitado no subconsciente e a parte consciente poderá entendê-lo e racionalizá-lo tempos depois, se conseguir (Tall; Vinner, 1981). É também papel do professor (ou do material didático) expor conflitos mentais, que geram dificuldades para os estudantes, para racionalizá-los junto a eles.

A superação de um conflito mental é complexa porque muitas vezes as *imagens de conceito* são fortemente estabelecidas enquanto as *definições de conceito* não. Um curso de

⁵⁵ No original: “[...] total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.”

⁵⁶ No original: “[...] all mental attributes associated with a concept, whether they be conscious or unconscious, should be included in the concept image.”

⁵⁷ No original: “[...] a form of words used to specify that concept.”

⁵⁸ No original: “For each individual a concept definition generates its own concept image.”

matemática deve começar explorando diferentes *imagens de conceito*, através das experiências sensoriais; o que aconteceria se um curso de matemática para alunos não maduros começasse com as *definições de conceito*? Provavelmente a estrutura cognitiva concebida pela *definição de conceito* num estágio inicial seria muito fraca. Em consequência, a prova matemática seria ininteligível. Por outro lado, para um estudante maduro dos anos finais de uma graduação em Matemática é notório que as *imagens de conceito* não os servem, pois o estágio do Pensamento Matemático Avançado é tão sustentado pela abstração que as imagens mentais tornam-se um impedimento para o entendimento. (Tall; Vinner, 1981).

Também, geralmente os matemáticos maduros preferem provas algébricas a provas visuais, ao passo que matemáticos imaturos preferem iniciar por provas visuais, debates para formular e testar conjecturas e somente depois considerar a síntese do professor (Tall, 1992).

Tall (1992) evidencia que “as definições formais [definição do conceito] da matemática, que são fundamentos tão eficazes para a lógica da matéria, são menos apropriadas como raízes cognitivas para o desenvolvimento curricular” (p. 22, tradução nossa)⁵⁹. Raízes cognitivas são “conceitos que têm a dupla função de serem familiares aos alunos e também fornecer a base para o desenvolvimento matemático posterior”⁶⁰ (ibidem, p. 4, tradução nossa). Novamente, no processo de aquisição do Pensamento Matemático Avançado, o professor deve iniciar por raízes cognitivas mais simples, *imagens de conceito*, ainda que essas não sumirão quando na maturidade intelectual.

Voltando no caso dos estudantes na Transição, as *imagens de conceito* são aprimoradas “durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são acionados, afetando consciente e inconscientemente o significado e o uso”⁶¹ (Tall; Vinner, 1981, p. 1-2). O aprimoramento das *imagens de conceito* certamente são passos para aproximar-se do Pensamento Matemático Avançado.

A Transição para o Pensamento Matemático Avançado requer a apropriação da Matemática Acadêmica, como falamos, constituída de provas e demonstrações. Os matemáticos profissionais entendem por prova matemática “a dedução lógica de teoremas a partir de definições de conceitos cuidadosamente formuladas” (Tall, 1992, p. 22, tradução nossa)⁶².

⁵⁹ No original: “[...] the formal definitions of mathematics, that are such effective foundations for the logic of the subject, are less appropriate as cognitive roots for curriculum development.”

⁶⁰ No original: “[...] concepts which have the dual role of being familiar to the students and also provide the basis for later mathematical development.”

⁶¹ No original: “During the mental processes of recalling and manipulating a concept, many associated processes are brought into play, consciously and unconsciously affecting the meaning and usage.”

⁶² No original: “[...] the logical deduction of theorems from carefully formulated concept definitions.”

A prova matemática como atividade humana requer não apenas uma compreensão das definições dos conceitos e dos processos lógicos, mas também um entendimento de como e por que isso funciona. [...] Na transição para o pensamento matemático avançado, o entendimento matemático na prova pode ser mais importante do que a precisão matemática. (ibidem, p. 20, tradução nossa).⁶³

Assim, é aconselhável que o professor comece estruturando uma prova para os alunos e depois formalizá-la (Tall, 1991). Por outro lado, o aluno pode tentar escrever uma prova primeiro para si, depois para seus pares apreciarem e perceber se está convencendo os outros, em seguida (re)escrevê-la visando a “aprovação” de um matemático profissional (idem, 1992). O desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado atingirá o estágio de elaboração de provas matemáticas com a conjugação da *intuição lógica* com o rigor da escrita, refinando a *imagem do conceito* (personalização) para uma *definição do conceito* (palavras, ou seja, comunicação).

Isto é particularmente aplicável à transição para o pensamento matemático avançado quando a mente simultaneamente tem imagens conceituais baseadas em experiências anteriores interagindo com novas ideias baseadas em definições e deduções. A própria ideia de *definir* um conceito em uma frase, em oposição a *descrevê-lo*, é a princípio muito difícil de compreender - particularmente quando há palavras na definição que não são definidas. É impossível começar sem fazer algumas suposições, e estas são baseadas na imagem conceitual do indivíduo, não em nenhuma definição de conceito formulada logicamente! (Tall, 1992, p. 4, tradução nossa).⁶⁴

O exemplo clássico é a geometria euclidiana, que parte de (imagens de) conceitos primitivos – ponto, reta e plano – para definir outros objetos e depois engendrar provas matemáticas. A literatura que revisamos aponta que a geometria euclidiana é o primeiro (por vezes, o único) conteúdo da Matemática Escolar contendo provas.

Outra questão sobre a Transição é que a incompatibilidade de imagens mentais e definições formais pode ser fonte de dificuldade de estudo/raciocínio matemático. Os novatos interpretam a análise real baseando-se em *imagens de conceito* produzidas em experiências anteriores em detrimento das definições formais (Tall; Vinner, 1981).

⁶³ No original: “Mathematical proof as a human activity requires not only an understanding of the concept definitions and the logical processes, but also insight into how and why it works. [...] In the transition to advanced mathematical thinking, mathematical insight in proof may be more important than mathematical precision.”

⁶⁴ No original: “This is particularly applicable to the transition to advanced mathematical thinking when the mind simultaneously has concept images based on earlier experiences interacting with new ideas based on definitions and deductions. The very idea of *defining* a concept in a sentence, as opposed to *describing* it, is at first very difficult to comprehend - particularly when there are bound to be words in the definition which are not themselves defined. It is impossible to make a beginning without making some assumptions, and these are based upon the individual’s concept image, not in any logically formulated concept definition!”

As mudanças de estágios cognitivos, das *imagens* às *definições de conceitos* e das *intuições lógicas* para a linguagem rigorosa da escrita são marcantes na Transição da escola para a universidade. Essa mudança fundamental no âmbito da matemática proporciona uma discussão sobre o crescimento cognitivo do estudante, visto a seguir.

4.2 Crescimento cognitivo na Transição da escola para o Ensino Superior

A Transição do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado é um crescimento cognitivo que pode acontecer na Transição do ambiente escolar para o universitário, principalmente pela mudança nos conteúdos. Assim sendo, façamos considerações sobre isso.

Tall (1995) distingue a Matemática Elementar e a Acadêmica como segue:

É essencial distinguir entre matemática elementar (incluindo geometria), onde os objetos são *descritos*, e matemática avançada, onde os objetos são *definidos*. Em ambos os casos, a linguagem é usada para formular as propriedades dos objetos, mas na matemática elementar a descrição é construída a partir da experiência do objeto, na matemática avançada, as propriedades do objeto são construídas a partir da definição – uma reversão que causa grandes dificuldades de acomodação para novatos no pensamento matemático avançado. (p. 7, tradução nossa).⁶⁵

Assim, a mudança de paradigma entre Matemática Escolar e Acadêmica recai sobre a teoria do Pensamento Matemático Elementar e Avançado. Simplificadamente, o currículo escolar e universitário induz o desenvolvimento cognitivo, embora esse objetivo tenha sido falho com um sem-número de estudantes.

Tall (1995) destaca três tópicos que fazem a transição entre o Pensamento Matemático Elementar e o Avançado: geometria euclidiana, cálculo e álgebra avançada. Em verdade, o autor justifica a seleção desses tópicos por razões históricas (porque grandes mentes da humanidade investigaram esses temas), curriculares (afinal, são temas ensinados na Transição entre o Ensino Médio e o Superior) e cognitivas (por causa das reconstruções cognitivas significativas requeridas).

Tudo isso [geometria euclidiana, cálculo e álgebra avançada] requer reconstruções cognitivas significativas. A prova euclidiana requer a percepção da necessidade de organização sistemática e formas acordadas de dedução verbal para prova

⁶⁵ No original: “It is essential to distinguish between elementary mathematics, (including geometry) where objects are described and advanced mathematics where objects are defined. In both cases language is used to formulate the properties of objects, but in elementary mathematics the description is constructed from experience of the object, in advanced mathematics, the properties of the object are constructed from the definition—a reversal which causes great difficulties of accommodation for novices in advanced mathematical thinking.”

visualmente inspirada (o uso de triângulos congruentes). A mudança para o cálculo tem as dificuldades causadas pelo proceito limite. A mudança para uma álgebra mais avançada (como vetores em três dimensões e maiores) envolve coisas como o produto vetorial que viola a lei comutativa da multiplicação, ou a ideia de quatro ou mais dimensões, que estica demais e até mesmo rompe o elo visual entre equações e geometria imaginável. (Tall, 1995, p. 8, tradução nossa).⁶⁶

Para descrever o processo de desenvolvimento do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado, Tall (1995) esquematiza a atividade humana em percepção (*input*), pensamento (processamento interno) e ação (*output*). A matemática começa por percepções visuoespaciais dos objetos e passa pela descrição verbal que conduz à classificação e hierarquização dos objetos. As ações sobre objetos são processos, tais como contagem e operações.

Segundo Tall (1995), o desenvolvimento cognitivo é amparado pelos desenvolvimentos simultâneos da percepção visuoespacial, que se torna verbal e leva à prova matemática, e do simbólico, que engloba os processos do pensar e os conceitos a se pensar. Mesmo os matemáticos profissionais utilizam desenhos e rascunhos para chegar a uma demonstração formal. Sendo assim, o Pensamento Matemático Avançado não se abstém de conter o aspecto perceptivo, mas depende menos dos sentidos físicos.

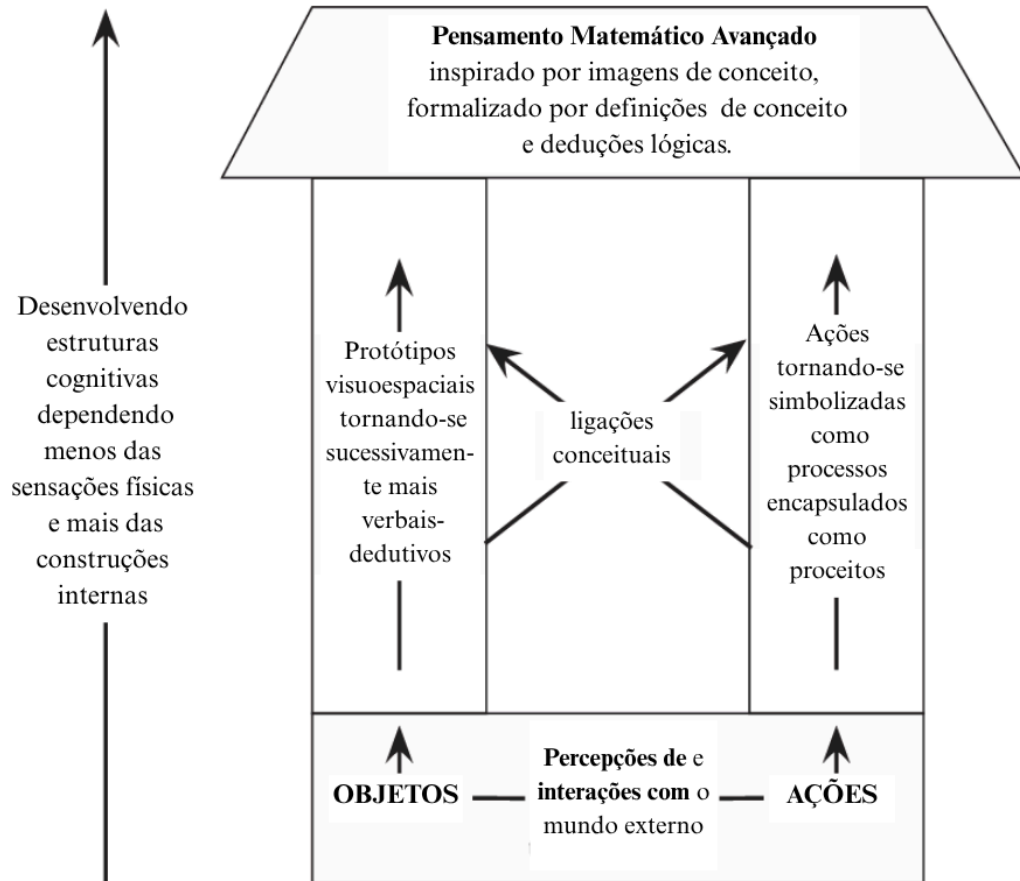
O crescimento cognitivo do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado começa com as percepções e ações sobre objetos e é constituído por dois desenvolvimentos: um do visuoespacial/intuitivo para o verbal/dedutivo e outro encapsulando processos em conceitos por meio de símbolos. Isso inspira o pensamento criativo baseado em objetos formalmente definidos e prova sistemática, ou seja, desenvolve-se uma *intuição lógica* no indivíduo (Tall, 1995).

A Figura 1 a seguir mostra um esquema que estrutura o desenvolvimento cognitivo para alcançar o Pensamento Matemático Avançado como desenvolvimento dos objetos e ações. Do lado dos objetos, os protótipos visuoespaciais se tornam sucessivamente mais verbais-dedutivos. Do lado das ações, elas se tornam simbolizadas como processos encapsulados como *proceitos* (*processo* + *conceito*). Ligações conceituais fazem com que esses dois desenvolvimentos sejam simultâneos. Nessa figura, o Pensamento Matemático

⁶⁶ No original: “All of these require significant cognitive reconstructions. Euclidean proof requires the realisation of the need of systematic organisation, and agreed ways of verbal deduction for visually inspired proof (the use of congruent triangles). The move into calculus has the difficulties caused by the limit procept. The move into more advanced algebra (such as vectors in three and higher dimensions) involves such things as the vector product which violates the commutative law of multiplication, or the idea of four or more dimensions, which overstretches and even severs the visual link between equations and imaginable geometry.”

Avançado é descrito como inspirado por *imagens de conceito*, formalizado por *definições de conceito* e deduções lógicas.

Figura 1 – Esboço do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático pesquisador



Fonte: adaptado de Tall (1995, p. 4, tradução nossa)

O desenvolvimento cognitivo depende das atividades do cérebro, que é um enorme estoque de experiências e atividades simultâneas e um pequeno foco de atenção. Esse contraste precisa ser minimizado fazendo-o comprimir o conhecimento adequadamente para o pequeno foco de atenção e construir ligações com outros dados mentais para torná-lo fácil de usar (Tall, 1995). Outras sugestões do autor são:

- rotinizar processos para que ocupem pouca atenção consciente;
- usar imagens para permitir que o observador se concentre em qualquer nível e em qualquer detalhe desejado;
- usar palavras e símbolos (particularmente *proceitos*) para comprimir a notação em pequenas entidades mentalmente manipuláveis.

Um exemplo de Tall (1995) para um *proceito* é o caso do limite em cálculo: é um processo (cálculo do limite quando o denominador, geralmente h , tende a zero) e um conceito.

Proceitos surgem ao longo do simbolismo da matemática onde símbolos como $4 + 3$, $3/4$, $2x + 6$, dy/dx , $\int \sin x \, dx$, $\sum u_n$ representam dualmente um processo de computação e o resultado desse processo. Tais proceitos, juntamente com as redes de suas propriedades deduzidas, formam conceitos cristalinos, que permitem ao cérebro humano operar de forma flexível e eficiente na formulação de modelos, resolvendo problemas por meio da manipulação de símbolos e descobrindo novas propriedades e conexões. (Tall et al., 2012, p. 10, tradução nossa).⁶⁷

A trajetória rumo ao Pensamento Matemático Avançado envolve o desenvolvimento da linguagem matemática – o tal rigor da escrita – como estrutura cognitiva para elaborar provas matemáticas. Nesse sentido, a relação entre esses dois feitos é indicada na teoria como o passo de construir *conceitos cristalinos*, visto a seguir.

4.3 Conceitos cristalinos

Partimos da hipótese de Tall (2008) de que para o pensamento (matemático) elaborar provas, há três habilidades inatas⁶⁸:

- 1) Reconhecimento de semelhanças, diferenças e padrões por meio da **percepção**.
- 2) Repetição: a capacidade de aprender sequências complexas de operações por meio das **ações**.
- 3) Desenvolvimento da **linguagem** para permitir que a percepção e a ação sejam expressas e concebidas de maneiras cada vez mais refinadas (no sentido do cognitivo).

Sobre essas habilidades, a linguagem (matemática) é permeada de categorizações, ou de outra forma, definições de objetos a que se deseja estudar. Definições formais são uma forma de encapsulamento que advindam das propriedades observadas no estágio da percepção e da ação na Matemática Escolar ou das propriedades teóricas de conjuntos propostas de sistemas axiomáticos (Tall et al., 2012).

Tall et al. (2012) também descrevem uma série de estágios de desenvolvimento da relação entre a pessoa com o conceito matemático, um lado epistemológico-cognitivo de se interpretar a Transição entre Matemática Acadêmica e Escolar.

Para dar sentido a relações coerentes, a criança precisa construir uma estrutura de conhecimento crescente (ou esquema) de experiências envolvendo percepções e

⁶⁷ No original: “Procepts arise throughout the symbolism of mathematics where symbols such as $4 + 3$, $3/4$, $2x + 6$, dy/dx , $\int \sin x \, dx$, $\sum u_n$ dually represent a process of computation and the result of that process. Such procepts, along with the networks of their deduced properties, form crystalline concepts, which allow the human brain to operate flexibly and efficiently in formulating models, solving problems through symbol manipulation and discovering new properties and connections.”

⁶⁸ Essas habilidades serão melhor descritas na próxima seção.

ações que se relacionam entre si. À medida que a criança se desenvolve, algumas das propriedades descritas podem se tornar privilegiadas e usadas como definição de um conceito específico. (p. 7, tradução nossa).⁶⁹

Conforme a criança se desenvolve, algumas das propriedades descritas podem se tornar privilegiadas e usadas como uma *definição de um conceito* particular. Por exemplo, pode-se descrever um triângulo isósceles como “um triângulo com dois lados iguais”. Agora, a criança pode usar esse critério para testar se novos objetos são triângulos isósceles. Para a criança, a “prova” de que um triângulo específico é isósceles é que qualquer um pode ver que ele tem dois lados iguais.

Neste estágio, a propriedade torna-se um critério para definir um objeto, ou melhor, definir se aquele objeto em particular pertence a um conjunto de objetos com tal propriedade. Por exemplo, a criança nomeia um triângulo como isósceles se ele tiver dois lados iguais, passando-o por essa “prova”.

Em seguida, “À medida que a criança se torna consciente de mais e mais propriedades [...] pode se tornar possível ver relações entre propriedades e usar princípios apropriados baseados em construções e transformações para deduzir algumas propriedades das outras.” (Tall et al., 2012, p. 7, tradução nossa)⁷⁰. Por exemplo, pode-se provar que uma consequência de um triângulo ser isósceles é que seus ângulos da base⁷¹ são iguais.

Um passo adiante seria perceber que as propriedades de um objeto podem ser utilizadas como definições alternativas a ele. No exemplo, podemos estabelecer que um triângulo é chamado isósceles se os ângulos da base são iguais e após atinar que dois de seus lados são iguais. Dessarte, o indivíduo reconhece um rol de definições, todas equivalentes, embora alguma seja a mais simples a ponto de todas as outras serem deduzidas a partir dela (Tall et al., 2012).

Subsequentemente, a criança pode ser apresentada a uma estrutura de conhecimento mais sofisticada, como colocar fisicamente um triângulo em cima do outro e verbalizar isso como o princípio da congruência. Conforme a criança se torna ciente de mais e mais propriedades de um triângulo isósceles e suas concepções de relacionamentos se

⁶⁹ No original: “In order to be able to make sense of coherent relationships, the child needs to build a growing knowledge structure (or schema) of experiences involving perceptions and actions that relate to each other. As the child develops, some of the properties described may become privileged and used as a definition of a particular concept.”

⁷⁰ No original: “As the child becomes aware of more and more properties [...] it may become possible to see relationships between properties and to use appropriate principles based on constructions and transformations to deduce some properties from the others.”

⁷¹ Chamamos aqui de base o lado que difere dos lados que são iguais em um triângulo isósceles não equilátero. No caso do triângulo equilátero, que é isósceles, a base pode ser escolhida arbitrariamente.

desenvolvem, pode se tornar possível ver relacionamentos entre propriedades e usar princípios apropriados baseados em construções e transformações para deduzir algumas propriedades das outras. Surge a ideia de que não é necessário incluir todas as propriedades conhecidas em uma definição. Um triângulo isósceles definido apenas em termos de lados iguais, sem menção aos ângulos, agora pode ser provado pelo princípio da congruência como tendo ângulos iguais.

Outras propriedades mais sofisticadas podem ser deduzidas usando técnicas semelhantes. Por exemplo, para um triângulo isósceles, pode-se provar que a mediatriz da base passa pelo vértice, ou pode-se provar que a bissetriz do ângulo do vértice encontra a base no ponto médio e em ângulos retos. Outras provas mostram que qualquer uma dessas propriedades deduzidas mencionadas pode ser usada como definições alternativas. Neste ponto, pode haver várias definições possíveis diferentes que agora são vistas como equivalentes. Não é que o triângulo tenha uma única definição com muitas consequências, mas que ele tem muitas definições equivalentes, qualquer uma das quais pode ser usada como base para a teoria. Uma dessas propriedades, geralmente a mais simples de formular, é então tomada como a definição primária e então todas as outras propriedades são deduzidas dela.

Por fim, o matemático maduro consegue conciliar essas diversas definições de um objeto, cada qual proveniente de uma propriedade, e que estão ligadas por uma rede de relações baseadas em deduções. Tall et al. (2012) introduzem esse fenômeno com o termo *conceito cristalino*. “Um conceito cristalino pode receber uma definição funcional como ‘um conceito que tem uma estrutura interna de relacionamentos restritos que fazem com que ele tenha propriedades necessárias como parte de seu contexto’ ” (p. 7, tradução nossa)⁷². Assim sendo, é um conceito construído pelo desenvolvimento dos esquemas mentais das provas.

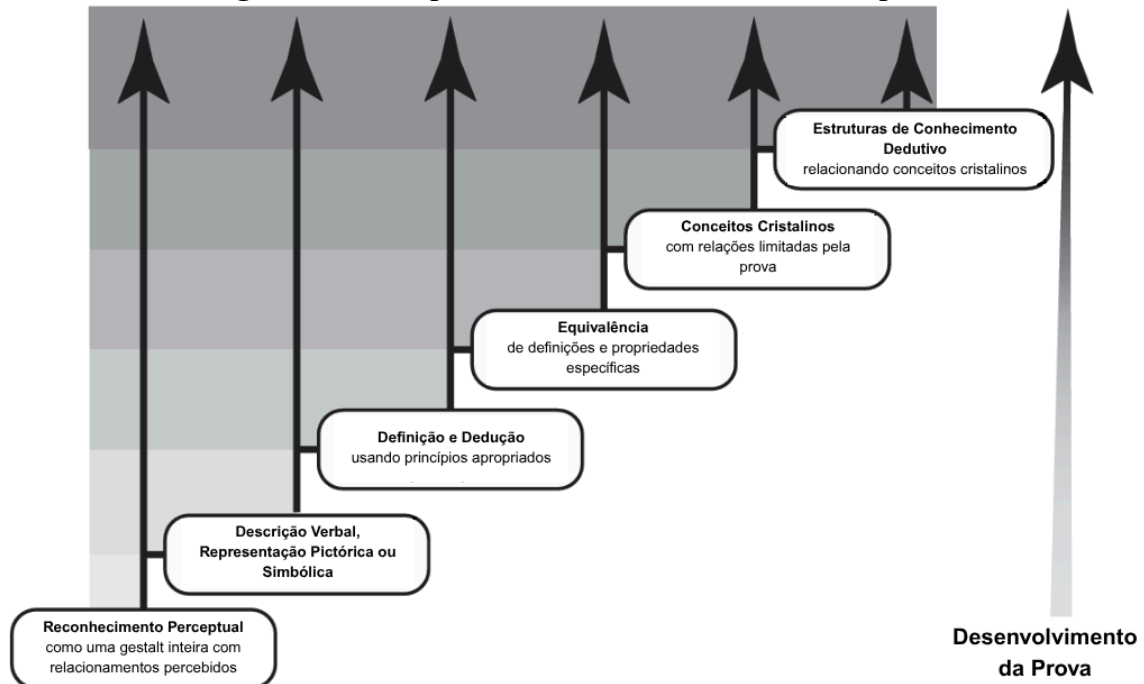
Um conceito cristalino típico é a noção de uma figura platônica idealizada na geometria euclidiana. No entanto, como veremos, conceitos cristalinos também são produtos naturais do desenvolvimento em outras formas de prova, como aquelas que usam manipulação de símbolos ou definição e dedução axiomáticas. (ibidem, p. 7, tradução nossa).⁷³

A Figura 2 é um esquema que exhibe todo esse desenvolvimento dos *conceitos cristalinos*.

⁷² No original: “A crystalline concept may be given a working definition as ‘a concept that has an internal structure of constrained relationships that cause it to have necessary properties as part of its context.’ ”

⁷³ No original: “A typical crystalline concept is the notion of an idealized Platonic figure in Euclidean geometry. However, as we shall see, crystalline concepts are also natural products of development in other forms of proof such as those using symbol manipulation or axiomatic definition and deduction.”

Figura 2 – A ampla maturação das estruturas de prova



Fonte: adaptado de Tall et al. (2012, p. 8, tradução nossa)

Os estágios da Figura 2 são melhores descritos a seguir por Tall et al. (2012):

- 1) Reconhecimento Perceptivo de fenômenos onde objetos têm propriedades simultâneas,
- 2) Descrição Verbal de propriedades, frequentemente relacionadas a representações visuais ou simbólicas, para começar a pensar sobre propriedades e relacionamentos específicos,
- 3) Definição e Dedução, para definir quais conceitos satisfazem a definição e desenvolver princípios apropriados de prova para deduzir que uma propriedade implica outra,
- 4) perceber que algumas propriedades são Equivalentes, de modo que o conceito agora tem uma estrutura de propriedades equivalentes que são relacionadas por prova dedutiva,
- 5) e que essas propriedades são maneiras diferentes de expressar um Conceito Cristalino subjacente cujas propriedades são conectadas pela prova dedutiva.

Dessa forma, na perspectiva de David Tall, a construção de *conceitos cristalinos* são um passo imediatamente anterior à maturação de estruturas cognitivas de dedução que serão utilizadas para as provas.

O desenvolvimento é um crescimento humano natural e não deve ser visto como um crescimento rígido de níveis discretos, mas sim como um crescimento de longo prazo na maturidade para construir uma gama completa de pensamento matemático, do reconhecimento perceptual ao raciocínio dedutivo. (Tall et al., 2012, p. 9, tradução nossa).⁷⁴

Portanto, Tall et al. (2012) acreditam em um desenvolvimento cognitivo contínuo na transição para o Pensamento Matemático Avançado, o que não está em total contraste com Gueudet et al. (2016). A crítica que Gueudet et al. (2016) fazem aos continuístas, sobre acreditarem que os alunos tecem de linhas ingênuas de pensamento em um tecido mais sistemático, não ignora o fato que o crescimento cognitivo acompanha o crescimento humano natural.

Também, o Pensamento Matemático Avançado “envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para construir novas ideias que se baseiam e estendem um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos” (Tall, 1995, p. 3, tradução nossa)⁷⁵. Logo, a perspectiva continuísta de Tall tem também relação com os aspectos epistemológicos da Matemática Acadêmica.

A maturação das estruturas de provas e a compressão do conhecimento matemático acadêmico pode demandar muito tempo, porém torna-se uma ferramenta matemática/cognitiva de fácil acesso conscientemente e utilizável para resolver problemas, um dos prazeres em se fazer matemática.

A matemática é incrivelmente compressível: você pode lutar por um longo tempo, passo a passo, para trabalhar em algum processo ou ideia de várias abordagens. Mas uma vez que você realmente entende e tem a perspectiva mental para vê-lo como um todo, geralmente há uma tremenda compressão mental. Você pode arquivá-lo, lembrá-lo rápida e completamente quando precisar, e usá-lo como apenas um passo em algum outro processo mental. O insight que acompanha essa compressão é uma das verdadeiras alegrias da matemática. (Thurston, 1990, p. 846-847, tradução nossa).⁷⁶

⁷⁴ No original: “The development is a natural human growth and should not be seen as a rigid growth of discrete levels, rather as a long-term growth in maturity to construct a full range of mathematical thinking from perceptual recognition to deductive reasoning.”

⁷⁵ No original: “Advanced mathematical thinking today involves using cognitive structures produced by a wide range of mathematical activities to construct new ideas that build on and extend an ever-growing system of established theorems.”

⁷⁶ No original: “Mathematics is amazingly compressible: you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics.”

Essa malha cognitiva de conhecimentos prévios compressos, dentro da teoria de David Tall é chamada de *met-befores* e será explorada a seguir. Além disso, há estruturas cognitivas inatas, *set-befores*, e esses traços intelectuais amparam a matemática.

4.4 *Set-befores*, *met-befores* e os três mundos da matemática

Antes do processo de transição para o Pensamento Matemático Avançado, Tall (2008) analisa o aprendizado humano de longo prazo baseado em atributos cognitivos intitulados *set-befores* e *met-befores*.

*Set-befores*⁷⁷ “referem-se a uma estrutura mental com a qual nascemos, que pode levar um tempo para amadurecer à medida que nossos cérebros fazem conexões no início da vida”. (Tall, 2008, p. 5, tradução nossa)⁷⁸. Por exemplo, a estrutura visual inata percebe cores e seus tons, bordas e persegue um objeto que se move. A estrutura numeral inata reconhece números (um, dois, três) e o conceito de “dualidade”. A estrutura posicional inata entende as posições acima e abaixo, de um lado e de outro. A estrutura social inata incita a interação com os outros, gesticulando e apontando. Ressaltamos que os *Set-befores* e as estruturas inatas aqui citadas são vistos na perspectiva do amadurecimento esperado de uma pessoa normotípica.

O mais interessante para o nosso escopo é o estudo das estruturas inatas relacionadas com a aprendizagem de matemática. Para Tall (2008) são elas:

- *reconhecimento* de padrões, similaridades e diferenças – essa habilidade inclui padrões de números e formas;
- *repetição* de sequências de ações até que se tornem automáticas – nos permite aprender procedimentos mas não só: *proceitos* requerem performar e pensar sobre o procedimento;
- *linguagem* para descrever e refinar a maneira como pensamos sobre as coisas – a linguagem tem o poder de sofisticar o entendimento, pois usa símbolos para nomear objetos e, assim, podemos falar sobre ele.

*Met-before*⁷⁹ é “uma instalação mental atual baseada em experiências anteriores específicas do indivíduo” (Tall, 2008, p. 6, tradução nossa)⁸⁰. Diferentemente dos *set-befores* inatos, os *met-befores* estão relacionados com a memória, a trajetória de vida e de

⁷⁷ Algo que pode ser traduzido como “definido antes”.

⁷⁸ No original: “refer to a mental structure that we are born with, which may take a little time to mature as our brains make connections in early life.”

⁷⁹ Algo que pode ser traduzido como “conhecido antes”.

⁸⁰ No original: “[...] a current mental facility based on specific prior experiences of the individual.”

desenvolvimento cognitivo. As experiências prévias são utilizadas pelo cérebro para interpretarmos situações novas.

Um *met-before* às vezes é consistente com a nova situação e às vezes inconsistente. [...] Dessa forma, *met-befores* podem operar secretamente, afetando a maneira como os indivíduos interpretam a nova matemática, às vezes com vantagem, mas às vezes causando confusão interna que impede o aprendizado. (ibidem, p. 6, tradução nossa).⁸¹

Em geral, quando nos deparamos com uma nova situação, nós a interpretamos misturando nossos *met-befores*, que podem vir de experiências diferentes tendo alguns aspectos em comum e outros em conflito. Aqueles em comum podem dar *insights* prazerosos; aqueles em conflito podem causar confusão que pode agir como um desafio para aqueles que se sentem confiantes, mas levar à ansiedade para aqueles que não se sentem. (ibidem, p. 13, tradução nossa).⁸²

Por conseguinte, o professor de Matemática deve entender que, além de ter mais bagagem de conhecimentos matemáticos, esses conhecimentos memorizados já não lhe causam estranheza ou problemas de interpretação cognitiva. Tall (2008) diz que os professores de cálculo (provavelmente) têm o *met-before* conceito (ou *proceito*) de limite, base das discussões da disciplina, enquanto o aluno iniciante pode ter profundas dificuldades em aprendê-lo. Assim, outro entendimento que o professor deve ter é que essa reorganização cerebral de entender *proceitos*, muitas vezes iniciadas no cálculo, não é só “decorar” uma nova informação (definição de limite). Às vezes, eles esquecem as prováveis dificuldades que tiveram como estudantes.

O cérebro muda sua capacidade de pensar ao longo do tempo, reorganizando informações para criar novas estruturas que são frequentemente mais sofisticadas e melhores para lidar com novas situações. Ele não é simplesmente um repositório de experiências anteriores adicionando novas informações às antigas; ele reformula informações antigas de novas maneiras, mudando como pensamos à medida que amadurecemos. (ibidem, p. 6, tradução nossa).⁸³

⁸¹ No original: “A met-before is sometimes consistent with the new situation and sometimes inconsistent. [...] In this way, met-befores can operate covertly, affecting the way that individuals interpret new mathematics, sometimes to advantage, but sometimes causing internal confusion that impedes learning.”

⁸² No original: “In general, when we encounter a new situation we interpret it by blending together our met-befores, which may come from different experiences having some aspects in common and others in conflict. Those in common may give pleasurable insight; those in conflict may cause confusion that can act as a challenge for those who feel confident but lead to anxiety for those who do not.”

⁸³ No original: “The brain changes in its ability to think over time, reorganising information to create new structures that are often more sophisticated and better at coping with new situations. It is not simply a repository of earlier experiences adding new information to old; it re-formulates old information in new ways, changing how we think as we grow more mature.”

Além disso, matemáticos deveriam entender que os conhecimentos *corporificados* e *simbólicos* o permitiram chegar à formalização da Matemática no seu desenvolvimento cognitivo:

Não é de se admirar que Halmos em seu livro *Eu quero ser um matemático* tenha comentado: “Eu nunca entendi a análise épsilon-delta, eu apenas me acostumei com ela”. Como matemáticos, começamos a apreciar a pureza e a lógica da abordagem formal, mas como seres humanos, devemos reconhecer a jornada cognitiva através da corporificação e do simbolismo que nos permitiu alcançar esse ponto de vista e nos ajuda a sustentá-lo. (ibidem, p. 15, tradução nossa).⁸⁴

Tall et al. (2012) destacam que a abordagem de ensino por definições envolvendo épsilons e deltas, em particular no princípio do cálculo diferencial e integral, é problemática.

Também, o matemático maduro nem sempre usa os axiomas para compreender a matemática, podendo recorrer à aritmética, álgebra, geometria para, simplesmente, aceitar verdades matemáticas, o que não significa prová-las (Tall, 2008).

Pela teoria de Tall (2008), o cérebro tem a capacidade de copiar e é bom nisso; e também é capaz de reformular novas informações para amadurecer. Esse desenvolvimento, em se tratando de matemática, é baseado nos enunciados três *set-befores* (reconhecimento, repetição e linguagem). Para alcançar o Pensamento Matemático Avançado, cada *set-before* está mais fortemente relacionado com áreas da matemática, que serão maturadas.

Reconhecimento e categorização de figuras e formas sustenta a geometria e os gráficos. Repetição de procedimentos sustenta a aritmética e a álgebra. E a linguagem sustenta a teoria matemática formal, uma vez que a *definição de um conceito* é um exercício mental de simbolismo que formaliza as *imagens de um conceito*. Tall (2008) apresenta os três mundos da matemática, que são diferentes modos de pensamento, que se sofisticam de formas diferentes e relacionam-se com os três *set-befores*. A saber,

- 1) o mundo **conceitual-corporificado**, baseado na percepção e reflexão sobre propriedades de objetos, inicialmente vistos e sentidos no mundo real, mas depois imaginados na mente;

Todo pensamento pode ser *corporificado*, pois conceitos são representados. A geometria é um exemplo desse mundo porque seus conceitos formam classificações; exemplo: um triângulo tem três lados. Podemos representar um triângulo qualquer em desenho ou

⁸⁴ No original: “Is it any wonder that Halmos in his book *I want to be a mathematician* remarked, ‘I never understood epsilon-delta analysis, I just got used to it.’ As mathematicians we begin to appreciate the purity and logic of the formal approach, but as human beings we should recognise the cognitive journey through embodiment and symbolism that enabled us to reach this viewpoint and helps us sustain it.”

imaginação, mas não existe um único triângulo. Ainda assim, a corporificação de um exemplo de triângulo carrega o seu conceito.

- 2) o mundo **proceptual-simbólico** que cresce a partir do mundo *corporificado* por meio da ação (como a contagem) e é simbolizado como *conceitos pensáveis* (como o número) que funcionam tanto como processos para fazer quanto como conceitos para pensar (*proceitos*);

Usamos símbolos para performar esquemas mentais de ação (como a contagem) que se tornam *conceitos pensáveis*⁸⁵ (como os números). Em continuidade a esse desenvolvimento, surgem os *proceitos*, que representam processos a serem repetidos/realizados e conceitos construídos a partir desses processos.

- 3) o mundo **axiomático-formal** (baseado em definições e provas formais), que inverte a sequência de construção de significado de definições baseadas em objetos conhecidos para conceitos formais baseados em definições teóricas de conjuntos.

Pela teoria de Tall (2008), esta etapa cognitiva vai além da teoria de Piaget, pois este limita-se às operações formais. O Pensamento Matemático Elementar/Matemática Escolar lida principalmente com corporificações e simbolismos, dos dois mundos supracitados, experimentando objetos cujas propriedades são descritas e usadas como definição⁸⁶. Nesse terceiro mundo, na Matemática Acadêmica “apresentações formais começam com definições da teoria de conjuntos e deduzem outras propriedades usando provas formais.” (Tall, 2008, p. 8, tradução nossa)⁸⁷.

Tall (2008) enuncia como um pensamento do mundo *conceitual-corporificado* torna-se um pensamento do mundo *proceptual-simbólico*, uma Transição cognitiva ainda dentro da formação escolar:

A matemática escolar é construída a partir da corporificação de conceitos físicos e ações: brincando com formas; colocando-os em coleções; apontando e contando; compartilhando; medindo. Uma vez que essas operações são praticadas e se tornam rotina, elas podem ser simbolizadas como números e usadas duplamente como operações ou como entidades mentais nas quais as operações podem ser realizadas. À medida que o foco da atenção muda da corporificação para a manipulação de símbolos, o pensamento matemático muda do mundo corporificado para o (proceptual) simbólico. Ao longo da matemática escolar, a corporificação dá significados específicos em contextos variados, enquanto o simbolismo na aritmética

⁸⁵ Para Tall (2008), todos os conceitos são pensáveis, e escrever *conceitos pensáveis* foca em como o conceito é mantido na mente como uma entidade única em um único momento.

⁸⁶ Exploramos um exemplo disso sobre o triângulo isósceles na seção anterior.

⁸⁷ No original: “[...] formal presentations start with set-theoretic definitions and deduce other properties using formal proof.”

e na álgebra, oferece um mundo mental de poder computacional. (p. 9-10, tradução nossa).⁸⁸

Tall (2008) enuncia como um pensamento do mundo *conceitual-corporificado* torna-se um pensamento do mundo *axiomático-formal*:

É somente quando os sistemas são axiomatizados e as propriedades deduzidas unicamente dos axiomas usando prova formal da teoria dos conjuntos que o desenvolvimento cognitivo da geometria muda completamente para uma abordagem formal-axiomática. (p. 7, tradução nossa).⁸⁹

Para alcançar o Pensamento Matemático Avançado, o indivíduo construirá, a partir das experiências de corporificação e simbolismo, definições formais e provar teoremas. “A prova formal escrita é o estágio final do pensamento matemático [...]” (Tall, 2008, p. 10, tradução nossa)⁹⁰. A principal ferramenta para chegar ao terceiro mundo é o estudo de *teoremas estruturantes*.

Teoremas estruturantes estabelecem uma estrutura axiomática para uma teoria dentro da Matemática, combinando corporificações e simbolismos, enriquecendo-os além da intuição ingênua, uma vez que conduzem a prova formal (Tall et al., 2012). Exemplos:

- Uma relação de equivalência em S corresponde a uma partição de S .
- Um grupo finito é isomórfico a um subgrupo de um grupo de permutações.
- Um espaço vetorial de dimensão finita sobre um campo F é isomórfico a F^n .
- Um corpo contém um subcampo isomórfico a $\mathbb{Q}$ ou a $\mathbb{Z}_n$.
- Um corpo ordenado contém um subcorpo isomórfico a $\mathbb{Q}$.

Nos *teoremas estruturantes*, os conceitos corporificados e simbólicos agem como fundamento para ideias formalizadas no mundo *axiomático-formal*. Também, os *teoremas estruturantes* podem fazer o mundo *formal* retornar aos mundos *corporificados* e *simbólicos*.

A teoria de Tall (2008) sobre os três mundos não é vertical, no sentido do desenvolvimento cognitivo sempre ser direcionado ao mundo *axiomático-formal*, mas

⁸⁸ No original: “School mathematics builds from embodiment of physical conceptions and actions: playing with shapes; putting them in collections; pointing and counting; sharing; measuring. Once these operations are practiced and become routine, they can be symbolised as numbers and used dually as operations or as mental entities on which the operations can be performed. As the focus of attention switched from embodiment to the manipulation of symbols, mathematical thinking switches from the embodied to the (proceptual) symbolic world. Throughout school mathematics, embodiment gives specific meanings in varied contexts while symbolism in arithmetic and algebra offers a mental world of computational power.”

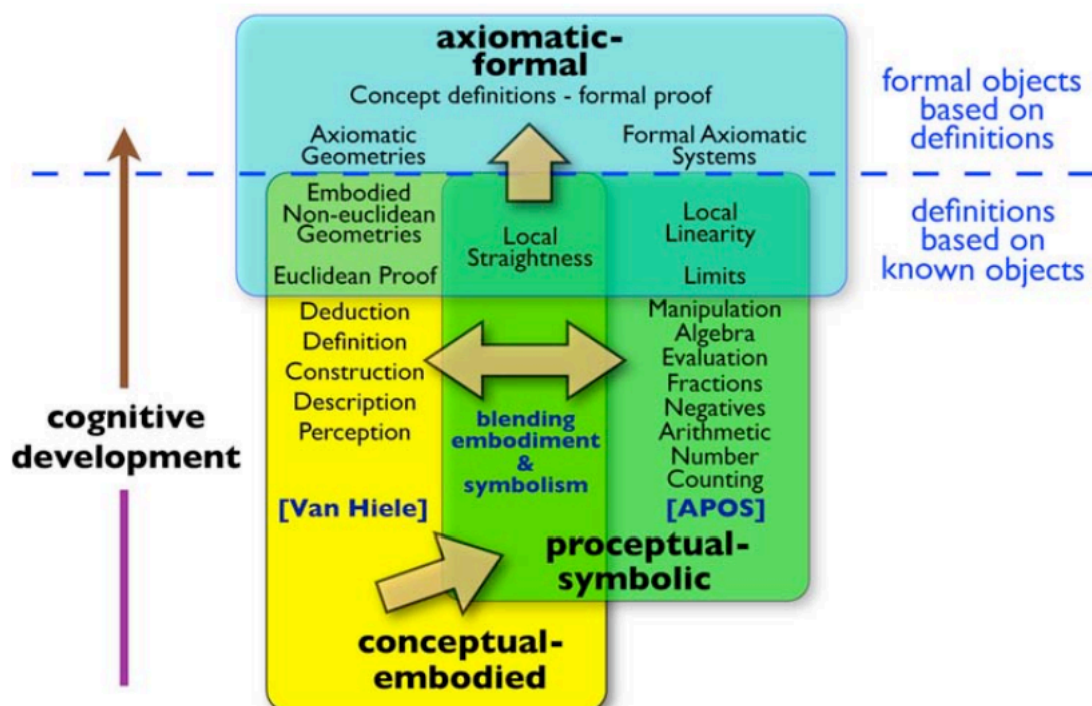
⁸⁹ No original: “It is only when the systems are axiomatised and the properties deduced solely from the axioms using set-theoretic formal proof that the cognitive development of geometry shifts fully to a formal-axiomatic approach”

⁹⁰ No original: “The written formal proof is the final stage of mathematical thinking [...]”

circular. Sim, o formalismo é construído a partir do *corporificado* e do *simbólico* e, como estamos falando de Ensino de Transição, esperamos que essa etapa esteja contemplada na graduação. Entretanto, a formalização sofisticada os pensamentos *corporificados* e *simbólicos* para o indivíduo solucionar problemas reais (de física, engenharia, matemática aplicada, economia, etc.) complexos. Essa é a compreensão de matemática esperada na formação universitária: o exercício do trabalho com a matemática aplicada. Sempre considerando que “As novas corporificações dependem não apenas da experiência no mundo, mas da definição de conceitos e da dedução formal, levando a novos *insights* formais.” (Tall, 2008, p. 22, tradução nossa)⁹¹. Ou seja, desenvolve-se a *intuição lógica*.

Para representar as relações e passagens entre os três mundos da Matemática, David Tall utiliza o seguinte esquema (Figura 3).

Figura 3 – Os Três Mundos da Matemática ilustrados por aspectos selecionados.



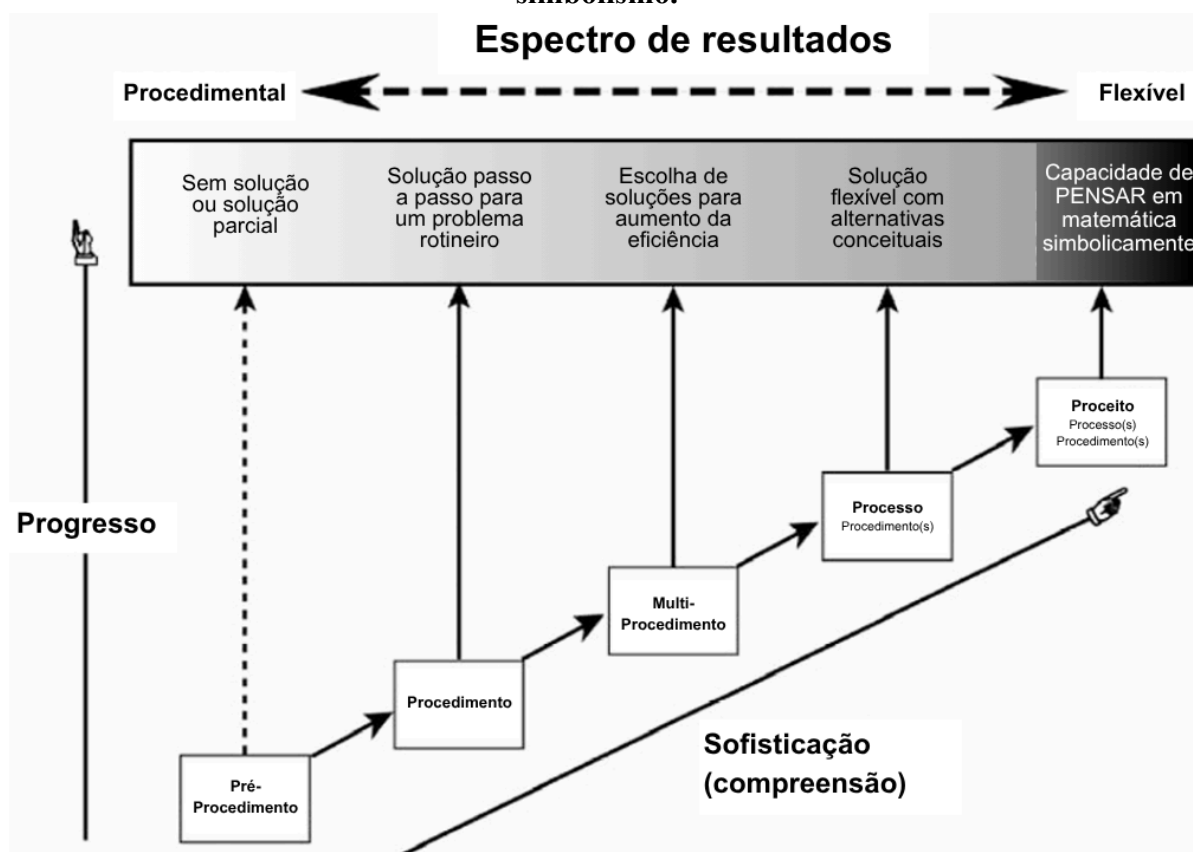
Fonte: Tall (2008, p. 8)

Compreender um conceito pode ocorrer de várias formas. Um tipo de compreensão é a categorização, entendida como conexão de conceitos para torná-los *conceitos pensáveis*. Outro tipo é a realização de um procedimento e processos. Tall (2008) define uma escala de compreensão (Figura 4), que perpassa as etapas (organizando em ordem crescente de sofisticação da compreensão):

⁹¹ No original: “The new embodiments depend not just on experience in the world, but on concept definition and formal deduction, leading to new formal insights.”

- Pré-procedimento: nenhuma solução ou solução parcial;
- *Procedimento*: uma sequência de passos performados para um problema rotineiro;
- Multi-procedimento: escolha de soluções de maior eficiência;
- *Processo*: solução flexível com alternativas conceituais;
- *Proceito*: capacidade de pensar sobre matemática simbolicamente.

Figura 4 – Espectro de resultados decorrentes do aumento da compressão do simbolismo.



Fonte: adaptado de Tall (2008, tradução nossa)

No campo da Matemática, alguns problemas rotineiros podem ser resolvidos por vários *procedimentos*, pois ela abrange essa multiplicidade. Entretanto, a generalização desses múltiplos *procedimentos* para a concepção um *processo* pode ser onde residem as dificuldades de compreensão dos estudantes. Tall (2008) diz que os estudantes ficam “entrincheirados” nessa gama de *procedimentos*. Já outros estudantes são flexíveis ao relacionar *processos* como um todo e compreendem as operações como *conceitos pensáveis*. Assim sendo, a sala de aula é heterogênea em termos de compreensão dos conteúdos de matemática ensinados.

Para Tall (2008), um currículo que foca em simbolismos e não em corporificações limita a visão do estudante, uma vez que o faz performar *procedimentos*, talvez conceber

processos, mas falha em encapsular o *processo* como objeto (*proceito*). Limita-se a passar do corporificado para o simbólico, levando *procedimentos* a tornarem-se *processos*, ou seja, transformando etapas dos *procedimentos* em compreensão dos seus efeitos.

Dessa forma, Tall (2008) entende o conceito como vinculado ao mundo *corporificado* (pensável) e o *processo* como vinculado ao mundo *simbólico*. A combinação da corporificação com o simbolismo, ou seja, o encapsulamento de *proceitos*, trará ganhos de longo prazo, diferentemente do exigido nos testes escolares.

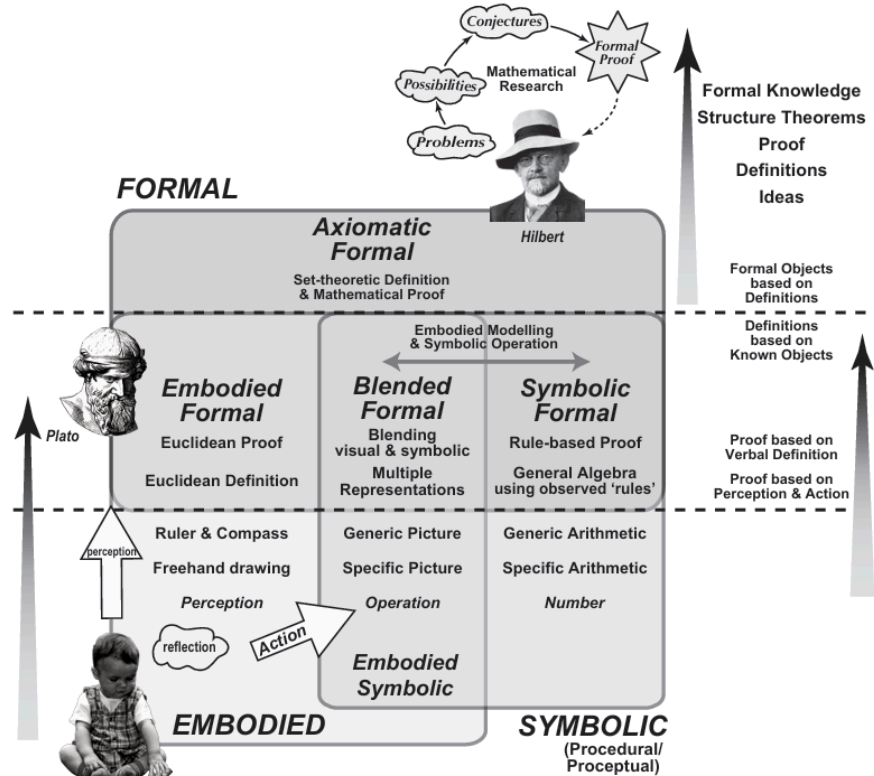
Procedimentos ocorrem no tempo e funcionam em casos limitados, mas podem não ser suficientemente comprimidos em conceitos pensáveis para serem usados de forma flexível para um pensamento mais sofisticado. O aprendizado procedural pode ter uma vantagem de curto prazo para passar em um teste iminente, mas precisa da compressão adicional em conceitos pensáveis para permitir o desenvolvimento de longo prazo de um pensamento matemático cada vez mais sofisticado. (Tall, 2008, p. 13, tradução nossa).⁹²

Essa é a diferença de níveis de compreensão desenvolvidas na escola e na universidade. Enquanto o currículo escolar é *corporificado* e *simbólico* (veremos nesta dissertação que, em geral, as escolas e livros didáticos não ensinam demonstrações), o exigido na universidade é de um nível de compreensão sofisticado ainda não desenvolvido. Isso motiva a criação de um Projeto de Ensino voltado para o **encapsulamento de um conceito, combinando corporificação e simbolismo, conduzindo à prova matemática formal**.

A Figura 5 a seguir representa o crescimento cognitivo no conceber provas matemáticas.

⁹² No original: “Procedures occur in time and work in limited cases but may not be sufficiently compressed into thinkable concepts to be used flexibly for more sophisticated thinking. Procedural learning may have a short-term advantage to pass an imminent test, but it needs the additional compression into thinkable concepts to enable the long-term development of increasingly sophisticated mathematical thinking.”

Figura 5 – Três vertentes de desenvolvimento conceitual: corporificado, simbólico e formal



Fonte: Tall et al. (2012, p. 11)

De acordo com Tall et al. (2012), a criança brinca com objetos físicos, reflete sobre seus formatos e inicia a construção cognitiva da geometria euclidiana, no chamado estado *corporificado* (*embodied*). Os próximos estágios cognitivos para desenvolver o Pensamento Matemático Avançado são a verbalização das definições em geometria e as provas euclidianas, partindo dos axiomas do renomado livro “Os Elementos”, no chamado estado *simbólico* (*symbolic*)⁹³. Na teoria de David Tall, a geometria tem papel de destaque em razão da interação física (*corporificada*), representação visuoespacial (*simbólica*) e demonstração axiomática (*formal*) explorada na escola e na universidade.

Diante de um problema matemático, em especial os de geometria e aritmética, um matemático mirim utiliza da estratégia de construir fisicamente as situações possíveis até chegar a uma resposta. É esperado que, após alguns anos de progresso mental na Matemática (Escolar), os desenhos ou a capacidade de ilustrar essas situações sobressaia as manipulações, uma vez que o indivíduo percebe a maior agilidade da técnica. Posteriormente, pode ser induzido ou deduzir o uso das letras, no caminho para se inserir no mundo *simbólico* da matemática. Aqui há um desenvolvimento marcado por um misto de percepções e ações.

⁹³ De fato, os símbolos que utilizamos hoje na geometria euclidiana não nos foi apresentado da mesma maneira por Euclides.

Na parte central da Figura 5, o indivíduo combina ações com corporificações e simbolismos. Neste estágio, percebe-se que a adição independe da ordem e isso é verbalizado como sendo a propriedade comutativa da adição. Outra construção deste estágio é a generalização: figuras geométricas são vistas como casos particulares de representações genéricas. Por exemplo, entende-se que um triângulo observado não é “o único triângulo”, mas existe um conceito de triângulo no qual ele se “encaixa”. Aqui, começa a verbalização de definições formais e propriedades que partem dessa definição (Tall et al., 2012).

Acima na Figura 5, há uma foto do pesquisador matemático Hilbert (1928-1967) ao lado dos dizeres “ideias, definições, prova, teoremas estruturados, conhecimento formal”, termos da natureza e, como vimos, da definição da Matemática Acadêmica (Moreira; David, 2011; David et al., 2013). Também, uma representação de como é o método de pensamento do matemático: problemas, possibilidades, conjecturas e prova formal. Neste estágio, as regras aritméticas passam do caso particular de $10 + 7 = 7 + 10$ para a generalização nos termos da álgebra $x + y = y + x$ e ainda essas generalizações devem ser obedecidas também no campo algébrico.

Com o amadurecimento intelectual, o indivíduo é introduzido à ideia de que concepções baseadas em percepções e ações podem ser transformadas em provas formais pelas definições verbais. Esse é um salto cognitivo que leva às provas da geometria euclidiana e às generalizações da aritmética em linguagem algébrica. Na Figura 5, a linha horizontal pontilhada representa um salto cognitivo que diferencia inferências baseadas em percepções e ações das provas baseadas em definições. “Isso requer uma mudança significativa de significado de propriedades baseadas na percepção para propriedades deduzidas de regras.” (Tall et al., 2012, p. 12, tradução nossa)⁹⁴.

No período-contexto de Transição cognitiva na aprendizagem de matemática, as disciplinas cálculo e análise têm um papel substancial. Segundo Tall (2008), o cálculo transita entre os três mundos da Matemática. Durante o seu ensino na escola⁹⁵, ainda é mais próximo do *corporificado* (desenhar gráficos) e do *simbólico* (manipulação algébrica). Já o ensino de derivada, que é um limite, transita entre esses dois mundos.

O aspecto simbólico permite que a inclinação entre dois pontos distintos seja computada numericamente ou simbolicamente e um processo de limite é necessário para obter a inclinação simbólica da tangente como a derivada simbólica. A versão corporificada tem o processo de limite implícito no processo de ampliação, enquanto

⁹⁴ No original: “This requires a significant shift of meaning from properties based on perception to properties deduced from rules.”

⁹⁵ Considerando os sistemas de ensino de outros países e alguns contextos educacionais no Brasil.

a versão simbólica envolve computar uma representação simbólica explícita. (Tall, 2008, p. 15).⁹⁶

Anteriormente, vimos que o limite pertence ao segundo mundo da Matemática, pois é um *proceito* (tanto um processo quanto um conceito). Ele é um importante *met-before* para construir logicamente outros conteúdos de cálculo: derivada, integral e séries. O entendimento desse *met-before* é complexo, e a solução para muitos seria partir de exemplos corporificados e simbólicos (*imagens de conceito*) para atingir a formalidade (*definição de conceito*). Por exemplo, partir de noções geométricas de inclinação, movendo a secante a um gráfico de função até ficar tangente a um ponto. Assim, o estudante pode “ver” reta derivada antes (*before*) de calculá-la simbolicamente (Tall, 2008).

O cálculo é uma disciplina de graduação culturalmente e historicamente marcada pela reprovação (Oliveira; Raad, 2012). Tentemos responder à questão: com base na teoria do Pensamento Matemática Avançado, quais estratégias e metodologias são sugeridas para ensinar cálculo? O primeiro passo, ou melhor, o passo anterior ao estabelecer mudanças no ensino de cálculo seria “aqueles de nós ocupados com pesquisas em matemática de graduação [Matemática Acadêmica] precisam analisar um pouco mais profundamente como os conceitos de cálculo são construídos” (Tall, 2008, p. 15, tradução nossa)⁹⁷.

Um matemático que constituiu o *met-before* de limite provavelmente introduzirá um curso de cálculo com limites, uma vez que este *proceito* é suporte para o ensino de derivada e integral. Por outro lado, Tall (2008) propõe um método que considera os estudantes nos níveis *simbólico* e *corporificado*, combinando esses mundos para entenderem análise formal padrão, análise infinitesimal não padrão ou cálculo prático em aplicações.

A abordagem sugere o uso da noção corporificada de retidão local (*local straightness*) em oposição à noção simbólica de linearidade local (*local linearity*), muito utilizada. Com o auxílio de computadores que ampliam gráficos de funções, percebe-se que:

A retidão local envolve um experimento mental corporificado que analisa atentamente os gráficos para ver que, à medida que pequenas porções de certos gráficos são altamente ampliadas, elas parecem retas. (Tall, 2008, p. 16, tradução nossa)⁹⁸.

⁹⁶ No original: “The symbolic aspect allows the slope between two distinct points to be computed numerically or symbolically and a limiting process is required to get the symbolic slope of the tangent as the symbolic derivative. The embodied version has the limit process implicit in the process of magnification, while the symbolic version involves computing an explicit symbolic representation.”

⁹⁷ No original: “[...] those of us occupied in research in undergraduate mathematics need to look a little deeper into how the concepts of calculus are constructed.”

⁹⁸ No original: “Local straightness involves an embodied thought experiment looking closely at graphs to see that, as small portions of certain graphs are highly magnified, they look straight.”

Focar na linearidade local é a pior forma de ensinar cálculo, diz Tall (2008). Isso porque “As ideias corporificadas podem fornecer ideias altamente perspicazes não encontradas em uma abordagem simbólica normal” (p. 16, tradução nossa)⁹⁹. Trabalhar com retidão local permite discutir funções que não são diferenciáveis em lugar nenhum na primeira aula, bastando explorar os gráficos. A necessidade para o limite surge das discussões sobre gráficos, do mundo *corporificado*, para calcular a inclinação; o destaque desse método é fazer uma inversão da ordem cronológica usual de ensino do cálculo.

Na perspectiva de Tall (2008), o cálculo não pertence ao mundo *formal* da análise e sim aos *corporificado* e *simbólico*, pois partiram das visões e *met-befores* de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716). Vimos que, comumente, o início de um curso de cálculo parte da *definição do conceito* limite, que exige o Pensamento Matemático Avançado. Entretanto, ao longo do curso, professores e livros didáticos substituem as demonstrações por algoritmos¹⁰⁰, *processos* que são próximos ao Pensamento Matemático Elementar. Esses *processos*, e alguns até podem ser chamados de *procedimentos*, para derivar e integrar são manipulações algébricas e numéricas, ou seja, na esfera do *simbólico*.

Sendo assim, por que ainda há níveis elevados de reprovação na disciplina cálculo, já que é principalmente marcada por pensamentos *corporificados* e *simbólicos*, ou seja, elementares, e os processos seletivos para adentrar as universidades (hoje em dia, o principal é o Exame Nacional do Ensino Médio) peneiram quem é exitoso na Matemática Escolar cognitivamente?

As pesquisas sobre Ensino de Transição apontam para diversos olhares para os problemas durante este período-contexto: institucional e didático, epistemológico e cognitivo, sociocultural (Gueudet, 2008; Gueudet et al., 2016). A nossa breve revisão de literatura sobre os olhares institucional, didático, epistemológico e sociocultural mostrou vários problemas que reverberam na aprendizagem e reprovação no cálculo. Do ponto de vista cognitivo, a nossa revisão de literatura baseada na teoria do Pensamento Matemático Avançado de David Tall revela que o indivíduo, cognitivamente falando, não deveria ter tamanha dificuldade em compreender o conteúdo, como revelado nos altos índices de reprovação. David Tall escreve a teoria para que professores entendam com mais profundidade as questões cognitivas e sugere métodos de ensino para seu aprimoramento didático.

⁹⁹ No original: “The embodied ideas can give highly insightful ideas not found in a normal symbolic approach.”

¹⁰⁰ Nas aulas de cálculo que frequentei, os professores demonstraram teoremas no intuito de colecionar ferramentas matemáticas algorítmicas para os estudantes fazerem os exercícios da bibliografia do curso. Ou seja, o intuito não era desenvolver a habilidade de provar.

Acrescentamos que paradoxos como a Trombeta de Gabriel¹⁰¹ podem trazer reflexões que envolvem os três mundos, são interessantes e desafiantes dado que atarantam a intuição humana. A confiança no conhecimento matemático formal como capaz de superar a intuição é um convencimento difícil nesta fase de Transição. Todavia, Tall (1995) corrobora com um desenvolvimento da estrutura cognitiva que dependa menos das sensações físicas e mais em construções internas (veja a Figura 1). Assim, construiremos um matemático maduro não apegado aos mundos *corporificado* e *simbólico*, mas que também pode transitar por eles com formalidade e flexibilidade, para conceber provas matemáticas.

A prova matemática é diferente em cada um dos três mundos. Provas no mundo *corporificado* são experimentos que as crianças fazem manipulando objetos. Provas no mundo *simbólico* generalizam propriedades aritméticas com auxílio de símbolos algébricos. A maior mudança é a prova formal do Pensamento Matemático Avançado.

A prova nos mundos corporificado e simbólico é baseada em conceitos que são definições dadas, então os conceitos sustentam qualquer senso de prova. A prova no mundo formal é ostensivamente baseada apenas em definições de teoria de conjuntos e dedução matemática. No entanto, à medida que os alunos passam a apreciar a prova formal, eles constroem sobre sua experiência anterior, assim como os matemáticos que usam uma variedade de abordagens, talvez usando a corporificação para sugerir novas hipóteses que são posteriormente provadas como teoremas formais, ou argumentos de contagem e outros cálculos e manipulações que podem se desenvolver em provas formais. (Tall, 2008, p. 20, tradução nossa).¹⁰²

Ou seja, um matemático maduro perpassa os três mundos da Matemática devido ao raciocínio cíclico, e não linear-horizontal, da teoria de Tall (2008). Sendo assim, utiliza corporificações e simbolismos para conduzir à prova formal. Porém, uma vez constituído o Pensamento Matemático Avançado sobre um assunto, quando demandar esses pensamentos elementares, o fará com mais sofisticação que antes de tê-lo constituído.

Nesse sentido, elaboramos um Projeto de Ensino com atividades que iniciam-se pelo caráter *corporificado* e *simbólico*, caminha para o *formalismo* possível no Ensino Médio e retorna ao *corporificado* e *simbólico* no intuito de estimular o uso do *formalismo* para interpretá-los. A seguir, descrevemos a construção do Recurso Educacional associado a esta dissertação.

¹⁰¹ A Trombeta de Gabriel é uma superfície de revolução que possui área infinita e um volume finito. Mais sobre em: <https://www.youtube.com/watch?v=MWED-6g7tnI>. Data de acesso: 12 de mai. de 2025.

¹⁰² No original: “Proof in the embodied and symbolic worlds is based on concepts that are given definitions, so the concepts underpin any sense of proof. Proof in the formal world is ostensibly based only on set-theoretic definitions and mathematical deduction. However, as students come to appreciate formal proof, they build on their previous experience, as do mathematicians who use a variety of approaches, perhaps using embodiment to suggest new hypotheses that are subsequently proved as formal theorems, or counting arguments and other calculations and manipulations that can develop into formal proofs.”

5 O PROJETO DE ENSINO

Nos capítulos anteriores, fizemos uma revisão de literatura sobre Ensino de Transição (Gueudet, 2008; Gueudet et al., 2016), dificuldades dos alunos e dos professores e soluções para as mesmas (Wood, 2001; Sierpinska et al., 2008; Clark; Lovric, 2008; Guzmán et al. 1998), concepções sobre Matemáticas Escolar e Acadêmica (Moreira; David, 2011; David et al. 2013) e discussão sobre Pensamento Matemático Avançado (Tall; Vinner, 1981; Tall, 1991, 1992, 1995, 2008, 2012).

Neste capítulo apresentaremos o Projeto de Ensino, nosso Recurso Educacional associado à dissertação, elaborado com base nesse referencial teórico. Entendemos que essa é uma ferramenta que contribuirá para o campo Ensino de Transição pois delinea ações didáticas no Ensino Médio, fortalecendo (sobretudo cognitivamente) o ensino de matemática com intenção de *suavizar* a Transição para o Ensino Superior. Além disso, nossa investigação e Recurso Educacional percorrem outras nuances dessa discussão acadêmica, como aspectos didáticos, institucionais e epistemológicos.

Vimos que as instituições de Ensino Superior estão tentando absorver os problemas de aprendizagem dos alunos novatos com *cursos ponte* e isso não tem gerado resultado. Esse *rito de passagem* (Clark; Lovric, 2008) na verdade é da escola e não adianta tentar fazer isso na universidade porque o estudante não estará no mesmo momento cultural, social e acadêmico. Assim, uma das alternativas é fazer algo durante a escola.

Como vimos, Clark e Lovric (2008) dividiram a Transição em três estágios: *Separação*, *Fase Liminar* e *Incorporação*. As críticas aos *cursos ponte* e ações nas universidades para suavizar a Transição residem na etapa de *Incorporação*. Ainda, defendem ações na *Fase Liminar*, como a criação do “Semestre Zero”. Nossa pesquisa pretende *suavizar* a Transição através de ações pedagógicas no estágio de *Separação*, quando o estudante ainda está no Ensino Médio e mira sua vida acadêmica.

O modelo antropológico dos *ritos de passagem* falam de mudanças culturais e que resultam em mudanças cognitivas. Segundo esse modelo, não podemos trazer contextos culturais que o estudante vivenciará na universidade para o contexto do Secundário. Mas no contexto da matemática seria muito benéfico apresentar aos secundaristas como se ensina a Matemática Acadêmica no Terciário. Por conseguinte, essa ação pode contribuir sobremaneira

na evolução do conhecimento matemático dos alunos, inclusive na permanência nos cursos de graduação na área de Exatas.

Durante essa fase de Transição, os novatos no Ensino Superior se deparam com uma matemática formal nova e terão dificuldades em se adaptar a essa nova maneira de estudar. Essa Transição gera um conflito entre as ideias prévias do que é a matemática e como manipulá-la, quer seja para resolver problemas ou um novo ato, o de provar e demonstrar, não (ou pouco) exigido do estudante na Escola Básica (Tall, 1991).

Sua sutileza e generalidade [da Matemática Acadêmica] são grandes demais para que a mente em desenvolvimento consiga acomodar tudo de uma vez, sem um alto risco de conflito causado por regularidades inadvertidas nas experiências particulares encontradas. (p. 22, tradução nossa).¹⁰³

As pesquisas sobre o Ensino de Transição podem ser feitas sobre diferentes perspectivas: sociológico e cultural, epistemológica e cognitiva, institucional e didática (Gueudet, 2008; Gueudet et al., 2016). Ao decidir ensinar a Matemática Acadêmica no período-contexto da Transição sem a lente cognitiva possivelmente vamos falhar (Tall, 1992), porque o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado vai além do ensino de conteúdos e suas metodologias.

A mudança para um pensamento matemático mais avançado envolve uma transição difícil, de uma posição em que os conceitos têm uma base intuitiva fundada na experiência, para uma em que são especificados por definições formais e suas propriedades reconstruídas por deduções lógicas. Durante essa transição (e muito depois), existirão simultaneamente na mente experiências anteriores e suas propriedades, juntamente com o crescente corpo de conhecimento dedutivo. Pesquisas empíricas mostraram que isso produz uma ampla variedade de conflitos cognitivos que podem atuar como um obstáculo ao aprendizado. (Tall, 1992, p. 1, tradução nossa).¹⁰⁴

Em vista disso, nosso intuito segue a premissa de que

[...] o ensino secundário não visa preparar os alunos para estudos científicos na universidade. Assim, estes estudos conduzirão antes a uma concepção do ensino universitário que inclua, em primeiro lugar, atividades de revisão, sem novos conhecimentos, mas apenas com o objectivo de construir organizações matemáticas

¹⁰³ No original: “Their subtlety and generality are too great for the growing mind to accommodate all at once without a high risk of conflict caused by inadvertent regularities in the particular experiences encountered.”

¹⁰⁴ No original: “The move to more advanced mathematical thinking involves a difficult transition, from a position where concepts have an intuitive basis founded on experience, to one where they are specified by formal definitions and their properties re-constructed through logical deductions. During this transition (and long after) there will exist simultaneously in the mind earlier experiences and their properties, together with the growing body of deductive knowledge. Empirical research has shown that this produces a wide variety of cognitive conflict which can act as an obstacle to learning.”

completas em torno do conteúdo do ensino secundário. A necessidade de tais reconstruções já foi indicada por Artigue (2001). Este ensino deve também promover a flexibilidade e a autonomia dos alunos; deverão ter como objetivo **facilitar o ingresso do aluno no novo contrato didático**. (Gueudet, 2008, p. 248, tradução e grifo nosso).¹⁰⁵

A essa facilitação chamaremos de Transição *mais suave*¹⁰⁶.

Nosso Projeto de Ensino, moldado na forma de um curso, é uma vertente dos *cursos ponte* (Wood, 2001), pois faz a mediação dos conteúdos de Matemática Acadêmica com os alunos em fase escolar. Porém, diferentemente do comumente marcado pela literatura, nosso *curso ponte* foi criado para o contexto do Ensino Médio, mostrando o seu caráter inovador. O perfil do docente do Projeto de Ensino auxilia na promoção dessa inovação, como diz Wood (2001):

Os cursos ponte permitem que os docentes sejam inovadores porque não fazem parte dos principais programas de graduação em matemática e, portanto, não dependem das mesmas restrições. Frequentemente, jovens professores, inexperientes e não-efetivos eram usados para ministrar os programas. (p. 89, tradução nossa)¹⁰⁷.

O objetivo de um e do nosso *curso ponte* é

[...] preparar os alunos para os cursos de matemática do primeiro ano em que os resultados sejam provados. Em muitas escolas secundárias, as provas [matemáticas] desapareceram quase completamente. O resultado é que para muitos estudantes o confronto com as provas no nível superior é difícil. Os grupos-alvo para estes tipos de programas são estudantes que concluíram estudos secundários e desejam passar para a matemática superior. (ibidem, p. 90, tradução nossa).¹⁰⁸

Considerando que “A mudança da matemática escolar para as demandas lógicas da matemática universitária envolve uma grande mudança na combinação de conhecimentos.”

¹⁰⁵ No original: “But secondary school does not aim at preparing students for scientific studies at university. Thus these studies will rather lead to design of university teaching comprising first of all revising activities, with no new knowledge but only aiming at building complete mathematical organizations around secondary school’s content. The necessity of such reconstructions was already indicated by Artigue (2001). This teaching should also foster students’ flexibility and autonomy; they should aim at facilitating the student’s entrance in the new didactical contract.”

¹⁰⁶ É interessante mencionar uma das definições de *suave* para a Matemática Acadêmica: “Uma curva suave não tem quebras abruptas ou cúspides [...]” (Stewart, 2016).

¹⁰⁷ No original: “Bridging courses allow lecturers to be innovative because they are not part of the mainstream mathematics degree programmes and are therefore not contingent on the same constraints. Frequently young, inexperienced and non-tenured lecturers were used to teach the programmes.”

¹⁰⁸ No original: “[...] to prepare students for first year mathematics courses in which results are proved. In many secondary schools, proofs have almost completely disappeared. The result is that for many students the confrontation with proofs at tertiary level is difficult. The target groups for these types of programmes are students who have succeeded in secondary studies and wish to move into tertiary mathematics.”

(Tall, 2008, p. 14, tradução nossa)¹⁰⁹, nosso Projeto de Ensino combina conhecimentos prévios (*met-befores*) para ensinar um tópico de Matemática Acadêmica para alunos do Ensino Médio, o Princípio de Indução Matemática. Esses alunos encontram-se na Transição para o Ensino Superior, no qual as demonstrações são significativamente presentes nas aulas de Matemática.

Neste Projeto de Ensino, apresentaremos a Indução, método que auxilia a demonstração de diversos resultados estudados ao longo do Ensino Médio. Acompanhando a BNCC, pretendemos que, com o nosso Projeto,

[...] os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências. (Brasil, 2018, p. 540).

O Projeto de Ensino foi concebido segundo a resolução do CEFET-MG (CEFET-MG, 2014), que define Projetos de Ensino como

um conjunto de ações de intervenção e/ou de atividades didático-pedagógicas, preferencialmente de natureza integradora, inter/multi/transdisciplinar, destinadas aos discentes da Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM) do CEFET-MG. (CEFET-MG, 2014, p. 2).

e tem por objetivo principal, tal como o nosso objetivo,

aprimorar o processo de ensino-aprendizagem e sistematizar conhecimentos, visando ampliar e diversificar as metodologias de ensino e as aprendizagens realizadas no percurso formativo do aluno, contribuindo para sua permanência e êxito na instituição. (ibidem, p. 2).

No Apêndice A encontra-se o formulário do Projeto de Ensino protocolado e aprovado pela Diretoria de Educação Profissional Tecnológica (DEPT) do CEFET-MG, do qual damos mais detalhes a seguir.

5.1 A elaboração do Projeto de Ensino sobre Indução Matemática

Nesta seção, discorreremos sobre a elaboração do Projeto de Ensino sobre o Princípio de Indução Matemática. Dividimo-las em três subseções: a primeira trata da justificativa desse Projeto, a segunda trata das concepções que nortearam a sua elaboração e a terceira trata da sua estruturação.

¹⁰⁹ No original: “The shift from school mathematics to the logical demands of university mathematics involves a major shift in knowledge blending.”

5.1.1 Justificativa do Projeto de Ensino

Em nível de Ensino Médio, as demonstrações costumam ser postas de lado e os resultados matemáticos são exibidos como verdades absolutas sem questionamentos. Em alguns casos, as fórmulas (*procedimentos*) são apenas conjecturadas por meio de deduções empíricas, em que se verifica a validade do resultado para um determinado número de casos e, quando isso acontece, diz-se que vai valer para todo caso.

Isso não é algo que tenha relação apenas com uma escolha dos professores. Mesmo nos livros didáticos as demonstrações recebem pouca importância, como constatou Sena (2018) ao analisar nove volumes, que constituem três coleções de livros didáticos de Matemática presentes no Guia de Livros Didáticos do Ministério da Educação, na edição do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015. Especificamente sobre os métodos de demonstração, o autor observou que

[...] o método da redução ao absurdo é utilizado apenas nas propriedades iniciais sobre conjuntos, o argumento combinatório não foi utilizado, nem mencionado uma vez sequer em nenhuma obra, assim como o **princípio da indução finita**. (Sena, 2018, p. 41, grifo nosso).

Ocorre que o pouco relevo atribuído às demonstrações no Ensino Médio parece estar em descompasso com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no qual na seção das Competências Específicas de Matemática e Suas Tecnologias Para o Ensino Médio evidencia que as demonstrações podem ser um recurso interessante para o ensino de Matemática nesse nível. Vejamos a Competência Específica 5:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 532).

Como exposto no documento orientador dos currículos das escolas brasileiras, demonstrações com algum rigor podem estar presentes na educação básica e, mais do que isso, há momentos em que se fazem necessárias.

É nosso objetivo que o aprendizado a respeito do Princípio de Indução Matemática forneça significação para o aprendizado dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos, que entenderão os resultados com que eles se deparam são válidos porque podem ser provados pelas pessoas especializadas, inclusive por eles, contribuindo para a caracterização da

“atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.” (Brasil, 2018, p. 540).

5.1.2 Concepções norteadoras do Projeto de Ensino

Diante de tal cenário, os autores deste trabalho pensaram em resgatar e aprimorar uma sequência de atividades aplicada por um dos integrantes no contexto do ensino remoto em 2021, fazendo adequações, e compartilhá-las por meio deste trabalho. A proposta é que ela seja utilizada por professores do Ensino Médio e que esteja centrada na utilização do Princípio da Indução Matemática como possibilidade de se demonstrar resultados matemáticos.

Nossa definição de Princípio de Indução Matemática será como Vidigal et al. (2009, p. 31):

Princípio de Indução Matemática: Suponha que para cada número natural n se tenha uma afirmativa $P(n)$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $P(1)$ é verdadeira (denominamos Caso Base);
2. sempre que a afirmativa for válida para um número natural arbitrário k (hipótese de indução), ela será válida para o seu sucessor $n = k + 1$ (ou seja, $P(k)$ verdadeira implica $P(k + 1)$ verdadeira (denominamos Passo Indutivo).

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n .

Façamos uma distinção entre o Princípio de Indução Matemática e a “indução empírica” das Ciências Naturais. Nesta, uma série de observações de certo fenômeno apoiam a formulação de uma lei geral que o explica. Já o Princípio de Indução Matemática é um método de “demonstrar a veracidade de um teorema matemático em uma sequência infinita de casos, o primeiro, o segundo, o terceiro e assim por diante sem exceção” (Courant; Robbins, 2000, p. 12). Sendo assim, a Indução Matemática é um argumento dedutivo, pois “a conclusão segue-se de premissas com todo rigor lógico” (Fossa, 2009, p. 100).

A escolha pelo Princípio de Indução Matemática (ou simplesmente Indução) se deu por vários motivos. Um deles é a experiência anterior de um dos autores, que aplicou uma primeira versão dessa sequência de atividades em uma aula do projeto de extensão do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) denominado *Transitando pela Matemática: do Ensino Médio ao Ensino Superior*. Os estudantes

participantes desse projeto eram alunos do Ensino Médio de diversas escolas públicas e particulares de Belo Horizonte e tinham interesse em aprender a Matemática do Ensino Superior, porque tinham a intenção de cursar graduação na área de Exatas¹¹⁰.

Outro motivo que nos levou a optar por esse método foi por notarmos que a Indução apareceu em diversos momentos nas disciplinas do PROFMAT - em Aritmética, em Matemática Discreta e em Números e Funções Reais - e nos auxiliou na demonstração de diversos resultados de conteúdos ensinados no Ensino Médio, a exemplo de progressões aritmética e geométrica.

Sobretudo, o motivo maior para ensinar esse método é que ele é um assunto do âmbito da Matemática Acadêmica, uma vez que é um método de demonstração, e também tem viés de Matemática Escolar, uma vez que é um processo algorítmico, um passo a passo. Além disso, o Princípio de Indução Matemática é um tema de Transição, pois tradicionalmente compete aos primeiros anos da graduação em cursos de Ciências Exatas, em particular no Bacharelado ou Licenciatura em Matemática. Ainda, a Indução requer um raciocínio do Pensamento Matemático Elementar, ao perpassar os estágio de um algoritmo, e um raciocínio do Pensamento Matemático Avançado, ao carecer de uma *intuição lógica* para, com criatividade, resolver o passo indutivo, explicado a seguir.

A escolha também considera que

As provas de indução podem operar em dois níveis distintos: um é o processo potencialmente infinito de provar um caso específico e repetir uma etapa geral sempre que necessário; o segundo envolve uma prova de três estágios que comprime a repetição potencialmente infinita de etapas em um único uso do axioma de indução em um ambiente mais formal. (Tall et al., 2012, p. 26, tradução nossa).¹¹¹

O artigo *Cognitive development of proof* de Tall et al. (2012) foi a principal referência para a elaboração do Projeto de Ensino em razão do seu objetivo: discorrer sobre como os indivíduos desenvolvem ideias de prova apropriadas para seu nível de maturidade no momento e como essas ideias mudam em sofisticação ao longo do tempo, da criança ao matemático maduro/pesquisador.

5.1.3 Estruturação do Projeto de Ensino

¹¹⁰ Mais sobre este curso no capítulo Introdução.

¹¹¹ No original: "Induction proofs can operate at two distinct levels, one the potentially infinite process of proving a specific case and repeating a general step as often as is required, the second involving a three stage proof that compresses the potentially infinite repetition of steps to a single use of the induction axiom in a more formal setting."

A sequência de atividades do Projeto de Ensino foi construída com base na agenda para as pesquisas sobre a Transição para o Pensamento Matemático Avançado de Tall et al. (1992). Segundo o autor, as observações clínicas formam a principal metodologia para desenvolver a maturidade intelectual dos alunos. Assim, tem nas abordagens clínicas um meio para desenvolver a maturidade intelectual dos alunos e, levando em consideração as dificuldades no Ensino de Transição, não ignora as mudanças que são suscitadas por ela.

As dificuldades nessa Transição envolve as mudanças:

- do conceito considerado como um *processo* (a Indução como um processo – como apresentaremos na *imagem de conceito* dos dominós),
- ao conceito encapsulado como um único objeto que recebe um nome (a Indução como um princípio matemático, uma estratégia de demonstração),
- por meio da abstração de propriedades para o conceito dado em termos de uma definição (a Indução como correspondência biunívoca com os números naturais),
- à construção das propriedades do objeto definido por meio de dedução lógica (o passo indutivo da Indução),
- e as relações entre várias representações diferentes do conceito incluindo verbal, processual, simbólico, numérico, gráfico (diversas aplicações da Indução nos diversos campos matemáticos - geometria, aritmética, álgebra).

Vale ressaltar que:

Esses não pretendem representar uma hierarquia de desenvolvimento, em particular as relações entre várias representações permeiam todo o sistema de forma horizontal, enquanto os fios conceituais se tornam mais sofisticados. Evidências empíricas tradicionalmente sugerem que é necessário se familiarizar com um processo antes de encapsulá-lo como um objeto. (Tall, 1992, p. 23, tradução nossa).¹¹²

A Indução foi abordada aqui como um método para a demonstração de resultados matemáticos. No entanto, como diz Morgado e Carvalho (2023), “O método da Indução não é somente um método de demonstração: ele é também um método para construir definições” (p. 16).

Para ensinar o Princípio de Indução Matemática, levando em consideração as justificativas e concepções adotadas, estruturamos o Projeto de Ensino com as seguintes aulas:

¹¹² No original: “These are not intended to represent a hierarchy of development, in particular the relationships between various representations permeate the whole system in a horizontal manner whilst the conceptual strands become more sophisticated. Empirical evidence traditionally suggests that it is necessary to become familiar with a process before encapsulating it as an object.”

- Primeira aula: A lei forte dos pequenos números e exemplo dos dominós;
- Segunda aula: Problema dos quadrados e Princípio de Indução Matemática;
- Terceira aula: Exercícios de indução e Torre de Hanói.

As três próximas seções serão dedicadas a uma descrição detalhada dessas aulas.

5.2 Primeira aula: A lei forte dos pequenos números e exemplo dos dominós

Para aprender a provar e desenvolver o pensamento dedutivo, Tall et al. (2012) delinearam alguns estágios. Inicialmente, a criança não pensa dedutivamente, apenas interage com o mundo a partir dos sentidos (visão, audição, tato, olfato, paladar), apontando, operando sobre os objetos (contar, combinar, compartilhar, adicionar, subtrair, sortear, etc.), explorando-os e descrevendo-os a partir do desenvolvimento da linguagem, que refina o pensamento.

Depois, particularmente na perspectiva do Pensamento Matemático Elementar e na aprendizagem da Matemática Escolar, são percebidas algumas regularidades nas operações aritméticas, que são suas propriedades (comutatividade, associatividade, distributividade). Essas propriedades podem ser sintetizadas com auxílio da linguagem algébrica, que generaliza a aritmética. Nesse estágio,

As crianças podem até estabelecer suas próprias regras, que não são necessariamente corretas, mas que, no entanto, as ajudam a dar os primeiros passos em direção ao pensamento dedutivo. (Tall et al., 2012, p. 3, tradução nossa).¹¹³

Este excerto está em conformidade com a discussão que fizemos sobre a Matemática Escolar ser flexível. As regras¹¹⁴ estabelecidas pelas crianças na sala de aula podem estar “erradas” no contexto generalista da Matemática, mas podem ser utilizadas em casos particulares. Mais uma vez, o importante é revisá-las futuramente, com o cuidado para adjetivar aquela regra não como “errada”, mas como “falsa” no caso geral e “verdadeira” em casos particulares. Dessa forma, valorizamos a produção matemática dos discentes e ensinamos matemática com apoio da autoconfiança deles. De todo modo, a produção de sínteses de regras matemáticas pelas crianças é um importante estágio do desenvolvimento da dedução.

¹¹³ No original: “Children may even establish their own rules which are not necessarily correct yet, nevertheless, help them to make initial steps towards deductive thinking”.

¹¹⁴ Usamos o termo “negociações” na seção 2.2.

Visto isso, a principal atividade desta aula, intitulada “A lei forte dos pequenos números”, provoca uma aproximação quase sensorial com a Matemática, tateando-a e experimentando-a por meio de exemplos prazerosos arquitetados por Richard Guy¹¹⁵. **O objetivo geral da Primeira Aula é suscitar a necessidade de formular uma teoria matemática que ofereça provas rigorosas, em vez de nos basearmos apenas na intuição sem o devido rigor.**

A partir de agora, colocaremos destaque em *itálico* o que compõem as atividades do Projeto de Ensino, nosso Recurso Educacional. Os escritos em *itálico* podem ser apresentados na forma de textos impressos, *slides* ou serem falas do professor. No próximo capítulo expomos o método adotado na apresentação e aplicação das atividades.

A lei forte dos pequenos números é uma intuição que as pessoas mostram uma tendência para acreditar que se uma propriedade é válida para um número relativamente pequeno de valores, então será válida para todos.

*Para este primeiro momento, nos baseamos no artigo de Richard Guy, *The strong law of small numbers* (Guy, 1988). O autor propõe questões do tipo “faça você mesmo”, na qual mostra exemplos de padrões que parecem se delinear quando olhamos para vários pequenos valores de n , números naturais, em vários problemas cujas respostas dependem de n . A questão será, em cada caso: você acha que o padrão persiste para todos os números naturais? Ou você acredita que é uma ilusão da pequenez dos valores de n que são trabalhados nos exemplos?*

Cuidado: exemplos de ambos os tipos aparecem; nem todos são ilusões! Em seguida daremos as respostas, junto com as referências. Tente manter um scorecard¹¹⁶: para cada exemplo, insira seu palpite sobre se o padrão observado continua, não continua ou não é conhecido¹¹⁷. Divirtam-se.

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.

¹¹⁵ Richard Kenneth Guy (1916-2020) foi um matemático e professor do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Calgary, Canadá.

¹¹⁶ Um *scorecard* é um cartão de pontuação para anotar em jogos.

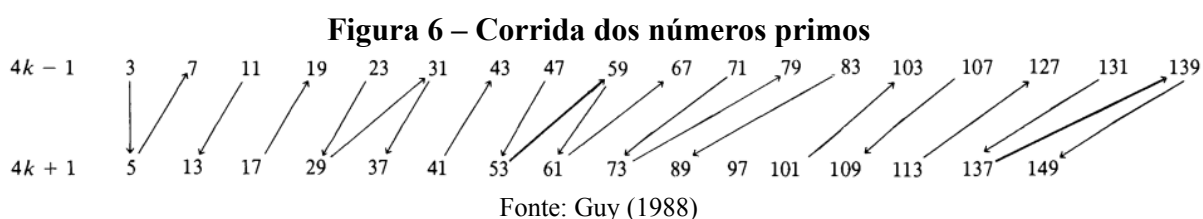
¹¹⁷ Disponibilizamos um *link* para um Formulário Google no qual cada participante respondia “Verdadeiro” ou “Falso” para cada situação. Os resultados da aplicação serão mostrados na subseção 6.3.2.

Resposta¹¹⁸: ninguém menos do que Fermat (1607-1665) foi enganado pela lei forte! Euler deu a fatoração $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$, que é um contraexemplo. Todos os outros exemplos conhecidos de números de Fermat são compostos.

Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. Verificamos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.

Resposta: contraexemplo: $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ não é primo. Existem poucos primos de Mersenne (1588-1648), que são primos da forma $2^p - 1$, com p primo. Ninguém sabe se existem infinitos primos de Mersenne ou não. O maior primo de Mersenne conhecido corresponde ao valor de $p = 136279841$, tem 41 024 320 dígitos, e foi descoberto em 21 de outubro de 2024¹¹⁹.

Situação 3: Sabe-se que exceto o 2, que é único primo par, todos os outros primos têm a forma $4k - 1$ ou a forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. O intervalo $[1, 10]$ contém 2 primos da forma $4k - 1$ (o 3 e o 7) e só 1 da forma $4k + 1$ (o 5). O intervalo $[1, 32]$ contém 6 primos da forma $4k - 1$ e só 4 da forma $4k + 1$ (verifique). Em qualquer intervalo $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de primos da forma $4k + 1$ é menor ou igual aos do que da forma $4k - 1$. Dizemos que os da forma $4k - 1$ vencem a “corrida dos números primos”.



Resposta: na “corrida dos números primos”, $4k - 1$ e $4k + 1$ assumem a liderança alternadamente com frequência infinita. Isso foi provado por Littlewood¹²⁰.

¹¹⁸ Observação: As respostas são apresentadas no final da aplicação da atividade. Na dissertação, colocamo-las logo após as situações.

¹¹⁹ Conferido em <https://www.mersenne.org/>. Data de acesso: 12 de mai. de 2025.

¹²⁰ LITTLEWOOD, J. E. Sur la distribution des nombres premiers. *Comptes Rendus de l'Acad Sci. Paris*, v. 158, p. 1869-1872, 1914.

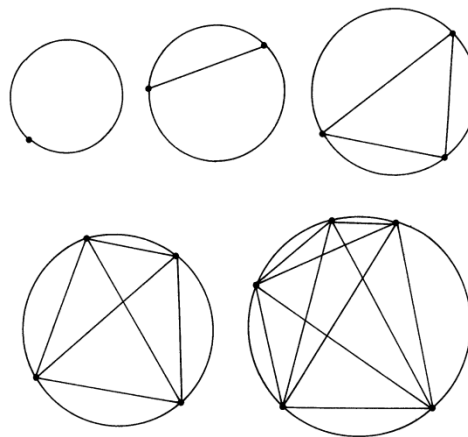
Situação 4: Um número natural tem um ou mais fatores primos da forma $4k + 1$ do que da forma $4k - 1$ ou a mesma quantidade de cada uma das formas. Por exemplo, 21 tem dois do primeiro tipo (3 e 7) e dois do segundo (1 e 21), enquanto 25 tem todos os três (1, 5, 25) do segundo tipo.

Resposta: um teorema de Legendre (1752-1833)¹²¹ afirma que D_+ e D_- são os números de divisores de n das formas $4k + 1$ e $4k - 1$, respectivamente, então os números de divisores de n como a soma de dois quadrados é $4(D_+ - D_-) \geq 0$. Portanto, $D_+ \geq D_-$ para todo número n .

Situação 5: Os círculos da figura têm $n = 1, 2, 3, 4, 5$ pontos marcados sobre sua circunferência. Em cada um deles, todos os pontos são ligados a todos os outros, de modo que as cordas (sem sobreposições) determinam regiões. Observação: três das n cordas não concorrem num único ponto, ou seja, cada grupo de 4 pontos tem apenas uma interseção. Na tabela que segue, temos o número de regiões nas quais as cordas dividem cada círculo.

Número de pontos	1	2	3	4	5	...	n
Número de regiões	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

Figura 7 – Quantas regiões em cada um desses círculos?

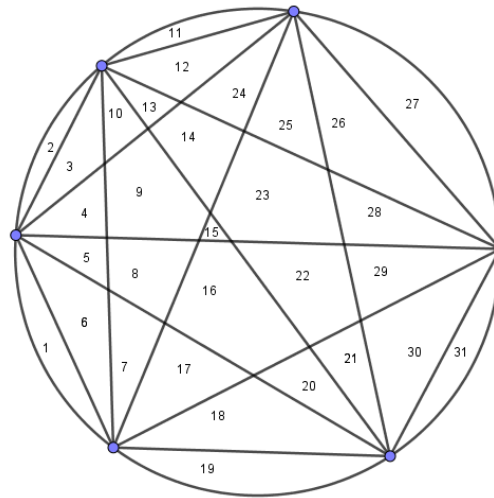


Fonte: Guy (1988)

Resposta: contraexemplo: vejamos o círculo abaixo que tem 6 pontos e está dividido em 31 regiões.

¹²¹ DAVENPORT, H. **The higher arithmetic**. Hutchinson's University Library, 1952.

Figura 8 – Regiões de um círculo com 6 pontos



Fonte: elaborado pelo autor

Façamos uma correção na tabela:

Número de pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Número de regiões	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256	386	562	784

Situação 6. Os números 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, etc. são todos primos.

Resposta: Nenhum membro desta sequência é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13 ou 37, como pode ser visto imediatamente a partir de testes de divisibilidade bem conhecidos. Por outro lado, 17, 19, 23, 29 e 31 dividem 33...331 apenas se o número de três for respectivamente $16k + 8$, $18k + 11$, $22k + 20$, $28k + 19$ e $15k + 1$, enquanto 41, 43, 53, 67, 71, 73, 79, ... não dividem nenhum membro da sequência. Richard Guy não acredita que haja uma descrição simples de quais primos dividem e quais primos não dividem. O próximo da lista, 33333331, também é primo, mas o seguinte, 333333331, não. Contraexemplo: $333333331 = 17 \times 196078$.

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n - 1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$3! - 2! + 1! = 5$$

$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$

$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$

$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$

$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$

$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 3589$$

Resposta: contraexemplo:

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981 \text{ e}$$

$$326981 = 79 \times 4139.$$

Situação 8. Quando você usa o método de Euclides para mostrar que existem infinitos primos,

$$2 + 1 = 3$$

$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

$$(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 231$$

que nem sempre produz números primos

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 = 510511 = 19 \times 97 \times 277$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 = 9699691 = 347 \times 27953$$

mas se tomarmos o próximo primo, a diferença com o produto é sempre um primo:

$$5 - 2 = 3$$

$$11 - (2 \times 3) = 5$$

$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$

$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$

$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$

$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$

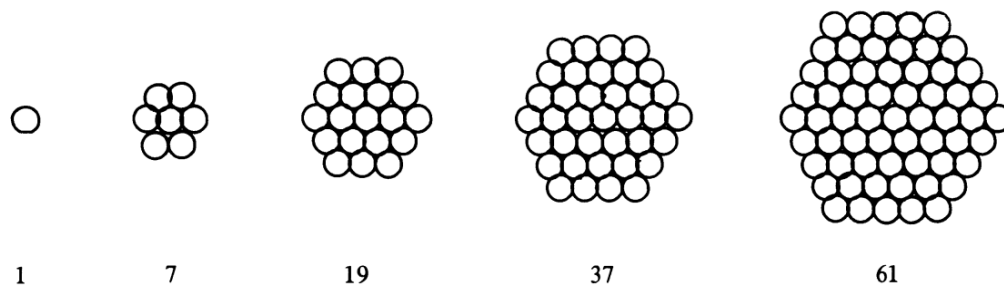
$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$

$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23.$$

Resposta: R. F. Fortune¹²² conjecturou que essas diferenças seriam sempre números primos. As próximas diferenças são: 37, 61, 67, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103. Evidências apontam para a veracidade da conjectura, mas nada foi provado (ainda?).

Situação 9. A sequência de números hex (assim chamados para distingui-los dos números hexagonais) estão representados na figura abaixo.

Figura 9 – Números hex



Fonte: Guy (1988)

As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

$$1 = 1^3$$

$$1 + 7 = 8 = 2^3$$

$$1 + 7 + 19 = 27 = 3^3 \dots$$

Resposta: Primeiramente, o n -ésimo número hex é

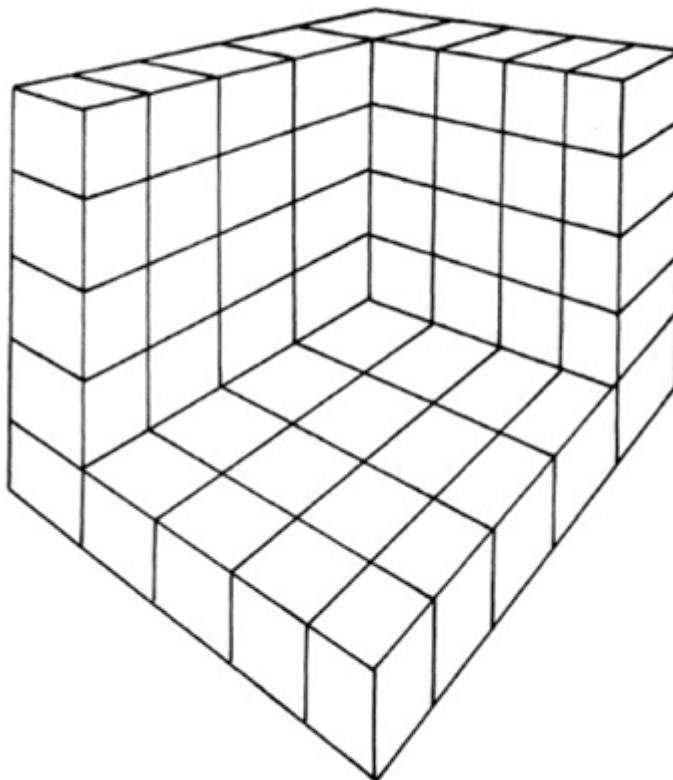
$$1 + 6 + 12 + \dots + 6(n - 1) = \frac{(6+6(n-1))(n-1)}{2} + 1 = 3n(n - 1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1.$$

O resultado é verdadeiro e a prova é por Indução. Sabemos que vale para o caso $n = 1$ (e $n = 2, 3, 4, 5$ também). Suponha que a soma parcial dos n primeiros números hex seja n^3 . O $(n + 1)$ -ésimo número hex é $3(n + 1)^2 - 3(n + 1) + 1 = 3n^2 + 3n + 1$ e, quando adicionado a n^3 , resulta em $(n + 1)^3$. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, o padrão é verdadeiro para todo n natural.

É instrutivo considerar o n -ésimo número hex como correspondendo às três faces em um canto de uma pilha cúbica de n^3 cubos de unidade.

¹²² GARDNER, M. Mathematical games: patterns in primes are a clue to the strong law of small numbers. *Sci. Amer*, v. 243, n. 6, p. 18, 1980.

Figura 10 – Canto de pilha cúbica



Fonte: Guy (1988)

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Resposta: esse é um exemplo do processo de Moessner, que de fato produz os números quadrados. O artigo de Moessner¹²³ é seguido por uma prova de Perron. Acredito que você consegue provar isso usando a forma de um número ímpar e indução.

Agora, mostraremos as “respostas corretas” para a atividade “A lei forte dos pequenos números” para os alunos. Em verdade, não gostaríamos de chamá-las de respostas

¹²³ MOESSNER, A. Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen.. **Zahlen.** München, 1952. Sitzungsberichte: 1951,3.

corretas porque foi acordado que para cada exemplo seria indicado uma suposição sobre a continuidade infinita do fato visto em pequenos números.

Respostas:

Exemplo 1: Falso

Exemplo 2: Falso

Exemplo 3: Falso

Exemplo 4: Verdadeiro

Exemplo 5: Falso

Exemplo 6: Falso

Exemplo 7: Falso

Exemplo 8: Conjectura

Exemplo 9: Verdadeiro

Exemplo 10: Verdadeiro

Note que, na situação 8, ainda não podemos afirmar se é verdadeiro ou falso. Isso pode abrir uma discussão em sala sobre o que é uma conjectura na matemática.

Para Tall et al. (2012), o aprendiz necessita “duvidar de representações e argumentos que parecem intuitivamente válidos. Isso pode levar a várias maneiras diferentes de enfatizar diferentes aspectos da prova” (p. 18, tradução nossa)¹²⁴. Esse primeiro momento foi planejado com esse entendimento.

A finalização deste momento se dá na conclusão: “A conclusão vale dentro e fora da matemática: NÃO DÁ PARA DIZER NADA ANALISANDO SÓ UNS POUCOS CASOS!”

Então, como podemos saber se alguma afirmação matemática é verdadeira? A matemática é constituída por alguns métodos que são logicamente válidos para validá-las. Este Projeto de Ensino é sobre um desses métodos: o Princípio de Indução Matemática.

Vamos ilustrar esse método, a exemplo de Pereira (2013), com o enfileiramento de peças de dominó: Consideremos um enfileiramento perfeito de dominós, no qual se um deles cai para frente, então derruba o seguinte. Como exercício de imaginação, suponha que haja um encadeamento infinito de dominós. Nesse modelo, se o primeiro dominó for derrubado para frente, o que aconteceria?

Parece-nos que a resposta a esta pergunta é bem intuitiva: os outros dominós cairiam também, um por um. Caso contrário, se um determinado dominó ficasse de pé, digamos o de posição n (n maior do que 1), o dominó imediatamente anterior a este, o de posição $n - 1$,

¹²⁴ No original: “[...] learner for the need to doubt representations and arguments that seem intuitively valid. This can lead to several different ways of emphasizing different aspects of proof.”

também teria ficado de pé, pois, se tivesse caído, por hipótese, derrubaria o que está logo a sua frente. Procedendo assim, reiteradas vezes, concluiríamos que o primeiro dominó não teria sido derrubado, um absurdo, já que inicialmente afirmamos que o primeiro dominó caiu para frente.

Portanto, não podemos supor que algum dominó vai ficar de pé. Isto se dá por que duas condições foram respeitadas: a primeira é que o primeiro dominó é derrubado e a segunda é que se um dominó cai então derruba o da frente. Repare que as duas condições podem ser associadas às duas fases de uma prova com o Princípio de Indução Matemática (caso base e hipótese de indução) e são igualmente necessárias, uma vez que, se apenas a primeira fosse verdade, nada nos garantiria que os demais dominós cairão, e se somente a segunda fosse verdade, o processo de queda dos dominós poderia jamais iniciar.

O exemplo dos dominós é uma versão corporificada da Indução, uma *imagem de conceito*. Na aula seguinte, propomos uma versão simbólica e a formalização da Indução, ampliando os mundos da matemática (Tall, 2008).

5.3 Segunda aula: Problema dos Quadrados e Princípio de Indução Matemática

Agora, chegamos ao estágio de convencer as autoridades sobre a veracidade das regras concebidas. Antes de conhecer o primoroso exercício da matemática formal, as autoridades são os professores, a família ou o livro didático (conferindo as respostas da aplicação das suas regras com as respostas apresentadas no livro).

Já no nível universitário, é ensinada a linguagem e a lógica da matemática através de definições formais e deduções mostradas em sala de aula e nos livros. A partir dessa aprendizagem é que a prova formal axiomática torna-se possível ao indivíduo.

Ao contrário das formas anteriores de prova, os axiomas formulados expressam apenas as propriedades necessárias para fazer a dedução necessária e não estão mais restritos a um contexto específico, mas a qualquer situação em que o único requisito é que os axiomas sejam satisfeitos. (Tall et al., 2012, p. 3, tradução nossa)¹²⁵.

Todo esse processo proporciona ao indivíduo três formas de realizar provas. A primeira forma desponta da geometria, um dos conteúdos da Matemática Escolar que inicia o aprendizado das provas, deduzindo propriedades de figuras planas e espaciais, que são praticamente *imagens de conceito* tangíveis. A segunda forma é o uso da álgebra para

¹²⁵ No original: “Unlike earlier forms of proof, the axioms formulated express only the properties required to make the necessary deduction, and are no longer restricted to a particular context, but to any situation where the only requirement is that the axioms are satisfied.”

estabelecer regras da aritmética, generalizando-a; assim o estudante pode provar regras utilizando a linguagem algébrica. A terceira é definindo estruturas axiomáticas, aqui no âmbito da Matemática Acadêmica, para construir o caminho lógico-dedutivo da prova de um teorema, por exemplo.

O objetivo desta aula é **provar matematicamente a veracidade de um problema geométrico (mundo corporificado) com auxílio da linguagem algébrica (mundo simbólico)**. Depois, essa discussão estruturará o entendimento do Princípio de Indução Matemática, sem apelar para os Axiomas de Peano¹²⁶, uma vez que a teoria cognitiva de Tall declina tamanha formalização no Ensino Médio, apesar das exceções.

A proposta dessa aula é ser expositiva e dialogada.

O seguinte Problema dos Quadrados (Fomin et al., 2012) é uma motivação para a introdução do Princípio de Indução Matemática. Ele é uma aplicação simples da indução em um contexto geométrico. A apresentação da Indução em geometria logo no início faz com que compreendamos que a Indução não só reside em problemas aritméticos, como de costume.

*Contemos uma anedota sobre a importância de utilizar os conhecimentos adquiridos na suas experiências com matemática para formular afirmações. Esta tática está no livro *A Arte de Resolver Problemas*, de George Polya. Em uma das etapas para seu método de resolver problemas, a denominada “Estabelecimento de um Plano”, Polya diz que para resolver um problema, por vezes é possível recordar de um problema correlato (Polya, 1995).*

Se conseguirmos lembrar de um problema anteriormente resolvido que seja intimamente relacionado com o nosso, teremos tido muita sorte. Devemos fazer por merecer esta sorte e podemos merecê-la, aproveitando-a. (Polya, 1995, p. 6).

A anedota, inventada pelo professor Morgado do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)¹²⁷, é a seguinte: havia um concurso para professor de matemática e formou-se uma fila enorme para a vaga, pois o salário era muito bom. Uma banca de especialistas chamava um a um dos candidatos e fazia duas perguntas. A primeira pergunta

¹²⁶ Os Axiomas de Peano foram introduzidos pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). São eles: 1 é um número natural; Todo número natural tem um sucessor natural; 1 não é o sucessor de nenhum número natural; Se o sucessor de dois números naturais for o mesmo, então os dois números originais são os mesmos; Se um conjunto contém o 1 e o sucessor de cada número está no conjunto, então o conjunto contém os números naturais. Sabemos que estes axiomas são base para o entendimento do conjunto dos números naturais e do Princípio de Indução Matemática. Como nossa intenção não é discutir com essa profundidade no Projeto de Ensino, da mesma forma não faremos essa ponte conceitual na dissertação. O leitor poderá encontrar mais sobre em Lima (2013).

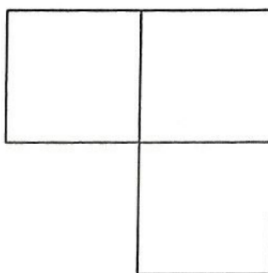
¹²⁷ A anedota foi contada pelo professor Ledo Vaccaro na edição de Janeiro de 2018 do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), na aula intitulada “Revisitando números e suas operações”, e pode ser vista no link: <https://www.youtube.com/watch?v=u5OUzYoGgBw&t=0s>. Data de acesso: 12 de mai. de 2025.

era: “caso você esteja em uma sala e tenha um balde cheio d'água no centro dela e uma lareira em um dos cantos, o que você faz para apagar o fogo da lareira?”. Os candidatos respondiam que iam até o balde no centro da sala, levariam-o para o canto e despejariam a água no fogo. A segunda era: “caso você esteja em uma sala e tenha um balde cheio d'água num canto dela e uma lareira em outro canto, o que você faz para apagar o fogo da lareira?”. Os candidatos respondiam que iam até o balde no canto da sala, levariam-o para o outro canto e despejariam a água no fogo. Diversos candidatos foram dispensados por causa da resposta a esta pergunta. Um candidato acertou e foi contratado. Para o espanto dos outros, ele disse que ia até o balde no canto da sala, levaria-o para o centro e, dessa forma, ele estava situado no problema da primeira pergunta. Em linguagem coloquial, ele “caiu” no problema anterior.

A metodologia de Polya e a anedota estão diretamente relacionadas com a Competência Específica 5 da BNCC (Brasil, 2018), que discorre sobre recorrências na Matemática.

Vejamos um problema parecido com esse do balde, somente que mais interessante. Antes, precisamos de uma definição: um triminó (Figura 11) é um tipo de poliminó. “Um poliminó é um conjunto de quadrados encostados lado a lado” (Neto, 2016). Assim, um triminó é um poliminó com três quadrados. O exemplo mais conhecido dos poliminós é o dominó, que tem dois quadrados.

Figura 11 – Triminó



Fonte: Fomin et al. (2012)

Problema dos quadrados: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 16×16 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós sem que haja sobras.

Para resolver esse problema, começaremos por um problema mais fácil.

Problema 1: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 2×2 (Figura 12a) de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.

O resultado é visualizado pela Figura 12b. Vê-se exatamente o lugar onde ficará o triminó. Portanto, foi provado¹²⁸ ser possível resolver o Problema 1.

Figura 12 – Quadrados 2×2

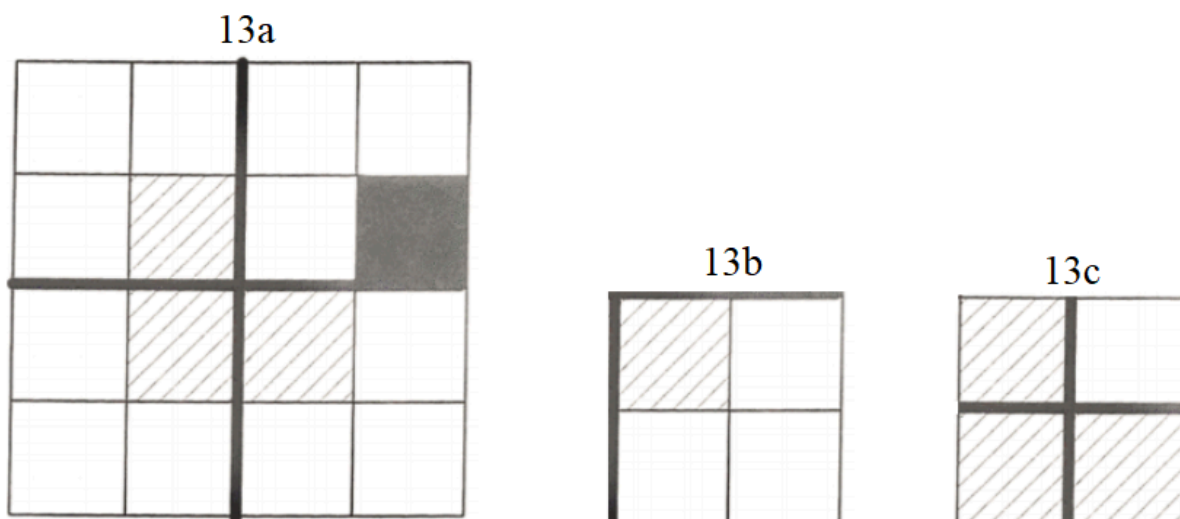


Fonte: elaborado pelo autor

Problema 2: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 4×4 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós sem que haja sobras.

O resultado é visualizado pela Figura 13a. Observamos, na solução geométrica, onde ficarão os triminós, caso retiremos o quadrado preto. Portanto, foi provado ser possível resolver o Problema 2. Outros casos são análogos, somente trasladando ou rotacionando os triminós.

Figura 13 – Quadrado 4×4 retirado um quadradinho (preto)



Fonte: adaptado de Fomin et al. (2012)

¹²⁸ Para este problema, entendemos o termo “prova” como um argumento logicamente válido, no caso pictórico (Tall et al., 2012), para a solução dos problemas geométricos enunciados.

Outra forma de interpretar o Problema 2 e a Figura 13a que o resolve é imaginar que o quadrado 4×4 é composto por quatro blocos com quadrados 2×2 , onde foi retirado um quadradinho hachurado (Figura 13b). Sabemos que, ao se retirar um quadradinho (hachurado) de um quadrado 2×2 , podemos recortá-lo em triminós, pois já resolvemos o Problema 1. Unindo os três quadradinhos hachurados de três dos quatro quadrados 2×2 que compõem o quadrado 4×4 , formamos um triminó (o da Figura 13c, ao centro da Figura 13a, uma escolha conveniente). Logo, um quadrado 4×4 pode ser recortado em triminós visto que essa tática da recorrência nos encaminha para a sua resolução.

Problema 3: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 8×8 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós sem que haja sobras..

Façamos um exercício mental, abstraindo o que seria um quadrado 8×8 . Podemos imaginar que o quadrado 8×8 é composto por quatro blocos com quadrados 4×4 , onde foi retirado um quadradinho hachurado. Sabemos que, ao se retirar um quadradinho (hachurado) de um quadrado 4×4 , podemos recortá-lo em triminós, pois já resolvemos o Problema 2. Unindo os três quadradinhos hachurados de três dos quatro quadrados 4×4 que compõem o quadrado 8×8 , formamos um triminó (ao centro, uma escolha conveniente). Logo, um quadrado 8×8 pode ser recortado em triminós visto que essa tática da recorrência nos encaminha para a sua resolução.

Voltemos ao Problema dos quadrados, ou seja, o caso 16×16 . Estenderemos este problema construindo “pontes” a partir de questões semelhantes, porém mais simples.

Dividimos o quadrado 16×16 em quatro quadrados 8×8 . Um deles tem um quadradinho faltando. Acabamos de provar que ele pode ser recortado em “cantos” [triminós], certo? Então cortamos um “canto” no centro do quadrado grande e obtemos mais três quadrados 8×8 sem um quadradinho, logo eles podem ser recortados em “cantos”. É isso! (Fomin et al., 2012, p. 84).

Questão: poderíamos construir tais pontes mais uma vez, para problemas mais complicados? Ou seja, resolver os casos 32×32 , 64×64 , 128×128 , etc.?

Isso nos levaria a uma cadeia infinita de proposições sobre quadrados de tamanhos diferentes. Podemos dizer que demonstramos todos esses casos, isto é, o problema dos quadrados para o caso $2^n \times 2^n$ é verdadeiro?

Vamos rever o que fizemos:

- 1. provamos a primeira afirmação na cadeia sobre o quadrado 2×2 .*
- 2. provamos a segunda proposição (4×4) a partir da anterior (2×2).*

3. provamos a terceira proposição (8×8) a partir da anterior (4×4).

4. provamos a quarta proposição (16×16) a partir da anterior (8×8).

Seguindo esta cadeia provaremos qualquer das afirmações para quadrados $2^n \times 2^n$; portanto, todas elas são verdadeiras.

Então acabamos de provar uma série infinita de afirmações sobre a possibilidade de recortar quadrados em triminós. Agora vamos escrever todas essas proposições. Isso é possível?

Proposição (P_n): Um quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

O Problema 1 enunciado anteriormente pode ser reescrito na forma acima como P_1 , trocando 2×2 por $2^1 \times 2^1$ e assim por diante.

P_1 : Um quadrado $2^1 \times 2^1$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

P_2 : Um quadrado $2^2 \times 2^2$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

P_3 : Um quadrado $2^3 \times 2^3$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

E assim por diante. Tratamos de uma cadeia infinita de teoremas semelhantes. Primeiro demonstramos P_1 . Se P_1 for demonstrada, então P_2 será verdadeira. Se P_2 for demonstrada, então P_3 será verdadeira. E se P_n for demonstrada, então...

Como em Fossa (2009), vemos que

[...] implícito na técnica de indução matemática está o seguinte raciocínio heurístico. A proposição (ii.) é uma proposição universal e, portanto, é equivalente a seguinte série infinita de proposições: $P(1) \rightarrow P(2)$, $P(2) \rightarrow P(3)$, $P(3) \rightarrow P(4)$, ... Mas a proposição (i.) afirma $P(1)$. Portanto, podemos concluir $P(2)$ a partir de $P(1)$ e $P(1) \rightarrow P(2)$, usando um argumento do tipo AA [Afirmação do Antecedente]. Continuando desta maneira podemos demonstrar a proposição P para qualquer número natural arbitrário. Portanto, P é verdadeiro para todos os números naturais. (p. 102).

Um dos saltos cognitivos no ensino de indução matemática é a compreensão de que

[...] precisamos demonstrar a representação abstrata da proposição (ii.), a saber: $P(n) \rightarrow P(n + 1)$, onde n é o nome abstrato que substituímos para a variável x . Mas a proposição (3) é um condicional e, portanto, a técnica TC [Técnica de Condicionização¹²⁹] é aplicável: assumimos o seu antecedente $P(n)$ e tentamos demonstrar o conseqüente $P(n + 1)$. Assim, $P(n)$ é chamada a hipótese de indução. (Fossa, 2009, p. 103).

Assim, formalizamos como é o Princípio de Indução Matemática no Problema dos quadrados como segue:

Teorema: *Qualquer que seja o número natural n , se já demonstramos que o quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós, então o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ com um quadradinho faltando também pode ser recortado em triminós.*

Ideia de prova: Dividimos mentalmente o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ em quatro quadrados $2^n \times 2^n$. Cada um desses se tiver um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós, por hipótese. Então cortamos um triminó no centro do quadrado grande de modo que contenha um quadradinho de cada um dos outros três quadrados $2^n \times 2^n$. Depois disso, usamos a hipótese novamente!

Generalizando, temos que, quando provamos o teorema geral, provamos todas as proposições P_n . Por exemplo, para $n = 1$, obtemos a demonstração de que a possibilidade de recortar o quadrado 2×2 implica a possibilidade de recortar o quadrado 4×4 .

Seguindo o Princípio de Indução Matemática:

- Provamos a primeira proposição da série (P_1 : 2×2).
- Consideramos a proposição P_n (um quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós) como verdadeira.
- Deduzimos a segunda proposição da primeira, a terceira da segunda, etc. Este é o “passo indutivo”, abreviado pelo teorema geral. Como, passo a passo, podemos chegar a qualquer proposição a partir da base, todas elas são verdadeiras.

Por fim, apresentemos o Princípio de indução matemática:

Princípio de indução matemática: Suponha que para cada número natural n se tenha uma afirmativa P_n que satisfaça as seguintes propriedades: (i) P_1 é verdadeira; (ii) sempre que a afirmativa for válida para um número natural arbitrário $n = k$, ela será válida para o

¹²⁹ Técnica de Condicionização é uma técnica de demonstração: “Se a proposição a ser demonstrada é condicional $A \rightarrow B$, suponha o antecedente A e tente deduzir o conseqüente B .” (Fossa, 2009, p. 148).

seu sucessor $n = k + 1$ (ou seja, P_k verdadeira implica P_{k+1} verdadeira). Então P_n é verdadeira para todo número natural n .

Podemos traduzir o primeiro item como “O primeiro dominó cai” e o segundo como “Se um dominó cair, ele derrubará o próximo” tal qual no exemplo dos dominós da aula passada.

Da maneira como empreendemos o Problema dos Quadrados e o exemplo dos dominós, pretendemos criar raízes cognitivas (Tall, 1992) mais simples, *imagens de conceito* da Indução, a serem substituídas pela formalização do Princípio. Melhor dizendo, usamos protótipos visuoespaciais tornando-se sucessivamente mais verbais-dedutivos (Tall, 1995), como exposto na Figura 1 (capítulo 4, página 58). O ambiente flexível criado favorece o desenvolvimento dessas raízes (Tall, 1992), que continuam utilizáveis em algum nível cognitivo, consciente ou inconscientemente, para os próximos desafios.

Os exercícios de Princípio de Indução Matemática foram pensados para a aula seguinte. Também, usamos o jogo matemático Torre de Hanói, material manipulável, ou seja, do mundo *corporificado*. Esperamos que os alunos “voltem” para os mundos *corporificados* e *simbólicos* nas atividades da aula seguinte tendo conhecido a Indução Matemática, relacionando seu conceito com seu processo (*proceito*), refletindo mais sofisticadamente sobre as atividades propostas.

5.4 Terceira aula: Exercícios de Indução e Torre de Hanói

No principal fazer da Matemática Acadêmica, produzir provas e demonstrações, os estudantes devem imaginar que existe um “inimigo interno”, uma persona que você precisa convencer. No processo de ensino e aprendizagem desse fazer, o professor também fará esse papel.

Nesta aula, o aluno torna-se mais ativo na produção intelectual e escrita sobre a Indução. O papel do professor nesta aula é de ajudar os alunos a conjecturar e raciocinar matematicamente sobre exercícios e o jogo. Esse papel de acompanhamento é necessário no período-contexto da Transição, ainda mais em um curso rápido que ensaja formalizar uma estratégia de demonstração lógica-dedutiva.

Isto é que o verdadeiro progresso na transição para um pensamento matemático mais avançado pode ser alcançado ajudando os alunos a refletir sobre seus próprios processos de pensamento e a confrontar os conflitos que surgem ao se mover para um contexto mais rico, onde velhas crenças implícitas não mais se sustentam. Tal crescimento intelectual é estimulado por ambientes flexíveis que fornecem raízes

cognitivas apropriadas e ajudam o aluno a construir uma imagem conceitual mais ampla. (Tall, 1992, p. 23, tradução nossa).¹³⁰

A Teoria dos três mundos de Matemática (Tall, 2008) começa pelo mundo *conceitual-corporificado*, que contém a geometria, e o utilizamos nas duas primeiras aulas (diversos exemplos na Lei forte dos pequenos números e Problema dos Quadrados). O segundo mundo, *proceptual-simbólico*, das áreas aritmética e álgebra, utilizamos nas duas primeiras aulas (alguns alunos poderão manipular algebricamente para descobrir a veracidade na Lei forte e construímos a demonstração do Problema dos Quadrados generalizando o problema, a princípio, geométrico-aritmético). O terceiro, o *axiomático-formal*, foi vislumbrado ao final da segunda aula, com a apresentação do Princípio de Indução.

Idealmente, pretendemos com esse processo constituir o Pensamento Matemático Avançado sobre esse assunto nos estudantes. Mas o matemático maduro volta para os mundos *corporificado* e *simbólico* com mais sofisticação do pensamento. Ajustamos para que os alunos fizessem isso nesta terceira aula, com auxílio da Torre de Hanói, um material manipulável geométrico (*corporificado*) que necessita da manipulação algébrica (*simbólico*). Hipotetizamos que eles usarão Indução, ou um raciocínio de recorrência sofisticado pelo aprendizado da aula anterior, para resolver o problema da Torre.

Uma hipótese que consideramos é a utilização de provas pictóricas e algébricas genéricas, pois “fazem mais sentido para os alunos porque davam uma explicação significativa de por que a prova é verdadeira, enquanto a prova formal por indução é mais obscura porque parece usar o resultado da prova” (Tall et al., 2012, p. 27, tradução nossa)¹³¹. Ou seja, os alunos utilizarão mais seus conhecimentos prévios (*met-befores*) – que estão mais consolidados no cognitivo – de Matemática Escolar que o método da Indução Matemática ensinada na aula anterior.

O objetivo dessa aula é que **os alunos exercitem o Princípio de Indução Matemática em um jogo físico (corporificado) e exercícios geométricos, aritméticos e algébricos (simbólicos), que mesclam Matemática Escolar e Acadêmica.** Alguns

¹³⁰ No original: “This is that true progress in making the transition to more advanced mathematical thinking can be achieved by helping students to reflect on their own thinking processes and to confront the conflicts that arise in moving to a richer context where old implicit beliefs no longer hold. Such intellectual growth is stimulated by flexible environments which furnish appropriate cognitive roots and help the student to build a broader concept image.”

¹³¹ No original: “[...] made more sense to the students because they gave a meaningful explanation as to why the proof is true, while the formal proof by induction is more obscure because it seems to use the result of the proof [...]”.

conhecimentos prévios requeridos (*met-befores*) são: manipulações algébricas, ângulos internos a polígonos, operações básicas com frações e divisão euclidiana.

Começamos a aula com o professor fazendo um exercício típico de Indução para que os alunos aprendam a escrita formal.

Exemplo: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solução: Queremos mostrar que a propriedade $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (repare que o próximo número natural depois de $k + 1$ é $k + 2$).

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1), \text{ por hipótese de indução} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Os exercícios abaixo são os que pretendemos seguir para a última aula.

Exercício 1: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Solução: Queremos mostrar que a propriedade $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 = 1^2$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ (hipótese de indução). Devemos provar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (repare que o próximo número ímpar depois de $2k - 1$ é $2k + 1$).

Temos que

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 2 - 1) \\
 &= 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\
 &= k^2 + (2k + 1), \text{ por hipótese de indução} \\
 &= (k + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 2: Encontre as leis gerais sugeridas e, em seguida, demonstre-as por indução:

$$a) \quad 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}, \dots$$

Solução: a lei geral é $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

Queremos mostrar que a propriedade $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 + \frac{1}{2^1} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$, ou seja, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ por hipótese de indução} \\
 &= 2 + \left(-\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \\
 &= 2 + \left(\frac{-2+1}{2^{k+1}} \right) \\
 &= 2 + \left(\frac{-1}{2^{k+1}} \right) \\
 &= 2 - \frac{1}{2^{k+1}}
 \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

$$b) \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \dots$$

Solução: a lei geral é: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

Queremos mostrar que a propriedade $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ vale para todo natural $n > 1$ ¹³². Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 2$, temos $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 2$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 2$, ou seja, $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$.

Temos que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) &= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right), \text{ por hipótese de indução} \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo $n > 1$ número natural, como queríamos demonstrar.

Sierpinska et al. (2008) assinalam que cursos de pré-requisitos, que ensinam Matemática Escolar para ingressantes do Ensino Superior em ritmo acelerado, focam em procedimentos e técnicas, em que a teoria é apresentada resolvendo problemas típicos. De fato, nosso Projeto de Ensino se enquadra nessa ponderação principalmente na apresentação dos exercícios 1, 2 e 5. Entretanto, como não houve uma avaliação escrita, não houve tensionamento para o estudante realizar o Princípio de Indução Matemática com excelência, o que naqueles cursos resultam em frustração.

Exercício 3: Encontre o erro na seguinte “prova” de que em qualquer grupo com n pessoas, todas têm a mesma idade.

Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade.

¹³² Nesse caso a propriedade não vale para $n = 1$, pois isso sugeriria que $(1 - 1)$ seria igual a $1/1$, um absurdo.

Suponha que em um grupo com k pessoas, todas têm a mesma idade.

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ as pessoas em um grupo com $k + 1$ pessoas.

Desde que as pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ e $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ formam grupos com k pessoas, todas elas têm a mesma idade, por hipótese de indução.

Desde que a_2 está contido em cada um destes grupos, segue que todas as $k + 1$ pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma idade.

Solução: o erro é que a hipótese não diz que formar grupos com k pessoas implica que elas têm a mesma idade. A hipótese de indução diz que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ têm a mesma idade.

Exercício 4: Encontre o erro na seguinte “prova” que garante $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 1)(n + 2)$, para todo n número natural.

Se assumirmos que $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = (k - 1)(k + 2)$ para algum k , então

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k - 1)(k + 2) + 2(k + 1)$$

$$= k^2 + k - 2 + 2k + 2$$

$$= k(k + 3)$$

$$= [(k + 1) - 1][(k + 1) + 2]$$

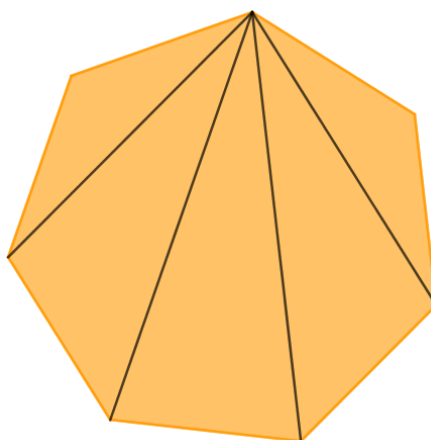
o que significa que sendo verdadeiro para k é verdadeiro para $k + 1$ e, portanto, é verdadeiro para todos os naturais.

Solução: o erro é que faltou provar para o caso $n = 1$, o Caso Base: $2 \cdot 1 = 2 \neq (1 - 1)(1 + 2) = 0$. Logo, a proposição é falsa para “todo n natural”. Porém, para $n = 2$ temos que $2 \cdot 2 = 4 = (2 - 1)(2 + 2)$, portanto a propriedade é válida para todo n natural maior que 1.

Exercício 5: Use indução matemática para provar que todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos.

Solução: desenhos podem ajudar nesta demonstração. Eles nos mostram que um polígono pode ser dividido em $n - 2$ triângulos, cada qual tendo a soma dos ângulos internos igual a 180° , de onde vem essa lei geral. A Figura 14 exibe um polígono de 7 lados dividido em 5 ($= 7 - 2$) triângulos

Figura 14 – Polígono de 7 lados dividido em 5 triângulos



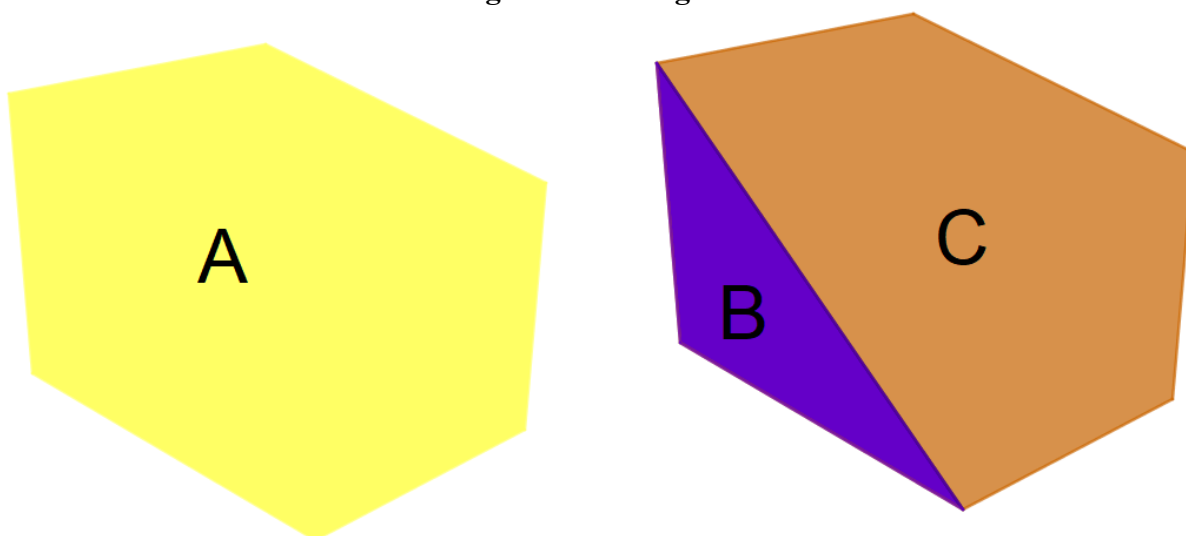
Fonte: elaborado pelo autor

Queremos mostrar que a propriedade “todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos” vale para todo natural $n \geq 3$, já que um polígono deve ter pelo menos três lados. Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 3$, temos $(3 - 2)180^\circ = 180^\circ$ que sabemos ser verdade para o triângulo. Logo, a propriedade é válida para $n = 3$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(k - 2)180^\circ$ é a soma de seus ângulos internos de um polígono com k lados (hipótese de indução). Devemos provar que $(k - 1)180^\circ$ é a soma de seus ângulos internos de um polígono com $k + 1$ lados

Considere um polígono com $k + 1$ lados. Seja A esse polígono arbitrário com $k + 1$ lados. Tome quaisquer três vértices consecutivos desse polígono e desenhe uma linha do primeiro ao terceiro, como mostrado na Figura 15. Isso o dividirá em dois polígonos, B e C , com 3 lados e com k lados, respectivamente.

Figura 15 – Polígonos

Fonte: elaborado pelo autor

A soma dos ângulos internos de A é igual a soma dos ângulos internos de B e soma dos ângulos internos de C. O polígono com k lados (C) tem soma dos ângulos internos igual a $(k - 2)180^\circ$ e o triângulo (B) tem soma dos ângulos internos igual a 180° . Adicionando os dois, temos que $(k - 2)180^\circ + 180^\circ = (k - 1)180^\circ$.

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo $n \geq 3$ número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 6: O que há de errado na demonstração a seguir? Afirmação: Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar.

Além disso, se os k primeiros inteiros forem ímpares, então $k + 1 = (k - 1) + 2 = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$.

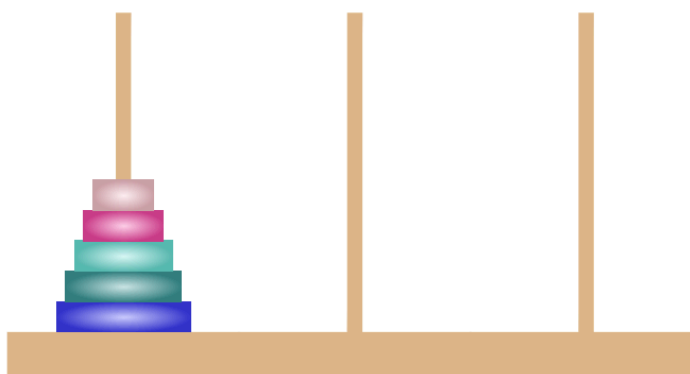
Solução: o erro é que existem números pares alternados com ímpares no conjunto dos números naturais.

Em seguida, utilizamos a Torre de Hanói para retornar as percepções de recorrência. A principal referência foi o livro *A matemática no jogo de Torres de Hanói* (Ferreira; Oliveira, 2023), que é um produto educacional associado a uma dissertação produzida no PROFMAT.

A Torre de Hanói (Figura 16) é um quebra-cabeça individual, que propõe um desafio ao jogador. O número de discos da Torre pode variar, sendo que, quanto mais discos, maior o desafio. O mais simples contém apenas três.

A Torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento e solução de problemas.

Figura 16 – Torre de Hanói com cinco discos



Fonte: Ferreira e Oliveira (2019, p. 22)

Origens: o quebra-cabeça foi divulgado pela primeira vez no Ocidente pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891). Ele teve inspiração de uma lenda para construir o jogo das Torres em 1883. Já seu nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, capital do Vietnã. Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo, situado no centro do universo. Diz-se que Brahma supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e três estacas de diamante equilibradas sobre uma plataforma de latão. Brahma ordenara os sacerdotes que movessem todos os discos de uma estaca para outra seguindo suas instruções. Segundo a lenda, quando todos os discos forem transferidos, o templo desmoronaria e chegaria o fim dos tempos.¹³³

Regras do jogo Torre de Hanói:

- *Mover apenas um disco por vez.*
- *Nunca colocar um disco maior por cima de um disco menor.*

O objetivo é passar todos os discos de uma estaca para outra qualquer, usando uma das estacas como auxiliar.

A proposta da atividade com o jogo é de que os estudantes tentem resolver o problema da Torre de Hanói progressivamente, começando com 3 discos, depois 4 e assim por diante.

¹³³ “[...] são necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para vencê-lo, o que levaria bilhões de séculos para resolver sem pausas.” (Ferreira; Oliveira, 2023).

Eles podem fazer anotações que, no nosso caso da aplicação do Projeto de Ensino, serão analisadas no próximo capítulo.

Durante a realização dos procedimentos acima com a Torre de Hanói, esperamos que os estudantes realizem afirmações matemáticas que não são exatamente formais, mas se aproximam da formalidade usando conceitos *corporificados* e *simbólicos*.

Não é um teorema no sentido matemático formal, é claro, mas é um produto significativo da corporificação humana, que sente uma jornada ao redor de um circuito e acaba olhando para a mesma direção, completando assim uma volta completa. (Tall et al., 2012, p. 20, tradução nossa).¹³⁴

O contexto de ensino da Matemática Escolar aceita mais essas contribuições não formais que o acadêmico (Moreira; David, 2008; David et al., 2013). Esse espaço de experimentação do ato de provar que construímos nesse Projeto de Ensino voltado para a Transição frutifica a confiança em tomar a matemática com as próprias mãos e não como conhecimento “transmitido”.

Depois da experimentação permitida pela dinâmica da Torre de Hanói, o professor pode dialogar com os alunos para chegar à seguinte conclusão:

Afirmção: É interessante observar que o número mínimo de movimentos para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à outra é $2^n - 1$, sendo n número de discos. Logo:

- Para solucionar um Hanói de 4 discos, são necessários pelo menos 10 movimentos.
- Para solucionar um Hanói de 7 discos, são necessários pelo menos 127 movimentos.
- Para solucionar um Hanói de 10 discos, são necessários pelo menos 32.787 movimentos.

A prova dessa afirmação pode ser feita por Indução:

- i) (Caso base) para $n = 1$, ou seja, 1 disco, temos $2^1 - 1 = 1$ movimento transfere o disco para outra estaca, logo a afirmação é válida.
- ii) (Passo indutivo) suponha que, para $n = k > 1$, a afirmação seja válida, ou seja, o número mínimo de movimentos para movimentar os discos segundo as regras explicitadas é $2^k - 1$. Vamos mostrar que o resultado vale para $n = k + 1$. Considere uma Torre de Hanói com $k + 1$ discos. Para transferir todos os discos para outra estaca, precisamos que:

¹³⁴ No original: “It is not a theorem in the formal mathematical sense, of course, but it is a meaningful product of human embodiment, sensing a journey round a circuit and ending up facing the same direction, thus turning through a full turn.”

1) o k discos menores passem para outra estaca (por exemplo, a segunda), e isso pode ser feito com o número mínimo de movimentos $2^k - 1$, por hipótese de indução, a fim de movermos o maior disco para outra estaca (por exemplo, a terceira);

2) o disco maior deve passar para outra estaca (por exemplo, a terceira), e isso pode ser feito com 1 movimento;

3) o k discos menores passem para a estaca onde se encontra o disco maior (por exemplo, a terceira). E isso pode ser feito com o número mínimo de movimentos $2^k - 1$, por hipótese de indução.

Esses três passos totalizam

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \times 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

como número mínimo de movimentos para que $k + 1$ discos passem para outra estaca, como queríamos demonstrar. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a afirmação é válida para todo n natural.

É interessante notar que essa prova por indução também é um passo a passo para a resolução da Torre de Hanói para qualquer número de discos, já que está provado.

Os estudantes serão apresentados a essa demonstração, primeiro de forma visual (*corporificada*) e depois de forma escrita no quadro (*simbólica e formal*).

Tall (1995) explicita que faz parte do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado levar ações a se tornarem simbolizadas como processos encapsulados como *proceitos* (veja na Figura 1, capítulo 4, página 58), o que pretendemos ter feito especialmente na concepção da terceira aula.

Em suma, o Princípio de Indução Matemática, componente da Matemática Acadêmica e demandante do Pensamento Matemático Avançado, foi inspirado por *imagens de conceito*, formalizado por *definições do conceito* e deduções lógicas neste Projeto de Ensino.

6 APLICAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, tratamos das etapas da aplicação do Projeto de Ensino, bem como as análises dessa aplicação. Enquanto investigação, podemos dizer que nossa pesquisa, de caráter qualitativo e exploratório, têm como propósito contribuir para a incipiente (ao menos pelo que vimos na nossa pesquisa para o artigo de revisão) discussão sobre a Transição Ensino Médio-Superior no Brasil. Uma pesquisa exploratória é desenvolvida “com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato” (Gil, 2008, p. 27). Ou seja, buscamos, na perspectiva da teoria cognitiva do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, criar possibilidades metodológicas para o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio, de modo a contribuir e promover reflexões para/sobre a Transição para o Ensino Superior de maneira *mais suave*.

Dessa forma, como características de estudos exploratórios, nossa pesquisa teve seu planejamento sendo moldado ao longo das etapas de apropriação do referencial teórico, articulação entre as teorias estudadas e adaptação de situações/exemplos que contribuíram para a concepção e elaboração do Projeto de Ensino.

Para compreender como nosso projeto caminha ao objetivo delineado, apresentamos detalhadamente toda a caracterização de sua aplicação, seguida de análises descritivas e interpretativas, que levam em consideração aspectos variados relativos ao fenômeno de estudo: o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado e suas relações com o Ensino de Transição.

6.1 Contexto de aplicação: o CEFET-MG

O Projeto de Ensino intitulado *Princípio de Indução Matemática: aproximação com a Matemática Acadêmica* foi desenvolvido no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). A instituição é um ótimo locus para a realização do curso, em virtude da oferta tanto do Ensino Médio Técnico quanto do Ensino Superior, oportunizando aos estudantes o aprimoramento de seus conhecimentos matemáticos, este base para a maioria dos cursos ofertados pela instituição. Também pelo mesmo motivo, nossa pesquisa poderia ter continuidade, analisando como os participantes que prosseguiram no CEFET-MG na

Transição Ensino Médio-Superior tiveram uma transição *mais suave*, pensando em como as propostas na linha desse Projeto de Ensino ajudaram nesse movimento.

Segundo o Relatório de Gestão de 2023 da instituição (CEFET-MG, 2024), o CEFET-MG tem 11 *campi* localizados em 9 municípios de Minas Gerais, Brasil. O relatório destaca o atributo tecnológico e pesquisador da instituição.

O CEFET-MG é uma instituição pública e gratuita de ensino superior no âmbito da educação tecnológica, abrangendo a educação básica, na etapa de ensino médio, e a educação superior, contemplando, de forma indissociada, o ensino, a pesquisa e a extensão. Tem atuação prioritária na área tecnológica e na pesquisa aplicada. (idem, p. 6).

No ano de 2023, a Educação Profissional e Tecnológica de Nível Médio (EPTNM) totalizou 6.846 estudantes, distribuídos entre “38 cursos ofertados na forma Integrada ao Ensino Médio, 18 na forma Concomitância Externa, e 20 na forma Subsequente” (idem, p. 41).

Sobre o ensino de graduação, o relatório contabiliza 26 cursos de graduação em 10 *campi* e 6008 alunos matriculados. Através do Sistema de Seleção Unificada (SISU), plataforma digital na qual instituições públicas de Ensino Superior disponibilizam vagas para participantes do Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM), o CEFET-MG disponibiliza 1644 vagas para o ingresso na graduação anualmente (idem, p. 20).

No âmbito da pós-graduação, em 2023 o CEFET-MG contava com sete cursos de doutorado, 14 programas de pós-graduação *stricto sensu*, dez cursos de mestrado acadêmicos e quatro mestrados profissionais, dentre eles o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Na época, eram “1.472 alunos matriculados nos cursos de mestrado e doutorado, sendo: 561 matrículas de alunos regulares (437 de mestrado; e 124 de doutorado); e 911 matrículas de alunos especiais (807 de mestrado; e 104 de doutorado)” (idem, p. 50).

Os dados numéricos supracitados demonstram a importância do CEFET-MG na oferta de ensino público, gratuito, inclusivo e de qualidade em diversos níveis no Estado de Minas Gerais. As três dimensões de ensino ofertadas, secundário, graduação e pós-graduação, têm uma síntese nesta dissertação de mestrado sobre a Transição Ensino Médio-Superior.

6.2 Etapas para a organização do projeto

O nome da escola está em evidência porque se trata de um Projeto de Ensino realizado seguindo os documentos orientadores da instituição e que foi aprovado pela Diretoria de

Educação Profissional Tecnológica (DEPT), ou seja, com a anuência do CEFET-MG, gerando, inclusive, certificação. Isso implica que os modelos de documentos elaborados para o Projeto de Ensino (incluindo os materiais usados para coletar os dados da pesquisa) trazem a logo da instituição. Também, julgamos pertinente colocar o nome da Instituição. O projeto foi realizado no contexto do CEFET-MG no campus Nova Gameleira, Belo Horizonte/MG, por questões logísticas.

As etapas para a organização do projeto foram:

- Divulgação do Projeto de Ensino

Para a divulgação das inscrições para os alunos do Ensino Médio Técnico Integrado (ou Educação Profissional Técnica de Nível Médio – EPTNM) e criação de mecanismos para o cadastramento de estudantes de interesse, enviamos um questionário (Apêndice B) para os secundaristas perguntando sobre suas experiências e perspectivas acadêmicas. O intuito era selecionarmos alunos com aspiração de continuidade na área de Ciências Exatas no Ensino Superior. Os questionários foram enviados por meio da coordenação dos cursos técnicos e ficaram disponíveis para respostas durante o período de cinco dias.

Destinamos o questionário a todos os alunos do Ensino Médio, no período-contexto de Transição (Gueudet, 2008). Ainda nessa etapa, após análise dos 45 questionários respondidos, 36 estudantes foram selecionados. Uma caracterização mais detalhada sobre esses estudantes será dada na próxima seção intitulada “Sujeitos da pesquisa”.

Apesar de o Projeto de Ensino aprovado pelo CEFET ter como referência 30 estudantes, selecionamos para o curso um número maior, 36, prevendo possíveis desistências. O que realmente aconteceu, como detalharemos no próximo capítulo, é que a frequência média das três aulas foi de 30 alunos, tal como prevíamos.

- Elaboração e gerenciamento dos materiais de suporte

Preparamos os seguintes materiais de suporte do Projeto de Ensino: listas de situações, apresentações em *slides* e jogo Torre de Hanói.

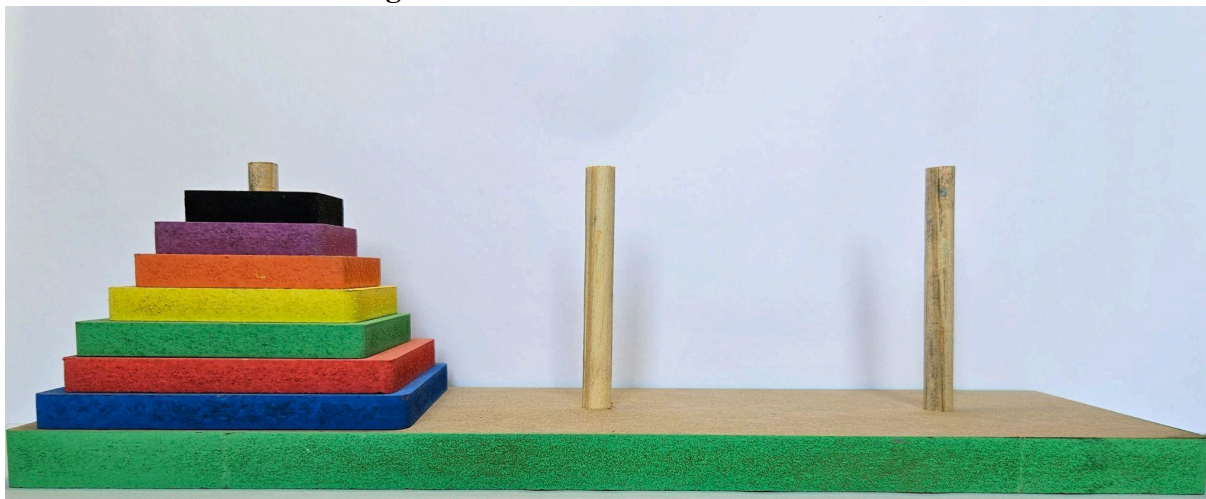
Produzimos listas de situações (Apêndice C) com o intuito de serem protocolos de pesquisa. Nelas os alunos elaboraram suas produções discursivas em linguagem escrita matemática, para avaliarmos suas aproximações com a linguagem formal da Matemática Acadêmica. Para todas as aulas, foi disponibilizado uma folha com exclusivamente uma das situações para que cada aluno escrevesse na folha o raciocínio empreendido.

Elaboramos os *slides* suporte para as três aulas (Apêndice D). A comunicação visual e célere dos *slides* e a vantagem de não escrever na lousa durante os momentos de exposição

foram os principais motivos para essa escolha. Essa dinâmica proporciona mais tempo de contato visual do professor com os alunos e, conseqüentemente, o diálogo entre eles.

Para a realização da Terceira Aula, resolvemos adquirir uma Torre de Hanói para cada um dos participantes do curso manipular e pensar na resolução do problema. Assim, adquirimos 36 Torres de Hanói para o Projeto de Ensino como as da Figura 17.

Figura 17 – Torre de Hanói utilizada



Fonte: elaborado pelo autor

- Criação e gerenciamento de um arquivo com os protocolos de pesquisa

Organizamos um arquivo físico com os protocolos de pesquisa para fazermos a análise dos resultados. Por questões de ética de pesquisa, omitimos os nomes dos sujeitos da pesquisa na escrita da dissertação. Em vez de proferir os nomes, intitulamos cada participante (e a escrevemos nas suas listas de situações entregues) com uma letra do alfabeto, de A até Z, além de A1, B1, C1 e D1, pois tivemos 30 estudantes frequentes, para mencionar suas produções nos protocolos de pesquisa na seção 6.3 (Análise de resultados).

- Assumir ações de logística para realização das três aulas

Com o intuito de preservar um ambiente semelhante ao das aulas regulares dos estudantes selecionados para o projeto, reservamos, junto à diretoria do Campus Nova Gameleira, uma sala de aula convencional equipada com projetor, a mesma onde os estudantes cursam as disciplinas do Ensino Médio.

As aulas aconteceram aos sábados pela manhã, das 10:00 às 12:00, nos dias 18/01/2025 (primeira aula), 25/01/2025 (segunda aula) e 01/02/2025 (terceira aula). Essa escolha se deu para não atrapalhar a rotina de aulas diárias dos alunos. Apesar de o Projeto de

Ensino parecer ter sido aplicado no período de férias escolares, houve uma greve no ano anterior, mudando o calendário da instituição e nos fazendo repensar a logística da aplicação.

- Emissão do relatório de desempenho e certificado de participação dos estudantes

Conforme resolução dos Projetos de Ensino realizados no âmbito do CEFET-MG (CEFET-MG, 2014) após sua realização é necessário a escrita de um relatório, explicitando como foi sua execução, principalmente sobre o envolvimento e desempenho dos estudantes. Conforme divulgamos, todos os estudantes que frequentaram as três aulas ganharam certificado de participação.

6.3 Análise dos resultados

Nesta seção, apresentamos a análise dos resultados do Projeto de Ensino. Primeiramente, revelamos os sujeitos da pesquisa, descrevendo quem são os participantes selecionados para participar pelo critério mencionado: secundaristas que expressaram a vontade de adentrar um curso da área de Exatas no Ensino Superior. Essa exposição é fundamental para a parte seguinte da seção, as análises aula a aula das repercussões das atividades propostas nesses sujeitos.

6.3.1 Sujeitos da pesquisa

Conforme relatado, selecionamos 36 alunos para participar do Projeto de Ensino, via questionário com as perguntas cujas respostas serão mostradas a seguir. O foco da seleção eram alunos com intenção de cursar graduação na área de Ciências Exatas e que estavam no período-contexto de Transição, ou seja, dois anos antes do término do Ensino Médio (Gueudet, 2008). Selecionamos alunos dos 1º, 2º e 3º anos; a justificativa para escolher alunos do 1º ano é que o projeto foi executado em janeiro e fevereiro de 2025 e estes haviam entrado no Ensino Médio em fevereiro de 2024 com término do ano letivo previsto para fevereiro de 2025 por conta de uma greve na instituição.

Os alunos selecionados para participarem do projeto preencheram os Termos de Assentimento e Consentimento, seguindo as especificações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP). O Termo de Assentimento (Apêndice E), tal como na Resolução nº 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde (CNS), foi assinado pelos estudantes menores de idade, considerando a data do início do Projeto de Ensino (Brasil, 2012). O Termo de Consentimento foi assinado por um responsável legal pelos estudantes menores de idade

(Apêndice F) ou pelos estudantes maiores de idade (Apêndice G), também considerando a data do início do Projeto de Ensino (Brasil, 2012).

Primeiro, como fizemos o Projeto de Ensino em uma instituição educacional de Ensino Médio e Técnico, é importante fazer a análise do quantitativo de estudantes inscritos por curso técnico e por ano escolar, como visto no Tabela 1.

Tabela 1 – Análise quantitativa dos cursos técnicos dos sujeitos da pesquisa por ano escolar

Curso técnico	Quantidade de estudantes no 1º ano	Quantidade de estudantes no 2º ano	Quantidade de estudantes no 3º ano
Edificações	2	0	0
Eletrônica	2	8	0
Eletrotécnica	6	3	0
Equipamentos Biomédicos	1	0	0
Informática	2	2	0
Mecatrônica	0	1	0
Química	0	2	2
Redes de Computadores	0	1	4
TOTAL	13	17	6

Fonte: elaborado pelo autor

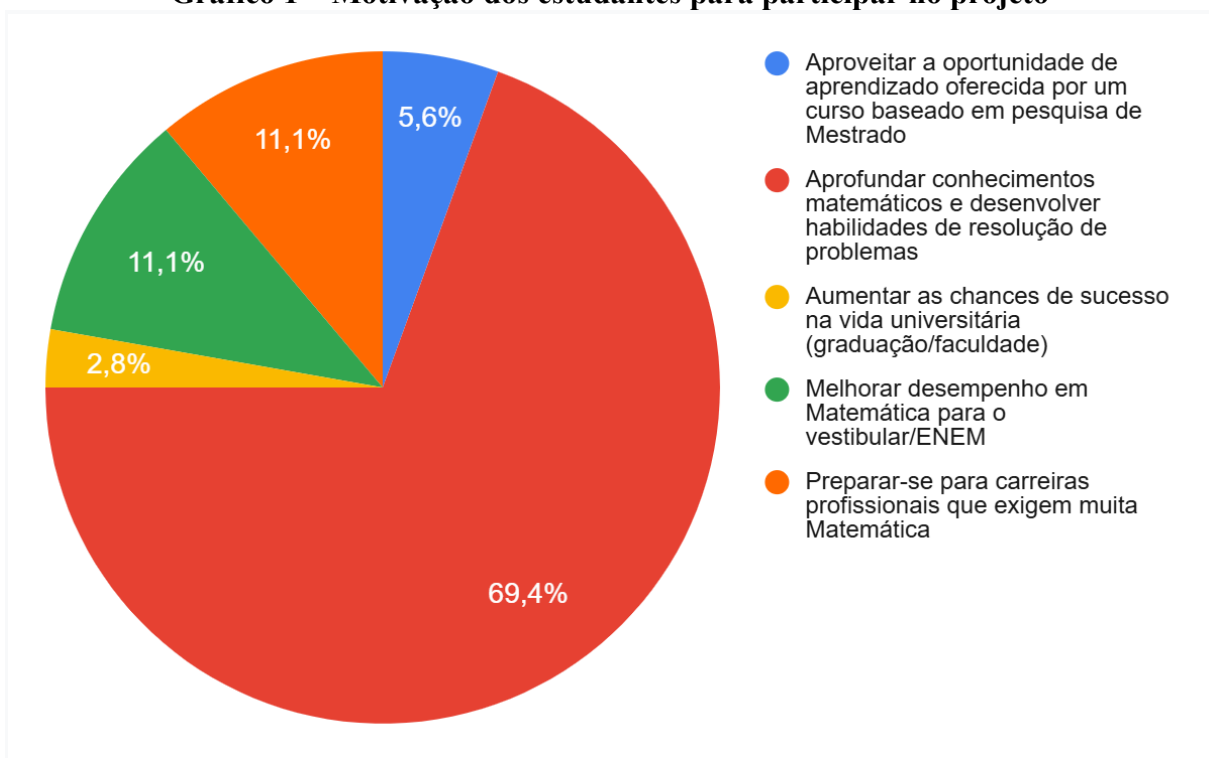
O Projeto de Ensino não contou com estudantes dos cursos técnicos Eletromecânica, Estradas, Hospedagem, Mecânica, Meio Ambiente e Trânsito. Também, notamos que houve baixa adesão dos alunos do terceiro ano, sendo que o segundo ano sobressaiu. Provavelmente, os alunos do terceiro ano já estão decididos em relação ao curso de graduação (vale lembrar que o Projeto de Ensino ocorreu na época do SISU de 2025, de 17 a 21 de janeiro). Portanto, para os concluintes do Ensino Médio um projeto para *estimular* a escolha de uma área de conhecimento específica, no caso, a Matemática, pode ser menos atraente em comparação com um aluno do segundo ano, ainda aberto a projetos que o fazem experimentar essas áreas para tomar uma decisão.

Uma pergunta que fizemos aos interessados foi: “Por que você está interessado em participar do curso?” As respostas disponibilizadas para marcação e os resultados foram:

- Aproveitar a oportunidade de aprendizado oferecida por um curso baseado em pesquisa de Mestrado - 2 alunos (5,6%);
- Aprofundar conhecimentos matemáticos e desenvolver habilidades de resolução de problemas - 25 alunos (69,4%);
- Aumentar as chances de sucesso na vida universitária (graduação/faculdade) - 1 aluno (2,8%);
- Melhorar desempenho em Matemática para o vestibular/ENEM - 4 alunos (11,1%);
- Preparar-se para carreiras profissionais que exigem muita Matemática - 4 alunos (11,1%).

As respostas para a pergunta acima estão expostas no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Motivação dos estudantes para participar no projeto



Fonte: elaborado pelo autor

Esses alunos selecionados do CEFET-MG anseiam por aprofundar em matemática ou, em segundo lugar, aprender a matemática das profissões. Essa é a inclinação da instituição, ou seja, esses participantes estão no perfil clamado pelo CEFET-MG. Salientamos que, no Ensino Superior, dos 26 cursos de graduação, 19 são Engenharias. À vista disso, os

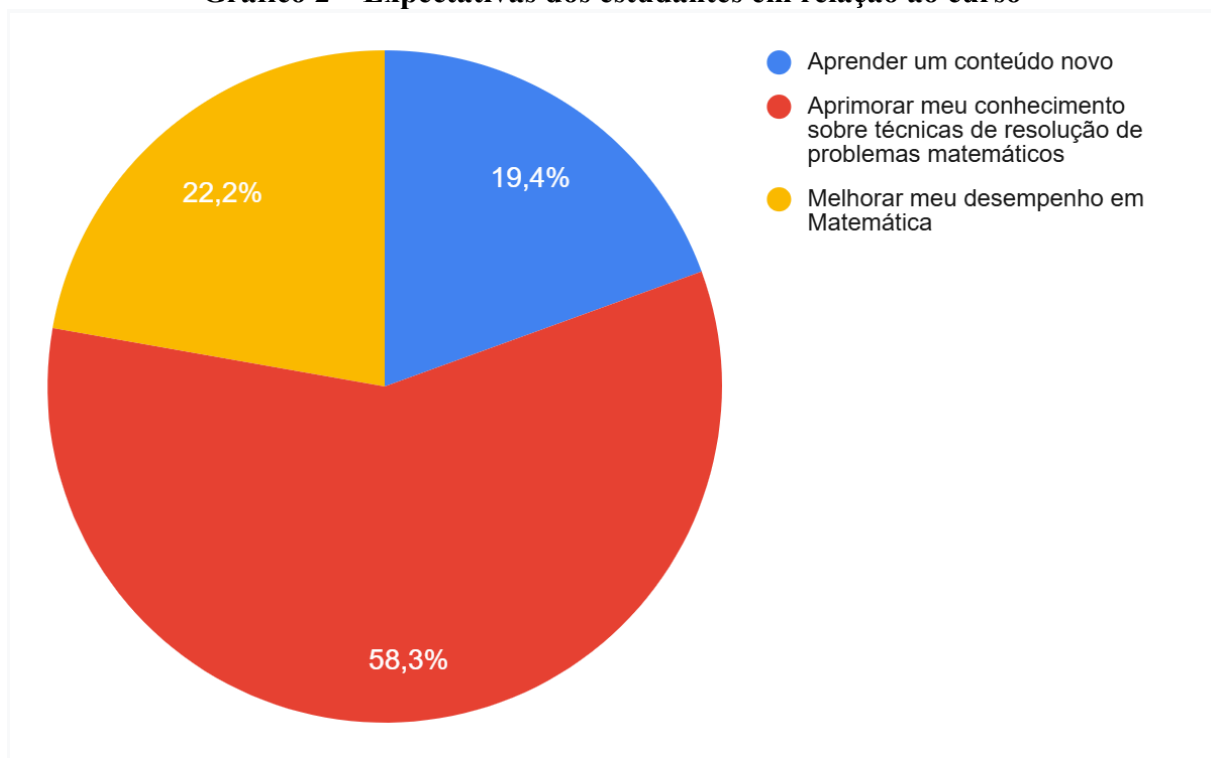
participantes têm potencial para fazer a Transição Ensino Médio-Superior dentro do CEFET-MG. Supomos que essa Transição sem mudança institucional pode ser *mais suave*.

Outra pergunta que fizemos aos inscritos interessados foi: “Quais são suas expectativas em relação a este curso de Indução?” As respostas disponibilizadas para marcação e os resultados foram:

- Aprender um conteúdo novo - 7 alunos (19,4%);
- Aprimorar meu conhecimento sobre técnicas de resolução de problemas matemáticos - 21 alunos (58,3%);
- Melhorar meu desempenho em Matemática - 8 alunos (22,2%).

As respostas para a pergunta acima estão expostas no Gráfico 2.

Gráfico 2 – Expectativas dos estudantes em relação ao curso



Fonte: elaborado pelo autor

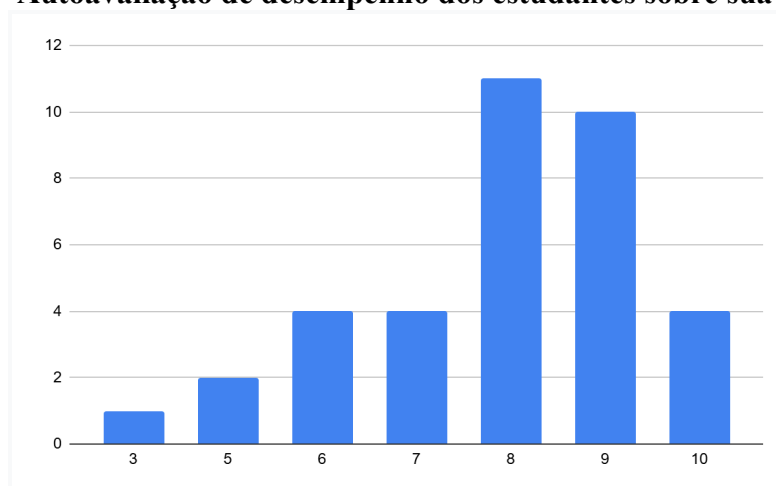
Observe que para aquela questão sobre motivações e essa sobre expectativas, as respostas se alinharam, mostrando uma coerência dos estudantes entre os itens. Novamente, esses participantes querem mais “conteúdo de matemática”, mais “técnicas de resolução de problemas” ou “habilidades de resolução de problemas”. Veem a matemática como algo da prática, do cotidiano, da profissão, com utilidade, talvez pelo emprego desse conhecimento nos seus cursos técnicos.

Também, perguntamos “Em uma escala de 1 a 10, com 1 sendo o desempenho ruim e 10 desempenho excelente, como você avaliaria seu desempenho na disciplina Matemática durante sua vida escolar?” As respostas disponibilizadas para marcação foram números de 1 a 10 e os resultados foram:

- 3 - 1 aluno (2,8%)¹³⁵;
- 5 - 2 alunos (5,5%);
- 6 - 4 alunos (11,1%);
- 7 - 4 alunos (11,1%);
- 8 - 11 alunos (30,6%);
- 9 - 10 alunos (27,8%);
- 10 - 4 alunos (11,1%).

As respostas para essa pergunta estão no Gráfico 3 abaixo.

Gráfico 3 – Autoavaliação de desempenho dos estudantes sobre sua vida escolar



Fonte: elaborado pelo autor

O perfil corrente dos alunos selecionados é de alto desempenho na disciplina escolar matemática. Reconhecemos que é o perfil apropriado para o ingresso em um curso que versa sobre a Matemática Acadêmica, um passo adiante da Matemática Escolar. Levando isso em conta, é proveitoso ter um perfil de aluno com sucesso escolar para comportarem cognitivamente esse passo, que eles mesmo estão demandando como visto nas respostas das perguntas anteriores.

¹³⁵ Selecionamos essa estudante porque ela disse ser seu objetivo “conseguir uma faculdade de engenharia ou psicologia”. Essa dúvida chamou a nossa atenção e cremos que o Projeto de Ensino poderia ajudá-la nessa escolha, avistando brevemente a Matemática Acadêmica e identificar se é compatível com sua personalidade.

Ademais, perguntamos aos interessados: “Você já participou de algum curso de Matemática fora da escola anteriormente? Se sim, descreva sua experiência.” O resultado foi que 22 (61,1%) interessados afirmaram que fizeram cursos de matemática, principalmente relacionados à preparação para olimpíadas de matemática, matemática avançada, orientação de estudos e reforço escolar, e 14 (38,9%) afirmaram que nunca participaram de um curso extracurricular de matemática. Delineando o perfil usual do participante do projeto, é um estudante com sucesso em Matemática Escolar e que busca projetos que a transcendem, como o Projeto de Ensino que formulamos.

Principalmente, perguntamos “Quais são seus objetivos acadêmicos e profissionais a longo prazo?” Seleccionamos alunos com desejo de continuar sua jornada acadêmica em cursos da área de Ciências Exatas. As respostas foram: 11 (30,6%) disseram que querem cursar Engenharias, 4 (11,1%) disseram que querem cursar Matemática, 2 (5,5%) disseram que querem cursar Ciência da Computação, 1 (2,8%) disse que quer cursar Física, 1 (2,8%) disse que quer cursar Ciência de Dados, 5 (13,9%) disseram que querem cursar algum curso na área de Exatas, e muitos escreveram que querem continuar estudando e se aprimorando em matemática. As respostas das perguntas objetivas anteciparam que muitos desejam ingressar na área de Exatas no superior, tal como verificado nessa questão discursiva.

Em verdade, alguns estudantes já tiveram um treinamento sobre o Princípio de Indução Matemática para realizar provas olímpicas de matemática. Incluímos estes no Projeto de Ensino por dois motivos. Em primeiro lugar, averiguamos com os professores do treinamento que ele era focado em “saber fazer” o método em vez de dar uma base matemática lógica que o validasse, o que, em nossa proposta, fizemos com base em *imagens de conceito*. Segundamente, na perspectiva do Pensamento Matemático Avançado, queríamos abarcar alunos de diferentes níveis, dos que nunca ouviram falar aos que já realizavam o método sem saber o porquê de ele funcionar. O questionário de avaliação, enviado para os participantes após as aulas, contém uma pergunta sobre conhecimentos prévios e a maioria disse que o Projeto contém conteúdos nunca vistos por eles¹³⁶.

Em geral, o aluno selecionado para participar do Projeto de Ensino afirmou ter bom desempenho na Matemática Escolar, busca por iniciativas que o façam aprender matemática além da escola, quer ingressar no Ensino Superior na área de Exatas e está cursando meados do Ensino Médio. Isto posto, analisemos como foi a aproximação desses estudantes para com as aulas planejadas para esse Projeto de Ensino.

¹³⁶ Veja na seção 6.5 a análise completa de suas respostas.

6.3.2 Análise da primeira aula

Esta aula, conforme já dito, foi planejada com uma duração de duas horas. Nesta aula tivemos 31 estudantes presentes dos 36 inscritos. Adotamos uma dinâmica de livre escolha para os estudantes se organizarem em grupos, duplas ou individualmente, o que não prejudicaria nossas análises. O resultado foi dois grupos com sete estudantes, seis duplas, um quarteto e um fez individualmente.

Concebemos essa aula tendo ciência que uma consequência da aquisição de um *conceito cristalino* é a capacidade mental de representar o possível e prever o impossível de um problema matemático. Hipotetizamos que essa avaliação pertencente ao Pensamento Matemático Avançado não seria típica dos participantes, dado seu nível de ensino. Entretanto, testamo-lá nos exercícios da Lei forte dos pequenos números (Guy, 1988) vigorosamente.

Observamos as aproximações dos estudantes com as situações propostas para classificar seus pensamentos em manifestações verbalizadas e escritas em qual tipo de infinito estão localizados. Tall (1992) revela que “existe mais de uma noção de infinito” (p. 17, tradução nossa)¹³⁷ e, baseado no trabalho de Sierpinski, podemos classificar três tipos de pessoas:

- Infinitistas inconscientes (*unconscious infinitists*): são indivíduos que dizem “infinito” enquanto pensam em algo “muito grande”. Confundem o limite com um último grande número positivo (ou negativo) de uma sequência. Alguns são mais receptivos às mudanças dinâmicas de valores dos termos. O último valor nem sempre tende ao infinito, ele pode tender a algum número pequeno e conhecido.
- Infinitistas conscientes (*conscious infinitists*): são indivíduos que entendem o infinito como algo metafísico, difícil de entender com definições precisas. Para estes, se a matemática deve ser uma ciência exata, então deve-se evitar falar sobre infinito e falar apenas sobre números finitos. Ao formular leis gerais, usam letras denotando números finitos concretos, mas arbitrários. Na descrição do comportamento de sequências, o mais importante é caracterizar o n -ésimo termo escrevendo a fórmula geral. Para um dado n , pode-se então calcular o valor exato do termo ou pode-se dar uma aproximação desse valor.
- Infinitistas cinéticos (*kinetic infinitists*): são indivíduos que entendem a ideia de infinito conectada com a ideia de tempo. Podem ser potencialistas (*potentialist*): para pensar em algum todo, um conjunto ou uma sequência, é preciso percorrer em

¹³⁷ No original: “There is more than one notion of infinity.”

pensamento por cada elemento dele. É impossível pensar dessa forma em um número infinito de elementos. A construção de um conjunto ou sequência infinitos nunca pode ser concluída. O infinito existe apenas potencialmente. Podem ser potencial atualistas (*potential actualist*): dão um “salto para o infinito” em pensamento: o infinito pode potencialmente ser finalmente atualizado. Para ambos, o importante é ver como os termos da sequência mudam, se há uma tendência de se aproximar de algum valor fixo. Para potencialistas, mesmo que os termos de uma sequência se aproximem cada vez mais de modo a diferir menos do que qualquer valor dado, eles nunca o alcançarão. Já potencial atualistas pensam teoricamente que os termos o alcançarão no infinito.

Após um tempo estipulado de uma hora e meia, exibimos as “respostas corretas” dessas situações por meio do *slide* (Apêndice C). Os estudantes escreveram suas produções matemáticas em folhas brancas com cada enunciado impresso.

No nosso planejamento, determinamos que os alunos fariam as 10 situações em 1 hora. Anteriormente à aula, pensamos que eles indicariam se eram “verdadeiras” ou “falsas” em pouco tempo e escreveriam no protocolo os motivos pelos quais acreditavam intuitivamente nestas respostas. Entretanto, alguns estudantes mais profícuos quiseram escrever a prova matemática para algumas situações, o que levou mais tempo para analisarem as situações. Percebemos isso logo na primeira situação.

Entregamos uma situação por vez. Passados 12 minutos, disponibilizamos a segunda situação e estabelecemos este tempo para cada situação. Sendo assim, dado nosso tempo limitado, escolhemos entregar as situações 1, 2, 5, 7, 9 e 10. Escolhemos as duas iniciais, de aritmética, a 5 e a 7 porque eram de geometria – porque esses dois conteúdos são pertencentes aos mundos *simbólico* e *corporificado*, respectivamente, bases para o *formal-axiomático* – e a 9 e a 10 pois são as únicas verdadeiras e podem ser provadas pelo Princípio de Indução Matemática. Excluímos as questões 3, 4, 6 e 8 por também serem de aritmética. A seguir, analisemos uma a uma, explorando as narrativas e produções escritas nos protocolos de pesquisa.

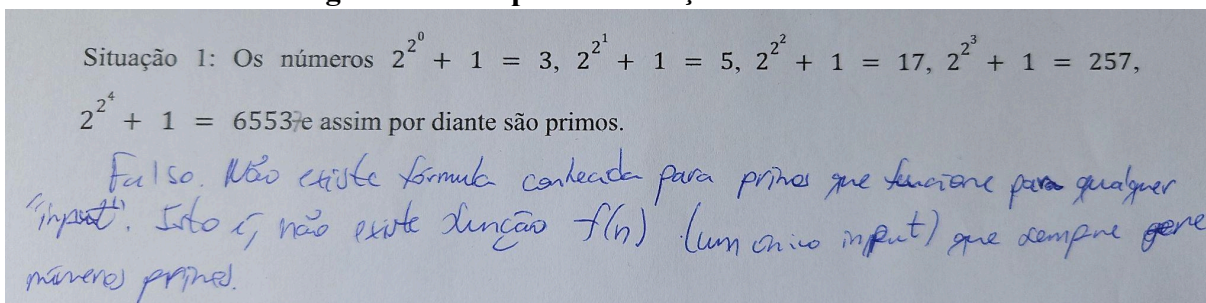
Nossa análise tem viés interpretativo, já que interpretamos ou explicitamos, tendo por base posicionamentos influenciados pelo campo teórico que fundamentam nossa pesquisa e o próprio planejamento do Projeto de Ensino. Além disso, trazemos uma avaliação, julgando o conteúdo expresso nos protocolos que extrapolam o verbalizado, o que permite outras reflexões que não as diretas. Além dos protocolos, durante as aulas o professor/pesquisador fez anotações dos comportamentos dos estudantes e de suas falas ao longo do

desenvolvimento das atividades e manteve um diário de bordo com essas anotações para auxiliar nas análises.

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.¹³⁸

O Aluno A lembrou e verbalizou que “não existe fórmula para números primos [...]”. Partindo da premissa que não existe fórmula, é falso” e o seu grupo passou um tempo discutindo isso, mas os outros integrantes não tinham certeza dessa afirmação. Sua resposta (Figura 18) utiliza a palavra “input”, termo técnico da área de ciências da computação que quer dizer “entrada”. É interessante notar que ele utiliza seus conhecimentos, provavelmente proveniente das aulas do seu curso técnico, para redigir uma resposta matemática. À vista disso, sua resposta se apoiou em dois *met-befores*: conhecimento técnico computacional e matemático.

Figura 18 – Resposta à situação 1 do Aluno A



Fonte: dados da pesquisa

O Aluno B tentou aplicar o método de Indução na situação 1, mas pensou em provas falando somente sobre o passo indutivo: “indução é assim: se vale para x, valerá para x+1”. Nesse caso, ele entende o Princípio de Indução Matemática como um *pré-procedimento* (consegue performar alguns, no caso um, passo de um problema de rotina, obtendo uma solução parcial). Entretanto, esse raciocínio não apareceu em sua resposta escrita (Figura 19), provavelmente pois foi convencido pela afirmação do Aluno A de seu grupo.

¹³⁸ Tivemos um erro de digitação na situação 1: faltou o último 7 nos exemplos.

Figura 19 – Resposta à situação 1 do Aluno B

Situação 1: Os números $2^2 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^2 + 1 = 17$, $2^2 + 1 = 257$, $2^2 + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.

~~$2^2 + 1 = 2^{16} \cdot 2^{16} + 1$~~

~~$6552 \cdot 6552 = 42807704$~~

~~$42807704 + 1 = 42807705$~~

~~$42807705 : 5 = 8561541$~~

Falso. Não existe uma fórmula específica que pode encontrar números primos até o infinito.

Fonte: dados da pesquisa

Isso nos mostra que o curso que fizeram sobre Indução não foi tão efetivo para o Aluno B. Não passou da etapa *pré-procedimento* da escala de compreensão (veja a Figura 4, capítulo 4), que segue pelas etapas *procedimento*, *multi-procedimento*, *processo* e *proceito*. Também, não teve confiança no método a ponto de escrevê-lo e se apoiou nas ideias do colega.

O Aluno C afirmou que “tem que achar um caso que não é primo”, demonstrando o entendimento do que é um contraexemplo, mas também confiou na afirmação do Aluno A (Figura 20). Dado esses dois casos, percebemos que a matemática para esses alunos é quase como um exercício de convencimento sem considerar a base lógica. Confiam numa figura de autoridade, outro aluno que diz “eu sei”, mais do que nos seus caminhos de raciocínio, os dois válidos matematicamente. Isso nos faz pensar que o estudante da sala de aula confia na veracidade da exposição do professor em vez de acompanhar seu caminho lógico, que é imperativo no ensino de matemática, para compreender a veracidade.

Figura 20 – Resposta à situação 1 do Aluno C

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos. I I I I I V

$2^1 + 1 = 3$
 $2^2 + 1 = 5$
 $2^4 + 1 = 17$
 $2^8 + 1 = 257$
 $2^{16} + 1 = 65537$
 $2^{32} + 1 =$

É falsa, pois, teoricamente, ainda não foi encontrada uma fórmula, na qual é possível encontrar os números primos.

$2^{16} = 65536$

2^{32} 3 3 2 31
 65536
 × 65536
 393216
 8

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno D sabe que é falso, já ouviu falar dos primos de Mersenne, chave para a resposta. Entretanto, não sabe o número que é o contraexemplo dessa situação. De fato, o número $2^{32} + 1$ não é fácil de verificar se é primo ou não. Ele divide os números primos de Mersenne em “primos” e “primos compostos”, uma contradição matemática: um número ou é primo ou é composto, e não há interseção. Enuncia uma chamada “indução fraca” e não mostra o valor de n que a “desfaz”, nas suas palavras (Figura 21).

Figura 21 – Resposta à situação 1 do Aluno D

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.

Falsa, a expressão $2^{2^n} + 1$, para $n \in \mathbb{N}$, é um primo de Mersenne. Todo primo de Mersenne é primo ou primo composto, mas nem sempre é um número primo como diz a afirmação. É uma indução fraca que se desfaz após alguns valores n .

$$2^{32} + 1 = 4^{16} + 1 = 16^8 + 1 = 256^4 + 1 = 65536^2 + 1 = 4272967297$$

$$\begin{array}{r} 2^{218} \\ 65536 \\ 65536 \\ \hline 393216 \\ 1966080 \\ 30768000 \\ 307680000 \\ 3932160000 \\ \hline 4272967296 > 4272967297 \end{array}$$

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno E citou que o “ n tende ao infinito”. Podemos especular que, para esse aluno, os números primos não podem ter um “valor alto”. Sendo assim, acredita que os primos são números pequenos, portanto não são infinitos. Além disso, essa resposta pode configurá-lo como um *infinitista inconsciente* (Tall, 1992), pois sua produção discursiva pode revelar que o Aluno E acredita que existe um único “resultante” (um único resultado) para o cálculo de $2^{2^n} + 1$ quando “ n tende ao infinito”. Diz “infinito” enquanto pensa em algo muito grande (Figura 22).

Figura 22 – Resposta à situação 1 do Aluno E

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.

Falso

a situação em que $2^{2^m} + 1 = \text{primo}$ e falso pois quando m tende ao infinito, o resultado será um valor alto demais para ser um primo

Fonte: dados da pesquisa

Muitos estudantes utilizaram o raciocínio de observar o algarismo das unidades para saber se um número era primo ou não. Mostravam que a potência de 2 resultava em um número par sempre e, quando somada a um, tornava-se um número ímpar. Isso indicaria que o

número poderia ser primo e alguns escreveram que isso já era suficiente para o número ser primo: ser ímpar. Esse argumento somou-se a outros critérios de divisibilidade conhecidos, como vemos na resposta da Aluna F (Figura 23).

Figura 23 – Resposta à situação 1 da Aluna F

Situação 1: Os números $2^2 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^2 + 1 = 17$, $2^2 + 1 = 257$,
 $2^2 + 1 = 65537$ assim por diante são primos.

Verdadeiro, pois ao somar o número um, o número se torna ímpar, não sendo mais divisível por 2 e todos os seus múltiplos

$2^2 = 2^4 = 2^8 = 256$. $256 = 65536 + 1 = 65537$ (não divisível por 2; 3; 5 e 10 e seus múltiplos)

Para um número originado de uma potência de 2 ser divisível por 3, o número 2 precisa ser elevado a um número ímpar $2^2 = 2^1 + 1 = 3$; $2^3 + 1 = 9$, $2^5 + 1 = 33$, porém o 2 elevado a uma potência de 2, resultará em número par.

Do 2^2 em diante o número sempre resultará em 6 no final, mais 1, 7 no final, não sendo divisível por 2; 3; 5; 10 e seus múltiplos

	$\begin{array}{r} 33 \\ 256 \\ \times 256 \\ \hline 1536 \\ + 1280 \\ \hline 512 \\ + 65536 \\ \hline 65537 \\ \hline 11161926 \end{array}$
--	---

Fonte: dados da pesquisa

Um grupo chegou à conclusão que toda potência de 2, após $n = 4$, sempre teria o número 6 no algarismo das unidades e, quando somada ao um, tornava-se 7. Também, acreditavam que o número 7 no algarismo das unidades indicava que o número era primo. Isso pode indicar uma “lei forte dos pequenos números”: os números 7, 17, 37, 47, 67, 97, são primos, então todos os números com final 7 são primos. Veja as respostas de dois alunos desse grupo, G e H (Figuras 24 e 25, respectivamente)

Figura 24 – Resposta à situação 1 do Aluno G

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$,
 $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.

$2^{2^n} + 1 = X$, X é primo.

~~Falso~~ Verdadeiro, pois quando $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$ em 2^{2^n} o nº terminara em 6, somando 1, terminara em 7. Logo com que o nº seja primo, pois todo número terminado em 7 não divisível por 3 e 9, é primo.

Fonte: dados da pesquisa

Figura 25 – Resposta à situação 1 do Aluno H

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$,
 $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.

$2^{2^0} = 2^1 = 2 \rightarrow 2+1=3$
 $2^{2^1} = 2^2 = 4 \rightarrow 2 \cdot 2$
 $2^{2^2} = 2^4 = 16 \rightarrow 4 \cdot 4$
 $2^{2^3} = 2^8 = 256 \rightarrow 16 \cdot 16$
 $2^{2^4} = 2^{16} = 65536 \rightarrow 256 \cdot 256$

$2^{2^5} = 2^{32} \rightarrow \dots 6$

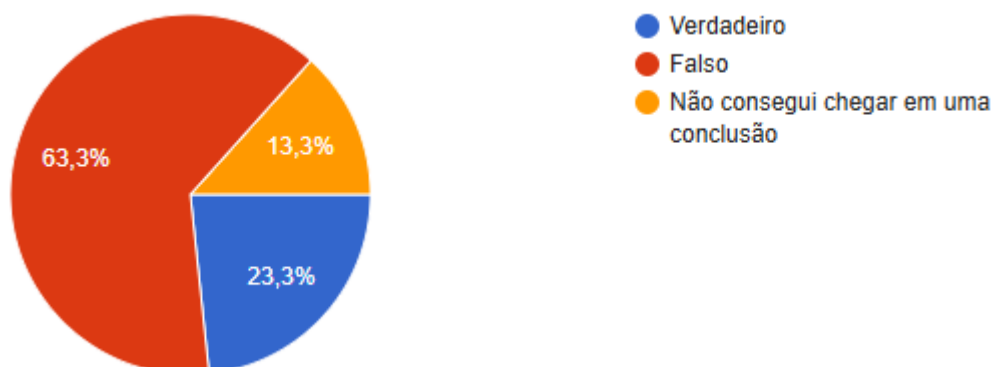
Com a soma do número 1 o resultado sempre será ímpar, descartando a possibilidade de ser divisível por 2.

Daqui em diante todas as potências de base 2 terminarão em 6, logo, o número resultante terminará em 7, descartando assim, a possibilidade de ser divisível por 5 ou 13.

$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 160 \\ \hline 256 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 256 \\ \times 256 \\ \hline 1280 \\ 51200 \\ \hline 65536 \end{array}$
---	--

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos estudantes intuiu que a situação 1 era falsa (63,3% ou 19 estudantes), 7 estudantes (23,3%) intuíram que era verdadeiro e 4 estudantes (13,3%) não conseguiram chegar em uma conclusão (confira a Gráfico 4).

Gráfico 4 – Resposta à situação 1 dos estudantes

Fonte: dados da pesquisa

Vejamos os resultados da situação 2.

Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. Verificamos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.

O Aluno I desenvolve uma resposta ideal para a situação 2, como vemos na Figura 26. É interessante que, nas suas falas, ele associou os números primos com a criptografia, pois cursa Redes de Computadores. Levando isso em conta, essa situação já era de conhecimento do mesmo.

Figura 26 – Resposta à situação 2 do Aluno I

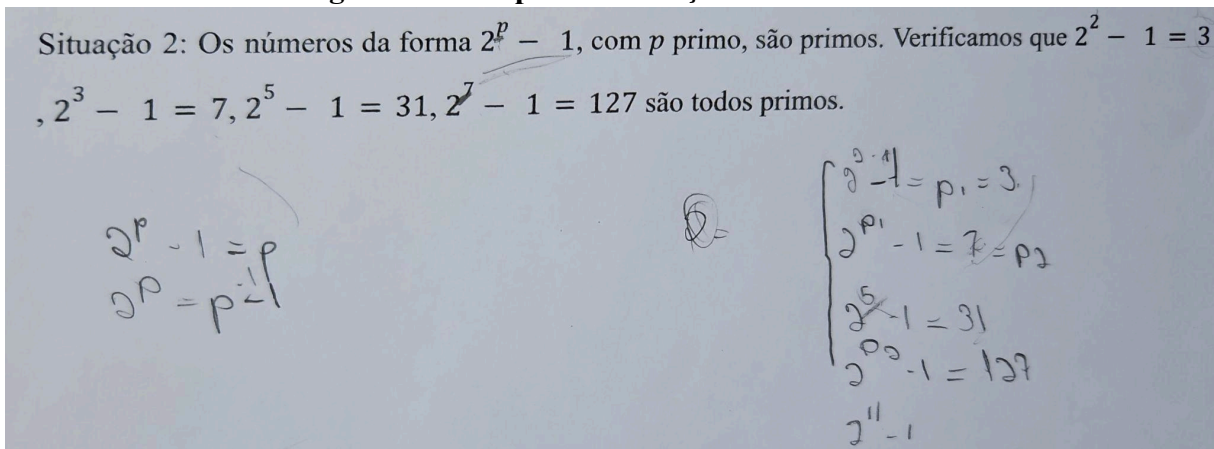
Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. Verificamos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.

O próximo número primo é 11. Assim, a expressão fica:

$2^{11} - 1 \Rightarrow 2048 - 1 = 2047$. Como $2047 = 23 \cdot 89$, podemos concluir que os resultados não são todos primos. Portanto, a expressão é falso.

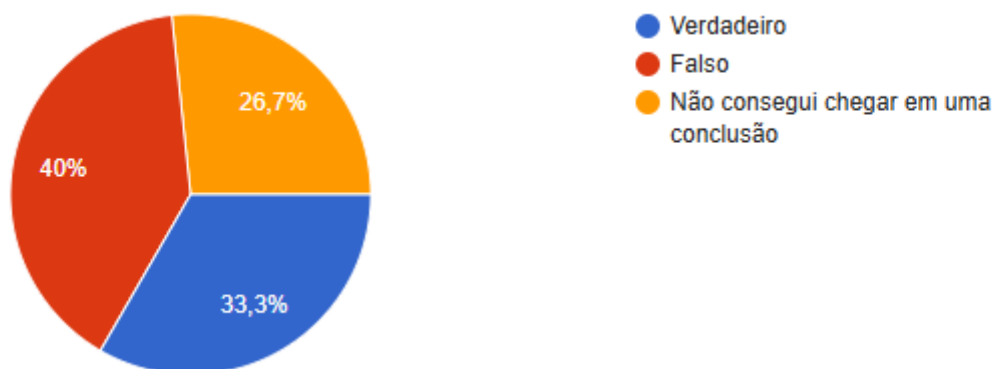
Fonte: dados da pesquisa

Já o Aluno J disse que essa questão era “difícil, complicada, já passei aperto na primeira!”. Produziu uma resposta (Figura 27) que não conduz a uma definição se é Verdadeiro ou Falso. Percebemos naquele momento que o *scorecard* poderia conter mais um item: Não consegui chegar a uma conclusão. Nesse momento, acrescentamo-lo no formulário para incluir estudantes que estavam confusos nessa atividade.

Figura 27 – Resposta à situação 2 do Aluno J

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos estudantes intuiu que a situação 2 era falsa (40% ou 12 estudantes), 10 estudantes (33,3%) intuíram que era verdadeiro e 8 estudantes (26,7%) não conseguiram chegar em uma conclusão (confira a Gráfico 5).

Gráfico 5 – Resposta à situação 2 dos estudantes

Fonte: dados da pesquisa

Vejamos os resultados da situação 5.

Situação 5: Os cinco círculos abaixo tem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ pontos marcados sobre sua circunferência. Em cada um deles, todos os pontos são ligados a todos os outros, de modo que as cordas determinam regiões. Observação: três das n cordas não concorrem num único ponto, ou seja, cada grupo de 4 pontos tem apenas uma interseção. Contando o número de regiões nas quais as cordas dividem cada círculo.

<i>Número de pontos</i>	1	2	3	4	5	...	n
<i>Número de regiões</i>	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

Observamos um diálogo interessante entre dois alunos, A e B:

Aluno A: Eu acho que é verdadeiro.

Aluno B: Mas o máximo de pontos é 360.

Aluno A: Mas o círculo tem infinitos pontos.

Aluno B: Verdade.

Por um momento, o Aluno B pensou que o máximo de pontos em uma circunferência é 360, que é sua medida total em graus. Retirando o eventual esquecimento, a conclusão de que um ponto tem certo “tamanho”, “espessura” ou “ocupa um pedaço da reta/curva” é uma versão corporificada de um objeto idealizado, axiomatizado. Aqui reside um problema geométrico que separa quem está no Pensamento Matemático Elementar de quem está no Avançado.

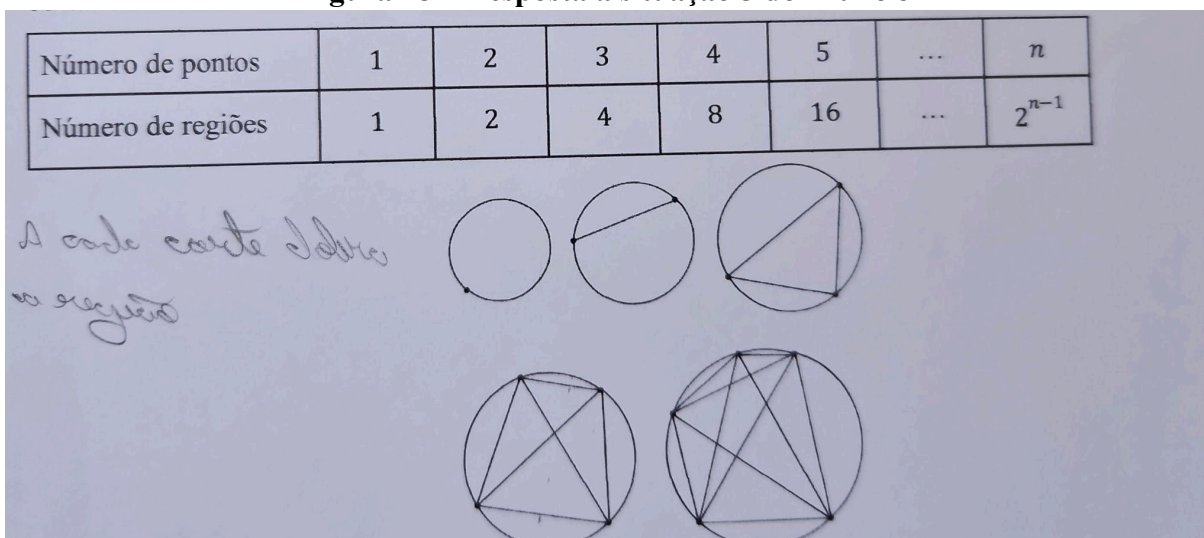
Uma discussão de outro grupo também mostra como os pares ajudam na construção da resposta.

Aluno J: Pensei como numa folha de papel: corta ao meio, divide em duas regiões. – em sua resposta está escrito: “A cada corte dobra a região” (veja na Figura 28).

Aluno K: Às vezes corta mais de uma área, tipo três.

Mesmo com o alerta do Aluno K, o Aluno J marcou Verdadeiro para a situação 5.

Figura 28 – Resposta à situação 5 do Aluno J



Fonte: dados da pesquisa

As discussões no grupo do aluno A, sempre acaloradas, continuava:

Aluno A: Vou tentar uma fórmula para diagonais pelo método de indução.

Aluno C: Fora¹³⁹ é sempre par ou ímpar..

Aluno A: Tem que achar a fórmula de dentro. Aí achar ímpar fora e par dentro.

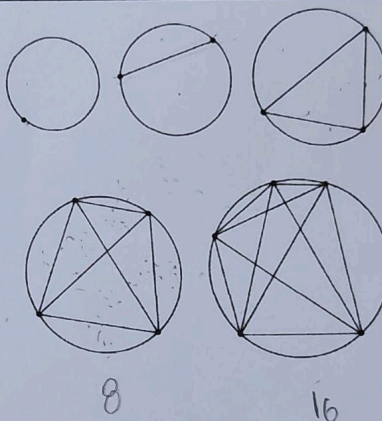
O grupo buscou um contraexemplo tentando encontrar um número ímpar de regiões e não encontrou, mas supôs que existia (veja a resposta do Aluno C, Figura 29). Apesar disso, o Aluno A percorreu esse raciocínio das fórmulas, mas acabou resolvendo o problema pelo contraexemplo com 6 pontos, que determina 31 regiões (Figura 30).

¹³⁹ Com “fora” ele quis dizer a quantidade de regiões entre o polígono formado pelos pontos/vértices e a circunferência.

Figura 29 – Resposta à situação 5 do Aluno C

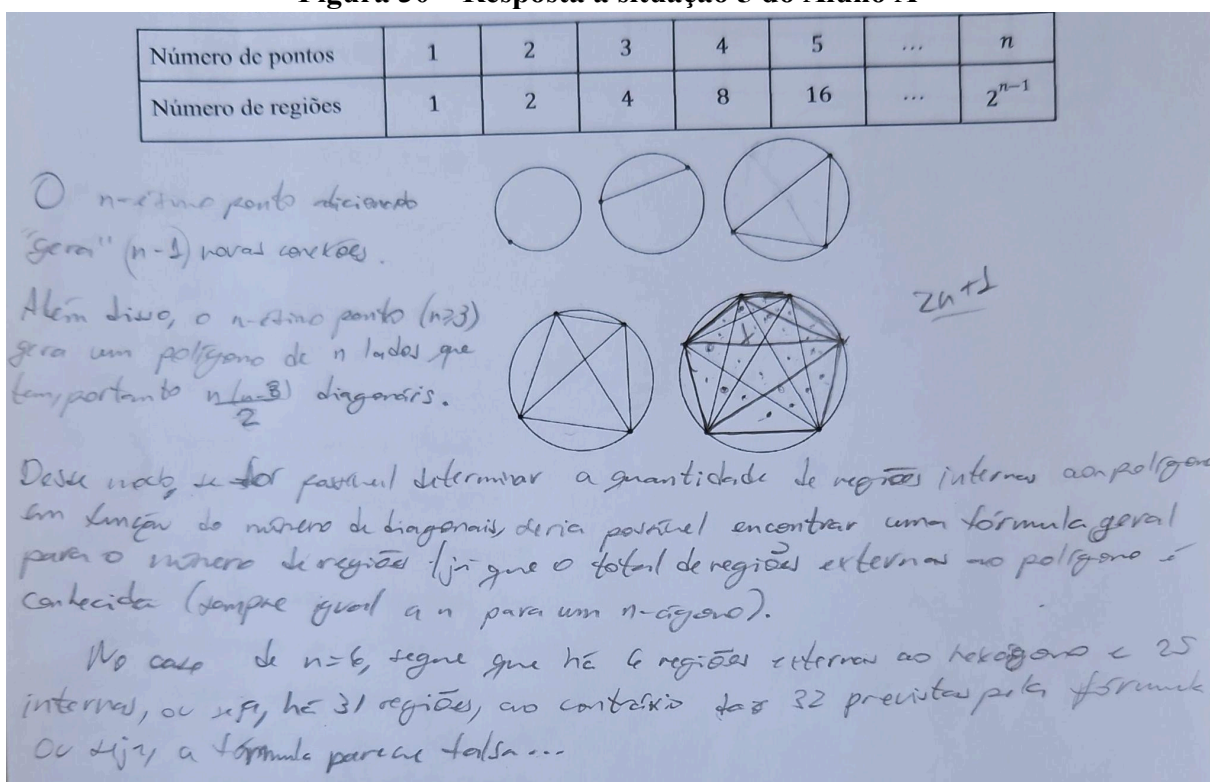
Número de pontos	1	2	3	4	5	...	n
Número de regiões	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

Com troca de ideias no grupo, é possível analisar com uma visão de que, a partir de 4 pontos gera-se um polígono de x diagonais. Ité, também, a quantidade de regiões por fora deste polígono. Dito isso, se encontrarmos, dado um x maior ou igual a 4, uma soma das regiões internas e externas, essas regiões seguem ímpares e pares ou vice versa, ou seja, mesmo, um resultado que não seria em por me de potência de 2, comprovaríamos que estaria falsa.



Fonte: dados da pesquisa

Figura 30 – Resposta à situação 5 do Aluno A

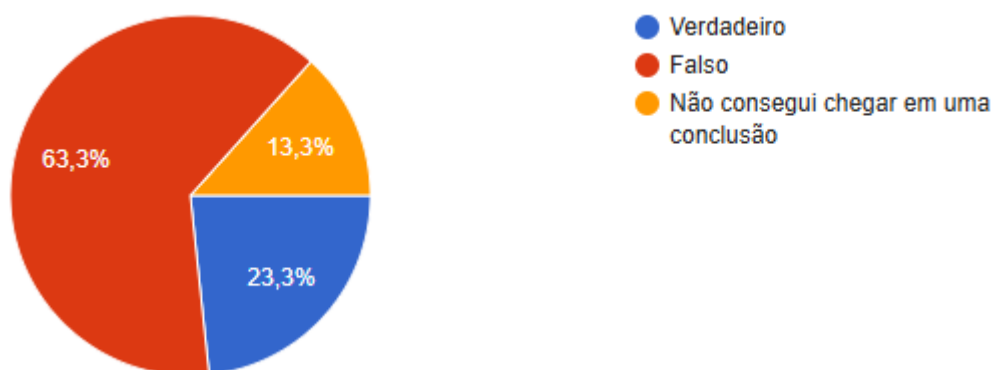


Fonte: dados da pesquisa

Um acontecimento que merece análise do momento dessa situação foi o Aluno H levantar-se e circular pela sala. Quando questionado, disse que queria “ver se ele é ruim e os outros também”. Ou seja, estabelecer uma comparação com os outros. Essa atitude passa por uma frustração (Sierpinski et al., 2008), sentimento que os cursos rápidos de Matemática Acadêmica provocam. O incômodo é agravado pelo fato de serem alunos selecionados, os “melhores” da instituição na Matemática Escolar. De repente, alguns passaram a ser “ruins” diante da Matemática Acadêmica. Essa pequena frustração é experienciada com mais intensidade no início da graduação; portanto, este Projeto de Ensino também preparou os estudantes fazendo-os conhecer o sentimento de frustração direcionada ao objeto conhecimento matemático, que talvez não tivessem experimentado até então.

A maioria dos estudantes intuiu que a situação 5 era falsa (63,3% ou 19 estudantes), 7 estudantes (23,3%) intuíram que era verdadeiro e 4 estudantes (13,3%) não conseguiram chegar em uma conclusão (confira a Gráfico 6).

Gráfico 6 – Resposta à situação 5 dos estudantes



Fonte: dados da pesquisa

Vejamos a situação 7.

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n - 1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$3! - 2! + 1! = 5$$

$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$

$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$

$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$

$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$

$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$

O Aluno A reparou que é possível “escrever um número em função do anterior, subtraindo o de cima”. Por exemplo:

$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 5! - (4! - 3! + 2! - 1!) = 120 - 19 = 101.$$

Depois, escreveu um contraexemplo diferente da resolução original de Guy (1988):

$$2! - 1! = 1, \text{ que não é um número primo (veja Figura 31).}$$

Figura 31 – Resposta à situação 7 do Aluno A

$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$

Falso. Ora, se $n=2$, teríamos $2! - 1! = 1$, não é número primo e, portanto a fórmula de alternadas é incorreta.

Fonte: dados da pesquisa

Perguntamos a ele se esse era realmente um contraexemplo. Dissemos que “na verdade, o número 1 não é primo, mas também não é composto por definição. Já que no enunciado diz que ‘As somas alternadas de fatoriais dão números primos’, então o contraexemplo deve ser um número composto”. O Aluno A não se convenceu de tal explicação. Muitos estudantes apresentaram o mesmo contraexemplo.

Essa questão não teve muitas respostas interessantes. Os alunos tentaram calcular a próxima soma alternada, mas pararam na escrita “ $9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! =$ ” (Figura 32). Isso se deve ao fato que o cálculo do fatorial de um número natural demanda muito tempo e precisão nas multiplicações.

Figura 32 – Resposta à situação 7 da Aluna L

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n - 1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$3! - 2! + 1! = 5$$

$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$

$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$

$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$

$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$

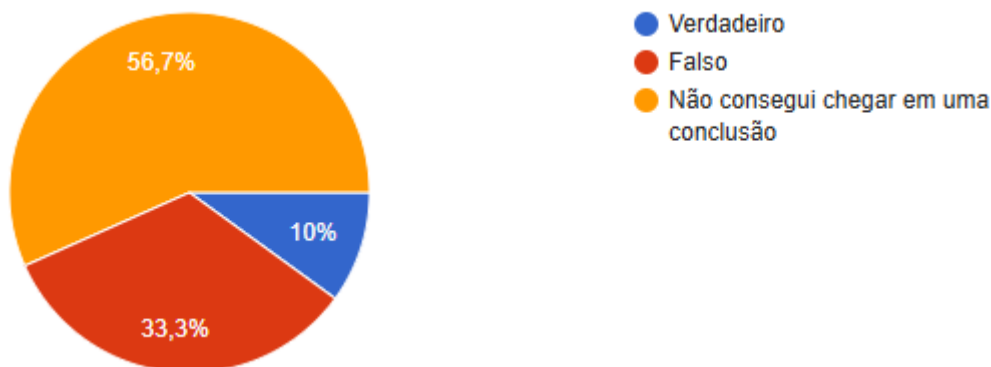
$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! =$$

Fonte: elaborada pelo autor

A maioria dos estudantes não conseguiu chegar a uma conclusão para a situação 7 (56,7% ou 17 estudantes), 10 estudantes (33,3%) intuíram que era falso e 3 estudantes (10%) intuíram que era verdadeiro (confira a Gráfico 7).

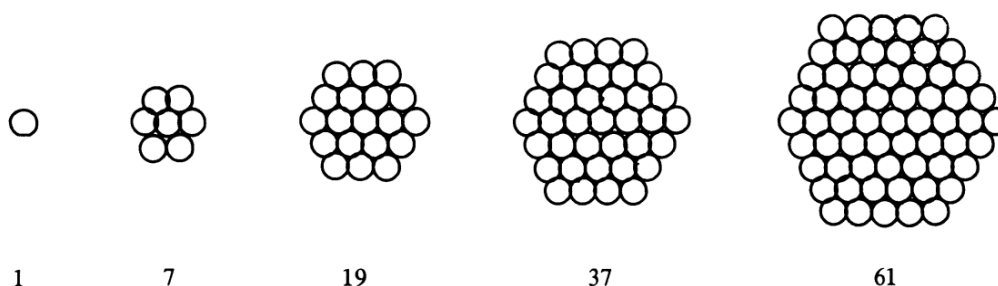
Gráfico 7 – Resposta à situação 7 dos estudantes



Fonte: dados da pesquisa

Vejamos a situação 9.

Situação 9. A sequência de números hex (assim chamados para distingui-los dos números hexagonais) estão representados na figura abaixo.



As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

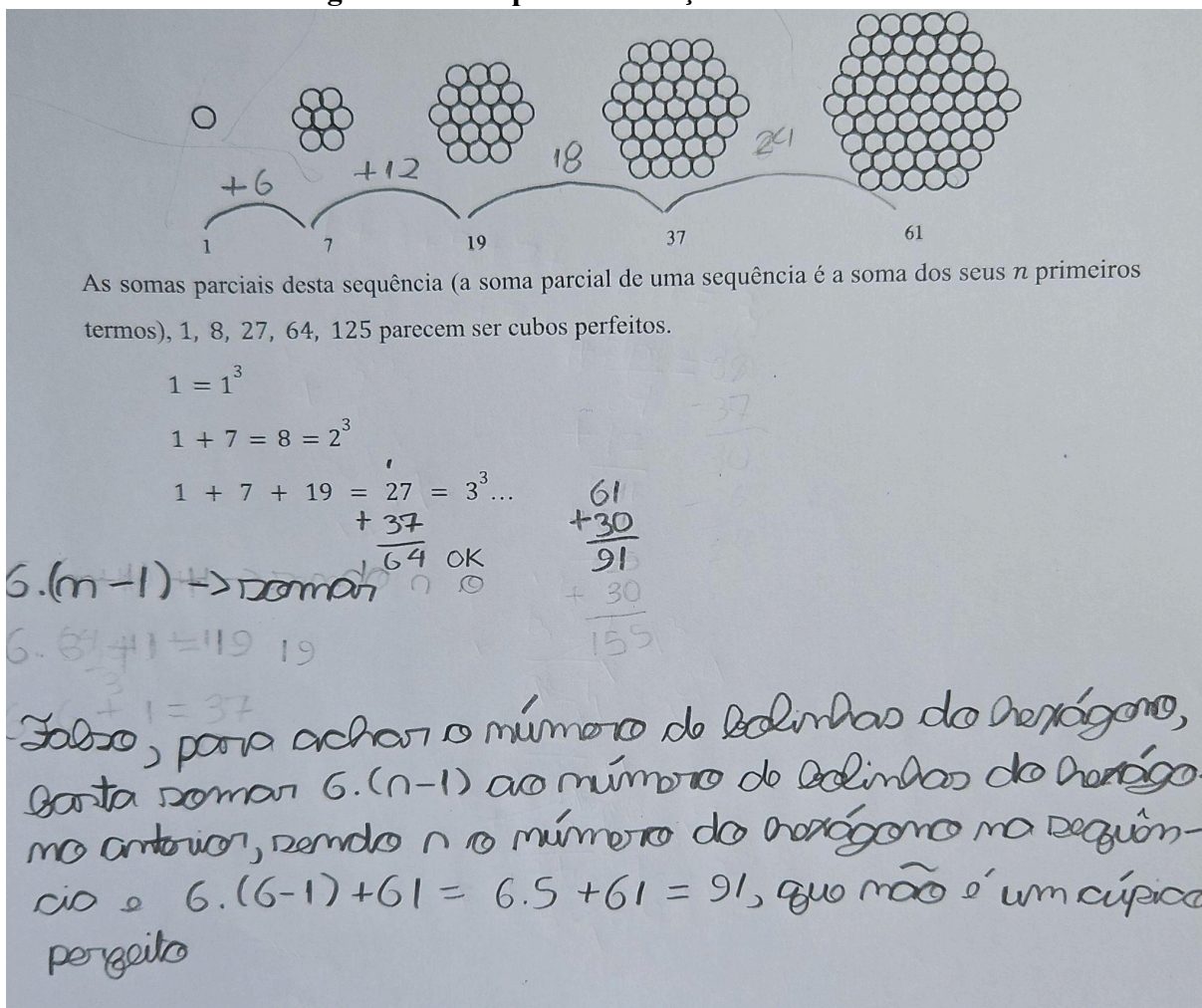
$$1 = 1^3$$

$$1 + 7 = 8 = 2^3$$

$$1 + 7 + 19 = 27 = 3^3 \dots$$

A Aluna F considerou que a situação 9 era falsa, apesar de ser verdadeira (veja a Figura 33). Percebeu que a cada novo número da sequência soma-se $6(n - 1)$ ao anterior, considerando que n indica a posição do número na sequência. Somou o número 61 com $30 = 6(6 - 1) = 6 \cdot 5$, que resulta em 91, número que não é um cubo perfeito. Esqueceu de somar os termos anteriores 61, 37, 19, 7 e 1, que resulta em $216 = 6^3$. Em sua fala, percebeu que o desenho parecia o número de fios que um cabo poderia ter e afirmou ter visto em uma matéria do seu curso, Eletrotécnica.

Figura 33 – Resposta à situação 9 da Aluna F



Fonte: dados da pesquisa

Muitos estudantes notaram que a situação 9 é baseada em uma progressão aritmética de segunda ordem¹⁴⁰. Esse conteúdo é geralmente ensinado no Ensino Médio, então era de se esperar que eles o utilizassem para analisar a situação. Facilmente encontraram os números seguintes da sequência, até o 7^3 .

O aluno D tentou fazer uma prova matemática com base numa fórmula de recorrência: $f(n) = 6n + f(n - 1)$, onde $f(0) = 1$. Fez alguns casos para confirmar suas hipóteses e tentou utilizar o método da Indução, calculando $g(1)$, $g(k)$ e $g(k + 1)$, onde $g(n) = f(n - 1) + f(n - 2) + \dots + f(0) = n^3$ (Figura 34). Novamente, esta tentativa o configura na etapa *pré-procedimento* da escala de compreensão (Figura 4, capítulo 4) sobre o método, chegando a uma solução parcial. Apesar disso, seu Pensamento Matemático está em

¹⁴⁰ Uma progressão aritmética de segunda ordem (PA de segunda ordem) é uma sequência numérica em que as diferenças entre os termos consecutivos formam uma progressão aritmética.

Transição para o Avançado, faltando apenas o exercício da escrita rigorosa e a execução do passo indutivo.

Figura 34 – Resposta à situação 9 do Aluno D

Handwritten mathematical work by Aluno D:

$$1 = 1^3$$

$$1 + 7 = 8 = 2^3$$

$$1 + 7 + 19 = 27 = 3^3 \dots$$

Verdadeiro.

$$f(n) = 6 \cdot n + f(n-1), \text{ onde } f(0) = 1$$

$$f(1) = 6 \cdot 1 + f(0) = 6 + 1 = 7$$

$$f(2) = 6 \cdot 2 + f(1) = 12 + 7 = 19$$

$$g(n) = f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(0) = (n)^3$$

For $g(1)$:

$$f(0) = 1 = (0+1)^3 = 1^3 = 1$$

For $g(k)$:

$$f(k-1) + f(k-2) + \dots + f(0) = k^3$$

For $g(k+1)$:

$$f(k) + k^3 =$$

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno M desenvolveu bem a prova matemática da situação 9, quase a completou (Figura 35). O elemento que falta nas suas manipulações algébricas é o método de Indução. Sozinho, chegou em $3n^2 - 3n + 1$, que é a fórmula geral da soma parcial da sequência. Esperamos que este Projeto de Ensino possa fornecer essa ferramenta matemática poderosa, um passo além da álgebra da Matemática Escolar, que a complementa e a aprimora.

Figura 35 – Resposta à situação 9 do Aluno M

1 $1+6$ $1+3\cdot6$ $1+6\cdot6$ $1+10\cdot6$

 1 2 3 4 5
 1 7 19 37 61
 $3n^2 - 3n + 1$

As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

$1 = 1^3$
 $1 + 7 = 8 = 2^3$
 $1 + 7 + 19 = 27 = 3^3 \dots$

$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45$
 $1 + 1\cdot6$
 $1 + 3\cdot6$
 $1 + 6\cdot6$
 $1 + 10\cdot6$
 $1 + 15\cdot6$
 $n^2 - n + 1$

$1 + \frac{n(n-1) \cdot 6}{2} = 1 + 3n(n-1) = 3n^2 - 3n + 1$
 $12 - 6 + 1 = 7$
 $27 - 9 + 1 = 19$

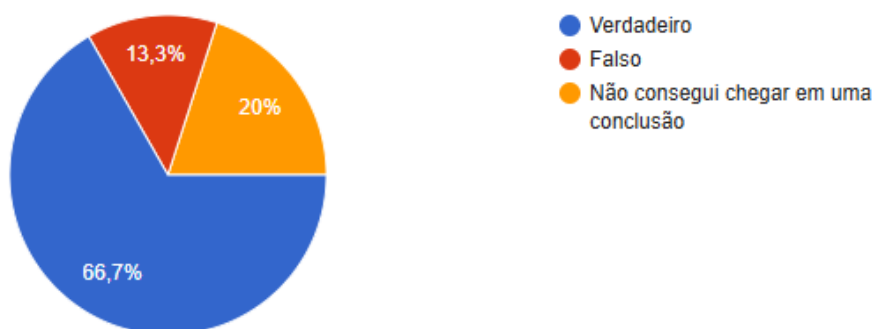
$\frac{3\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - 3\frac{n(n-1)}{2} + 1}{2}$
 $3 \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{3n^2 - 3n}{2} + 1 = \frac{3n^4 - 3n^3 + 3n^2}{4} - \frac{6n^2 + 6n}{4} + 1$
 $\frac{3n^4 - 3n^3 - 3n^2 + 6n}{4} + 1 = \frac{3n^4 - 3n^3 - 3n^2 + 6n + 4}{4}$
 $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

se isso for cubo perfeito, a questão estará feita.

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos estudantes intuiu que a situação 9 era verdadeira (66,7% ou 20 estudantes), 4 estudantes (13,3%) intuíram que era falso e 6 estudantes (20%) não conseguiram chegar em uma conclusão (confira a Gráfico 8).

Gráfico 8 – Resposta à situação 9 dos estudantes



Fonte: dados da pesquisa

Após a situação 9, um aluno chegou a uma conclusão interessante:

Aluno: É mais fácil provar que tá errado do que está certo.

Professor/pesquisador: E como chama isso?

Aluno: Absurdo? Exceção?

Embora não tenha falado o termo “contraexemplo”, a conclusão dele é a característica principal do contraexemplo. Na sala de aula de matemática, podemos (e, por vezes, devemos) utilizar termos diferentes dos adotados pela matemática formal que foram concebidos pelos alunos. E, novamente, essa utilização cessará no futuro, quando o processo educativo refinará as definições. Essa é a manifestação da flexibilidade da Educação Matemática (Moreira; David, 2011), que também se revela nesta pesquisa: planejamos 10 situações e conseguimos realizar seis; planejamos as respostas possíveis “Verdadeiro” e “Falso” para as situações e adicionamos ao *scorecard* a opção “Não consegui chegar em uma conclusão”.

Vejamos a situação 10.

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

De início, os estudantes não entenderam qual padrão estava delineado neste enunciado. Tivemos de reforçá-lo no quadro, falando que os números 1, 4, 9, 16, 25 eram iguais a $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, respectivamente. De fato, o enunciado é vago para os estudantes: não cita os números quadrados perfeitos e não tem ponto de interrogação, diferentemente das questões de livros didáticos e vestibulares.

O Aluno H interrogou o professor:

Aluno H: Método de exaustão né?

Professor/pesquisador: Mas tem infinitos números ímpares né!

Ele queria dizer com “método da exaustão”¹⁴¹ fazer diversos exemplos para então chegar a uma conclusão sobre a situação 10 ser verdadeira infinitamente. Consideramos que esse aluno pensa como um *infinitista cinético potencialista*: para ele é possível percorrer o infinito (Tall, 1992). Ele constrói o infinito de uma sequência calculando-a elemento a elemento. O professor o alerta para perceber que é impossível “concluir” essa sequência.

O Aluno A conseguiu fazer uma prova matemática apoiada em progressão aritmética (PA) e manipulações algébricas (Figura 36). Este aluno utiliza palavras e símbolos (em particular, o *procedimento* soma dos termos da PA) para comprimir a notação em pequenas entidades mentalmente manipuláveis. Para ele, a PA está no caminho para ser um *conceito cristalino*, pois a identifica em qualquer situação matemática (*reconhecimento perceptivo*) em suas representações visuais e simbólicas (*descrição verbal*), entende sua definição e deduz propriedades a partir dela. Sua prova matemática é baseada em percepções, ações e definições verbais. Entretanto, não podemos afirmar que o mesmo desenvolveu plenamente o Pensamento Matemático Avançado, visto que não avaliamos sua assimilação de *conceitos cristalinos* (não sabemos se ele sabe propriedades diferentes de PA que produzem definições diferentes de PA). Da mesma forma, não sabemos se ele desenvolveu uma estrutura cognitiva em matemática que dependa das reflexões internas mais do que dos sentidos, particularidade do Pensamento Matemático Avançado. Ainda assim, tem muito potencial.

¹⁴¹ O método da exaustão originalmente é uma ferramenta para calcular área de figuras planas inscrevendo nelas polígonos cuja soma das áreas convergem para a área procurada.

Figura 36 – Resposta à situação 10 do Aluno A

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Verdadeiro! Note que a soma de todos os ímpares pode ser escrita, conforme a fórmula da soma dos termos da PA como sendo:

$$S_n = n \frac{(1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_n + 1)}{2}. \text{ Logo, como } a_n = 1 + 2 \cdot (n-1) = 2n-1,$$

$$\text{segue que } S_n = \frac{n(2n-1+1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2. \quad \square$$

Fonte: dados da pesquisa

A Aluna N descobriu uma propriedade embutida na situação 10 que ainda não tínhamos percebido (Figura 37). Percebeu que “a quantidade de números somados é igual o número que será multiplicado por ele mesmo”. Entretanto, essa propriedade não é suficiente para provar matematicamente e não tem relação com o cerne do enunciado: somas parciais de ímpares.

Figura 37 – Resposta à situação 10 da Aluna N

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64.$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$$

$$+ 21 = 121$$

$$+ 23 = 144$$

$$+ 25 = 169$$

$$+ 27 = 196$$

Verdadeiro, porque a quantidade de números somados é igual o número que será multiplicado por ele mesmo

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno E fez uma prova geométrica para essa situação que parece mais aritmética (Figura 38). Essa solução também é clássica para esse problema: note que cada número ímpar tem a capacidade de cobrir o seu anterior, formando um quadrado de lado igual à quantidade de números ímpares que foram colocados. Esse raciocínio geométrico completa a observação feita pela Aluna N.

Figura 38 – Resposta à situação 10 do Aluno E

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$1 = 1$$

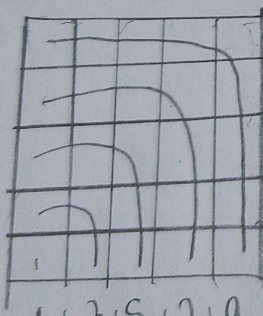
$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Verdadeiro



$1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Fonte: dados da pesquisa

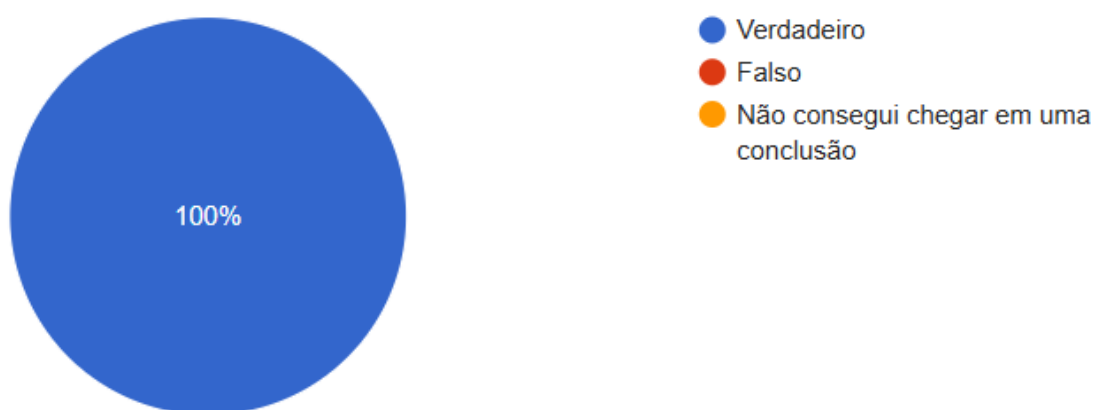
O Aluno O fez uma prova pelo Princípio de Indução Matemática (Figura 39). A prova carece de alguns termos da linguagem matemática rigorosa, mas o estudante realmente pôde concluir a veracidade da situação por meio dela.

Figura 39 – Resposta à situação 10 do Aluno O

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$
 Verdadeiro
 $1 + 3 + 5 + \dots + n = n^2$ $n = 2n+1$
 Com $n=1$ temos:
 $1 = 1^2$
 Assumindo como verdade para todo $n=k$ temos.
 $1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 = k^2$
 $1 + 3 + 5 + \dots + k + (k+1) = (k+1)^2$
 $1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 + (2k+1) = (k+1)^2$
 $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$ (V)

Fonte: dados da pesquisa

Todos os estudantes intuíram que a situação 10 era verdadeira (confira a Gráfico 9). Diversos estudantes já tinham conhecimento desta situação, apesar de um público diverso em termos de curso técnico, ano escolar e idade, o que contribuiu para essa unanimidade.

Gráfico 9 – Resposta à situação 10 dos estudantes

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que houve uma crescente na formalização de provas matemáticas ao longo das situações propostas. A escrita matemática ficou cada vez melhor. A intuição matemática também, porque foram acertando cada vez mais o que era “Verdadeiro” e “Falso” apoiando-se por princípios matemáticos.

6.3.3 Análise da segunda aula

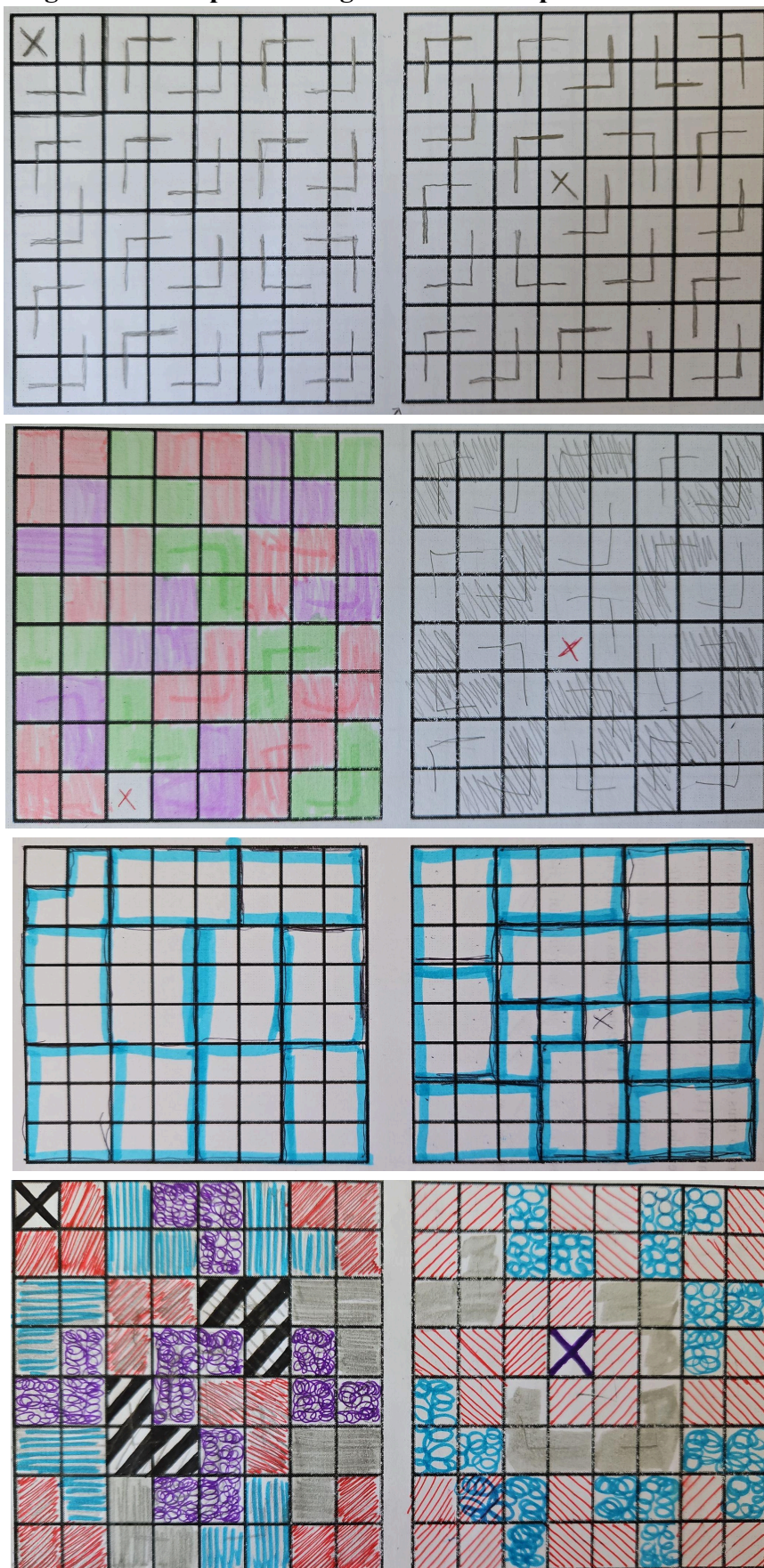
A segunda aula, sobre o Problema dos Quadrados e a formalização do Princípio de Indução Matemática, caracterizou-se por ser expositiva e dialogada. Houve pouquíssimas asserções que os estudantes fizeram durante a exposição e duas produções escritas. A aula teve a duração de duas horas e participaram 29 estudantes.

Após o professor/pesquisador contar a anedota do balde d'água e da lareira, o Aluno B perguntou se a história era verdadeira e aquele respondeu que sim, somente que os dois problemas reais concebidos pela banca de avaliação não eram tão simples, mas o segundo problema era análogo ao primeiro e um só candidato percebeu isso.

No momento em que o professor/pesquisador explicava o Problema dos Quadrados, sugeriu que os alunos resolvessem o caso 8×8 . Não foi algo planejado com antecedência, quando concebemos as aulas. Percebeu que a aula era demasiada expositiva e não tinha o fazer matemático dos alunos em nenhum instante. Portanto, resolveu disponibilizar materiais impressos com malhas quadriculadas 8×8 (Apêndice C). O resultado da produção de quatro alunos está exposto na Figura 40.

Primeiramente, o professor/pesquisador pediu que os alunos fizessem um X em um dos quadradinhos num canto da malha quadriculada a fim de descartar esse quadradinho. Depois, foi solicitado que os estudantes completassem a malha com triminós, colorindo e/ou desenhando. Percebeu que os estudantes resolveram esse problema rapidamente, sem muitas dificuldades.

Figura 40 – Resposta de alguns estudantes para o caso 8×8



Fonte: dados da pesquisa

O mais interessante que ocorreu foi o Aluno A perguntar se “poderíamos tirar um quadrado de qualquer lugar da malha?”. Com esse questionamento, rapidamente pensamos em sugerir o segundo problema, tirando um quadradinho do centro, para todos. Em verdade, os estudantes adaptaram suas estratégias para o segundo problema.

O propósito de tirar um quadradinho de um canto era para realizarem o terceiro problema, o do caso 16×16 , acrescido de um desafio. Como reparou que resolviam o problema 8×8 retirando um quadradinho de qualquer lugar e usariam as mesmas estratégias para o caso 16×16 , o professor/pesquisador solicitou que fizessem o problema maior retirando três quadradinhos do centro, formando um triminó composto de quadradinhos retirados das divisões em quatro problemas menores, 8×8 . Na Figura 41 temos um esboço dessa situação.

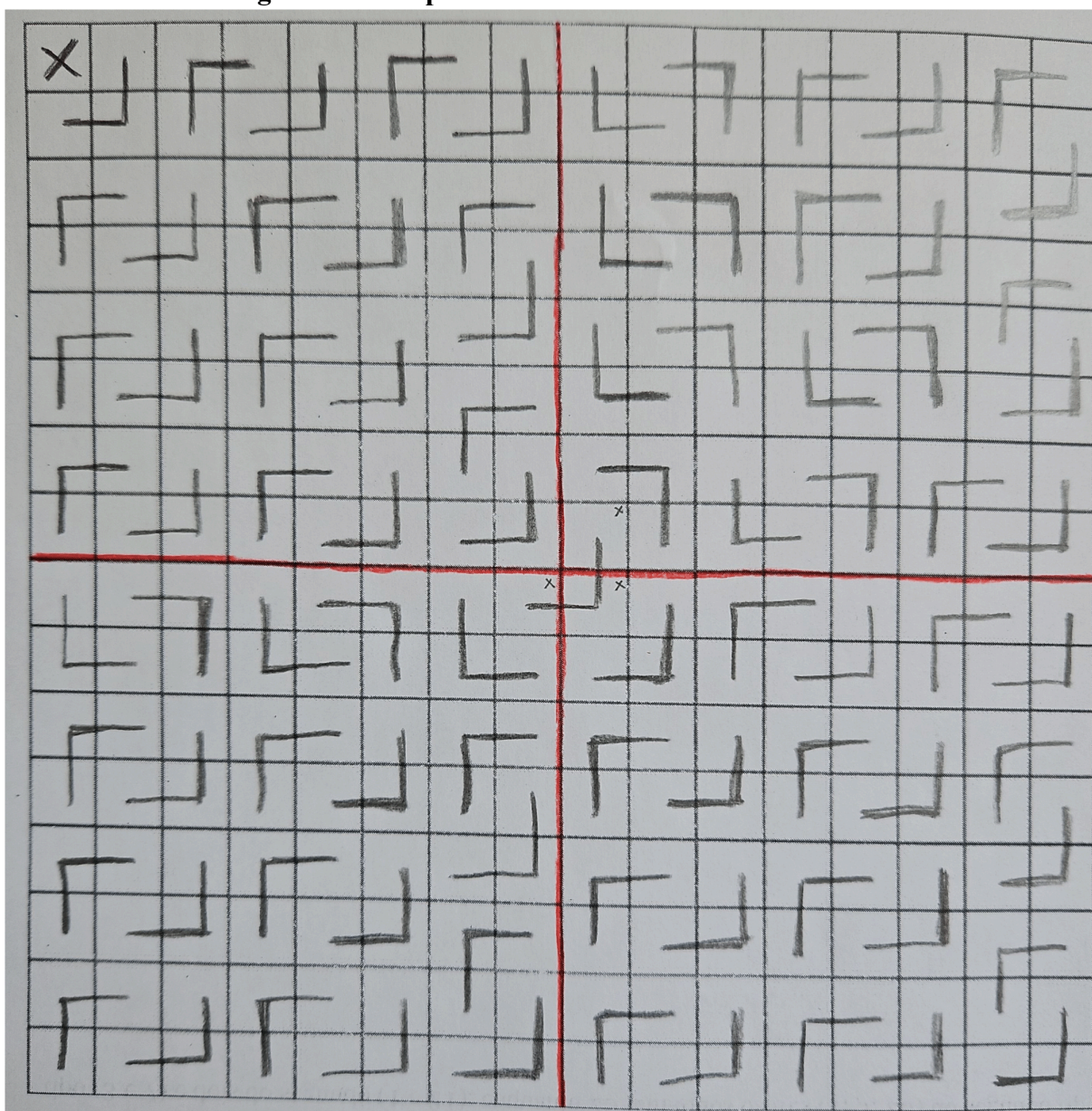
Isso necessariamente implicava que os estudantes deveriam utilizar o caso anterior para realizar o novo. Também, deveriam rotacionar a resolução que obtiveram no caso anterior três vezes, a partir do triminó de quadradinhos excluídos, ou até quatro vezes se considerar o quadrado 8×8 que contém o quadrado realmente retirado da malha 16×16 .

No momento em que os estudantes faziam, um aluno falou:

Aluno J: É mais difícil seguir o próprio padrão $[8 \times 8]$ do que fazer um novo $[16 \times 16]$.

Consideramos que induzí-los a utilizar o caso anterior foi substantivo para o desenvolvimento mental e o entendimento da seguinte discussão sobre a resolução do Problema dos Quadrados via *slide*. Da mesma forma, a inserção de desafios geométricos (*corporificados, imagéticos*) resultou em ganhos cognitivos, estimulando-os além de só escutarem.

Figura 41 – Resposta do estudante ao caso 16×16



Fonte: dados da pesquisa

Outro acontecimento intrigante foi o Aluno A tentar descobrir a resposta para a sua própria pergunta: “é possível resolver este problema retirando um quadradinho de qualquer lugar?”. Após a exposição da resolução do Problema dos Quadrados, ele percebeu que sim. A justificativa que concluiu e verbalizou foi:

Aluno A: Podemos subdividir uma malha quadriculada em vários pedaços 2×2 como quisermos, e somente um deles será o contemplado com o quadradinho faltante da malha maior (8×8 , 16×16 , etc.). Aí fazemos o caminho de volta, do 16×16 para o 8×8 para o 4×4 para o 2×2 .

Ou seja, ele mesmo se respondeu, utilizando sua percepção para engendrar uma prova matemática no sentido contrário da planejada e apresentada aos alunos pelo professor/pesquisador.

6.3.4 Análise da terceira aula

A terceira aula teve a duração de duas horas e participaram 29 estudantes. A primeira parte da terceira aula foi dedicada à realização de exercícios sobre o Princípio de Indução Matemática e a segunda, ao jogo Torre de Hanói.

Hipotetizamos que por vezes os estudantes fariam a Indução como *procedimento* e não formal (Tall, 2008). Isso porque a Indução é um tópico da Matemática Acadêmica associado à imitação e mímica, dessa forma, próximo da Matemática Elementar.

Se a matemática na universidade tem que ser aprendida como uma língua, é um processo natural que os alunos primeiro tentem imitar o que leem e ouvem e, conseqüentemente, formulem frases absurdas. (Gueudet, 2008, p. 244).¹⁴²

Os exercícios 1, 2 e 5 são simplesmente a aplicação da Indução, com o acréscimo de que na 2 eles tinham que descobrir a lei geral antes. Para auxiliar os estudantes nesse fazer, primeiro fizemos o exemplo proposto (prova da fórmula da soma dos números naturais). Em seguida, com este exemplo projetado (*slide*), pedi para que os estudantes “copiassem” aquela escrita formal matemática para solucionar os exercícios e mudassem apenas as “contas”.

Ademais, os exercícios 3, 4 e 6, que pedem para vislumbrar o erro na resolução falsa com “Indução” foram debatidos em formato expositivo-dialogado logo em seguida. Essa escolha foi feita considerando a maior agilidade da aula. Das duas horas planejadas para esta aula, os estudantes demandaram 1 hora e 15 minutos para os exercícios 1, 2 e 5, restando apenas 45 minutos para a Torre de Hanói.

Isso posto, analisemos algumas produções escritas interessantes dos estudantes.

Convém exhibir a resposta do Aluno A (Figura 42). Sua escrita matemática é bem resumida, pouco rigorosa e não é uma imitação do exemplo do professor/pesquisador. Note que ele sublinha a soma $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$ e a iguala a k^2 abaixo.

¹⁴² No original: “If mathematics at university has to be learned like a language, it is a natural process that the students first try to mimic what they read and hear, and consequently formulate absurd sentences.”

Figura 42 – Resposta ao exercício 1 do Aluno A

① Queremos demonstrar que $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Pelo PIM, segue que:

i) $P_1: 1 = 1^2$ é verdadeiro.

ii) Suponhamos, então, que P_n é verdadeira $\exists k=n, k \in \mathbb{Z}^+$. Assim, é preciso demonstrar que P_{k+1} é verdadeira, ou seja, $\frac{1+3+5+\dots+(2k-1) + (2k+1)}{= (k+1)^2}$. Seguinte,

$$k^2 + (2k+1) = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Deste modo, está demonstrado que $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Fonte: dados da pesquisa

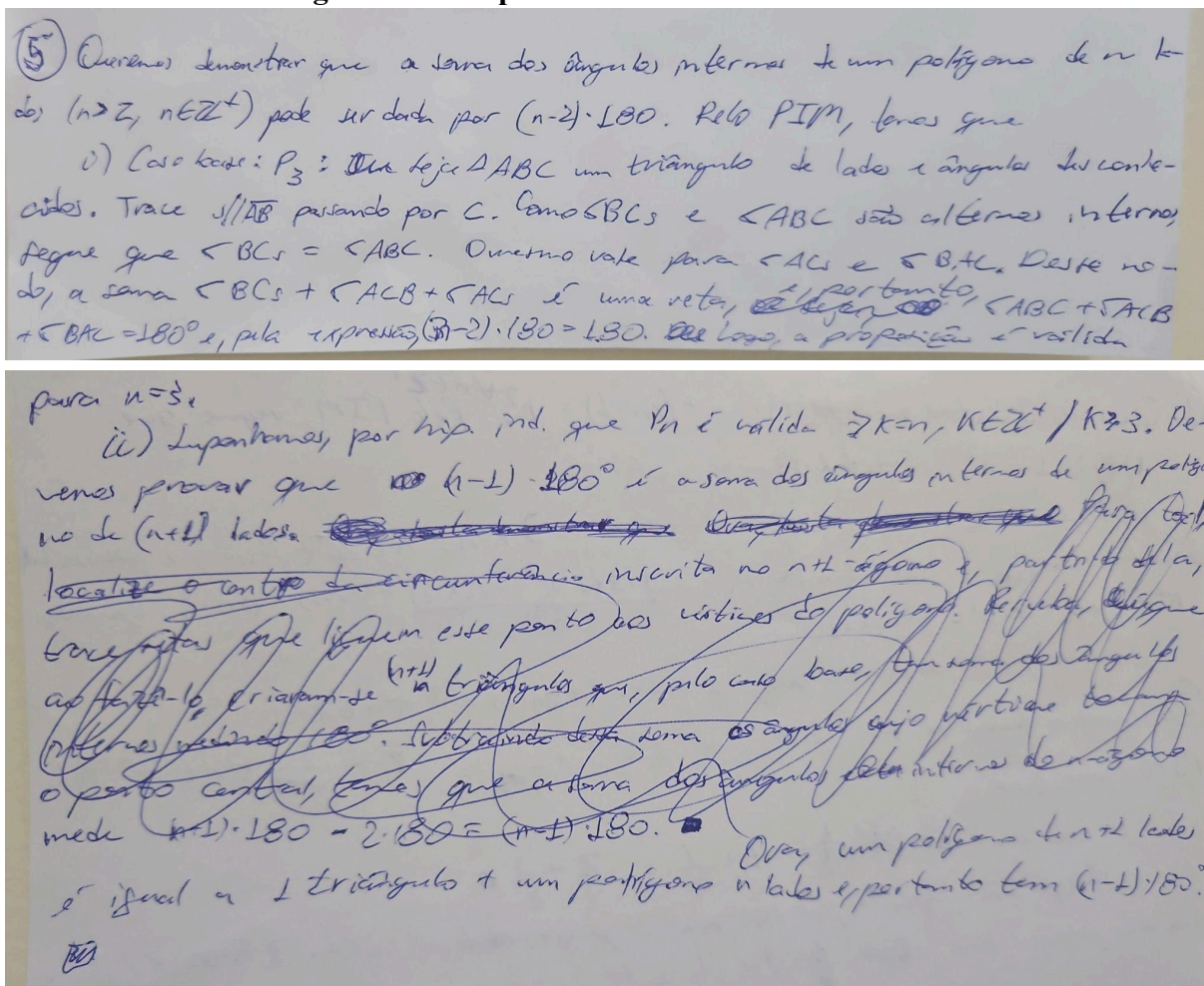
O Aluno A não teve dificuldades nos exercícios 1 e 2, que são essencialmente aritméticos/algébricos (mundo *simbólico*), entretanto, teve dificuldade no exercício 5, geométrico (mundo *corporificado*). Para o caso base, sabe que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° e ainda sabe provar (Figura 43).

Para o passo indutivo, tentou um raciocínio inscrevendo um polígono em uma circunferência. O professor/pesquisador sugeriu não seguir por esse caminho pois não haveria ganhos nele. Depois, o Aluno A tentou um raciocínio via um conhecimento prévio: todo polígono com mais de três lados pode ser dividido em triângulos, e cada triângulo tem 180° como a soma de seus ângulos internos (e até citou que provou isso no caso base). Mas errou na hora de provar a fórmula.

Aluno A: Reparei que havia “provado” a fórmula $(n - 1)180^\circ$ e não era a pedida, $(n - 2)180^\circ$.

Também o professor/pesquisador interveio nesse momento, reconduzindo sua resolução para focar no número de vértices de um polígono de n lados, n vértices, logo um polígono com $n + 1$ lados teria um vértice a mais que aquele, criando um “triângulo interno” a mais.

Figura 43 – Resposta ao exercício 5 do Aluno A



Fonte: dados da pesquisa

O Aluno P produziu uma mudança na fórmula do exercício 2. Em vez de seguir a lei geral enunciada pelo professor/pesquisador, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$, decidiu passar o termo $-\frac{1}{2^n}$ para o lado esquerdo da igualdade, e tentou provar por Indução a afirmação:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 \text{ para todo } n \text{ número natural.}$$

O Aluno C, que pretende cursar bacharelado em Matemática, no seu passo indutivo já assume que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$ e desenvolve os dois lados da igualdade até chegar em algo obviamente igual dos dois lados: $2^k \cdot 4 - 1 = 4 \cdot 2^k - 1$ (veja a Figura 44). Quando mostrou ao professor/pesquisador, este falou que, “em escrita matemática formal, preferimos manipular um só lado da equação para chegar ao outro lado”. Nessa “metade” do caminho, poderíamos passar por $2^k \cdot 4 - 1 = 4 \cdot 2^k - 1$ e continuar com as manipulações algébricas feitas por ele do lado direito. Para explicar melhor, o

professor/pesquisador desenhou um U por cima do seu papel, mostrando o caminho da escrita. Na verdade, o erro do Aluno C foi o não entendimento do que corresponde à hipótese e do que corresponde à tese nessa prova, pois usou a tese nas etapas da prova.

Figura 44 – Resposta ao exercício 2 do Aluno C

Provar por indução que se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Caso base:

$n = 1 \checkmark$

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^1} \rightarrow \frac{2+1}{2} = \frac{4-1}{2}$$

$n = 2 \checkmark$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2^2} \rightarrow \frac{4+2+1}{4} = \frac{8-1}{4}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

Assim considerando $n = k$, sendo $k \in \mathbb{N}$ e por válido, ~~então~~ ~~então~~ também

será válido para $k+1$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}, \quad n = k$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k \cdot 2} = 2 - \frac{1}{2^k \cdot 2}$$

$$\frac{2^k(2-1)}{2^k} + \frac{1}{2^k \cdot 2} = \frac{4 \cdot 2^k - 1}{2^k \cdot 2}$$

$$2^k \cdot 4 - 2 + 1 = 4 \cdot 2^k - 1$$

$$2^k \cdot 4 - 1 = 4 \cdot 2^k - 1$$

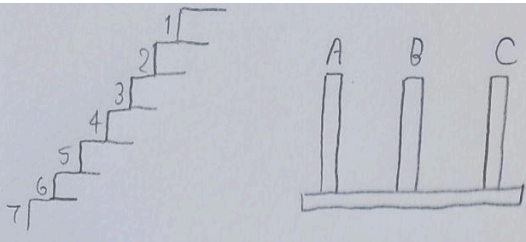
c.q.d.

Fonte: dados da pesquisa

A segunda parte da terceira aula foi dedicada à realização do jogo Torre de Hanói, composto por 7 discos. Como supracitado, entregamos um jogo por aluno como o da Figura 19 (capítulo 6, página 125) e uma folha de papel para que escrevessem a solução. Para resolver esse problema matemático em formato de jogo, algumas estratégias de resolução são válidas de serem registradas nesta dissertação. Portanto, analisaremos as soluções dos estudantes para o jogo.

O Aluno Q utilizou uma linguagem *simbólica* para escrever o passo a passo da resolução parcial do jogo Torre de Hanói para 6 discos (Figura 45). Entretanto, ao final escreve que o disco 1 (menor) vai para a estaca C e depois o disco 3 (maior que o disco 1) também vai para a estaca C, ficando em cima de um disco menor. Ou seja, o aluno propôs uma resolução até conseguir movimentar o disco 6, porém perdeu-se a partir daí. Este consegue combinar (*blend*) os mundos *corporificado* e *simbólico*, mas ainda não atingiu o estágio do Pensamento Matemático Avançado por resolver parcialmente um problema desses mundos.

Figura 45 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno Q



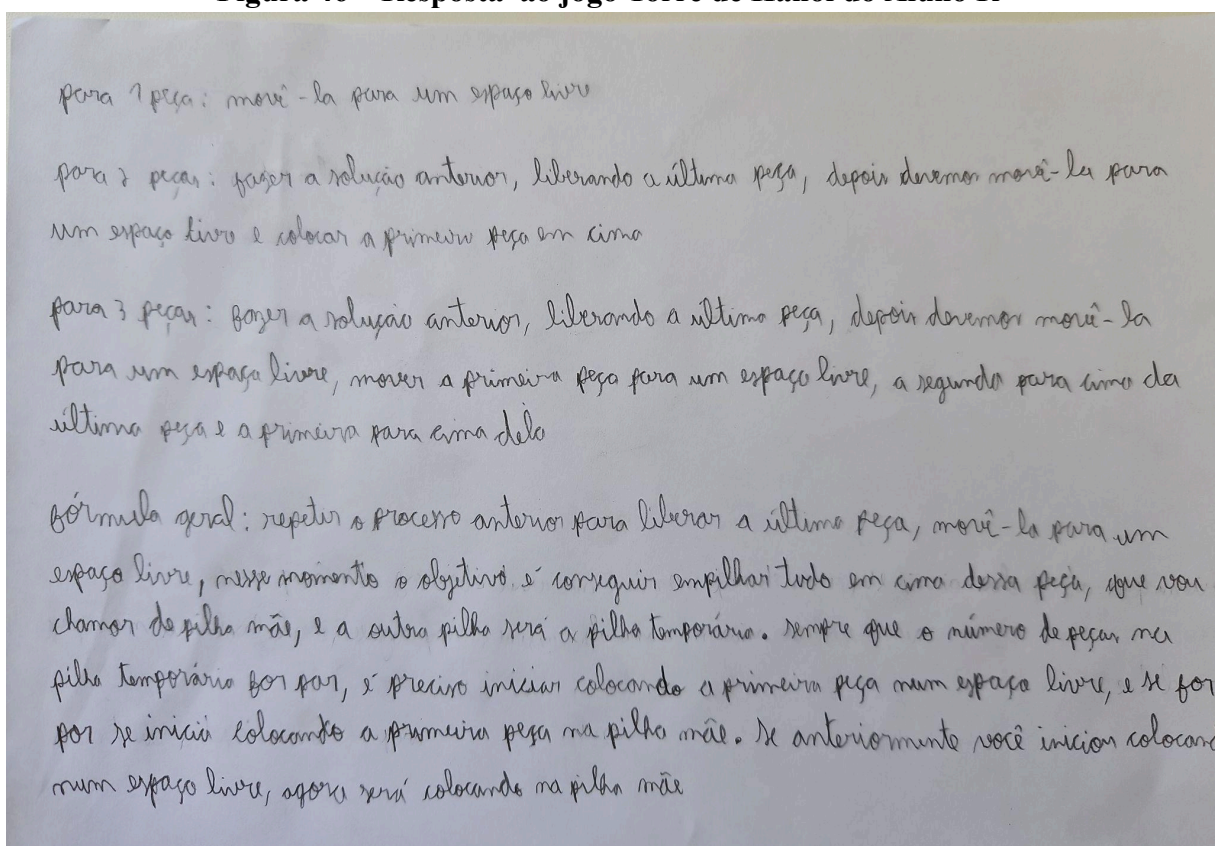
→ Início em A

*1: A → B	1: B → C	3: C → B
*2: A → C	2: B → A	1: A → B
1: B → C	1: C → A	2: A → C
*3: A → B	4: C → B	1: B → C
1: C → A	1: A → B	3: B → C
2: C → B	2: A → C	...
1: A → B	1: B → C	
*4: A → C	3: A → B	
1: B → C	1: C → A	
2: B → A	2: C → B	
1: C → A	↳ *6: A → C	
3: B → C	1: B → C	
1: A → B	2: B → A	
2: A → C	1: C → A	
1: B → C	3: B → C	
*5: A → B	1: A → C	
1: C → A	2: A → B	
2: C → B	1: C → A	
1: A → B	2: B → C	
3: C → A	1: A → C	
	4: B → A	
	1: C → B	
	2: C → A	
	1: B → A	

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno R começa com a solução para uma peça e já na solução da segunda peça escreve “fazer a solução anterior” tal qual na solução com três peças (Figura 46). Chega à uma “fórmula geral”, começando por “repetir o processo anterior para liberar a última peça”, o que na exposição chamamos de “cair no caso anterior”, no exemplo da anedota do balde e da lareira. Também, a solução é carregada de simbolismo, porque teve a criatividade de nomear as pilhas de “mãe” e “filha”, traçando uma relação de interdependência e hierarquia entre as estacas.

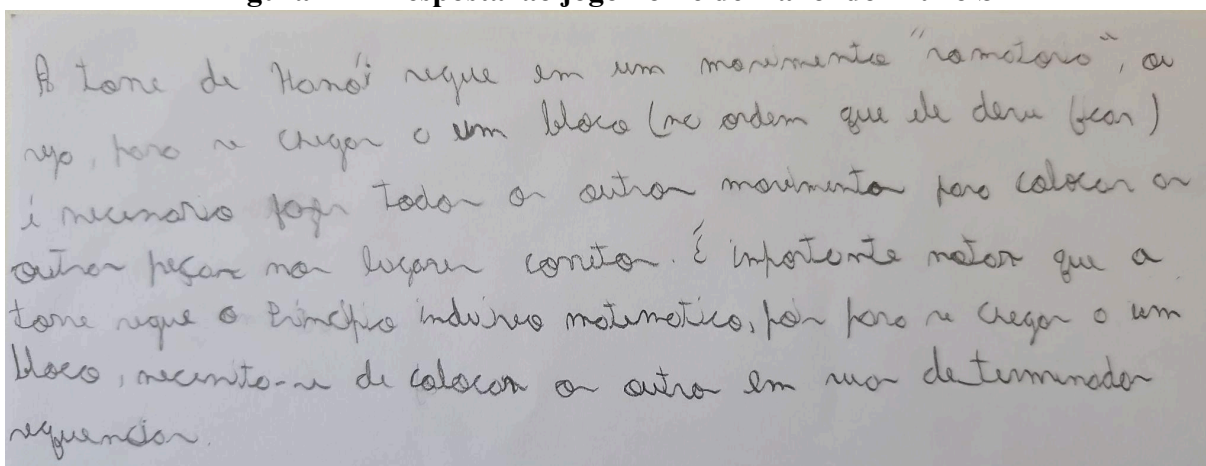
Figura 46 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno R



Fonte: dados da pesquisa

O Aluno S foi o único que mencionou o “princípio indutivo matemático” em sua resolução (Figura 47). Ainda que não tenha escrito uma solução pelo método da Indução, sua resposta admite que existe uma “determinada sequência” que desconhece. Retornaremos a essa resposta no capítulo seguinte, ampliando sua análise.

Figura 47 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno S



A Torre de Hanói segue em um movimento "repetitivo", ou seja, para se chegar a um bloco (na ordem que ele deve ficar) é necessário fazer todos os outros movimentos para colocar os outros peças no lugar correto. É importante notar que a torre segue o princípio indutivo matemático, pois para se chegar a um bloco, necessita-se de colocar os outros em uma determinada sequência.

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno D também trabalha com a ideia de Recorrência (Figura 48). Nas suas palavras, isso significa formar “pequenas pirâmides até o nosso objetivo”. Ele recorre às soluções anteriores de “1 bloco, depois de 2, 3, 4 ...” para encarar o problema com 7 discos por memória dessas soluções.

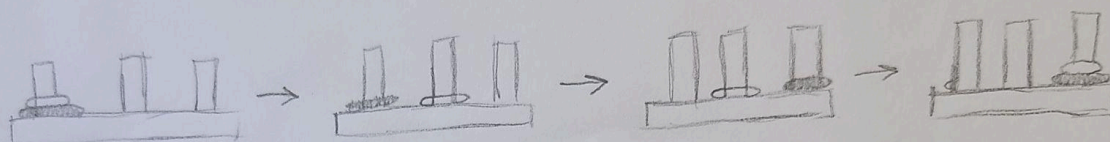
Figura 48 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno D

Nosso objetivo é mover a pirâmide, então formamos pequenas pirâmides até o nosso objetivo:

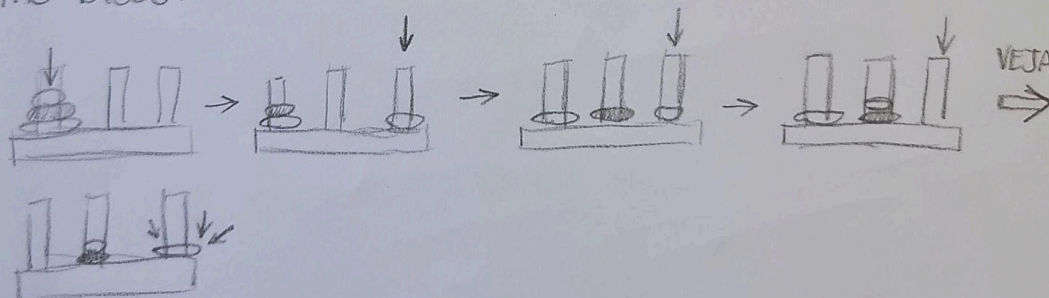
Com 1 bloco:



Com 2:



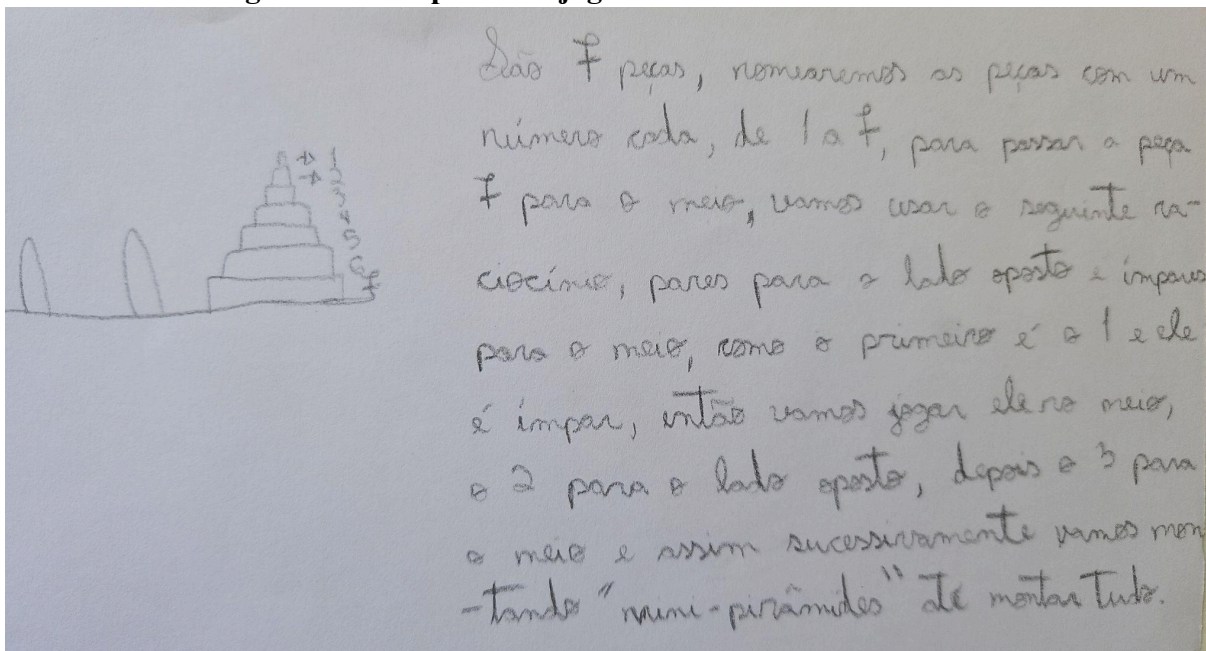
O que se seguiu para 1 e 2 blocos, se seguiu para 3, 4, 5... até os 7 blocos. Numa quantidade mínima de movimentos, se há um número ímpar de blocos numa pirâmide com o topo menor inclusive, a haste que ele é colocado, é a haste onde ficará o último bloco:



Através desse raciocínio, uma pirâmide de 7 blocos se torna uma de 1 bloco, depois de 2, 3, 4... até termos nossos 7 blocos em outra posição.

Fonte: dados da pesquisa

O Aluno T soluciona o jogo Torre de Hanói com 7 discos com um raciocínio semelhante ao do Aluno D. Após enumerar os discos, determinar que os discos “pares [vão] para o lado oposto e ímpares para o meio” e assim “vamos montando ‘mini-pirâmides’ até montar tudo” (Figura 49).

Figura 49 – Resposta ao jogo Torre de Hanói do Aluno T

Fonte: dados da pesquisa

Em geral, os estudantes ficaram muito surpresos com a utilização de um material didático concreto, recurso que possivelmente é pouco empregado no Ensino Médio. Segundo a teoria de David Tall, um matemático maduro, habituado com o mundo *formal-axiomático*, pode “retornar” para os mundos *corporificado* e *simbólico* trazendo a bagagem da Matemática Acadêmica nas suas resoluções (Tall, 2008). Em verdade, percebemos que nenhum aluno aplicou os conhecimentos matemáticos avançados que apresentamos nas suas respostas de modo explícito, ou seja, via escrita rigorosa. Entretanto, expressaram alguma nuance de raciocínio por Recorrência, competência empenhada na nossa sequência de atividades. Este fato está alinhado com a teoria de Tall, pois realmente os secundaristas não atingiram o Pensamento Matemático Avançado; porém algum desenvolvimento cognitivo foi proporcionado, dentro da Transição do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado, no que anunciamos em detalhe no capítulo 7.

Entendemos que o campo de pesquisa Ensino de Transição trata essencialmente do movimento dos estudantes do Médio para o Superior. Contudo, o professor também é uma personagem analisada pela literatura desse campo. À vista disso, o professor-pesquisador propõe reflexões sobre sua própria prática na próxima seção.

6.4 Autoavaliação do Projeto de Ensino

Acompanhando a essência da seção 2.2 – Dificuldades relacionadas ao professor e ao aluno –, decidimos relatar uma autoavaliação do professor/pesquisador sobre sua atuação em sala de aula neste Projeto de Ensino. Usaremos a primeira pessoa do singular para expor essa autopercepção.

Na primeira aula, estava presente a orientadora desta dissertação. A sua presença foi justificada por ser a coordenadora do Projeto de Ensino da instituição, o que requer sua presença, e pela sua familiaridade com os estudantes da mesma. O seu suporte para gerir os recursos didáticos, distribuir papéis, alterar o questionário da atividade Lei forte dos pequenos números adicionando mais uma opção de resposta, e outras atuações como “professor” durante a aula acarretaram um grande benefício: fiquei somente com o papel de “pesquisador”. Essa divisão de tarefas foi boníssima para que eu focasse na pesquisa em andamento, conversasse com os estudantes livremente e anotasse nossas falas. Francamente, nas duas aulas seguintes, quando fiquei desacompanhado, o exercício do duplo papel professor/pesquisador acarretou uma análise de dados menos eficaz do que eu esperava.

Outra autocrítica é em relação à velocidade do curso. Ainda que eu tenha lido Sierpinski et al. (2008) e entendido que o maior fator de frustração dos estudantes em cursos ponte é o ritmo (*pace*), afirmo que enquanto professor impus um ritmo acelerado. Justifico este infortúnio por conta da necessária execução, em sua maior parte, do planejamento do Projeto de Ensino. No terceiro dia, dedicado primeiro aos exercícios de Indução e depois à Torre de Hanói, quando passado uma hora e 15 minutos, avancei para o segundo momento para “dar tempo” de executar a atividade proposta para ter mais dados para minha pesquisa. Aconteceu que muitos estudantes não haviam terminado os exercícios, poucos (três) chegaram ao último. Para tentar enxergar a veracidade dessa impressão pessoal sobre o ritmo do curso ser acelerado, enviamos um questionário (Apêndice H) para os estudantes para avaliarem a experiência com uma pergunta específica para isso.

6.5 Avaliação do Projeto de Ensino pelos estudantes

Dias após a execução do Projeto de Ensino, demos voz às impressões que os estudantes tiveram sobre o curso. Tentamos elaborar perguntas que se alinhavam com as teorias apresentadas, a análise de dados, as expectativas e os objetivos desta dissertação. Ao todo, dos 30 estudantes que participaram do Projeto de Ensino, 25 responderam ao questionário (Apêndice H).

Naturalmente, as primeiras perguntas diziam respeito às preferências dos alunos em relação às atividades. Perguntamos: “Qual das atividades propostas você preferiu?”. Disponibilizamos as opções (juntamente com o resultado em parênteses): A lei forte dos pequenos números – 1ª aula (4%), Explicação do Problema dos quadrados – 2ª aula (36%), Exercícios de Indução – 3ª aula (32%) e Torre de Hanói – 3ª aula (28%). Percebemos que os participantes preferem uma aula de metodologia expositiva e dialogada.

Por outro lado, perguntamos “Qual das atividades propostas você gostou menos?” com as mesmas opções supracitadas. A atividade mais rejeitada foi A lei forte dos pequenos números (60%), seguido dos Exercícios de Indução (20%), da Explicação do Problema dos quadrados (12%) e Torre de Hanói (8%). Assim, a atividade menos rejeitada foi um jogo/material manipulativo.

Depois, perguntamos “De 1 a 5, sendo 1 muito difícil e 5 muito fácil, qual valor você atribuiria ao Projeto de Ensino?”. Obtivemos que 0% atribuíram a nota 1; 20% atribuíram a nota 2; 36% atribuíram a nota 3; 36% atribuíram a nota 4; 8% atribuíram a nota 5. Sendo assim, houve um aproveitamento das atividades propostas que, novamente, percorrem os mundos *corporificado* e *simbólico* para aproximar do *formal*, ou seja, da Matemática Acadêmica, revelando ser um percurso metodológico de ensino possível para o Ensino Médio.

Com o intento de analisar qual *imagem de conceito* melhor se aproximava do Princípio de Indução Matemática para cada estudante, perguntamos: “Qual imagem mental (analogia) você melhor associa ao Princípio de Indução Matemática?”. Disponibilizamos as opções (juntamente com o resultado em parênteses): Exemplo dos dominós (64%), Anekdota do balde e da lareira (24%), Problema dos quadrados (10%), Torre de Hanói (8%) e Não consigo fazer esse tipo de associação (4%). De fato, o Exemplo dos dominós foi o primeiro a ser apresentado e o mais referenciado pelo professor nas suas exposições.

Também, concebemos esta dissertação e o Projeto de Ensino para *estimular* os secundaristas a escolherem um curso de graduação na área de Exatas, ou pelo menos vislumbrarem a Matemática Acadêmica para tomar uma decisão sobre qual curso escolher. Sendo assim, perguntamos “Você considera que o projeto de ensino estimulou a sua decisão para a escolha de um curso de graduação na área de Exatas?”. Disponibilizamos as opções (juntamente com o resultado em parênteses): Concordo (52%); Não concordo, nem discordo (28%); Discordo (12%); Não estou decidido (8%). A maioria dos estudantes disseram que o Projeto de Ensino o *estimulou*, felizmente respaldando um dos nossos objetivos. Não pretendemos acompanhar os alunos ao adentrarem o Ensino Superior ou apurar se

ingressaram em cursos da área de Exatas ou seu desempenho, questões formuladoras de outras pesquisas.

Como descrito na autoavaliação da seção anterior, ficamos preocupados com o ritmo acelerado das atividades. Por isso perguntamos: “O que você achou da velocidade do curso, em relação ao andamento das atividades?”. Disponibilizamos as opções (juntamente com o resultado em parênteses): Muito lenta (0%); Lenta (12%); Adequada (72%); Rápida (12%); Muito rápida (4%). Isso demonstra que a maioria dos estudantes não se frustrou com o ritmo da aplicação das atividades como denunciado por Sierpinska et al (2008) ser a principal causa de *frustração* em *cursos ponte*. A nossa preocupação se deu mais por causa da literatura revisada do que pelo contexto real de aplicação.

Por fim, queríamos saber se já tinham conhecimento dos conteúdos em momentos anteriores ao do Projeto e perguntamos: “Em relação aos conteúdos de matemática que você aprende na escola, você acha que este projeto abordou conteúdos...”. Disponibilizamos as opções (juntamente com o resultado em parênteses): diferentes dos da escola e nunca vistos por mim (52%); alguns diferentes e alguns iguais aos da escola (36%); iguais aos da escola e já vistos por mim (12%). Assim, a estratégia de demonstração Princípio de Indução Matemática está ausente na sala de aula do Ensino Médio, como revela esta pesquisa e a investigação de Sena (2018) sobre livros didáticos. Como a Indução pertence à Matemática Acadêmica, consequentemente não está nos livros didáticos escolares e não é apresentada aos estudantes do Médio em larga escala.

Entretanto, apontamos para um caminho possível para o ensino de Indução no Secundário, combinando os três mundos da matemática de Tall (2008), em ritmo e conteúdo adequados para os estudantes, estimulando o ingresso no Terciário na área de Exatas.

Finalmente, uma pergunta discursiva não obrigatória do questionário de avaliação era “Há algo mais que você gostaria de compartilhar sobre o Projeto de Ensino para o seu aprimoramento? Se sim, escreva aqui.” Queremos destacar duas respostas recebidas.

– Acho interessante essa “parte extracurricular” que os alunos podem desfrutar, fazendo com que nós não fiquemos restritos apenas à grade / rotina do Ensino Médio. E em relação, justamente, ao projeto, considero muito notável, mesmo que não seja o intuito ensinar teoricamente / metodicamente, até mesmo porque são somente 3 dias, esse olhar mais abrangente que todo o ambiente oferece. De fato, faz com que o aluno veja e estude por

conta própria por causa desse “empurrão” que o projeto dá e, assim, ampliando a sua visão para a Matemática Acadêmica.

O comentário acima tem tudo que ver com nossos anseios para esta dissertação. O estudante destaca, com suas palavras, o que a literatura acadêmica fala sobre os *cursos ponte*: são oportunidades de ensino que fazem a ponte para o Terciário e a Matemática Acadêmica (“[...] ampliando a sua visão para a Matemática Acadêmica.”). Registra o desenvolvimento da autonomia (“[...] o aluno veja e estude por conta própria [...]”) tão necessário no período-contexto de Transição. Reconhece os limites temporais do Projeto de Ensino (“[...] mesmo que não seja o intuito ensinar teoricamente / metodicamente, até mesmo porque são somente 3 dias [...]”) tal qual a literatura revisada na seção 2.2.

Também, gostaríamos de destacar a seguinte resposta:

– Eu amei a explicação muito didática do professor e dos momentos super interessantes que foram proporcionados no curso. A forma que a indução matemática foi apresentada foi simplesmente incrível, diria que seria até mesmo incrivelmente capaz de conversar os que não gostam da área a ganhar mais esse conhecimento.

Nosso contentamento com este *feedback* foi principalmente na efetivação do *estímulo* intencional motivado pela Matemática Acadêmica para esse estudante e mais do que isso: almeja comunicar com os outros que “não gostam da área” para estimulá-los também.

A propagação desta inovadora apresentação da Matemática Acadêmica para secundaristas, *estimulando* seu ingresso em cursos de Exatas e promovendo uma Transição *mais suave* para o Ensino Superior motivou esta pesquisa e nos deu a oportunidade de avistar o desenvolvimento de uma metodologia de ensino nessa perspectiva. A seguir, apresentamos o desfecho desta jornada científica, expondo o que denominamos de *conceito cristalino imagético*, que, em teoria, é um pilar cognitivo que sustentará essa reverberação.

7 CONCEITO CRISTALINO IMAGÉTICO

Ao longo desta pesquisa, buscamos apresentar todo o processo de elaboração do nosso Projeto de Ensino (Recurso Educacional), destacando os referenciais teóricos que o sustentam, bem como o cenário de sua aplicação, acompanhado de análises descritivas e interpretativas.

Com base nesse percurso, e especialmente na teoria de David Tall, identificamos a possibilidade de ampliar essa abordagem teórica, contribuindo para trabalhos que visem o desenvolvimento de metodologias para o ensino de Matemática na Educação Básica, favorecendo uma Transição *mais suave* para o Ensino Superior, no que se refere à aprendizagem matemática e ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Dessa ampliação, elaboramos um novo conceito denominado de *conceito cristalino imagético*, que explicamos a seguir.

Primeiramente, todas as aulas e atividades concebidas em nosso Projeto envolvem *imagens de conceito* que remetem ao Princípio de Indução Matemática e à Recorrência. Isto é, intentamos construir uma estrutura cognitiva, consciente e/ou inconsciente, por imagens mentais, pelas suas propriedades e seus processos (Tall; Vinner, 1981). São elas: Exemplo dos dominós, Anekdota do balde e da lareira, Problema dos Quadrados e Torre de Hanói.

Para deixar mais claro nossas ideias, vamos relembrar o que são *conceitos cristalinos*: quando várias definições de um objeto, cada uma associada a uma propriedade do mesmo, coabitam o pensamento do matemático maduro sem conflitos cognitivos. Na verdade, neste estágio o matemático é capaz de selecionar a definição que mais convém para a situação que observa (Tall, 2012).

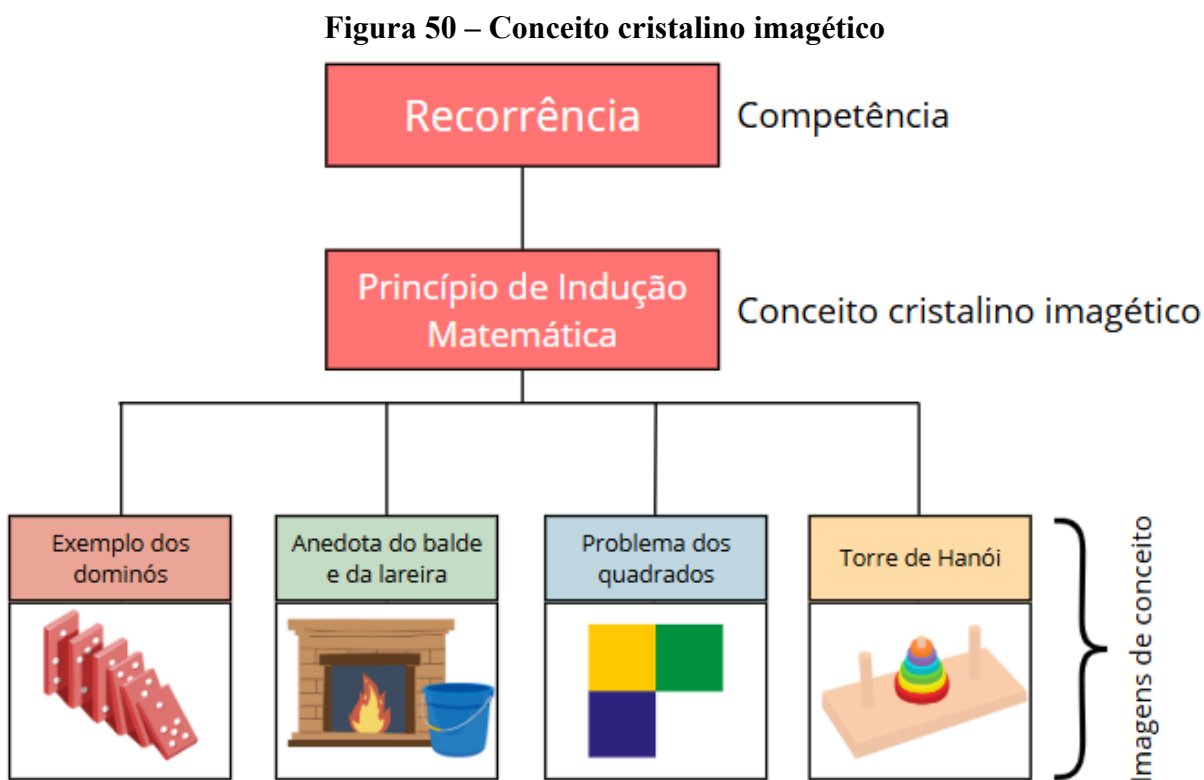
A concepção que apresentamos aqui nos ocorreu depois da revisão de literatura, elaboração das aulas do Projeto de Ensino, aplicação e análise das mesmas. Chegamos à conclusão que, dado os processos cognitivos envolvidos na realização/execução do Projeto, caminhamos para a construção de um *conceito cristalino imagético*. O que queremos dizer é que, por um lado, utilizamos veementemente *imagens de conceito* e, por outro, edificamos um *conceito cristalino*. Entretanto, não trabalhamos com propriedades do Princípio de Indução Matemática/Recorrência que seriam associadas a definições de um *conceito cristalino*.

O que fizemos foi trabalhar com *imagens de conceito* que seriam mentalmente associadas ao Princípio de Indução Matemática/Recorrência. Ou seja, o estudante, ao percorrer os passos que propusemos no Projeto de Ensino, compreende a Indução/Recorrência a partir de uma rede de *imagens de conceito* e, possivelmente, selecionará uma delas para relacioná-la com a situação a qual se depara.

Sendo assim, apresentamos nossa contribuição para a teoria do Pensamento Matemático Avançado de David Tall:

Um *conceito cristalino imagético* é uma rede de pré-definições ou percepções de definições relacionadas a uma entidade matemática, cada qual associada a uma *imagem de conceito*, todas equivalentes no que se refere à representação da mesma nos seus fundamentos.

A Figura 50 representa a rede de *imagens de conceito* que sustenta o *conceito cristalino imagético* do Princípio de Indução Matemática, relativo à competência Recorrência.

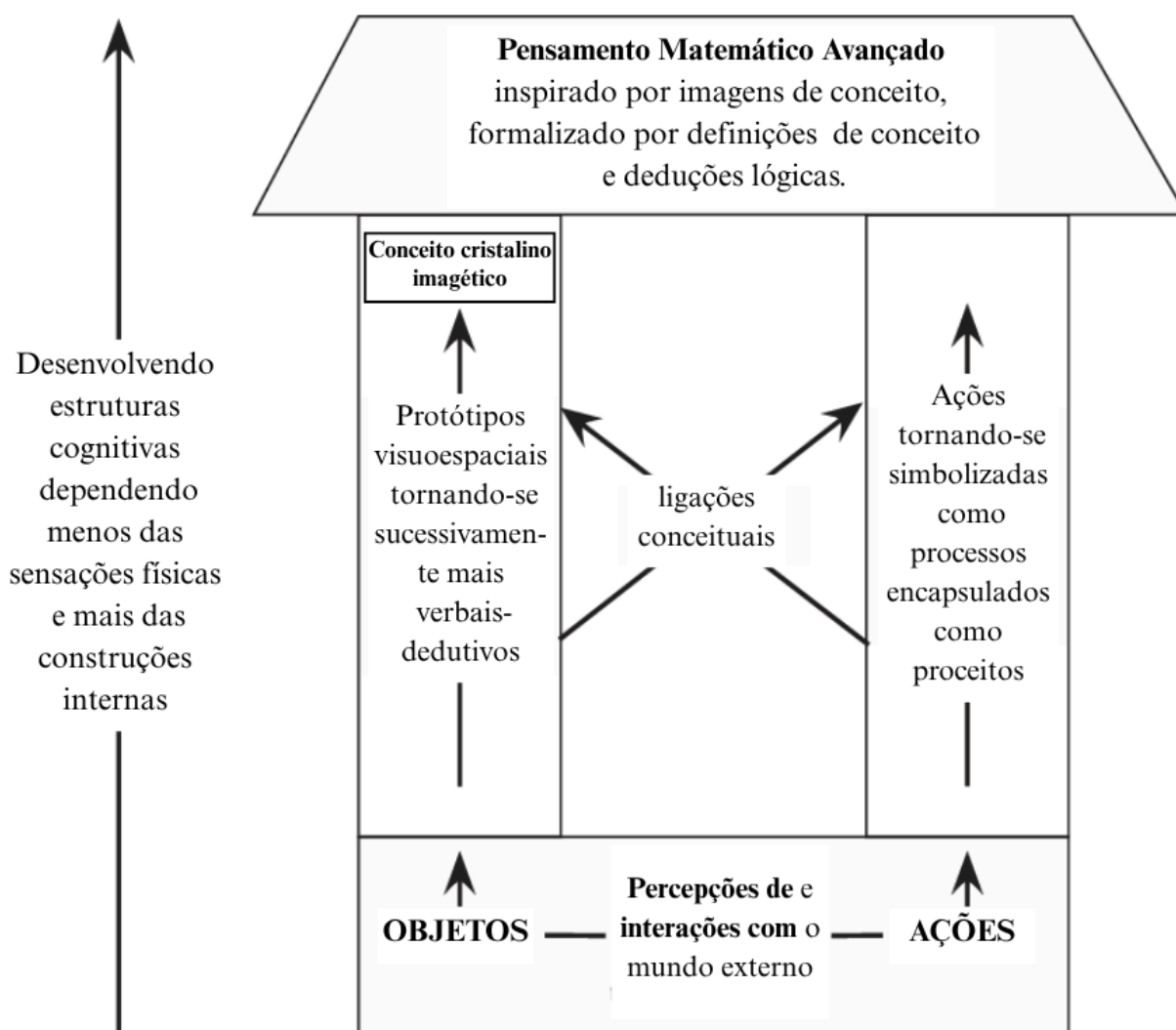


Fonte: elaborado pelo autor

Concomitante com a construção desse conceito, foi natural nos perguntarmos: Aonde se localiza a constituição de um *conceito cristalino imagético* na teoria de David Tall? Em qual momento do desenvolvimento do esquema mental ele está?

Adaptamos a Figura 1 (no capítulo 4 desta dissertação) na etapa da esquerda, “protótipos visuoespaciais tornando-se sucessivamente mais verbais-dedutivos”, temos o que seria o sítio do *conceito cristalino imagético* (veja a Figura 51). Ou melhor, a última etapa antes da composição do Pensamento Matemático Avançado.

Figura 51 – Conceito cristalino imagético no esboço do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático pesquisador



Fonte: elaborado pelo autor baseado em Tall et al. (1995)

Assumimos que entre a “inspiração por *imagens de conceitos*” e “formalização por *definições de conceito*” há esta etapa, o *conceito cristalino imagético*. Não somente uma inspiração, mas uma fundação para o Pensamento Matemático Avançado, cujos pilares

continuam sendo as *definições de conceito* que Tall determinou, fazendo uma analogia com a construção civil.

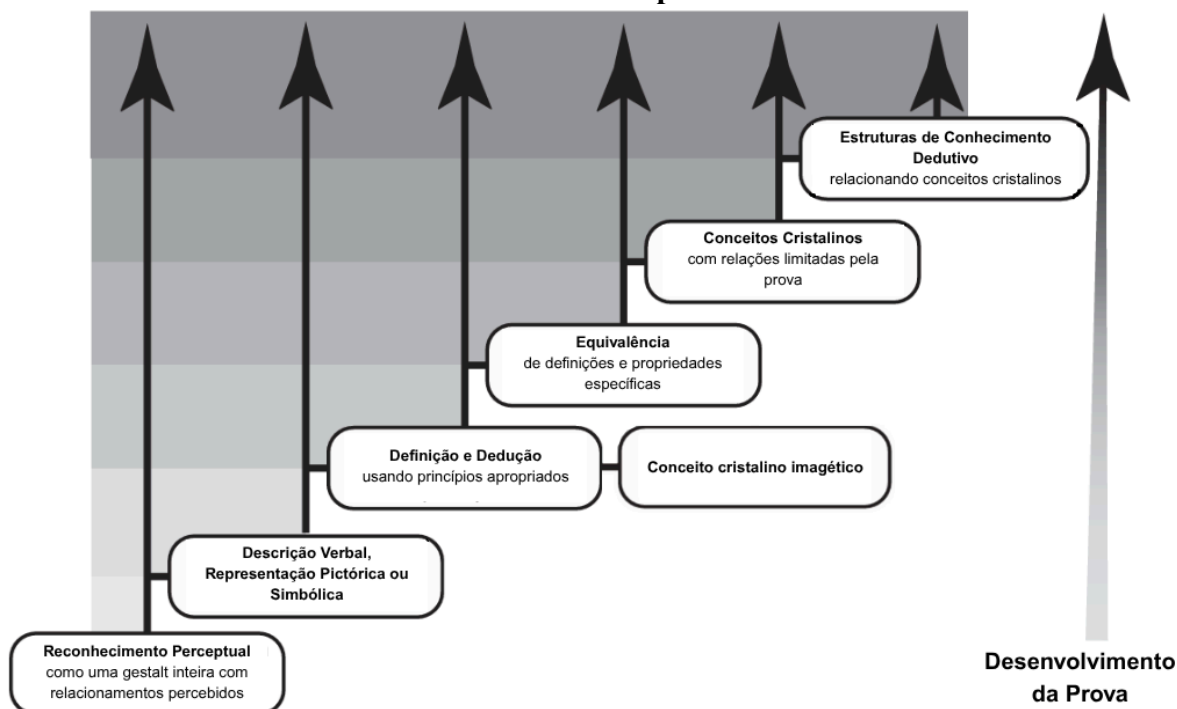
Assim, o *conceito cristalino imagético* é uma percepção sobre a definição, e não ela fechada. Também, não é só uma *imagem de conceito*, pois estas entram em conflito quando evocadas e acreditamos que há uma etapa em que esses conflitos já não ocorrem mais.

Chamaremos a porção da imagem conceitual que é ativada em um momento específico de imagem conceitual evocada. Em momentos diferentes, imagens aparentemente conflitantes podem ser evocadas. Somente quando aspectos conflitantes são evocados simultaneamente é que precisa haver algum senso real de conflito ou confusão. (Tall; Vinner, 1981, p. 2).¹⁴³

Por outro lado, no artigo de apresentação dos *conceitos cristalinos* (Tall et al., 2012), o autor expõe na Figura 2 (no capítulo 4 desta dissertação) a ampla maturação do desenvolvimento das estruturas de prova, com o *conceito cristalino* na quinta etapa, próximo ao nível mais elevado. Em contrapartida, os *conceitos cristalinos imagéticos* devem residir na segunda etapa, onde há a descrição verbal de propriedades – passo anterior à definição – frequentemente relacionadas a representações visuais ou simbólicas, para começar a pensar sobre propriedades e relacionamentos específicos. Adaptamos a Figura 2 para exibir um anexo à segunda etapa da maturação do desenvolvimento das estruturas de prova (Figura 52).

¹⁴³ No original: “ We shall call the portion of the concept image which is activated at a particular time the evoked concept image. At different times, seemingly conflicting images may be evoked. Only when conflicting aspects are evoked simultaneously need there be any actual sense of conflict or confusion.”

Figura 52 – Conceito cristalino imagético na ampla maturação do desenvolvimento das estruturas de prova



Fonte: elaborado pelo autor baseado em Tall et al. (2012)

Assim sendo, enquanto os *conceitos cristalinos* estão no grau cognitivo do Pensamento Matemático Avançado, definindo objetos, considerando uma rede de definições baseada em propriedades deles, os *conceitos cristalinos imagéticos* estão no grau cognitivo do Pensamento Matemático Elementar, descrevendo objetos, considerando uma rede de imagens mentais que não entram em conflitos.

Um indivíduo tendo tomado posse de um *conceito cristalino imagético* terá refinado as *imagens de conceito* e será capaz de realizar exercícios, diferença fundamental entre aquele que só “observa” uma *imagem de conceito*. O *conceito cristalino imagético* não rompe o elo visual, é um protótipo visuoespacial, retrata entidades matemáticas e não é uma reconstrução cognitiva significativa tal qual a abstração da Matemática Acadêmica.

Vimos na seção 4.1 que o ensino de *definições de conceitos* no início de um curso de Matemática Acadêmica para alunos imaturos não trará raízes cognitivas significativas (Tall, 1992), um dos problemas dos cursos de cálculo. Entretanto, começar por *imagens de conceitos* pode ser paralisante no processo de ensino e aprendizagem da mesma, porque o estudante pode não saber fazer exercícios. No caso do nosso Projeto de Ensino, o estabelecimento do *conceito cristalino imagético* é suficiente para realizar exercícios de Indução e permite uma percepção despojada desse conceito.

Dentre os participantes do Projeto de Ensino, o Aluno D foi o único com mencionou a Indução para solucionar o jogo Torre de Hanói (Figura 45). Ele registrou que “É importante notar que a torre segue o princípio indutivo matemático, pois para se chegar a um bloco, necessita-se de colocar o outro em sua determinada sequência”. Sendo assim, relacionou a Torre com a Indução. Percebe que o processo de resolução do jogo é semelhante ao processo algorítmico de execução da Indução. Utiliza a ideia de Recorrência e de Indução para pensar e depois redigir sua resposta, ainda que não tenha escrito formalmente os passos da Indução. Como o *conceito cristalino imagético* é uma pré-definição, o estudante poderá alcançar uma “pré-resposta” para situações-problemas da Matemática Acadêmica.

Um outro exemplo, ao ensinar limite, o professor provavelmente começará com sua definição formal e depois provará algumas propriedades. Também fará alguns exercícios como exemplos. Para os exercícios, o estudante se apegará às propriedades e às imagens mentais para realizá-los. Mas pode não ter apreendido a *definição de conceito* de limite para isso. Esse é um estágio cognitivo de transição do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado. É o que chamamos de estágio cognitivo do *conceito cristalino imagético*, que é um pouco mais maduro intelectualmente, pois o indivíduo vê os pedaços (*imagens de conceito*) como parte de um todo, ao passo que o imaturo só veria as *imagens de conceito* isoladamente.

Em suma, se a *definição de conceito* tem por premissa o uso de palavras (linguagem escrita matemática) para externar o conceito, temos que os conceitos definidos na proposição do Projeto de Ensino sobre o Princípio de Indução Matemática caminham pela informalidade, para que possam, no aspecto cognitivo, seguir para a formalidade. Porém, ainda se encontram em um estágio abaixo da concretização de um *conceito cristalino*. Por hora, encontram-se em um lugar do esquema onde as *imagens de conceito*, em formação na sequência de atividades, vão se aprimorando, chegando em um *conceito cristalino imagético*. Este carece de formalidade matemática na perspectiva da Matemática Acadêmica, mas não na perspectiva da Educação Matemática, que se preocupa, também, com os processos cognitivos que envolvem o desenvolvimento do pensamento matemático nos diferentes níveis de ensino.

Retomando a citação de Tall (1991), “O desenvolvimento desta intuição lógica refinada (imagens de conceito, acréscimo nosso) deveria ser um dos principais objetivos da educação matemática mais avançada” (p. 11, tradução nossa)¹⁴⁴ visando a construção de *conceitos cristalinos imagéticos* iniciais. Logo, o *conceito cristalino imagético* é uma bússola que aponta para a direção da Matemática Acadêmica na jornada escolar.

¹⁴⁴ No original: “The development of this refined logical intuition should be one of the major aims of more advanced mathematical education.”

Nossa pesquisa tem o objetivo de apresentar um possível caminho, respaldado teoricamente, sobre como os estudantes do secundário podem se aproximar da Matemática Acadêmica de modo a torná-la uma ferramenta essencial para o bom desempenho no Ensino Superior, particularmente nos cursos da área de Exatas. Neste momento, encontramos a possibilidade cognitiva que enredará a “adequação” metodológica inovadora que propomos para o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio.

Como as definições formais/axiomáticas, associadas às propriedades, podem ser um impeditivo para o aprendizado de conceitos matemáticos do *terceiro mundo* no Médio (Tall, 2008), acreditamos que ao trazê-los para o Ensino Médio devemos associá-los a várias *imagens de conceito* para constituir seu entendimento. A esse processo chamamos de conceber um *conceito cristalino imagético*.

Uma metodologia de ensino é constituída de sustentações teóricas didático-pedagógicas que versam sobre a relação professor-aluno na sala de aula, o formato e a formatação da sala de aula, a avaliação da mesma, a materialidade utilizada (física e/ou digital) e, sobretudo para nosso escopo, a ênfase neurocognitiva. Esse novo passo do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, a aprendizagem de *conceitos cristalinos imagéticos*, têm o potencial de ser a raiz para uma metodologia inovadora, voltada para o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio. Há de se discutir esses múltiplos elementos que compõem uma metodologia de ensino. Todavia, a aplicação e análise dos resultados prévios indicam a possibilidade de se fazer um Ensino de Transição com esse objetivo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa tem como propósito encontrar um caminho possível para que o ensino da Matemática Acadêmica no Ensino Médio contribua para uma Transição mais *suave* para o Ensino Superior.

Nossa revisão de literatura se apoiou em três bases teóricas, que se mostraram satisfatórias para nossa investigação. Começamos pelo campo Ensino de Transição, fundamentado nos trabalhos de Gueudet (2008) e Gueudet et al. (2016), demarcando a Transição do Ensino Médio para o Superior como um período-contexto entre dois anos antes e dois anos depois do ingresso na graduação. Este contexto pode ser analisado pelas pesquisas desse campo por diferentes abordagens: epistemológica, cognitiva, institucional, didática e sociocultural. Sendo assim, o Ensino de Transição envolve a preparação e adaptação dos estudantes para as mudanças no processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Esse campo consiste em descrever as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e propõem ações didáticas para suavizá-las.

Ademais, dissertamos sobre a Transição epistemológica que ocorre na passagem do Secundário para o Terciário. Estudamos concepções sobre Matemática Acadêmica e Escolar, tendo por principal referência os trabalhos de Moreira e David (2008, 2011) e David et al. (2013). Para esses, a Matemática Escolar é um corpo de conhecimento concebido pelos professores de matemática para o seu fazer pedagógico-didático, constituído pelos saberes profissionais, currículo, avaliação, caracterizado por ser flexível, instrucional, entendível, algorítmico, caminha do concreto (cotidiano, materiais manipuláveis) para o abstrato (conteúdos escolares, aritmética, álgebra, geometria). Já a Matemática Acadêmica é um corpo de conhecimento científico concebido pelos matemáticos profissionais, constituído de teoremas, axiomas, provas, demonstrações, etc. caracterizado por ser lógico-dedutivo, rigoroso, formal, caminha do abstrato (matemática pura) para o concreto (matemática aplicada). Além disso, agregamos concepções sobre Matemática Acadêmica e Escolar interrelacionando com as outras bases teóricas, Ensino de Transição e Pensamento Matemático Avançado

Essa mudança epistemológica implica em uma Transição cognitiva, do Pensamento Matemático Elementar (Matemática Escolar) para o Pensamento Matemático Avançado

(Matemática Acadêmica). Nos debruçamos na teoria de David Tall para entender as mudanças de estágios cognitivos da infância à maturidade intelectual do matemático. Esses estágios foram descritos pelo autor como mundos, territórios cognitivos, na seguinte ordem: *conceitual-corporificado*, *proceptual-simbólico* e *axiomático-formal*. Portanto, o auge do pensamento matemático é formular ideias, definições formais (*definições de conceito*), provas, teoremas, entender a linguagem matemática, *proceitos* e *conceitos cristalinos*. Aliás, o matemático maduro pode “retornar” a situações-problemas dos mundos *corporificado* e *simbólico* com a preeminente linguagem matemática *axiomática-formal*.

As três bases teóricas revisadas e apresentadas sustentaram a formulação de um Recurso Educacional, o Projeto de Ensino intitulado *Princípio de Indução Matemática: aproximação com a Matemática Acadêmica*. Esse conteúdo foi escolhido por ter uma dupla personalidade: é um algoritmo, uma sequência de passos, como na Matemática Escolar/Pensamento Matemático Elementar e também é uma *intuição lógica*, principalmente no passo indutivo, como na Matemática Acadêmica/Pensamento Matemático Avançado. Por conseguinte, é um tópico de Transição, que faz ponte de um mundo para o outro, tal como o objetivo do nosso *curso ponte*.

Para o Projeto de Ensino, selecionamos estudantes do Ensino Médio Técnico do CEFET-MG que manifestaram o desejo de ingressar no Ensino Superior em um curso de graduação na área de Ciências Exatas. O contexto de aplicação é privilegiado por causa da oferta desses dois níveis de escolaridade, Médio e Superior, e pelo seu caráter alinhado com as Exatas. Os participantes eram alunos com bom desempenho em Matemática Escolar e que buscavam projetos para além dela, com finalidade de adquirir habilidades e técnicas de resolução de problemas matemáticos.

Analizamos suas produções matemáticas via protocolos de pesquisa, que eram listas de situações para o registro das soluções das atividades das três aulas, e verbalizações que aconteciam em sala, entre os alunos e entre o aluno e o professor-pesquisador, através de um diário de bordo. As análises tinham por base o nosso principal referencial de cunho cognitivo, a teoria do Pensamento Matemático Avançado de David Tall.

Finalmente, identificamos ao longo deste percurso investigativo um anexo à teoria de Tall. Chamamos de *conceito cristalino imagético* uma rede de pré-definições ou percepções de definições relacionadas a uma entidade matemática, cada qual associada a uma *imagem de conceito*, todas equivalentes no que se refere à representação da mesma nos seus fundamentos. Consideramos que o ensino de *conceitos cristalinos imagéticos* é um caminho possível para o ensino de conteúdos da Matemática Acadêmica no contexto do Ensino Médio.

Por conseguinte, favorecendo uma Transição *mais suave* para o Ensino Superior, uma vez que faz um ponte epistemológica e cognitiva.

Esse modelo de Ensino de Transição que propomos, dedicado ao ensino de *conceitos cristalinos imagéticos*, ainda é incipiente. Para o seu desenvolvimento, é preciso engendrar uma metodologia de ensino que o acompanhe. A base cognitiva dessa metodologia foi delineada nesta dissertação. Contudo, a didática completa de uma inovadora metodologia de ensino que intenta aluminar a Matemática Acadêmica para secundaristas, fazendo uma ponte entre o Ensino Médio e o Superior para *suavizar* essa passagem, é o prelúdio de uma nova pesquisa.

Esperamos que esta pesquisa possa levar a comunidade acadêmica a lançar um novo olhar para a Transição, com seus conflitos e adventos que só o desconforto da mudança podem suscitar. Toda crise é uma oportunidade de reflexão acerca do passado, repassar os caminhos que já não servirão mais como trilha para o futuro, rever posicionamentos e convicções coerentes com o momento anterior, em prol de um avanço, aprimoramento e desenho de um futuro melhor. Como dizia Eduardo Galeano:

A utopia está lá no horizonte.

Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos.

Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos.

Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei.

Para que serve a utopia?

Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.

A essência da Transição é semelhante à da utopia: uma caminhada que não deixa de caminhar. A Transição é o entremeio de um ciclo que se fecha para um novo ciclo que se abre. Entre as portas da Educação, a antessala da Transição propicia seu maior objetivo: transformação pessoal e social.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special?. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BRASIL. Conselho Nacional de Saúde. **Resolução nº 466, de 12 de dezembro de 2012**.

Brasília: CNS, 2012. Disponível em:

http://www.conselho.saude.gov.br/web_comissoes/conep/index.html. Acesso em 15 jan. 2025.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

_____. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 9394, de 20 de Dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MED, 1996.

BORGES, W. S. A Navalha de Ockham: Um Princípio Lógico de Parcimônia. **Scintilla**, v. 19, n. 1, 2022.

CEFET-MG. Conselho de Educação Profissional e Tecnológica. Resolução nº 20/2014, de 13 de agosto de 2014. Dispõe sobre o Regulamento Institucional de Projetos de Ensino. Belo Horizonte: Conselho Universitário, 2014. Disponível em:

https://www.dept.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/80/2024/08/RESOLU%C3%87%C3%83O-CEPT_CEPE_CEFET-MG-N%C2%BA-20-DE-13-DE-AGOSTO-DE-2024.pdf. Acesso em: 14 fev. 2025.

CEFET-MG. Cálculo com Funções de uma Variável Real: plano de ensino. Belo Horizonte, 2023a. Disponível em:

https://www.dm.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/159/2023/08/PE_DM_CFUVR-ASSINADO.pdf. Acesso em 03 de mar. de 2025.

CEFET-MG. Cálculo com Funções de uma Variável Real I: plano de ensino. Belo Horizonte, 2023b. Disponível em:

<https://www.quimatecnologica.bh.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/198/2023/07/DM-C%C3%A1lculo-com-Fun%C3%A7%C3%B5es-de-v%C3%A1rias-Vari%C3%A1veis-Reais-I.pdf>. Acesso em 03 de mar. de 2025.

CEFET-MG. Geometria Analítica e Álgebra Linear: plano de ensino. Belo Horizonte, 2023c. Disponível em:

<https://www.quimatecnologica.bh.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/198/2024/07/OB02-01-Geometria-Anal%C3%ADtica-e-%C3%81lgebra-Linear.pdf>. Acesso em 03 de mar. de 2025.

CEFET-MG. Integração e Séries: plano de ensino. Belo Horizonte, 2023d. Disponível em:

https://www.eng-materiais.bh.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/189/2024/03/2P_G00INSE1.01-Integracao-e-Series-ASSINADO.pdf. Acesso em 03 de mar. de 2025.

CEFET-MG. Relatório de gestão ano base: 2023. Belo Horizonte, 2024. Disponível em: https://www.audit.cefetmg.br/wp-content/uploads/sites/169/2024/03/RG2023-2024_pos_CD_completo.pdf. Acesso em 14 de mar. de 2025.

CLARK, M.; LOVRIC, M. Suggestion for a theoretical model for secondary-tertiary transition in mathematics. **Mathematics education research journal**, v. 20, n. 2, p. 25-37, 2008.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DAVID, M. M. M. S.; MOREIRA, P. C.; TOMAZ, V. S. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação/School Mathematics, Academic Mathematics and Everyday Mathematics: A network of relations under investigation. **Acta Scientiae**, v. 15, n. 1, p. 42-60, 2013.

DICTIONARY, Oxford Latin. **Oxford Latin Dictionary**. Londres: Oxford University Press, 1968.

ESTÍMULO. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2025. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/estimulo/>. Acesso em: 12 de mai. de 2025.

FERREIRA, D. B.; OLIVEIRA, E. P de. **A matemática no jogo de Torres de Hanói**. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

FOMIN, D. et al. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GUEUDET, G. Investigating the secondary–tertiary transition. **Educational Studies in Mathematics**. Vol. 67(3), 237-254, 2008.

GUEUDET, G.; BOSCH, M.; KWON, O. N.; VERSCHAFFEL, L. **Transitions in mathematics education**. Hamburgo: Springer Nature, 2016.

GUY, R. K. The strong law of small numbers. **The American Mathematical Monthly**, v. 95, n. 8, p. 697-712, 1988.

GUZMÁN, M. de. et al. Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In: **Proceedings of the international Congress of Mathematicians**. Berlin, Documenta Mathematica extra volume ICM, 1998. p. 747-762.

HERINGER, R.; FERREIRA, R. Análise das principais políticas de inclusão de estudantes negros no ensino superior no Brasil no período 2001-2008. **Observatório da Jurisdição Constitucional**. Brasília, v. 1, n. 1, ano 5, 2011/2012.

LALANDE, A. **Vocabulaire technique et critique de la philosophie**. Paris: Presses Universitaires de France, 1977.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, n. 1, p. 23-40, 2008.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática Acadêmica e Matemática Escolar: dissonâncias e conflitos. In: LOPES, E. M. T.; PEREIRA, M. R. (org.). **Conhecimento e inclusão social: 40 anos de pesquisa em Educação**. Belo Horizonte: Editora UFMG, p. 193-224, 2011.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

NETO, L. D. M. **Quebra-Cabeça Pentaminós**. out. 2016. Disponível em: <https://super.abril.com.br/comportamento/quebra-cabeça-pentaminos/>. Acesso em: 17 dez. 2024.

OLIVEIRA, M. C. A. de; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim Gepem**, n. 61, p. 125-137, 2012.

OLIVEIRA, A. S. R. de; SILVA, I. R. Políticas de inclusão social no ensino superior brasileiro: um estudo sobre o perfil socioeconômico de estudantes nos anos 2010 a 2012. **Educação em Revista**. Belo Horizonte, n. 33, p. e153900, 2017.

PEREIRA, P. C. A. **O Princípio da Indução Finita**: Uma abordagem no Ensino Médio. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, 1995.

SENA, C. O. de R. **Demonstrações no ensino médio**. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer ciclo universitario. In: HIGUERAS, L. R.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. (Eds.). **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2005, p. 757–766. Disponível em:

https://mdx.cat/bitstream/handle/10503/30471/CITAD1_Serrano_Bosch_Gascon_2005.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 13 jun. 2024.

SIERPINSKA, A.; BOBOS, G.; KNIPPING, C. Sources of students' frustration in pre-university level, prerequisite mathematics courses. **Instructional Science**, v. 36, p. 289-320, 2008.

STEWART, J. **Cálculo, volume 2**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: **PME conference**. The Program Committee of the 18Th PME Conference, 1995. p. 1-61.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1991, p. 3-21.

TALL, D. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 20, p. 495-511, 1992.

TALL, D. The transition to formal thinking in mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.

TALL, D. et al. Cognitive development of proof. **Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study**, p. 13-49, 2012.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

THURSTON, W. P. Mathematical Education. **Notices of the American Mathematical**, v. 37 n. 7, p. 844-850, 1990.

UEMG. Projeto Pedagógico do Curso. Carangola: Licenciatura em Matemática, 2024. Disponível em: <https://intranet.uemg.br/comunicacao/arquivos/Arq20161223154939PP.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2025.

UFMG. Iniciação à Matemática: ementa. Belo Horizonte: Curso de Matemática, 2013a. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/wp-content/uploads/2013/05/Inicia%C3%A7%C3%A3o-%C3%A0-Matem%C3%A1tica-MAT2111.pdf>. Acesso em 06 de jan. de 2025.

UFMG. Resolução de Problemas: ementa. Belo Horizonte: Curso de Matemática, 2013b. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/wp-content/uploads/2013/05/Resolu%C3%A7%C3%A3o-de-Problemas2.pdf>. Acesso em 06 de jan. de 2025.

VIDIGAL, A. et al. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.

WAINER, J.; MELGUIZO, T. Políticas de inclusão no ensino superior: avaliação do desempenho dos alunos baseado no Enade de 2012 a 2014. **Educação e Pesquisa**. São Paulo, v. 44, p. e162807, 2018.

WOOD, L. The secondary-tertiary interface. In: **The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001. p. 87-98.

APÊNDICE A – Projeto de Ensino



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Projeto de Ensino

Título:

Princípio de Indução Matemática: aproximação com a Matemática Acadêmica

Coordenador: Fernanda Aparecida Ferreira

Coordenador Adjunto: Não há.

Colaboradores:

Arthur Gomes Araújo

Monitores:

Não há.

Colaboradores Externos:

Não há.

Resumo (máximo 300 palavras)

Este projeto de ensino tem por objetivo oferecer aos estudantes da Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM) dos campi de Belo Horizonte, a oportunidade de participar de um curso, ministrado em três encontros, sobre o Princípio de Indução Matemática. O Curso é parte integrante de um produto educacional desenvolvido para uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). A finalidade do curso é desenvolver um estágio – o raciocínio indutivo – da evolução do Pensamento Matemática Elementar/Matemática Escolar para o Pensamento Matemático Avançado/Matemática Acadêmica, tendo como referencial teórico David Tall (Colocar ano). Por fim, com esse projeto pretende-se desencadear uma nova área na pesquisa educacional, o Ensino de Matemática Acadêmica durante o Ensino Médio, a fim de que a transição dos estudantes para o Ensino Superior seja mais suave, com menos reprovações nos cursos iniciais das áreas de Ciências Exatas, acelerar a adaptação ao novo contrato didático estabelecido na Graduação e desenvolver a autonomia dos educandos no aprender e produzir Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática Acadêmica, Indução Matemática, Ensino de Transição.

Período de vigência: Novembro de 2024 a Fevereiro de 2025

Introdução

O Ensino de Transição de Matemática abrange a preparação e adaptação dos alunos para as transformações no processo de ensino e aprendizagem – incluindo aspectos epistemológicos, cognitivos, institucionais e socioculturais, entre outros – à medida que passam do Ensino Médio para o Ensino Superior, visando reconhecer as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e fornecer suporte para essa transição.

Nossa preocupação surgiu com base na experiência e levando em conta diversos estudos sobre as dificuldades enfrentadas na aprendizagem de Matemática no início da graduação. Nos cursos das Ciências Exatas, a transição da Matemática Escolar para a Matemática Acadêmica é frequentemente uma experiência desafiadora e angustiante para muitos estudantes. De acordo com De Oliveira e Raad (2012), há uma cultura histórica de altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Diante desse cenário, a questão motivadora do dissertação que acompanha este projeto de ensino é: “O ensino da Matemática Acadêmica no Ensino Médio pode contribuir para uma Transição de maneira mais suave, sendo um estímulo ao ingresso e contribuindo para a permanência no Ensino Superior?”

Nosso estudo busca contribuir para a Educação propondo uma discussão teórica e estratégias didático-pedagógicas inovadoras para o ensino de Matemática Acadêmica no secundário. Ao investigar os desafios dessa possibilidade, esperamos facilitar o processo de transição, estimular o ingresso em cursos da área de exatas, desenvolver a dimensão cognitiva do aluno e diminuir os índices de reprovação e evasão no Ensino Superior.

Isto posto, o projeto de ensino destinado aos estudantes da EPTNM do CEFET-MG, dos campi de Belo Horizonte, tem como foco principal de estudo o tópico de Matemática Acadêmica: o Princípio de Indução Matemática. Este tópico, enquanto uma estratégia de demonstração, é uma das mais utilizadas na Matemática Acadêmica. O CEFET-MG é um ótimo locus para a realização do curso, uma vez que oferta tanto o Ensino Médio Técnico e Ensino Superior, oportunizando aos estudantes o aprimoramento de seus conhecimentos matemáticos, este base para maioria dos cursos ofertados pela Instituição.

Metodologia e recursos didáticos

Para que se possa organizar, gerenciar e preparar o curso Indução no contexto do CEFET-MG, nos campi Belo Horizonte, a equipe proponente do Projeto se responsabilizará em:

- 1) Divulgar as inscrições para os alunos do Ensino Médio Técnico Integrado (EPTNM);
- 2) Criar mecanismos para o cadastramento de estudantes de interesse;
- 3) Elaborar materiais didáticos como listas de exercícios, apresentações em slides, jogo Torre de Hanói;
- 4) Criar e gerenciar um arquivo no Google Drive com os materiais didáticos do curso;
- 5) Assumir ações de logística para realização das três aulas nos campi de Belo Horizonte;
- 6) Emitir relatório de desempenho e certificado de participação dos estudantes dos campi de Belo Horizonte.

Serão ofertadas 30 vagas para este projeto de ensino.

O curso ocorrerá na Campus Nova Gameleira, portanto é necessário a reserva de sala de aula com datashow.

Resultados esperados

Como resultados provenientes da execução do Projeto de Ensino, espera-se que os estudantes possam avançar um estágio no desenvolvimento do Pensamento Matemática Avançado, que é o aprender e fazer Indução em Matemática. Também, para a área científica da Educação Matemática, esse projeto demonstrará as possibilidades do ensino-aprendizagem de Matemática Acadêmica no Ensino Médio. Espera-se, ainda, que os resultados alcançados pelos estudantes, sejam fonte de estímulo para ingresso e permanência nos cursos de graduação em Ciências Exatas, inclusive ofertados pelo CEFET-MG. Assim, o curso poderá contribuir, de certa forma, para melhorar os índices de rendimento dos estudantes na disciplina de matemática nos cursos técnicos e, futuramente, nas disciplinas iniciais da graduação, como Cálculo Diferencial e Integral.

Cronograma

Serão três aulas aos sábados, dias 18/01/2025, 25/01/2025 e 01/02/2025, das 10:00 às 12:00.

1ª aula (18/01/2025): Apresentação do curso: A lei forte dos Pequenos Números (GUY, 1988);

2ª aula (25/01/2025): Construção do Princípio de Indução Matemática;

3ª aula (01/02/2025): Exercícios sobre o Princípio de Indução Matemática.

Recursos necessários

Para a realização desse Projeto de Ensino será necessário a reserva de salas de aula no campus Nova Gameleira nos dias em que ocorrerão os encontros, esses estabelecidos no cronograma. Além disso, serão necessários os recursos tecnológicos digitais disponíveis no mesmo, como datashow e computador.

Referências

DAVID, M. M.; et al. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação/School Mathematics, Academic Mathematics and Everyday Mathematics: A network of relations under investigation. *Acta Scientiae*, v. 15, n. 1, p. 42-60, 2013.

DE OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. *Boletim GEPEM*, n. 61, p. 125-137, 2012.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.

GUY, R. K. The strong law of small numbers. *The American Mathematical Monthly*, v. 95, n. 8, p. 697-712, 1988.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1991, p. 3-21.

WOOD, Leigh. The secondary-tertiary interface. In: *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001. p. 87-98.

APÊNDICE B – Questionário de seleção de estudantes para a participação no Projeto de Ensino

Princípio de Indução Matemática

Este questionário faz parte de uma pré-seleção de alunos/voluntários do Ensino Médio que tenham interesse em Matemática para a realização de um projeto de ensino intitulado "Princípio de Indução Matemática: aproximação com a Matemática Acadêmica". A finalidade do curso é aprimorar a intuição Matemática para que a entrada no Ensino Superior seja mais fácil, principalmente nos cursos de Exatas, promovendo a transição da matemática elementar para uma matemática mais acadêmica.

O curso provém de uma pesquisa de Mestrado em Matemática (Profmat/Cefet-MG). Este questionário trata-se apenas de uma pré-seleção. Nenhum dos dados levantados com este questionário serão usados na pesquisa.

O curso ocorrerá aos sábados (18/01/2025, 25/01/2025 e 01/02/2025), das 10:00 às 12:00.

Para que possamos fazer a seleção em tempo hábil para a realização do curso, favor responder este questionário, impreterivelmente, até 09/01/2025.

Agradecemos. Arthur Gomes (PROFMAT) e Fernanda A. Ferreira (DM)

[Faça login no Google](#) para salvar o que você já preencheu. [Saiba mais](#)

* Indica uma pergunta obrigatória

E-mail *

Seu e-mail

1) Nome completo: *

Sua resposta

2) Curso Técnico *

- ☐ Edificações
- ☐ Eletromecânica
- ☐ Eletrônica
- ☐ Eletrotécnica
- ☐ Equipamentos Biomédicos
- ☐ Estradas
- ☐ Informática
- ☐ Hospedagem
- ☐ Mecânica
- ☐ Mecatrônica
- ☐ Meio Ambiente
- ☐ Química
- ☐ Redes de Computadores
- ☐ Trânsito

3) Série do Ensino Médio: *

- ☐ 1ª série
- ☐ 2ª série
- ☐ 3ª série

4) Contato de número de telefone/WhatsApp: *

Sua resposta

5) Contato de e-mail: *

Sua resposta

6) Por que você está interessado em participar do curso? *

- ☐ Aprofundar conhecimentos matemáticos e desenvolver habilidades de resolução de problemas.
- ☐ Melhorar desempenho em Matemática para o vestibular/ENEM.
- ☐ Aumentar as chances de sucesso na vida universitária (graduação/faculdade).
- ☐ Preparar-se para carreiras profissionais que exigem muita Matemática.
- ☐ Aproveitar a oportunidade de aprendizado oferecida por um curso baseado em pesquisa de Mestrado.
- ☐ Não entendi bem do que se trata esse curso.

7) Quais são suas expectativas em relação a este curso de indução? *

- ☐ Aprender um conteúdo novo.
- ☐ Melhorar meu desempenho em Matemática.
- ☐ Aprimorar meu conhecimento sobre técnicas de resolução de problemas matemáticos.
- ☐ Não tenho expectativas.

8) Em uma escala de 1 a 10, com 1 sendo o desempenho ruim e 10 desempenho excelente, como você avaliaria seu desempenho na disciplina Matemática durante sua vida escolar? *

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

9) Você já participou de algum curso de Matemática fora da escola anteriormente? Se sim, descreva sua experiência. *

Sua resposta

10) Quais são seus objetivos acadêmicos e profissionais a longo prazo? *

Sua resposta

11) Há algo mais que você gostaria de compartilhar sobre si mesmo que possa ser relevante para sua participação no projeto?

Sua resposta

Obrigado por responder ao questionário. Enviaremos o resultado da seleção por e-mail.

APÊNDICE C – Listas de situações do Projeto de Ensino



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$,
 $2^{2^4} + 1 = 65537$ e assim por diante são primos.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica
Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo
Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. Verificamos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números

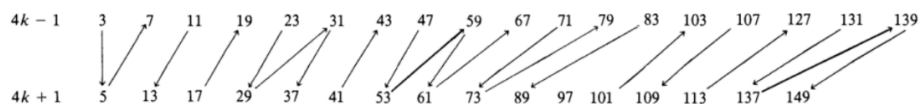


Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 3: Sabe-se que exceto o 2, que é o primo mais diferente, todos os outros primos têm a forma $4k - 1$ ou a forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. O intervalo $[1, 10]$ contém 2 primos da forma $4k - 1$ (o 3 e o 7) e só 1 da forma $4k + 1$ (o 5). O intervalo $[1, 32]$ contém 6 primos da forma $4k - 1$ e só 4 da forma $4k + 1$ (verifique). Em qualquer intervalo $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de primos da forma $4k + 1$ é menor ou igual aos do que da forma $4k - 1$. Dizemos que os da forma $4k - 1$ vencem a “corrida dos números primos”.





Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 4: Um número natural tem um ou mais fatores primos da forma $4k + 1$ do que da forma $4k - 1$ ou a mesma quantidade de cada uma das formas. Por exemplo, 21 tem dois do primeiro tipo (3 e 7) e dois do segundo (1 e 21), enquanto 25 tem todos os três (1, 5, 25) do segundo tipo.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números

Prof. Arthur Gomes Araújo

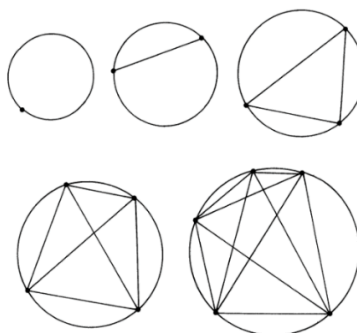
Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira



Estudante: _____

Situação 5: Os cinco círculos abaixo tem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ pontos marcados sobre sua circunferência. Em cada um deles, todos os pontos são ligados a todos os outros, de modo que as cordas determinam regiões. Observação: três das n cordas não concorrem num único ponto, ou seja, cada grupo de 4 pontos tem apenas uma interseção. Contando o número de regiões nas quais as cordas dividem cada círculo.

Número de pontos	1	2	3	4	5	...	n
Número de regiões	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}





Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica
Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo
Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 6. Os números 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, etc. são todos primos.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n - 1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$3! - 2! + 1! = 5$$

$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$

$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$

$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$

$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$

$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 8. Quando você usa o método de Euclides para mostrar que existem infinitos primos,

$$2 + 1 = 3$$

$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

$$(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 231$$

que nem sempre produz números primos

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 = 510511 = 19 \times 97 \times 277$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 = 9699691 = 347 \times 27953$$

mas se tomarmos o próximo primo, a diferença com o produto é sempre um primo:

$$5 - 2 = 3$$

$$11 - (2 \times 3) = 5$$

$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$

$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$

$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$

$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$

$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$

$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23.$$



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 1: a lei forte dos pequenos números

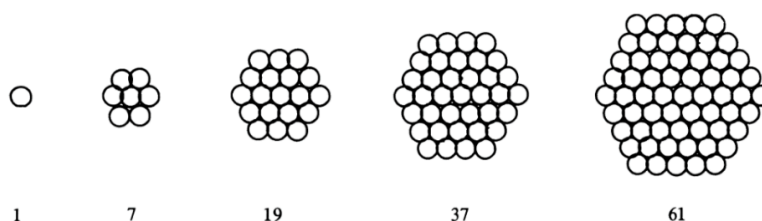


Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 9. A sequência de números hex (assim chamados para distingui-los dos números hexagonais) estão representados na figura abaixo.



As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

$$1 = 1^3$$

$$1 + 7 = 8 = 2^3$$

$$1 + 7 + 19 = 27 = 3^3 \dots$$



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica
Atividade 1: a lei forte dos pequenos números



Prof. Arthur Gomes Araújo
Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

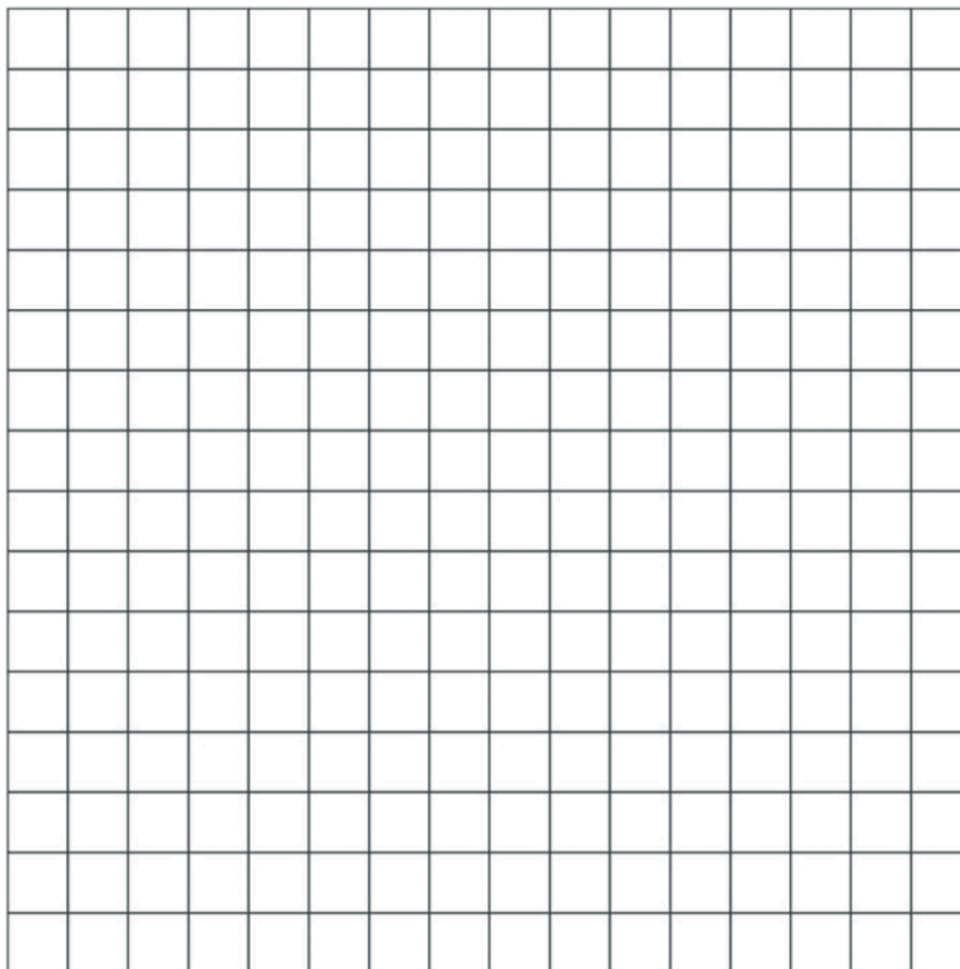


Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a Matemática Acadêmica
Atividade 2: problema dos quadrados



Prof. Arthur Gomes Araújo
Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____





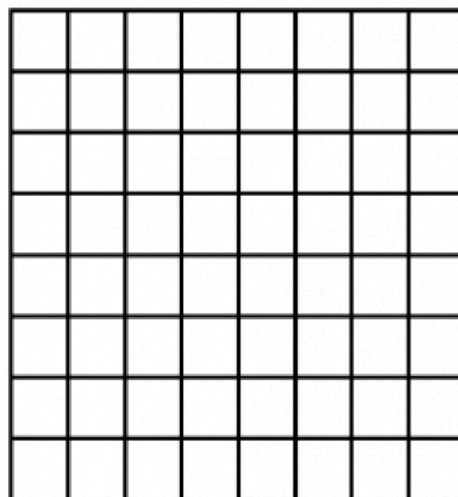
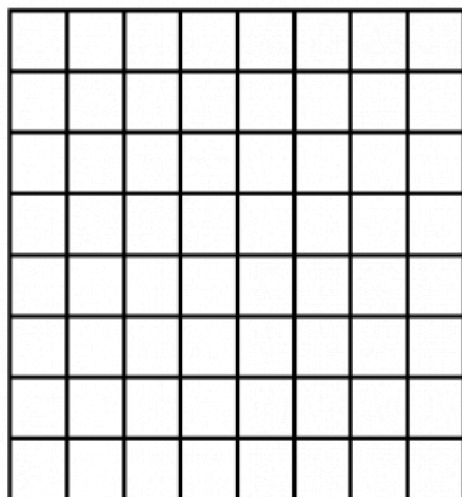
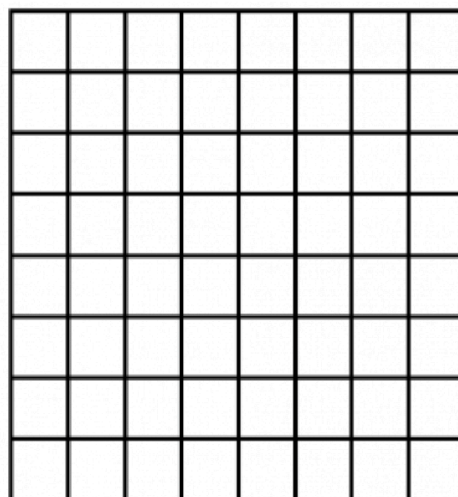
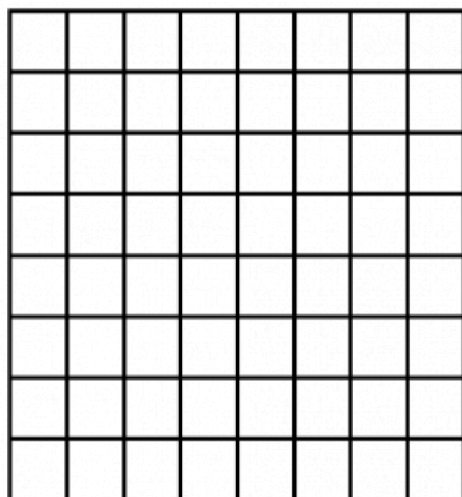
Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica
Atividade 2: problema dos quadrados



Prof. Arthur Gomes Araújo
Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Rascunho





Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Exercício 1: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói

Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira



Estudante: _____

Exercício 2: Encontre a lei geral sugerida e, em seguida, demonstre-a por indução:

a) $1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}, \dots$



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

b) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \dots$



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Exercício 3: Encontre o erro na seguinte “prova” que em qualquer grupo com n pessoas, todas têm a mesma idade.

Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade.

Suponha que em um grupo com k pessoas, todas têm a mesma idade.

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ as pessoas em um grupo com $k + 1$ pessoas.

Desde que as pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ e $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ formam grupos com k pessoas, todas elas têm a mesma idade, por hipótese de indução.

Desde que a_2 está contido em cada um destes grupos, segue que todas as $k + 1$ pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma idade.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói

Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira



Estudante: _____

Exercício 4: Encontre o erro na seguinte “prova” que garante
 $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 1)(n + 2)$, para todos os números naturais.

Se assumirmos que $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = (k - 1)(k + 2)$ para algum k , então

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) &= (k - 1)(k + 2) + 2(k + 1) \\ &= k^2 + k - 2 + 2k + 2 \\ &= k(k + 3) \\ &= [(k + 1) - 1][(k + 1) + 2] \end{aligned}$$

o que significa que sendo verdadeiro para k é verdadeiro para $k + 1$ e, portanto, é verdadeiro para todos os naturais.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Exercício 5: Use indução matemática para provar que todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói



Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira

Estudante: _____

Exercício 6: O que há de errado na demonstração a seguir? Afirmação: Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar.

Além disso, se os k primeiros inteiros forem ímpares, então $k + 1 = (k - 1) + 2 =$
ímpar + ímpar = ímpar.



Projeto de ensino: Princípio de Indução Matemática: aproximação com a
Matemática Acadêmica

Atividade 3: exercícios de indução e torre de Hanói

Prof. Arthur Gomes Araújo

Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira



Estudante: _____

Explique como você solucionou ou tentou solucionar o jogo Torre de Hanói:

APÊNDICE D – Slides do Projeto de Ensino



Princípio de Indução Matemática

Aproximação com a Matemática Acadêmica

Prof. Arthur





Primeira aula:
A lei forte dos
pequenos números

Segunda aula:
Princípio de Indução
Matemática

Terceira aula:
Exercícios e Torre de
Hanói

$$\left(\frac{c-b}{1-b} \right) \geq \left(\frac{a}{1-b} \right) \geq \frac{3c(2)^n}{x+y+c}$$

Primeira aula:
A lei forte dos
pequenos
números

A lei forte dos pequenos números é uma intuição que as pessoas mostram uma tendência para acreditar que se uma propriedade é válida para um número relativamente pequeno de valores, então será válida para todos.

Para este primeiro momento, nos baseamos no artigo de Richard Guy, *The strong law of small numbers* (Guy, 1988).

O autor propõe questões do tipo “faça você mesmo”, na qual mostra exemplos de padrões que parecem se delinear quando olhamos para vários pequenos valores de n , números naturais, em vários problemas cujas respostas dependem de n . A questão será, em cada caso: **você acha que o padrão persiste para todos os números naturais? Ou você acredita que é uma ilusão da pequenez dos valores de n que são trabalhados nos exemplos?**

Cuidado: exemplos de ambos os tipos aparecem; nem todos são ilusões! Em seguida daremos as respostas, junto com as referências.

Tente manter um *scorecard*: para cada exemplo, insira seu palpite sobre se o padrão observado continua, não continua ou não é conhecido.

Divirtam-se.

Situação 1

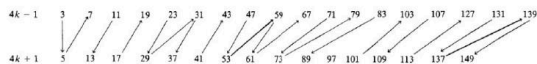
Situação 1: Os números $2^2 + 1 = 3$, $2^3 + 1 = 5$, $2^4 + 1 = 17$, $2^5 + 1 = 257$, $2^6 + 1 = 6553$ e assim por diante são primos.

Situação 2

Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. Verificamos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.

Situação 3

Situação 3: Sabe-se que exceto o 2, que é o primo mais diferente, todos os outros primos têm a forma $4k - 1$ ou a forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. O intervalo $[1, 10]$ contém 2 primos da forma $4k - 1$ (o 3 e o 7) e só 1 da forma $4k + 1$ (o 5). O intervalo $[1, 32]$ contém 6 primos da forma $4k - 1$ e só 4 da forma $4k + 1$ (verifique). Em qualquer intervalo $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de primos da forma $4k + 1$ é menor ou igual aos do que da forma $4k - 1$. Dizemos que os da forma $4k - 1$ vencem a “corrida dos números primos”.



Situação 4

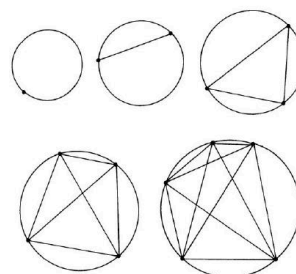
Situação 4: Um número natural tem um ou mais fatores primos da forma $4k + 1$ do que da forma $4k - 1$ ou a mesma quantidade de cada uma das formas. Por exemplo, 21 tem dois do primeiro tipo (3 e 7) e dois do segundo (1 e 21), enquanto 25 tem todos os três (1, 5, 25) do segundo tipo.

Situação 5

Situação 5: Os cinco círculos abaixo tem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ pontos marcados sobre sua circunferência. Em cada um deles, todos os pontos são ligados a todos os outros, de modo que as cordas determinam regiões. Observação: três das n cordas não concorrem num único ponto, ou seja, cada grupo de 4 pontos tem apenas uma interseção. Contando o número de regiões nas quais as cordas dividem cada círculo.

Número de pontos	1	2	3	4	5	...	n
Número de regiões	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

Situação 5



Situação 6

Situação 6. Os números 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, etc. são todos primos.

Situação 7

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n - 1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$\begin{aligned}
 3! - 2! + 1! &= 5 \\
 4! - 3! + 2! - 1! &= 19 \\
 5! - 4! + 3! - 2! + 1! &= 101 \\
 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! &= 619 \\
 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! &= 4421 \\
 8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! &= 3589
 \end{aligned}$$

Situação 8

Situação 8. Quando você usa o método de Euclides para mostrar que existem infinitos primos,

$$\begin{aligned}
 2 + 1 &= 3 \\
 (2 \times 3) + 1 &= 7 \\
 (2 \times 3 \times 5) + 1 &= 31 \\
 (2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 &= 211 \\
 (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 &= 231 \\
 \text{que nem sempre produz números primos} \\
 (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 &= 30031 = 59 \times 509 \\
 (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 &= 510511 = 19 \times 97 \times 277 \\
 (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 &= 9699691 = 347 \times 27953
 \end{aligned}$$

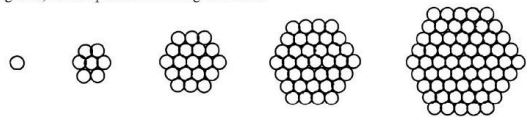
Situação 8

mas se tomarmos o próximo primo, a diferença com o produto é sempre um primo:

$$\begin{aligned}
 5 - 2 &= 3 \\
 11 - (2 \times 3) &= 5 \\
 37 - (2 \times 3 \times 5) &= 7 \\
 223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) &= 13 \\
 2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) &= 23 \\
 30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) &= 17 \\
 510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) &= 19 \\
 9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) &= 23.
 \end{aligned}$$

Situação 9

Situação 9. A sequência de números hex (assim chamados para distingui-los dos números hexagonais) estão representados na figura abaixo.



As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

$$\begin{aligned}1 &= 1^3 \\1 + 7 &= 8 = 2^3 \\1 + 7 + 19 &= 27 = 3^3 \dots\end{aligned}$$

Situação 10

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 5 &= 9 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25.\end{aligned}$$

Respostas da atividade da lei forte

- | | |
|---------------|---------------|
| 01 Falso | 06 Falso |
| 02 Falso | 07 Falso |
| 03 Falso | 08 Conjectura |
| 04 Verdadeiro | 09 Verdadeiro |
| 05 Falso | 10 Verdadeiro |

$$\frac{3C(2)^4}{x+y+z}$$

Situação 1

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 6553$ e assim por diante são primos.

Resposta: ninguém menos do que Fermat (1607-1665) foi enganado pela lei forte! Euler deu a fatoração $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$, que é um contraexemplo. Todos os outros exemplos conhecidos de números de Fermat são compostos.

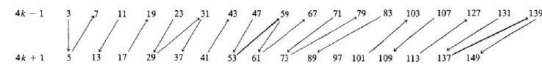
Situação 2

Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. Verificamos que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.

Resposta: contraexemplo: $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ não é primo. Existem poucos primos de Mersenne (1588-1648), que são primos da forma $2^p - 1$, com p primo. Ninguém sabe se existem infinitos primos de Mersenne ou não. O maior primo de Mersenne conhecido corresponde ao valor de $p = 136279841$, tem 41 024 320 dígitos, e foi descoberto em 21 de outubro de 2024¹⁰⁸.

Situação 3

Situação 3: Sabe-se que exceto o 2, que é o primo mais diferente, todos os outros primos têm a forma $4k - 1$ ou a forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. O intervalo $[1, 10]$ contém 2 primos da forma $4k - 1$ (o 3 e o 7) e só 1 da forma $4k + 1$ (o 5). O intervalo $[1, 32]$ contém 6 primos da forma $4k - 1$ e só 4 da forma $4k + 1$ (verifique). Em qualquer intervalo $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de primos da forma $4k + 1$ é menor ou igual aos do que da forma $4k - 1$. Dizemos que os da forma $4k - 1$ vencem a “corrida dos números primos”.



Resposta: na “corrida dos números primos”, $4k - 1$ e $4k + 1$ assumem a liderança alternadamente com frequência infinita. Isso foi provado por Littlewood¹⁰⁹.

Situação 4

Situação 4: Um número natural tem um ou mais fatores primos da forma $4k + 1$ do que da forma $4k - 1$ ou a mesma quantidade de cada uma das formas. Por exemplo, 21 tem dois do primeiro tipo (3 e 7) e dois do segundo (1 e 21), enquanto 25 tem todos os três (1, 5, 25) do segundo tipo.

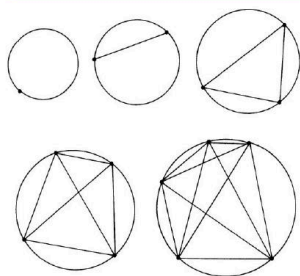
Resposta: um teorema de Legendre (1752-1833)¹¹⁰ afirma que D_+ e D_- são os números de divisores de n das formas $4k + 1$ e $4k - 1$, respectivamente, então os números de divisores de n como a soma de dois quadrados é $4(D_+ - D_-) \geq 0$. Portanto, $D_+ \geq D_-$ para todo número n .

Situação 5

Situação 5: Os cinco círculos abaixo tem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ pontos marcados sobre sua circunferência. Em cada um deles, todos os pontos são ligados a todos os outros, de modo que as cordas determinam regiões. Observação: três das n cordas não concorrem num único ponto, ou seja, cada grupo de 4 pontos tem apenas uma interseção. Contando o número de regiões nas quais as cordas dividem cada círculo.

Número de pontos	1	2	3	4	5	...	n
Número de regiões	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}

Situação 5



Situação 5

Façamos uma correção na tabela:

Número de pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Número de regiões	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256	386	562	784

Situação 7

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n-1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$\begin{aligned} 3! - 2! + 1! &= 5 \\ 4! - 3! + 2! - 1! &= 19 \\ 5! - 4! + 3! - 2! + 1! &= 101 \\ 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! &= 619 \\ 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! &= 4421 \\ 8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! &= 3589 \end{aligned}$$

Resposta: contraexemplo:

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981 = 79 \times 4139.$$

Situação 8

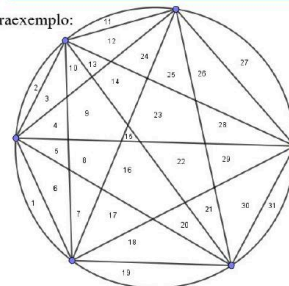
mas se tomarmos o próximo primo, a diferença com o produto é sempre um primo:

$$\begin{aligned} 5 - 2 &= 3 \\ 11 - (2 \times 3) &= 5 \\ 37 - (2 \times 3 \times 5) &= 7 \\ 223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) &= 13 \\ 2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) &= 23 \\ 30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) &= 17 \\ 510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) &= 19 \\ 9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) &= 23. \end{aligned}$$

Resposta: R. F. Fortune^[1] conjecturou que essas diferenças seriam sempre números primos. As próximas diferenças são: 37, 61, 67, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103. Evidências apontam para a veracidade da conjectura, mas nada foi provado (ainda?).

Situação 5

Resposta: contraexemplo:



Situação 6

Situação 6. Os números 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, etc. são todos primos.

Resposta: Nenhum membro desta sequência é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13 ou 37, como pode ser visto imediatamente a partir de testes de divisibilidade bem conhecidos. Por outro lado, 17, 19, 23, 29 e 31 dividem 33...331 apenas se o número de três for respectivamente $16k + 8$, $18k + 11$, $22k + 20$, $28k + 19$ e $15k + 1$, enquanto 41, 43, 53, 67, 71, 73, 79, ... não dividem nenhum membro da sequência. Richard Guy não acredita que haja uma descrição simples de quais primos dividem e quais primos não dividem. O próximo da lista, 33333331, também é primo, mas o seguinte, 333333331, não. Contraexemplo: $333333331 = 17 \times 196078$.

Situação 8

Situação 8. Quando você usa o método de Euclides para mostrar que existem infinitos primos,

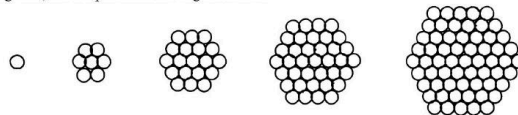
$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ (2 \times 3) + 1 &= 7 \\ (2 \times 3 \times 5) + 1 &= 31 \\ (2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 &= 211 \\ (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 &= 231 \end{aligned}$$

que nem sempre produz números primos

$$\begin{aligned} (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 &= 30031 = 59 \times 509 \\ (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 &= 510511 = 19 \times 97 \times 277 \\ (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 &= 9699691 = 347 \times 27953 \end{aligned}$$

Situação 9

Situação 9. A sequência de números hex (assim chamados para distingui-los dos números hexagonais) estão representados na figura abaixo.



As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 1 + 7 &= 8 = 2^3 \\ 1 + 7 + 19 &= 27 = 3^3 \dots \end{aligned}$$

Situação 9

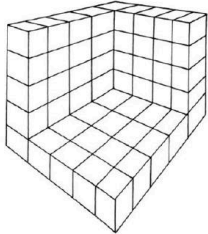
Resposta: Primeiramente, o n -ésimo número hex é

$$1 + 6 + 12 + \dots + 6(n - 1) = \frac{(6+6(n-1))(n-1)}{2} + 1 = 3n(n - 1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1.$$

O resultado é verdadeiro e a prova é por indução. Sabemos que vale para o caso $n = 1$ (e $n = 2, 3, 4, 5$ também). Suponha que a soma parcial dos n primeiros números hex seja n^3 . O $(n + 1)$ -ésimo número hex é $3(n + 1)^2 - 3(n + 1) + 1 = 3n^2 + 3n + 1$ e, quando adicionado a n^3 , resulta em $(n + 1)^3$. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, o padrão é verdadeiro para todo n natural.

Situação 9

É instrutivo considerar o n -ésimo número hex como correspondendo às três faces em um canto de uma pilha cúbica de n^3 cubos de unidade.



Situação 10

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$1 = 1$
 $1 + 3 = 4$
 $1 + 3 + 5 = 9$
 $1 + 3 + 5 + 7 = 16$
 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Resposta: esse é um exemplo do processo de Moessner, que de fato produz os números quadrados. O artigo de Moessner¹¹² é seguido por uma prova de Perron. Acredito que você consegue provar isso usando a forma de um número ímpar e indução.

Respostas da atividade da lei forte

01	Falso	06	Falso
02	Falso	07	Falso
03	Falso	08	Conjectura
04	Verdadeiro	09	Verdadeiro
05	Falso	10	Verdadeiro

Conclusão

A conclusão vale dentro e fora da matemática:
“NÃO DÁ PARA DIZER NADA ANALISANDO SÓ UNS POUCOS CASOS!”

Exemplo dos dominós

Segunda aula: Princípio de Indução Matemática

ENC. NOVO PASSO P&S, Rua Verna Magalhães, 94 loja com divisórias, escritório e banheiro, 57m2. Tratar 2221-4848 CJ2710

JACAREPAGUA Lojão próximo a linha amarela, escolas, clínicas, Av. Geremário Dantas, 1092, chaves na borracharia ao lado R\$2000,00 Tel. 2533-4134

ROCHA Rua General Bel-ford nº190, Frente Delegacia legal. Alugo/ vendo sobrelas 200/ 270m2. Juntas/ separadas. P/ indústria leves/ escritórios. Visitas Tel:2572-2142/ 2570-1592

S.CRISTOVÃO Esquina f.mello lançamento centro comercial. 3lojas 11x8 +jirau 11x8 +170m // galpão 750m // 3pavs 100m escritório =300m figueiredo. 9982-

do a natureza da atividade assim o exigir.

Empregos

300 - Empregos

CONTRATA-SE Prof. de Matemática. Salário: Muito dinheiro. Local: IMPA. Entrevistas dia 29/02/2004.

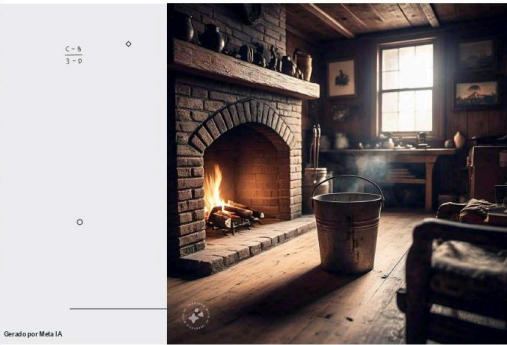
COZINHEIRA(O) p/residência. Forno/ fogão c/experiência e referência profissional, disposição p/ajudar em outros serviços. Dorme emprego, 2 folgas semanais, remuneração ini-

350m2, no Centro de C. Grande, em frente calç. Tratar Tel.:(22)8111-(21)2425-0554 a noite.

PASSO ponto Clínica na Barra. Oportunidade consultórios, recepção pa, tudo novo. Alvará o provado Vigilância. 55.000,00. Pagamento gociável. Tel.8136-065

PASSO Ponto em Ico Loja R.Moreira César. E lente localização, 30m raú, piso solarium r 25 andar do shopping, é escada rolante. Tel.81041.

PASSO Ponto, excelente coração de Cpo.Gre rua muito movimentada serve p/qualquer ramo, alocar. Preço de au-



$$\frac{\sqrt{2.6}}{3+2^*}$$

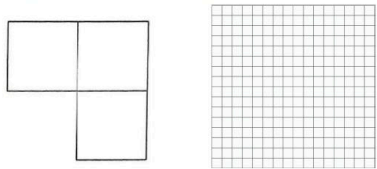
Se conseguirmos lembrar de um problema anteriormente resolvido que seja intimamente relacionado com o nosso, teremos tido muita sorte. Devemos fazer por merecer esta sorte e podemos merecê-la, aproveitando-a.

George Polya

$$\frac{4+6+(-1.5)}{\sqrt{2.26}}$$

Problema dos Quadrados

Foi retirado um quadradinho de um quadrado 16x16 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.

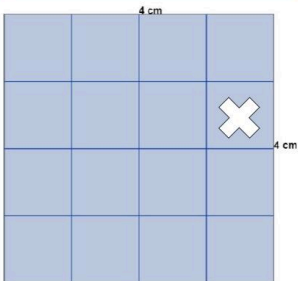


Um problema + fácil

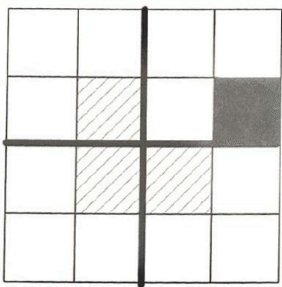
Foi retirado um quadradinho de um quadrado 2x2 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.



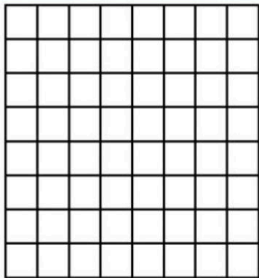
4x4



4x4

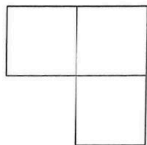


8x8



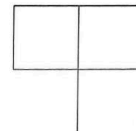
Problema dos Quadrados

Foi retirado um quadradinho de um quadrado 16×16 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.



Extensão do problema

Resolvemos este problema construindo “pontes” a partir de questões semelhantes, porém mais simples. Poderíamos construir tais pontes mais uma vez, para problemas mais complicados?



16x16



32x32



64x64



128x128

Cadeia de proposições

Assim temos uma cadeia infinita de proposições sobre quadrados de tamanhos diferentes. Podemos dizer que demonstramos todos esses casos?

$$2^n \times 2^n$$

O que fizemos

- 1º: provamos a primeira afirmação na cadeia sobre o quadrado 2×2 .
- 2º: provamos a segunda proposição (4×4) a partir da anterior (2×2).
- 3º: provamos a terceira proposição (8×8) a partir da anterior (4×4).
- 4º: provamos a quarta proposição (16×16) a partir da anterior (8×8).

O que podemos fazer

- 1º: provamos a primeira afirmação na cadeia sobre o quadrado 2×2 .
- 2º: provamos a segunda proposição (4×4) a partir da anterior (2×2).
- 3º: provamos a terceira proposição (8×8) a partir da anterior (4×4).
- 4º: provamos a quarta proposição (16×16) a partir da anterior (8×8).

Seguindo esta cadeia provaremos qualquer das afirmações para quadrados $2^n \times 2^n$; portanto, todas elas são verdadeiras.

Escrita

Então acabamos de provar um série infinita de afirmações sobre a possibilidade de recortar quadrados em triminós. Agora vamos escrever todas essas proposições. Tem como?

Escrita

Proposição (P_n): Um quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

Cadeia de proposições

P_1 : Um quadrado $2^1 \times 2^1$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

P_2 é sobre 4×4 .

P_3 é sobre 8×8 ...

O que fizemos

Tratamos de uma cadeia infinita de teoremas semelhantes.

Primeiro demonstramos P_1 .

Se P_1 for demonstrada, então P_2 será verdadeira.

Se P_2 for demonstrada, então P_3 será verdadeira.

Extensão

E se P_n for demonstrada, então...

Teorema

Qualquer que seja o número natural n , se já demonstramos que o quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós, então o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ com um quadradinho faltando também pode ser recortado em triminós.

Ideia de prova

Dividimos mentalmente o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ em quatro quadrados $2^n \times 2^n$. Cada um desses se tiver um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós, por hipótese.

Então cortamos um triminós no centro do quadrado grande de modo que contenha um quadradinho de cada um dos outros três quadrados $2^n \times 2^n$. Depois disso, usamos a hipótese novamente!

Generalização

Quando provamos o teorema geral, provamos todas as proposições P_n .

Ex.: $n=1$. Obtemos a demonstração de que a possibilidade de recortar o quadrado 2×2 implica a possibilidade de recortar o quadrado 4×4 .

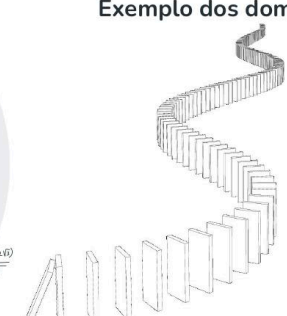
Princípio de indução matemática

Provamos a primeira proposição da série (P_1 : 2×2)

Considerar a proposição P_n (um quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós) como verdadeira.

Deduzimos a segunda proposição da primeira, a terceira da segunda, etc. Este é o "passo indutivo", abreviado pelo teorema geral. Como, passo a passo, podemos chegar a qualquer proposição a partir da base, todas elas são verdadeiras.

Exemplo dos dominós



Princípio de indução matemática

$$\frac{10+17}{3 \cdot 45}$$

Suponha que para cada número natural n se tenha uma afirmativa P_n que satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) P_1 é verdadeira;
 - (ii) sempre que a afirmativa for válida para um número natural arbitrário $n=k$, ela será válida para o seu sucessor $n=k+1$ (ou seja, P_k verdadeira implica P_{k+1} verdadeira).
- Então P_n é verdadeira para todo número natural n .

$$\frac{\sqrt[3]{2 \cdot 8}}{\sqrt[3]{3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2}}$$

Se um dominó cair, ele derrubará o próximo.

○

$$\frac{\sqrt[3]{2 \cdot 8}}{\sqrt[3]{3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2}}$$

Princípio de indução matemática

Suponha que para cada número natural n se tenha uma afirmativa P_n que satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) P_1 é verdadeira;
 - (ii) sempre que a afirmativa for válida para um número natural arbitrário $n=k$, ela será válida para o seu sucessor $n=k+1$ (ou seja, P_k verdadeira implica P_{k+1} verdadeira).
- Então P_n é verdadeira para todo número natural n .

O primeiro dominó cai.

Exemplo

Prove, pelo PIM, que $1+2+3+4+\dots+n = n(n+1)/2$

- (i) Provar para $n=1$;
- (ii) Suponha verdade para $n=k$;
- (ii) Provar para $n=k+1$.



Exemplo

Prove, pelo PIM, que $1+2+3+4+\dots+n = n(n+1)/2$

- (i) Provar para $n=1$;
- (ii) Suponha verdade para $n=k$;
- (ii) Provar para $n=k+1$.

Solução: Queremos mostrar que a propriedade $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

- i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.
- ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (repare que o próximo número natural depois de $k + 1$ é $k + 2$).

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1), \text{ por hipótese de indução} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Solução: Queremos mostrar que a propriedade $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

- i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.
- ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (repare que o próximo número natural depois de $k + 1$ é $k + 2$).

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1), \text{ por hipótese de indução} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Exercícios

Exercício 1: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$

Exercício 2: Encontre a lei geral sugerida e, em seguida, demonstre-a por indução:

$$a) \quad 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}, \dots$$

$$b) \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \dots$$

Exercício 5: Use indução matemática para provar que todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos.

Exercício 3

Exercício 3: Encontre o erro na seguinte “prova” que em qualquer grupo com n pessoas, todas têm a mesma idade.

Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade.

Suponha que em um grupo com k pessoas, todas têm a mesma idade.

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ as pessoas em um grupo com $k + 1$ pessoas.

Desde que as pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ e $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ formam grupos com k pessoas, todas elas têm a mesma idade, por hipótese de indução.

Desde que a_2 está contido em cada um destes grupos, segue que todas as $k + 1$ pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma idade.

Exercício 3

Exercício 3: Encontre o erro na seguinte “prova” que em qualquer grupo com n pessoas, todas têm a mesma idade.

Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade.

Suponha que em um grupo com k pessoas, todas têm a mesma idade.

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ as pessoas em um grupo com $k + 1$ pessoas.

Desde que as pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ e $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ formam grupos com k pessoas, todas elas têm a mesma idade, por hipótese de indução.

Desde que a_2 está contido em cada um destes grupos, segue que todas as $k + 1$ pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma idade.

Solução: o erro é que hipótese não diz que formar grupos com k pessoas implica que elas têm a mesma idade. A hipótese de indução diz que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ têm a mesma idade.

Exercício 4

Exercício 4: Encontre o erro na seguinte “prova” que garante $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 1)(n + 2)$, para todos os números naturais.

Se assumirmos que $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = (k - 1)(k + 2)$ para algum k , então

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) &= (k - 1)(k + 2) + 2(k + 1) \\ &= k^2 + k - 2 + 2k + 2 \\ &= k(k + 3) \\ &= [(k + 1) - 1][(k + 1) + 2] \end{aligned}$$

o que significa que sendo verdadeiro para k é verdadeiro para $k + 1$ e, portanto, é verdadeiro para todos os naturais.

Exercício 4

Exercício 4: Encontre o erro na seguinte “prova” que garante $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 1)(n + 2)$, para todos os números naturais.

Se assumirmos que $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = (k - 1)(k + 2)$ para algum k , então

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) &= (k - 1)(k + 2) + 2(k + 1) \\ &= k^2 + k - 2 + 2k + 2 \\ &= k(k + 3) \\ &= [(k + 1) - 1][(k + 1) + 2] \end{aligned}$$

o que significa que sendo verdadeiro para k é verdadeiro para $k + 1$ e, portanto, é verdadeiro para todos os naturais.

Solução: o erro é que faltou provar para o primeiro caso, o Caso base. Porém, para $n = 2$ temos que $2 = (2 - 1)(2 + 2) = (1)(4) = 4$. Logo, a proposição é falsa.

Exercício 6

Exercício 6: O que há de errado na demonstração a seguir? Afirmação: Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar.

Além disso, se os k primeiros inteiros forem ímpares, então $k + 1 = (k - 1) + 2 = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$

Exercício 6

Exercício 6: O que há de errado na demonstração a seguir? Afirmação: Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar.

Além disso, se os k primeiros inteiros forem ímpares, então $k + 1 = (k - 1) + 2 = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$

Solução: o erro é que existem números pares alternados com ímpares no conjunto dos números naturais.

Soluções

$$\frac{4+6+(2\sqrt{6})}{\sqrt{276}}$$

$$\frac{\sqrt{2,8}}{3+2^x}$$

$$\frac{10+17}{3,45}$$

Exercício 1

Exercício 1: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$

Solução: Queremos mostrar que a propriedade $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

- i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 = 1^2$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.
 ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = 2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ (hipótese de indução). Devemos provar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (repare que o próximo número ímpar depois de $2k - 1$ é $2k + 1$).

Exercício 2

Exercício 2: Encontre a lei geral sugerida e, em seguida, demonstre-a por indução:

$$a) \quad 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}, \dots$$

Solução: a lei geral é: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

Queremos mostrar que a propriedade $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

- i) (Caso Base) Para $n = 0$, temos $\frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 2 - \frac{1}{2^0}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 0$.
 ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$, ou seja, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$.

Exercício 2

$$b) \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \dots$$

Solução: a lei geral é: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

Queremos mostrar que a propriedade $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ vale para todo natural $n > 1$. Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

- i) (Caso Base) Para $n = 2$, temos $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 2$.
 ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 2$, ou seja, $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$.

Exercício 3

Exercício 3: Encontre o erro na seguinte "prova" que em qualquer grupo com n pessoas, todas têm a mesma idade.

Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade.

Suponha que em um grupo com k pessoas, todas têm a mesma idade.

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ as pessoas em um grupo com $k + 1$ pessoas.

Desde que as pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ e $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ formam grupos com k pessoas, todas elas têm a mesma idade, por hipótese de indução.

Desde que a_2 está contido em cada um destes grupos, segue que todas as $k + 1$ pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma idade.

Solução: o erro é que hipótese não diz que formar grupos com k pessoas implica que elas têm a mesma idade. A hipótese de indução diz que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ têm a mesma idade.

Exercício 1

Exercício 1: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$

Temos que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1), \text{ por hipótese de indução} \\ = (k + 1)^2.$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 2

Temos que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ por hipótese de indução} \\ = 2 + \left(-\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ = 2 + \left(\frac{-2+1}{2^{k+1}}\right) \\ = 2 + \left(\frac{-1}{2^{k+1}}\right) \\ = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 2

Temos que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right), \text{ por hipótese de indução} \\ = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) \\ = \frac{1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ = \frac{1}{k+1}$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo $n > 1$ número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 4

Exercício 4: Encontre o erro na seguinte "prova" que garante $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 1)(n + 2)$, para todos os números naturais.

Se assumirmos que $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = (k - 1)(k + 2)$ para algum k , então

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k - 1)(k + 2) + 2(k + 1) \\ = k^2 + k - 2 + 2k + 2 \\ = k(k + 3) \\ = [(k + 1) - 1][(k + 1) + 2]$$

o que significa que sendo verdadeiro para k é verdadeiro para $k + 1$ e, portanto, é verdadeiro para todos os naturais.

Solução: o erro é que faltou provar para o primeiro caso, o Caso base. Porém, para $n = 2$ temos que $2 = (2 - 1)(2 + 2) = (1)(4) = 4$. Logo, a proposição é falsa.

Exercício 5

Exercício 5: Use indução matemática para provar que todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos.

Solução: desenhos podem ajudar nessa demonstração. Eles nos mostram que um polígono pode ser dividido em $n - 2$ triângulos, cada qual tendo a soma dos ângulos internos igual a 180° , de onde vem essa lei geral.

Queremos mostrar que a propriedade $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$ vale para todo natural $n \geq 3$, já que um polígono deve ter pelo menos três lados. Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

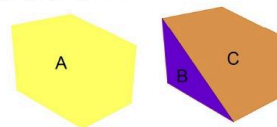
i) (Caso Base) Para $n = 3$, temos $(3 - 2)180^\circ = 180^\circ$ que sabemos ser verdade para o triângulo. Logo, a propriedade é válida para $n = 3$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(k - 2)180^\circ$ é a soma de seus ângulos internos de um polígono com k lados

Exercício 5

(hipótese de indução). Devemos provar que $(k - 1)180^\circ$ é a soma de seus ângulos internos de um polígono com $k + 1$ lados

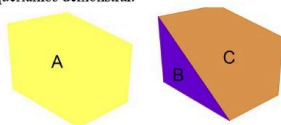
Considere um polígono com $k + 1$ lados. Seja A esse polígono arbitrário com $k + 1$ lados. Tome quaisquer três vértices consecutivos desse polígono e desenhe uma linha do primeiro ao terceiro, como mostrado na Figura 16. Isso o dividirá em dois polígonos, B e C, com 3 lados e com k lados, respectivamente.



Exercício 5

A soma dos ângulos internos de A é igual a soma dos ângulos internos de B e soma dos ângulos internos de C. O polígono com k lados (C) tem soma dos ângulos internos igual a $(k - 2)180^\circ$ e o triângulo (B) tem soma dos ângulos internos igual a 180° . Adicionando os dois, temos que $(k - 2)180^\circ + 180^\circ = (k - 1)180^\circ$.

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo $n \geq 3$ número natural, como queríamos demonstrar.



Exercício 6

Exercício 6: O que há de errado na demonstração a seguir? Afirmação: Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar.

Além disso, se os k primeiros inteiros forem ímpares, então $k + 1 = (k - 1) + 2 = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$.

Solução: o erro é que existem números pares alternados com ímpares no conjunto dos números naturais.

Torre de Hanói

Édouard Lucas (1842-1891)
Hanói, capital do Vietnã.

Lenda: existe um templo situado no centro do universo. Diz-se que Brahma supostamente havia criado uma torre com **64 discos de ouro e três estacas de diamante**. Brahma ordenara os sacerdotes que movessem todos os discos de uma estaca para outra seguindo suas instruções. Segundo a lenda, quando todos os discos forem transferidos, o templo desmoronaria e chegaria o fim dos tempos.

Jeddy Chen/GOOGLE MAPS



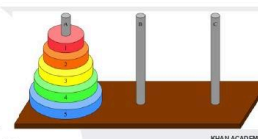
Torre de Hanói

Regras:

- Mover apenas um disco por vez.
- Nunca colocar um disco maior por cima de um disco menor.

O objetivo é passar todos os discos de uma estaca para outra qualquer, usando uma das estacas como auxiliar.

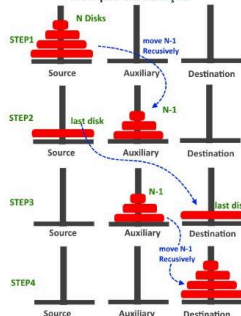
Escreva no papel como você solucionou.



PIWALACADIBET

$\frac{10+17}{3.45}$

Exemplo de solução



INCLUDE HELP

$\frac{10+17}{3.45}$

Torre de Hanói

Afirmiação: É interessante observar que o número mínimo de movimentos para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à outra é $2^n - 1$, sendo n número de discos. Logo:

- Para solucionar um Hanói de 4 discos, são necessários pelo menos 10 movimentos.
- Para solucionar um Hanói de 7 discos, são necessários pelo menos 127 movimentos.
- Para solucionar um Hanói de 10 discos, são necessários pelo menos 32.767 movimentos.

A prova dessa afirmação pode ser feita por Indução Finita.

Torre de Hanói

Afirmção: É interessante observar que o número mínimo de movimentos para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à outra é $2^n - 1$, sendo n número de discos.

- i) (Caso base) para $n = 1$, ou seja, 1 disco, temos $2^1 - 1 = 1$ movimento transfere o disco para outra estaca, logo a afirmação é válida.
- ii) (Passo indutivo) suponha que, para $n = k > 1$, a afirmação seja válida, ou seja, o número mínimo de movimentos para movimentar os discos segundo as regras explicitadas é $2^k - 1$. Vamos mostrar que o resultado vale para $n = k + 1$. Considere uma Torre de Hanói com $k + 1$ discos. Para transferir todos os discos para outra estaca, precisamos que:

Torre de Hanói

- 1) o k discos menores passem para outra estaca (por exemplo, a segunda) a fim de movermos o maior disco para outra estaca (por exemplo, a terceira). E isso pode ser feito com o número mínimo de movimentos $2^k - 1$, por hipótese de indução;
- 2) o disco maior deve passar para outra estaca (por exemplo, a terceira), e isso pode ser feito com 1 movimento;
- 3) o k discos menores passem para a estaca onde se encontra o disco maior (por exemplo, a terceira). E isso pode ser feito com o número mínimo de movimentos $2^k - 1$, por hipótese de indução.

Torre de Hanói

Esses três passos totalizam

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \times 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

como número mínimo de movimentos para que $k + 1$ discos passem para outra estaca, como queríamos demonstrar. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a afirmação é válida para todo n natural.

Referências

Imagens:

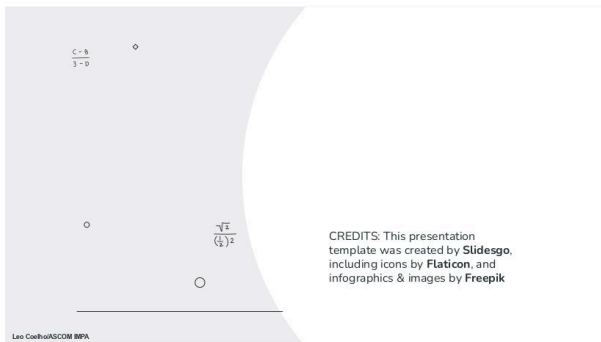
<https://tex.stackexchange.com/questions/149828/how-to-make-dominoes-falling>

<https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2023-11/impa-divulga-edital-de-seu-primeiro-curso-de-graduacao>

<https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi>

<https://www.includehelp.com/data-structure-tutorial/tower-of-hanoi-using-recursion.aspx>

<https://maps.app.goo.gl/L4dYreJdzgFYrCrh8>



APÊNDICE E – Termo de Assentimento (para estudantes menores de 18 anos)

TERMO DE ASSENTIMENTO

Prezado estudante,

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa de mestrado no âmbito do PROFMAT com o objetivo de investigar como o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio pode contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado visando uma Transição mais suave para o Ensino Superior. Serão desenvolvidas atividades que acontecerão durante três sábados, dias 18/01/2025, 25/01/2025 e 01/02/2025, das 10:00 às 12:00, e abordarão temas diversos do currículo de matemática.

A pesquisa será conduzida pelo professor de matemática Arthur Gomes Araújo, sob a orientação da professora Dra. Fernanda Aparecida Ferreira. Sua participação é voluntária, e você pode optar por não participar ou desistir a qualquer momento, sem qualquer prejuízo. Todas as informações coletadas serão mantidas em sigilo e utilizadas exclusivamente para fins de pesquisa, garantindo o anonimato dos participantes.

Contatos:

Prof. Arthur Gomes Araújo – E-mail: artgoms1@gmail.com

Profª Dra. Fernanda Aparecida Ferreira – E-mail: fernanda.aparecida.f@gmail.com

Caso concorde em participar, pedimos que assine abaixo.

Assinatura do participante

APÊNDICE F – Termo de Consentimento (para o responsável legal)



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Prezados pais e responsáveis,

O desenvolvimento do pensamento matemático é fundamental para a compreensão e a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento e em situações cotidianas. O ensino da matemática desempenha um papel importante no desenvolvimento cognitivo do indivíduo. A pesquisa nesta área proporciona uma melhoria significativa na Educação.

Estamos convidando os estudantes do Ensino Médio a participar de uma pesquisa de mestrado vinculada ao programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) do CEFET-MG. O objetivo deste estudo é investigar como o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio pode contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado visando uma Transição mais suave para o Ensino Superior. O estudo será conduzido pelo mestrando e professor de matemática Arthur Gomes Araújo, sob a orientação da professora Dra. Fernanda Aparecida Ferreira.

As atividades ocorrerão aos sábados, dias 18/01/2025, 25/01/2025 e 01/02/2025, das 10:00 às 12:00, no Campus Nova Gameleira. Espera-se que essa experiência possa trazer benefícios educacionais, fazendo com que o estudante tenha mais confiança ao ingressar em cursos universitários. A participação é completamente voluntária, e o estudante poderá se retirar da pesquisa a qualquer momento, sem que haja qualquer penalidade, prejuízo em sua avaliação escolar ou tratamento diferenciado em sala de aula.

Os dados coletados nesta pesquisa poderão ser apresentados em eventos da área de Ensino e Educação Matemática e publicados em revistas científicas, bem como farão parte da dissertação que está em fase de escrita. Destaca-se que os dados coletados serão tratados de maneira confidencial, garantindo a privacidade e o anonimato dos participantes. NENHUMA informação que possa identificar o estudante será divulgada, e os dados obtidos serão utilizados para análise da pesquisa acadêmica.

Este termo de consentimento está sendo entregue em duas vias: uma ficará com o(a) responsável e a outra será arquivada pelos pesquisadores, conforme as normas legais. Estamos disponíveis para esclarecer quaisquer dúvidas. Caso deseje mais informações, entre em contato conosco:

Prof. Arthur Gomes Araújo – E-mail: artgoms1@gmail.com

Profª Dra. Fernanda Aparecida Ferreira – E-mail: fernanda.aparecida.f@gmail.com

Este termo foi elaborado em conformidade com a Resolução CNS 466/2012, que regulamenta as pesquisas com seres humanos no Brasil.

☐ AUTORIZO a participação na pesquisa.

☐ NÃO AUTORIZO a participação na pesquisa.

Assinatura do responsável

APÊNDICE G – Termo de Consentimento (para estudantes maiores de 18 anos)



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Prezado estudante,

O desenvolvimento do pensamento matemático é fundamental para a compreensão e a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento e em situações cotidianas. O ensino da matemática desempenha um papel importante no desenvolvimento cognitivo do indivíduo. A pesquisa nesta área proporciona uma melhoria significativa na Educação.

Estamos convidando os estudantes do Ensino Médio a participar de uma pesquisa de mestrado vinculada ao programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) do CEFET-MG. O objetivo deste estudo é investigar como o ensino de Matemática Acadêmica no Ensino Médio pode contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado visando uma Transição mais suave para o Ensino Superior. O estudo será conduzido pelo professor de matemática Arthur Gomes Araújo, sob a orientação da professora Dra. Fernanda Aparecida Ferreira.

As atividades ocorrerão aos sábados, dias 18/01/2025, 25/01/2025 e 01/02/2025, das 10:00 às 12:00, no Campus Nova Gameleira. Espera-se que essa experiência possa trazer benefícios educacionais, fazendo com que o estudante tenha mais confiança ao ingressar em cursos universitários. A participação é completamente voluntária, e o estudante poderá se retirar da pesquisa a qualquer momento, sem que haja qualquer penalidade, prejuízo em sua avaliação escolar ou tratamento diferenciado em sala de aula.

Os dados coletados nesta pesquisa poderão ser apresentados em eventos da área de Ensino e Educação Matemática e publicados em revistas científicas, bem como farão parte da dissertação que está em fase de escrita. Destaca-se que os dados coletados serão tratados de maneira confidencial, garantindo a privacidade e o anonimato dos participantes. NENHUMA informação que possa identificar o estudante será divulgada, e os dados obtidos serão utilizados para análise da pesquisa acadêmica.

Este termo de consentimento está sendo entregue em duas vias: uma ficará com o(a) responsável e a outra será arquivada pelos pesquisadores, conforme as normas legais. Estamos disponíveis para esclarecer quaisquer dúvidas. Caso deseje mais informações, entre em contato conosco:

Prof. Arthur Gomes Araújo – E-mail: artgoms1@gmail.com

Profª Dra. Fernanda Aparecida Ferreira – E-mail: fernanda.aparecida.f@gmail.com

Este termo foi elaborado em conformidade com a Resolução CNS 466/2012, que regulamenta as pesquisas com seres humanos no Brasil.

☐ AUTORIZO a participação na pesquisa.

☐ NÃO AUTORIZO a participação na pesquisa.

Assinatura do participante

APÊNDICE H – Questionário de avaliação do Projeto de Ensino

Avaliação do projeto de ensino

Participante,

Contamos com você em uma breve avaliação que nos ajudará a compreender melhor os pontos positivos do curso, bem como as áreas que podem ser melhoradas. Sua participação é fundamental para que possamos aperfeiçoá-lo.

Para sua privacidade e livre resposta, este questionário será anônimo.

* Indica uma pergunta obrigatória

Série do Ensino Médio *

☐ 1ª Série

☐ 2ª Série

☐ 3ª Série

Qual das atividades propostas você preferiu? *

☐ A lei forte dos pequenos números (1ª aula)

☐ Explicação do Problema dos quadrados (2ª aula)

☐ Exercícios de Indução (3ª aula)

☐ Torre de Hanói (3ª aula)

Qual das atividades propostas você gostou menos? *

☐ A lei forte dos pequenos números (1ª aula)

☐ Explicação do Problema dos quadrados (2ª aula)

☐ Exercícios de Indução (3ª aula)

☐ Torre de Hanói (3ª aula)

De 1 a 5, sendo 1 muito difícil e 5 muito fácil, qual valor você atribuiria ao projeto de ensino? *

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

Qual imagem mental (analogia) você melhor associa ao Princípio de Indução Matemática? *

- ☐ Exemplo dos dominós
- ☐ Anedota do balde e da lareira
- ☐ Problema dos quadrados
- ☐ Torre de Hanói
- ☐ Não consigo fazer esse tipo de associação

Você considera que o projeto de ensino estimulou a sua decisão para a escolha de um curso de graduação na área de Exatas? *

- ☐ Concordo
- ☐ Não concordo, nem discordo
- ☐ Discordo
- ☐ Não estou decidido

O que você achou da velocidade do curso, em relação ao andamento das atividades? *

- ☐ Muito lenta
- ☐ Lenta
- ☐ Adequada
- ☐ Rápida
- ☐ Muito rápida

Em relação aos conteúdos de matemática que você aprende na escola, você acha que este projeto abordou conteúdos... *

- ☐ diferentes dos da escola e nunca vistos por mim.
- ☐ alguns diferentes e alguns iguais aos da escola.
- ☐ iguais aos da escola e já vistos por mim.

Há algo mais que você gostaria de compartilhar sobre o projeto de ensino para o seu aprimoramento? Se sim, escreva aqui.

Sua resposta
