

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

HARLEY FRANCISCO VIANA

ANÁLISE AVANÇADA DE PÓRTICOS ESPACIAIS DE AÇO CONSIDERANDO AS
TEORIAS DE SAINT VENANT E VLASOV: FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL

BELO HORIZONTE
2024

**ANÁLISE AVANÇADA DE PÓRTICOS ESPACIAIS DE AÇO CONSIDERANDO AS
TEORIAS DE SAINT-VENANT E VLASOV: FORMULAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO
COMPUTACIONAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

**Orientadora: Profa. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Sernizon Costa**

BELO HORIZONTE

2024

Viana, Harley Francisco
V614a Análise avançada de pórticos espaciais de aço considerando as teorias de Saint Venant e Vlasov: formulação e implementação computacional / Harley Francisco Viana. – 2024.
 xviii, 160 f. : il., gráfs, tabs.

 Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Civil.

 Orientadora: Renata Gomes Lanna da Silva.
 Coorientador: Rodrigo Sernizon Costa.
 Bibliografia: f. 142-153.

 Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Civil.

 1. Sistemas não lineares – Teses. 2. Análise de sistemas – Teses.
 3. Análise estrutural (Engenharia) – Teses. 4. Materiais – Propriedades mecânicas – Teses. 5. Teoria de sistemas – Teses. 6. Aço – Estruturas – Teses. I. Silva, Renata Gomes Lanna da. II. Costa, Rodrigo Sernizon. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 624.1821

HARLEY FRANCISCO VIANA

**ANÁLISE AVANÇADA DE PÓRTICOS ESPACIAIS DE AÇO
CONSIDERANDO AS TEORIAS DE SAINT-VENANT E VLASOV: FORMULAÇÃO
E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

**Tese apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil do Centro
Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais como requisito parcial para obtenção
do título de Doutor em Engenharia Civil.**

Profa. Renata Gomes Lanna da Silva, D.Sc.
Orientadora
Departamento de Engenharia Civil, CEFET-MG

Prof. Rodrigo Sernizon Costa, D.Sc.
Coorientador
Departamento de Construção e Estruturas, UFBA

Prof. Junia Nunes de Paula, D.Sc.
Departamento de Engenharia Civil, CEFET-MG

Prof. Armando Cesar Campos Lavall, D.Sc.
Departamento de Engenharia de Estruturas, UFMG

Prof. William Taylor Matias Silva, D.Sc.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, UnB

Belo Horizonte, agosto de 2024

*Dedico este trabalho à minha mãe,
que sempre esteve ao meu lado
dando o apoio que eu precisava.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me presenteou com a dádiva da vida e me concedeu a coragem e a força necessárias para transpor cada obstáculo em meu caminho.

Aos meus orientadores excepcionais, Profa. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva e Prof. Dr. Rodrigo Sernizon Costa, cuja generosidade ao compartilhar conhecimento foi moldada com paciência, competência, incentivo e um entusiasmo inspirador. Agradeço imensamente pela confiança depositada em mim.

À Dra. Iara Souza Ribeiro, cujo apoio e disponibilidade para discutir ideias foram fundamentais para a concretização deste estudo. Suas valiosas contribuições foram muito importantes para o desenvolvimento desta pesquisa.

À banca examinadora, pela generosidade do tempo dedicado e pelas valiosas contribuições que aprimoraram este trabalho.

À minha família, cujo amor, encorajamento e apoio incondicional foram minha rocha em todos os momentos desafiadores.

À Flavia Santos, minha companheira e fonte inesgotável de amor, agradeço profundamente por estar ao meu lado a cada passo desta jornada. Sua amizade, cumplicidade e presença constante foram um farol nos momentos mais difíceis. Obrigado por ser minha parceira de vida e por incentivar cada etapa deste caminho com tanto carinho.

Aos amigos e colegas, pelo suporte inestimável, solidariedade e alegrias compartilhadas que iluminaram este percurso.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do CEFET-MG, pelo comprometimento, atenção e constante disposição para ajudar.

À Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais, FAPEMIG, pelo apoio financeiro essencial que viabilizou este trabalho.

A todas as pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, o meu mais profundo agradecimento. Este feito é fruto de uma jornada compartilhada e enriquecedora. Obrigado, do fundo do meu coração!

*“Aqueles que se sentem
satisfeitos sentam-se e nada fazem.
Os insatisfeitos são os únicos
benfeitores do mundo”*

(Walter S. Landor)

RESUMO

O projeto de estruturas de aço geralmente é realizado em duas etapas: análise estrutural e dimensionamento. A separação dessas etapas implica na necessidade de avaliar os esforços solicitantes, deslocamentos, estabilidade e resistência de cada elemento estrutural, o que dificulta o processo de obtenção de estruturas mais resistentes, otimizadas, econômicas e, conseqüentemente, mais sustentáveis. Além disso, ao analisar estruturas de aço com perfis abertos de parede fina submetidas a grandes carregamentos, é imprescindível considerar, além da não linearidade geométrica e do material, o empenamento da seção transversal, as tensões residuais e as imperfeições geométricas iniciais. Nesse contexto, o objetivo da presente pesquisa é apresentar o desenvolvimento teórico de uma formulação não linear para a análise estrutural avançada de pórticos espaciais de aço, considerando as teorias de torção de Saint Venant e Vlasov, bem como a sua implementação computacional por meio do método dos elementos finitos. O desenvolvimento teórico é realizado aplicando-se uma formulação Lagrangiana atualizada, que utiliza a abordagem corrotacional para a dedução da matriz de rigidez do elemento finito de pórtico espacial. As relações cinemáticas adotadas permitem a consideração de grandes translações e rotações de corpo rígido, acompanhadas de pequenas deformações. O comportamento plástico do material é considerado aplicando-se o conceito de plasticidade distribuída e relações constitutivas apropriadas para o material, permitindo-se, assim, o acompanhamento do escoamento ao longo da altura da seção transversal e do comprimento do elemento. Neste estudo, é assumido que as rigidezes à torção e ao empenamento não são influenciadas pela plastificação do elemento. A formulação desenvolvida foi implementada no programa *ASTRAS*, elaborado em linguagem *Fortran 90*. Por fim, exemplos numéricos são apresentados a fim de demonstrar a consistência e precisão dos resultados obtidos por meio da metodologia proposta. Verificou-se que a consideração da restrição ou não do empenamento nos nós é um aspecto importante na análise, especialmente em estruturas sujeitas a flambagem. O método da zona plástica permitiu avaliar melhor a redistribuição de tensões e identificar pontos de fragilidade que poderiam ser negligenciados pelo método da rótula plástica, além de incorporar a não linearidade geométrica e de material de maneira mais abrangente, resultando em uma representação mais fiel das respostas estruturais.

Palavras-chave: Análise Avançada; Não Linearidade do Material; Não Linearidade Geométrica; Teoria de Vlasov; Teoria de Saint Venant; Pórtico Espacial de Aço.

ABSTRACT

The design of steel structures is generally carried out in two stages: structural analysis and design. The separation of these stages requires the evaluation of applied forces, displacements, stability, and the resistance of each structural element, making it challenging to achieve structures that are more resistant, optimized, economical, and consequently, more sustainable. Additionally, when analyzing steel structures with thin-walled open sections subjected to large loads, it is essential to consider not only geometric and material nonlinearity but also cross-sectional warping, residual stresses, and initial geometric imperfections. In this context, the aim of this research is to present the theoretical development of a nonlinear formulation for the advanced structural analysis of spatial steel frames, incorporating the Saint Venant and Vlasov torsion theories, as well as its computational implementation using the finite element method. The theoretical development is carried out using an updated Lagrangian formulation, which employs the corotational approach to derive the stiffness matrix for the spatial frame finite element. The adopted kinematic relations allow for the consideration of large rigid body translations and rotations accompanied by small deformations. The material's plastic behavior is considered through the application of distributed plasticity concepts and appropriate constitutive relations, enabling the tracking of material yielding throughout the cross-sectional height and element length. In this study, it is assumed that torsional and warping stiffnesses are not influenced by the element's plasticity. The developed formulation was implemented in the ASTRAS program, written in Fortran 90. Finally, numerical examples are presented to demonstrate the consistency and accuracy of the results obtained using the proposed methodology. It was found that considering or not the restriction of warping at the nodes is an important aspect in the analysis of thin-walled structures, especially in structures susceptible to buckling. The plastic zone method allowed for a better evaluation of stress redistribution and identification of weaknesses that could be overlooked by the plastic hinge method, in addition to incorporating geometric and material nonlinearity more comprehensively, resulting in a more accurate representation of structural responses.

Keywords: Advanced Analysis; Material nonlinearity; Geometric nonlinearity; Vlasov's theory; Saint Venant's theory; Space frame.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relevância dos periódicos	31
Figura 2 – Comportamento força <i>versus</i> deslocamento dos vários tipos de análise.....	37
Figura 3 – Modelagem pelo método da zona plástica	39
Figura 4 – Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares	40
Figura 5 – Processo incremental-iterativo com controle de carga.....	43
Figura 6 – Processo incremental-iterativo com controle direto de deslocamento.....	44
Figura 7 – Característica não vetorial da rotação no caso tridimensional	48
Figura 8 – Translação e rotação de um vetor no espaço	49
Figura 9 – Torção uniforme em barra prismática.....	55
Figura 10 – Viga de parede fina submetida a carga excêntrica	58
Figura 11 – Área setorial	60
Figura 12 – Área setorial principal para um perfil I duplamente simétrico	61
Figura 13 – Equilíbrio de forças num elemento de um perfil aberto U.....	62
Figura 14 – Forças resultantes das tensões de cisalhamento da torção livre e da flexo- torção	63
Figura 15 – Seção transversal de parede delgada.....	65
Figura 16 – Eixos nodais de referência e coordenadas dos nós nas diferentes configurações.....	69
Figura 17 – Eixos do elemento e eixos das seções inicial e final.....	70
Figura 18 – Determinação das novas coordenadas do elemento: (a) média das projeções dos eixos da seção; (b) novos eixos do elemento.	72
Figura 19 – Variação do sistema de eixos das seções nodais: (a) Configuração C ₁ ; (b) Configuração C ₂ ; (c) Incrementos rotacionais.....	74
Figura 20 – Deslocamentos e forças nodais	76
Figura 21 – Elemento infinitesimal antes e após deformação	79
Figura 22 – Diagrama tensão <i>versus</i> deformação do material.....	91
Figura 23 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial	92
Figura 24 – Diagrama <i>tensão normal x deformação normal</i> multilinear	94
Figura 25 – Discretização da seção transversal.....	95
Figura 26 – Fluxograma do algoritmo de solução incremental-iterativa para análises estáticas	102

Figura 27 – Viga engastada com carga vertical na extremidade livre	104
Figura 28 – Influência do número de fatias na resposta estrutural.....	104
Figura 29 – Influência do número de elementos finitos na resposta estrutural	106
Figura 30 – Pórtico L em balanço submetido a carga concentrada na direção X....	107
Figura 31 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento lateral (w) para o pórtico L	108
Figura 32 – Configuração deformada do pórtico L em balanço.....	109
Figura 33 – Geometria da estrutura em vista superior e em elevação	110
Figura 34 – Trajetórias de equilíbrio para o nó do topo.....	111
Figura 35 – Configuração deformada do domo (análise elástica)	112
Figura 36 – Configuração deformada do domo (análise elastoplástica).....	112
Figura 37 – Pórtico de dois andares com bases engastadas.....	113
Figura 38 – Curva carga aplicada <i>versus</i> deslocamento lateral do pórtico de dois andares com bases engastadas.....	114
Figura 39 – Pórtico espacial de dois andares e um vão com perfis H.....	115
Figura 40 – Curva carga aplicada <i>versus</i> deslocamento lateral para o nó A do topo do primeiro pavimento.....	116
Figura 41 – Curva carga aplicada <i>versus</i> deslocamento lateral para o nó B da cobertura	116
Figura 42 – Viga submetida a momento torçor uniformemente distribuído	118
Figura 43 – Variação do ângulo de torção (θ_x) ao longo do vão da viga.....	119
Figura 44 – Variação do momento torçor considerando empenamento livre nos apoios	120
Figura 45 – Variação do momento torçor considerando empenamento restringido nos apoios.....	120
Figura 46 – Variação do bimomento ao longo do vão da viga	121
Figura 47 – Grelha submetida a um momento torçor concentrado	122
Figura 48 – Viga-pilar submetida à flexo-torção	124
Figura 49 – Comportamento geometricamente não linear da viga-pilar submetida a flexo-torção.....	125
Figura 50 – Pórtico L em balanço no plano XZ	127
Figura 51 – Carga <i>versus</i> deslocamento U_c do pórtico L	127
Figura 52 – Carga <i>versus</i> deslocamento V_c do pórtico L	128
Figura 53 – Carga <i>versus</i> deslocamento $ W_c $ do pórtico L.....	128
Figura 54 – Viga contínua com dois vãos	129

Figura 55 – Relação $P_{\max}^{\omega}/P_{\text{cr}}^{\text{SV}}$ <i>versus</i> parâmetro de excentricidade e/L	130
Figura 56 – Redução da capacidade resistente	131
Figura 57 – Redução da capacidade resistente sem empenamento.....	131
Figura 58 – Viga engastada submetida a flambagem lateral	132
Figura 59 – Comportamento carga <i>versus</i> deslocamento lateral da viga engastada	133
Figura 60 – Pórtico espacial com planta baixa triangular	134
Figura 61 – Comportamento não linear do pórtico de dois andares com planta baixa triangular	135
Figura 62 – Plastificação nas barras do pórtico de dois andares com base triangular	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Portfólio bibliográfico selecionado	27
Tabela 2 – Discretização da seção transversal por modelo	104
Tabela 3 – Imperfeição de desalinhamento do pórtico espacial de dois andares com seção H	115
Tabela 4 – Valores obtidos para momento de torção, momento fletor e bimomento (8 EF's)	122
Tabela 5 – Valores obtidos para momento de torção, momento fletor e bimomento (1 EF)	123
Tabela 6 – Valores de carga crítica para viga-pilar submetida a flexo-torção	125

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Palavras-chave e combinações para busca	26
Quadro 2 – Lentes de pesquisa para análise do portfólio bibliográfico	32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AISC – *American Institute of Steel Construction*

ASTRAS – *Advanced Structural Analysis System*

CEFET-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

ECCS – *European Convention for Constructional Steelwork*

EF – Elementos finitos

FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais

GSP – *Generalized Stiffness Parameter*

LRFD – *Load and Resistance Factor Design*

MEF – Método dos Elementos Finitos

MZP – Método da Zona Plástica

MRP – Método da Rótula Plástica

MRPR – Método da Rótula Plástica Refinado

NLG – Não Linearidade Geométrica

NLM – Não Linearidade do Material

NRP – Método de Newton-Raphson Padrão

NRM – Método de Newton-Raphson Modificado

PPLANLEP – Pórticos Planos de Aço, considerando a Análise Não Linear Elasto-Plástica

ProKnow-C – *Knowledge Development Process Constructivist*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	21
1.1.1	Objetivo geral	21
1.1.2	Objetivos específicos	21
1.2	Justificativa e Relevância	21
1.3	Organização do trabalho	23
2	ESTADO DA ARTE: ANÁLISE AVANÇADA DE ESTRUTURAS RETICULADAS TRIDIMENSIONAIS EM AÇO	25
2.1	Considerações iniciais.....	25
2.2	Seleção dos trabalhos científicos e revisão sistemática	25
2.2.1	Seleção do portfólio bibliográfico.....	26
2.2.2	Análise bibliométrica do portfólio bibliográfico.....	30
2.2.3	Análise sistêmica dos artigos do portfólio	32
3	ANÁLISE ESTRUTURAL EM PROBLEMAS NÃO LINEARES	36
3.1	Considerações iniciais.....	36
3.2	Análise avançada	37
3.3	Métodos de análise plástica	38
3.4	Solução das equações de equilíbrio não lineares.....	40
3.4.1	Métodos incrementais-iterativos.....	41
3.4.2	Crítérios de convergência.....	46
4	TENSOR ROTAÇÃO.....	48
4.1	Considerações iniciais.....	48
4.2	Matriz de rotação – Fórmula de Rodrigues	49
4.3	Extração do vetor rotacional a partir da matriz de rotação	52
4.4	Rotações sucessivas	52
5	TORÇÃO EM BARRAS PRISMÁTICAS.....	54
5.1	Considerações iniciais.....	54
5.2	Torção uniforme de Saint-Venant	54
5.3	Torção não uniforme ou flexo-torção	57
5.4	Instabilidade por flexão e torção.....	64
6	FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS CONSIDERANDO AS TEORIAS DE SAINT VENANT E VLASOV.....	68
6.1	Considerações iniciais.....	68

6.2	Sistemas de eixos de referência	69
6.3	Atualização da geometria do elemento	71
6.4	Eixos do elemento e eixos das seções nodais	71
6.5	Deslocamentos naturais do elemento	73
6.6	Cinemática do elemento	76
6.6.1	Campo de deslocamento	77
6.6.2	Campo de deformação	78
6.7	Funções de interpolação	80
6.8	Valor médio de deformação	82
6.9	Equações de equilíbrio	82
6.10	Matriz de transformação	84
6.11	Matriz de rigidez tangente do elemento	85
6.11.1	Matriz de rigidez tangente constitutiva e geométrica em regime elástico.	86
6.11.2	Matriz de rigidez tangente constitutiva e geométrica em regime elastoplástico	88
6.12	Relações constitutivas	90
6.12.1	Comportamento elastoplástico unidimensional	92
6.13	Esforços internos	94
6.13.1	Decomposição da seção transversal em fatias	95
6.13.2	Coeficientes de rigidez	96
7	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	98
7.1	Considerações iniciais	98
7.2	Visão geral do programa ASTRAS	98
8	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	103
8.1	Considerações iniciais	103
8.2	Exemplos considerando a teoria de Saint-Venant	103
8.2.1	Viga engastada submetida a uma carga concentrada	103
8.2.2	Pórtico L em balanço no plano XY	106
8.2.3	Domo espacial submetido a carga vertical	109
8.2.4	Pórtico tridimensional de dois andares com seções retangulares..	112
8.2.5	Pórtico espacial de dois andares e um vão com perfis H	114
8.3	Exemplos considerando a teoria de Vlasov	117
8.3.1	Viga com momento torçor distribuído	117
8.3.2	Grelha submetida a um momento torçor concentrado	121
8.3.3	Viga-pilar submetida à flexo-torção	123

8.3.4	Pórtico L em balanço no plano XZ	126
8.3.5	Flambagem lateral de uma viga contínua com dois vãos.....	129
8.3.6	Viga engastada submetida a flambagem lateral.....	131
8.3.7	Pórtico espacial de dois pavimentos com planta baixa triangular ..	133
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	137
	REFERÊNCIAS	141
	APÊNDICE A	153
	A.1 Arquivo de saída: Viga engastada submetida a uma carga concentrada (Exemplo 8.2.1).....	153

1 INTRODUÇÃO

O projeto de estruturas de aço envolve duas fases: análise estrutural e dimensionamento. Em razão da etapa de dimensionamento ser, geralmente, desacoplada da análise estrutural, existe a necessidade de verificar, de forma individual, os esforços solicitantes, os deslocamentos, a estabilidade e a resistência de cada componente da estrutura. Esse processo demanda tempo e desfavorece a obtenção de um dimensionamento mais otimizado. Considerando tal aspecto, existe, atualmente, um notável esforço da comunidade científica que atua na área de Engenharia de Estruturas em desenvolver programas computacionais capazes de auxiliar projetistas a criarem edifícios de aço mais resistentes e duráveis com o mínimo emprego de material visando à sustentabilidade da construção civil. Para isso, se torna essencial a consideração dos principais fatores que afetam o comportamento das estruturas, tais como as não linearidades geométrica e do material, bem como das imperfeições iniciais das peças estruturais (Ngo-Huu, Nguyen e Kim, 2012a; Nguyen e Kim, 2014a, 2018a; Silva *et al.*, 2018).

A não linearidade geométrica está relacionada às mudanças da geometria da estrutura frente às ações atuantes, a qual se traduz nos efeitos de segunda ordem $P - \Delta$ (global) e $P - \delta$ (a nível do elemento). O efeito $P - \Delta$ está associado ao acréscimo de momentos devido ao deslocamento da estrutura, enquanto o efeito $P - \delta$ está relacionado ao acréscimo de momentos pela curvatura das barras sujeitas a forças axiais. Por sua vez, a não linearidade do material é responsável por incluir os efeitos da perda da rigidez do material durante a história de carregamento da estrutura.

Além desses fatores que interferem no comportamento das estruturas de aço, devem-se considerar as imperfeições iniciais dos elementos que constituem a estrutura, isto é, as imperfeições geométricas e de material. As imperfeições geométricas iniciais (curvatura inicial e fora de prumo) podem ser originadas nos processos de fabricação e construção (durante a montagem), ou até mesmo no transporte dos elementos estruturais. As imperfeições de material (tensões residuais) aparecem com o resfriamento não uniforme da peça, sendo advindas do processo de fabricação dos perfis de aço. Tais tensões são auto equilibradas e influenciam na resposta estrutural visto que podem antecipar o surgimento da plastificação e, consequentemente, alterar a trajetória até o colapso.

A análise que considera simultaneamente as não linearidades geométrica e do material, as tensões residuais e as imperfeições geométricas, de forma que não seja necessária a verificação de cada elemento de forma isolada, é conhecida como Análise Avançada (Chen e Kim, 1997; Silva, 2010). Essa análise viabiliza a construção de estruturas mais leves e esbeltas, uma vez que pode prever com bastante precisão os possíveis modos de falha de uma estrutura, além de proporcionar um maior índice de confiabilidade na análise e no dimensionamento estrutural (Lavall *et al.*, 2013).

Na literatura encontram-se diversas formulações, baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), que aplicam o conceito de Análise Avançada, essas geralmente se diferem pelos métodos aplicados para a consideração das não linearidades, física e geométrica (Nguyen e Kim, 2016, 2018a; Truong, Nguyen e Kim, 2017; Silva *et al.*, 2018).

Conforme descrito por Nguyen e Kim (2014c), existem dois métodos aplicados na análise avançada de estruturas de aço para a consideração do efeito da não linearidade do material: o Método da rótula plástica refinado (MRPR) e o Método da zona plástica (MZP). O primeiro método surge do refinamento do método da rótula plástica (MRP), baseado na abordagem de plasticidade concentrada, no qual avalia-se a plasticidade do material nos pontos nodais de cada elemento finito. O refinamento do método é feito de modo a considerar a perda de rigidez de forma gradativa entre as curvas de início de plastificação e de resistência. O segundo método, baseado na abordagem de plasticidade distribuída, é mais preciso do que os métodos de rótula plástica, uma vez que considera a plastificação ao longo do comprimento e da área da seção transversal dos elementos estruturais (Nguyen e Kim, 2014c).

No que se refere à abordagem para a descrição do movimento do elemento finito, pode-se agrupar essas formulações em três categorias: Lagrangiana Total, Lagrangiana Atualizada e Corrotacional. A principal diferença entre as duas primeiras descrições está relacionada à configuração considerada na dedução das equações de equilíbrio do MEF. Na formulação Lagrangiana Total, todas as variáveis são derivadas em relação à uma configuração de referência inicial fixa, enquanto que na descrição Lagrangiana Atualizada as equações são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio. Por sua vez, na descrição cinemática corrotacional, as equações de cada elemento são desenvolvidas considerando dois sistemas: um sistema de configuração base que permanece fixo e outro, chamado corrotacional, que acompanha o elemento. Nessa abordagem pode-se empregar tanto a formulação

Lagrangiana Total quanto a Atualizada (Hsiao, Horng e Chen, 1987; Silva, 2013; Viana *et al.*, 2020).

Muitas pesquisas têm revelado que a formulação corrotacional é mais adequada quando pequenas deformações estão envolvidas no problema. Além disso, o emprego de uma formulação corrotacional permite a consideração de diferentes medidas de deformação a nível local (Monteiro, 2004).

Esses aspectos se tornam ainda mais relevantes ao analisar estruturas tridimensionais, onde os elementos podem estar sujeitos a forças e momentos que não apenas causam translações e rotações de flexão, mas também induzem efeitos de torção. Para incorporar o grau de liberdade de torção em um modelo de elementos finitos, pode-se adotar as hipóteses de Saint Venant ou Vlasov. A torção livre de Saint Venant aborda a deformação de torção em situações onde o material não experimenta qualquer restrição ao empenamento, o que é comum em muitas aplicações práticas. Por outro lado, a torção restringida de Vlasov inclui o efeito das restrições de empenamento, que são críticas em elementos estruturais onde o empenamento da seção transversal é impedido, como em estruturas de aço com perfis abertos.

Embora existam diversas formulações para a análise não linear de estruturas, ainda são poucos os estudos que utilizam a abordagem corrotacional na análise avançada de estruturas espaciais, considerando tanto o método da plasticidade distribuída quanto a influência do empenamento da seção transversal. Portanto, este trabalho apresenta uma formulação não linear de um elemento finito, juntamente com sua implementação computacional, para a análise avançada de pórticos espaciais de aço. A formulação combina a descrição Lagrangiana Atualizada com a abordagem corrotacional, e é baseada nas teorias de torção de Saint Venant e Vlasov. As relações cinemáticas adotadas permitem grandes translações e rotações de corpo rígido, acompanhadas de pequenas deformações. Para capturar a plasticidade do material, é utilizado o método da zona plástica, o que possibilita acompanhar a distribuição da plastificação ao longo da altura da seção transversal e do comprimento do elemento. Além disso, a metodologia proposta considera as imperfeições geométricas iniciais, como curvatura inicial e falta de prumo, bem como as tensões residuais.

É importante ressaltar que essa tese é uma continuação dos trabalhos desenvolvidos por Lavall (1996), Silva (2010), Costa (2014), entre outros, que propuseram formulações para a análise avançada de pórticos planos, treliças e cabos planos e espaciais similares com a formulação aqui apresentada. Neste trabalho, o

programa *Advanced STRuctural Analysis System (ASTRAS)*, apresentado em Costa (2014), será adaptado de modo a possibilitar a análise de pórticos espaciais de aço.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo dessa tese é desenvolver uma formulação teórica não linear para a análise avançada de pórticos espaciais de aço, incorporando as teorias de Saint Venant e Vlasov, e realizar sua implementação computacional através do método dos elementos finitos.

1.1.2 Objetivos específicos

Para o alcance do objetivo principal, foram definidos os objetivos específicos:

- i. Realizar uma revisão sistemática da literatura abordando métodos e estudos relevantes na análise avançada de estruturas reticuladas tridimensionais de aço.
- ii. Desenvolver uma formulação Lagrangiana corrotacional aplicada a pórticos espaciais incluindo as não linearidades do material e geométrica das estruturas, além da consideração das teorias de Saint Venant e de Vlasov;
- iii. Implementar no programa *ASTRAS* a formulação proposta que considera o elemento unidimensional de pórtico no espaço, incorporando os efeitos de torção livre e flexo-torção.
- iv. Implementar o método do controle de deslocamento generalizado visando atender a estabilidade numérica ao se aproximar de pontos críticos, a adequação dos incrementos de carga com base nas variações na rigidez da estrutura e a capacidade de adaptação imediata para determinar a direção do carregamento ao longo da análise;
- v. Validar a formulação proposta e sua implementação a partir da comparação dos resultados de problemas envolvendo a não linearidade geométrica e do material, bem como a torção uniforme e não uniforme, obtidos pelo programa *ASTRAS* com aqueles disponíveis na literatura.

1.2 Justificativa e Relevância

Entre os vários setores produtivos, o setor da construção civil é um dos que mais geram resíduos e consome recursos naturais, além de causar diversos outros

impactos sociais, econômicos e ambientais (Ministério do Meio Ambiente, [s.d.]). Esses impactos, muitas das vezes, estão relacionados à inexistência de metodologias adequadas para uma determinada etapa do processo construtivo.

A busca de estruturas mais eficientes e de menor custo tem sido um dos principais desafios da indústria da construção civil, uma vez que essa ação requer um trabalho bem elaborado nas diversas fases construtivas, especialmente na etapa de concepção do projeto. Nesse momento, almeja-se estruturas resistentes, mais leves e esbeltas com o objetivo de reduzir custos com material e a geração de resíduos, promovendo a sustentabilidade. No entanto, ao se projetar estruturas mais esbeltas é imprescindível a consideração de efeitos não lineares oriundos de grandes deslocamentos de translação e angulares.

O problema de grandes rotações em estruturas espaciais não é uma tarefa simples de ser analisada, visto que as grandes rotações no espaço apresentam natureza não vetorial, isto é, não obedecem a propriedade comutativa utilizada na adição de vetores e, portanto, o resultado em geral irá depender da ordem que as rotações são realizadas (Hsiao, Horng e Chen, 1987).

Algumas pesquisas recentes têm indicado as vantagens da utilização da descrição corrotacional no tratamento de grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido (Alsafadie, Hjiar e Battini, 2011; Albino *et al.*, 2018; Re, Di e Addessi, 2018; Re, Di, Addessi e Paolone, 2019). Na formulação corrotacional, a não linearidade geométrica é desacoplada da não linearidade do material, o que permite a adoção de diferentes relações constitutivas para o material.

Além da consideração dos efeitos de segunda ordem, deve-se avaliar a possibilidade de as estruturas estarem sujeitas a carregamentos extremos com intensidades suficientes para provocarem deformações plásticas irreversíveis nos elementos estruturais. Nessa ocasião, a fim de se obter uma resposta numérica mais próxima da realidade, o método de análise utilizado deve ser capaz de capturar a evolução da plastificação ao longo da altura e do comprimento dos elementos que compõem a estrutura. Nesse caso, o método da zona plástica apresenta-se como uma excelente opção (Nguyen e Kim, 2014c; Silva *et al.*, 2018).

Por fim, outro problema a ser analisado em estruturas espaciais são os efeitos da torção em barras prismáticas de paredes finas. Essas barras podem sofrer deslocamentos longitudinais relativos (empenamento) como resultado da torção e, havendo qualquer restrição ao empenamento, surgem tensões normais que podem

atingir valores significativos, principalmente, nas barras com seções transversais abertas e de paredes finas. No entanto, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura desprezam o efeito do empenamento.

Portanto, nessa perspectiva, ao propor uma formulação que considera as metodologias e situações acima descritas, a relevância desse trabalho reside na possibilidade de se obter resultados mais precisos sobre o comportamento de estruturas de aço que poderão servir de base na obtenção de soluções estruturais mais sustentáveis.

1.3 Organização do trabalho

Este trabalho foi estruturado em nove capítulos. O Capítulo 1 consiste na introdução, apresentando de forma sucinta o tema do trabalho, bem como o objetivo geral e os objetivos específicos, a justificativa e a estrutura do trabalho.

No capítulo 2, são apresentados os métodos e principais estudos relacionados à análise avançada de estruturas reticuladas tridimensionais de aço, afim de evidenciar o estado da arte e as tendências metodológicas adotadas nas publicações sobre o tema. Para isso, foi utilizado o método *Knowledge Development Process – Constructivist (ProKnow-C)*, que favorece a realização de uma análise sistêmica bem estruturada e abrangente da literatura.

Nos capítulos 3 a 5, é delineado o embasamento teórico adotado neste trabalho. O Capítulo 3 descreve os princípios da Análise Avançada, explorando os principais fatores que influenciam o comportamento das estruturas de aço. Especial atenção é dada aos diferentes tipos de análise, com um foco particular na análise elastoplástica de segunda ordem utilizando a abordagem de plasticidade distribuída. Além disso, esse capítulo oferece uma revisão dos principais métodos incrementais iterativos utilizados na resolução de sistemas de equações não lineares. Em seguida, o Capítulo 4 detalha o caso de problemas tridimensionais que envolvem grandes rotações, introduzindo o tensor de rotação e descrevendo o procedimento para extrair o vetor rotacional a partir da matriz de rotação. Finalmente, o Capítulo 5 explora a torção em barras prismáticas, abordando tanto a teoria de torção uniforme de Saint Venant quanto a teoria de torção não uniforme de Vlasov.

No capítulo 6, uma formulação numérica de um elemento finito de pórtico espacial é desenvolvida. Essa formulação emprega a descrição Lagrangiana corrotacional atualizada e o método da zona plástica para a obtenção da matriz de rigidez tangente

consistente do elemento de pórtico espacial. A exposição da teoria é feita de forma itemizada, sendo abordada as relações constitutivas do material, os sistemas de coordenadas global e local, os campos de deslocamento e deformação conforme as teorias de Saint Venant e Vlasov. Ao final desse capítulo, apresentam-se as matrizes de rigidez tangente, constitutiva e geométrica, considerando os comportamentos, elástico e elastoplástico, para elementos de pórticos espaciais, explicitando-as analiticamente, de forma simples.

O capítulo 7 aborda os aspectos da implementação computacional da formulação numérica proposta. Inicialmente, é fornecida uma visão geral do programa *Advanced STRuctural Analysis System (ASTRAS)*. Posteriormente, é mostrado o fluxograma do algoritmo de solução incremental-iterativa para análises estáticas de pórticos espaciais de aço, baseado na formulação desenvolvida, bem como uma breve descrição das subrotinas que foram adaptadas.

No capítulo 8, são apresentados exemplos numéricos de problemas geometricamente e fisicamente não lineares envolvendo estruturas de aço com e sem a consideração da rigidez ao empenamento com o objetivo de validar a formulação implementada.

Por fim, no capítulo 9, são apresentadas as principais conclusões do presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 ESTADO DA ARTE: ANÁLISE AVANÇADA DE ESTRUTURAS RETICULADAS TRIDIMENSIONAIS EM AÇO

2.1 Considerações iniciais

Nas últimas décadas, em decorrência dos grandes avanços tecnológicos na área de construção civil, a aplicação de elementos estruturais leves e esbeltos tem se tornado bastante usual em estruturas, como em edifícios e pontes. Essas estruturas, quando submetidas a condições severas de carregamento podem exibir grandes deslocamentos e rotações e até mesmo deformações irreversíveis. A fim de viabilizar o projeto de sistemas estruturais sujeitos a tais condições, muitas normas técnicas têm recomendado o emprego de análises não lineares elastoplásticas como boa prática na definição do comportamento desses sistemas (CEN, 2005; ABNT, 2008). Nesse sentido, beneficiando-se da tecnologia computacional existente, alguns pesquisadores têm-se dedicado ao desenvolvimento de métodos de análise não linear de estruturas.

Considerando tal contexto, o presente capítulo propõe-se a apresentar um portfólio bibliográfico, bem como o estado da arte, do tema “Análise avançada de estruturas tridimensionais em aço” a partir da aplicação da metodologia *Knowledge Development Process Constructivist (ProKnow-C)*, proposta por Ensslin et al. (2010). O foco principal desse estudo está voltado à aplicação de elementos finitos unidimensionais, os quais são de natureza simples e de larga aplicação na análise estrutural. Pretende-se responder a seguinte pergunta: Quais são as principais metodologias aplicadas na análise avançada de estruturas reticuladas espaciais de aço?

Para responder à pergunta proposta, fez-se uma busca por artigos científicos que abordam formulações não lineares para análise de estruturas espaciais de aço de modo a observar os aspectos: a) descrição cinemática do elemento finito; b) modelagem da plasticidade; e c) atributos físicos considerados (tensões residuais, imperfeições geométricas iniciais, empenamento da seção transversal).

2.2 Seleção dos trabalhos científicos e revisão sistemática

O método *ProKnow-C* se estrutura, basicamente, em três etapas: seleção do portfólio bibliográfico; análise bibliométrica e análise sistêmica. A análise bibliométrica consiste em uma análise quantitativa de um conjunto definido de artigos para gerir a informação e o conhecimento científico do tema de pesquisa. Por sua vez, a análise

sistêmica tem como fim a identificação das lacunas na literatura sobre determinado tema, a partir da leitura dos artigos selecionados (Ensslin *et al.*, 2010). A seguir são descritas as principais etapas que foram realizadas durante a condução deste estudo.

2.2.1 Seleção do portfólio bibliográfico

A seleção do portfólio de artigos sobre o tema proposto iniciou-se com a escolha das bases de dados que delimitarão o campo amostral e a definição das palavras-chave. Baseando-se nos eixos de pesquisa, que são as dimensões necessárias e suficientes para representar o tema, as palavras-chave empregadas na busca de artigos científicos foram definidas. Em seguida, tais palavras foram testadas quanto à aderência a dois artigos alinhados ao tema de pesquisa selecionados previamente. Verificou-se que as palavras-chave desses dois artigos incorporavam as palavras-chave escolhidas inicialmente, e, por consequência, não houve alteração ou a inclusão de termos. O Quadro 1 exibe as palavras adotadas, agrupadas por eixo, assim como as combinações para as buscas nas bases de dados. Cabe salientar que os termos contidos nesse quadro foram combinados três a três, sempre considerando um termo de cada eixo de pesquisa.

Quadro 1 – Palavras-chave e combinações para busca

Tipo de análise	Elemento finito	Modelagem
<i>Advanced analysis</i>	<i>Three-dimensional frame structure</i>	<i>Distributed plasticity</i>
<i>Nonlinear analysis</i>	<i>Space frames</i>	<i>Plastic hinge</i>
<i>Second order inelastic analysis</i>	<i>3D steel frames</i>	<i>Warping effect</i>
<i>Geometric and material nonlinear analysis</i>		

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Neste trabalho foram utilizadas as bases *ASCE*, *ScienceDirect*, *SpringerLink* e *Scopus*. As combinações de busca deveriam estar presentes pelo menos em um dos seguintes campos dos artigos: título, palavras-chave e resumo. Além disso, a busca incluiu artigos publicados em inglês e português até dezembro de 2023. Ao aplicar o procedimento descrito, obteve-se como retorno 526 artigos.

As referências dos artigos brutos selecionados foram inseridas em um gerenciador de referências e citações. Em seguida, foram realizadas filtragens no que diz respeito

à redundância de artigos indexados por bases distintas, alinhamento do título com o tema de pesquisa, e alinhamento do resumo, obtendo-se 45 artigos. Além disso, a fim de avaliar o reconhecimento científico do portfólio obtido, foi pesquisado o número de citações de cada publicação, utilizando o Google Acadêmico (<http://scholar.google.com.br/>). A Tabela 1 lista os artigos que compõem o portfólio bibliográfico selecionado.

Tabela 1 – Portfólio bibliográfico selecionado

ID	Autor(es)	Título	Periódico	Ano	Citações
1	Abdelrahman, A. H. A.; Lotfy, Sameh; Liu, Si-Wei.	Generalized line-element formulations for geometrically nonlinear analysis of nonsymmetric tapered steel members with warping and Wagner effects	<i>Engineering Structures</i>	2022	5
2	Abdelrahman, A. H. A. <i>et al</i>	Timoshenko line-element for stability analysis of tapered I-section steel members considering warping effects	<i>Thin-walled structures</i>	2022	9
3	Al-bermani, F. G. A.; Kitipornchai, S.	Elasto-plastic large deformation analysis of thin-walled structures	<i>Engineering Structures</i>	1990	62
4	Alsafadie, R. <i>et al</i> .	A comparative study of displacement and mixed-based corotational finite element formulations for elasto-plastic three-dimensional beam analysis	<i>Engineering Computations</i>	2011	19
5	Alsafadie, R.; Hjjaj, M.; Battini, J.-M.	Three-dimensional formulation of a mixed corotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation.	<i>Thin-walled structures</i>	2011	38
6	Cai, Y.; Paik, J. K.; Atluri, S. N.	Large deformation analyses of space-frame structures, with members of arbitrary cross-section, using explicit tangent stiffness matrices, based on a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames.	<i>Computer Modeling in Engineering and Sciences</i>	2009a	21
7	Cai, Y.; Paik, J. K.; Atluri, S. N.	Large deformation analyses of space-frame structures, using explicit tangent stiffness matrices, based on the reissner variational principle and a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames.	<i>Computer Modeling in Engineering and Sciences</i>	2009b	14
8	Chan, S. L.; Huang, H. Y.; Fang, L. X.	Advanced Analysis of Imperfect Portal Frames with Semirigid Base Connections.	<i>Journal of Engineering Mechanics</i>	2005	69
9	Chandra, R.; Krishna, P.; Trikha, D. N.	Elastic-Plastic Analysis of Steel Space Structures.	<i>Journal of Structural Engineering</i>	1990	20
10	Chen, Liang <i>et al</i> .	Co-rotational formulations for geometrically nonlinear analysis of beam-columns including warping and Wagner effects.	<i>International Journal of Structural Stability and Dynamics</i>	2023	3

Tabela 1 – Portfólio bibliográfico selecionado

(continuação)

ID	Autor(es)	Título	Periódico	Ano	Citações
11	Chiorean, C. G.; Barsan, G. M.	Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks.	<i>Computers & Structures</i>	2005	43
12	Cosgun, T.; Sayin, B.	Geometric and material nonlinear analysis of three-dimensional steel frames.	<i>International Journal of Steel Structures</i>	2014	6
13	Di re, P.; Addressi, D.	A mixed 3D corotational beam with cross-section warping for the analysis of damaging structures under large displacements.	<i>Meccanica</i>	2018	10
14	Du, Z.-L. <i>et al.</i>	Advanced flexibility-based beam-column element allowing for shear deformation and initial imperfection for direct analysis.	<i>Engineering Structures</i>	2019	5
15	Hancock, Gregory J. <i>et al.</i>	Geometric and material nonlinear analysis of thin-walled members with arbitrary open cross-section.	<i>Thin-walled structures</i>	2020	11
16	Huang, Z.-F.; Tan, K.-H.	Fe simulation of space steel frames in fire with warping effect.	<i>Advanced Steel Construction</i>	2007	9
17	Izzuddin, B. A.; Smith, D. L.	Large-Displacement Analysis of Elastoplastic Thin-Walled Frames. I: Formulation and Implementation.	<i>Journal of Structural Engineering</i>	1996	84
18	Jiang, X.-M.; Chen, H.; Liew, J. Y. R.	Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames.	<i>Journal of Constructional Steel Research</i>	2002	132
19	Junior, V. S.; Creus, G. J.	Simplified elastoplastic analysis of general frames on fire.	<i>Engineering Structures</i>	2007	25
20	Kim, S. E.; Choi, S. H.	Practical second-order inelastic analysis for three-dimensional steel frames subjected to distributed load.	<i>Thin-walled structures</i>	2005	28
21	Kim, S. E.; Park, M. H.; Choi, S. H.	Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis.	<i>Engineering Structures</i>	2001	132
22	Kim, S.-E.; Lee, D.-H.	Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames.	<i>Engineering Structures</i>	2002	86
23	Kim, S.-E.; Ngo-Huu, C.; Lee, D.-H.	Second-order inelastic dynamic analysis of 3-D steel frames.	<i>International Journal of Solids and Structures</i>	2006b	32
24	Krenk, S.; Vissing-Jørgensen, C.; Thesbjerg, L.	Efficient collapse analysis techniques for framed structures.	<i>Computers & Structures</i>	1999	33
25	Krishnan, S.; Hall, J. F.	Modeling Steel Frame Buildings in Three Dimensions. II: Elastofiber Beam Element and Examples.	<i>Journal of Engineering Mechanics</i>	2006	46
26	Liew, J. Y. R. <i>et al.</i>	Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures.	<i>Engineering Structures</i>	2000	221
27	Liu, S.-W. <i>et al.</i>	Second-Order Direct Analysis of Domelike Structures Consisting of Tapered Members with I-Sections.	<i>Journal of Structural Engineering</i>	2016	27

Tabela 1 – Portfólio bibliográfico selecionado

(continuação)

ID	Autor(es)	Título	Periódico	Ano	Citações
28	Liu, S.-W.; Liu, Y.-P.; Chan, S.-L.	Direct analysis by an arbitrarily-located-plastic-hinge element—part 2: spatial analysis.	<i>Journal of Constructional Steel Research</i>	2014	35
29	Ma, K. Y.; Richard Liew, J. Y.	Nonlinear Plastic Hinge Analysis of Three-Dimensional Steel Frames in Fire.	<i>Journal of Structural Engineering</i>	2004	39
30	Ngo-huu, C.; Kim, S. E.; Oh, J. R.	Nonlinear analysis of space steel frames using fiber plastic hinge concept.	<i>Engineering Structures</i>	2007	75
31	Ngo-huu, C.; Nguyen, P. C.; Kim, S. E.	Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames.	<i>Thin-walled structures</i>	2012	41
32	Nguyen, P. C.; Kim, S. E.	A new improved fiber plastic hinge method accounting for lateral-torsional buckling of 3D steel frames.	<i>Thin-walled structures</i>	2018	22
33	Nguyen, P. C.; Kim, S. E.	Nonlinear inelastic time-history analysis of three-dimensional semi-rigid steel frames.	<i>Journal of Constructional Steel Research</i>	2014c	34
34	Nguyen, P.-C.; Kim, S.-E.	Second-order spread-of-plasticity approach for nonlinear time-history analysis of space semi-rigid steel frames.	<i>Finite Elements in Analysis and Design</i>	2015b	25
35	Nguyen, P.-C.; Kim, S.-E.	An advanced analysis method for three-dimensional steel frames with semi-rigid connections.	<i>Finite Elements in Analysis and Design</i>	2014a	41
36	Nukala, P. K. V. V.; White, D. W.	A mixed finite element for three-dimensional nonlinear analysis of steel frames.	<i>Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering</i>	2004	105
37	Peres, Nuno; Gonçalves, Rodrigo; Camotim, Dinar.	Generalised Beam Theory formulation for the buckling analysis of thin-walled members with circular axis	<i>Thin-walled structures</i>	2022	6
38	Prakash, P. R.; Srivastava, G.	Distributed plasticity model for analysis of steel structures subjected to fire using the direct stiffness method.	<i>Fire Safety Journal</i>	2019	5
39	Savard, M.; Beaulieu, D.; Fafard, M.	Nonlinear finite element analysis of three-dimensional frames.	<i>Canadian journal of civil engineering</i>	1994	2
40	Shugyo, M.	Elastoplastic Large Deflection Analysis of Three-Dimensional Steel Frames.	<i>Journal of Structural Engineering</i>	2003	27
41	Teh, L. H.; Clarke, M. J.	Plastic-Zone Analysis of 3D Steel Frames Using Beam Elements.	<i>Journal of Structural Engineering</i>	1999	111

Tabela 1 – Portfólio bibliográfico selecionado

(conclusão)

ID	Autor(es)	Título	Periódico	Ano	Citações
42	Turkalj, G.; Brnic, J.; Kravanja, S.	A beam model for large displacement analysis of flexibly connected thin-walled beam-type structures.	<i>Thin-walled structures</i>	2011	18
43	Yang, Q. S.; Wang, X. F.	A geometrical and physical nonlinear finite element model for spatial thin-walled beams with arbitrary section.	<i>Science China Technological Sciences</i>	2010	9
44	Zubydan, A. H.	Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross-sectional members.	<i>Engineering Structures</i>	2013	26
45	Zubydan, A. H. <i>et al.</i>	Inelastic large deflection analysis of space steel frames using an equivalent accumulated element.	<i>Engineering Structures</i>	2018	2

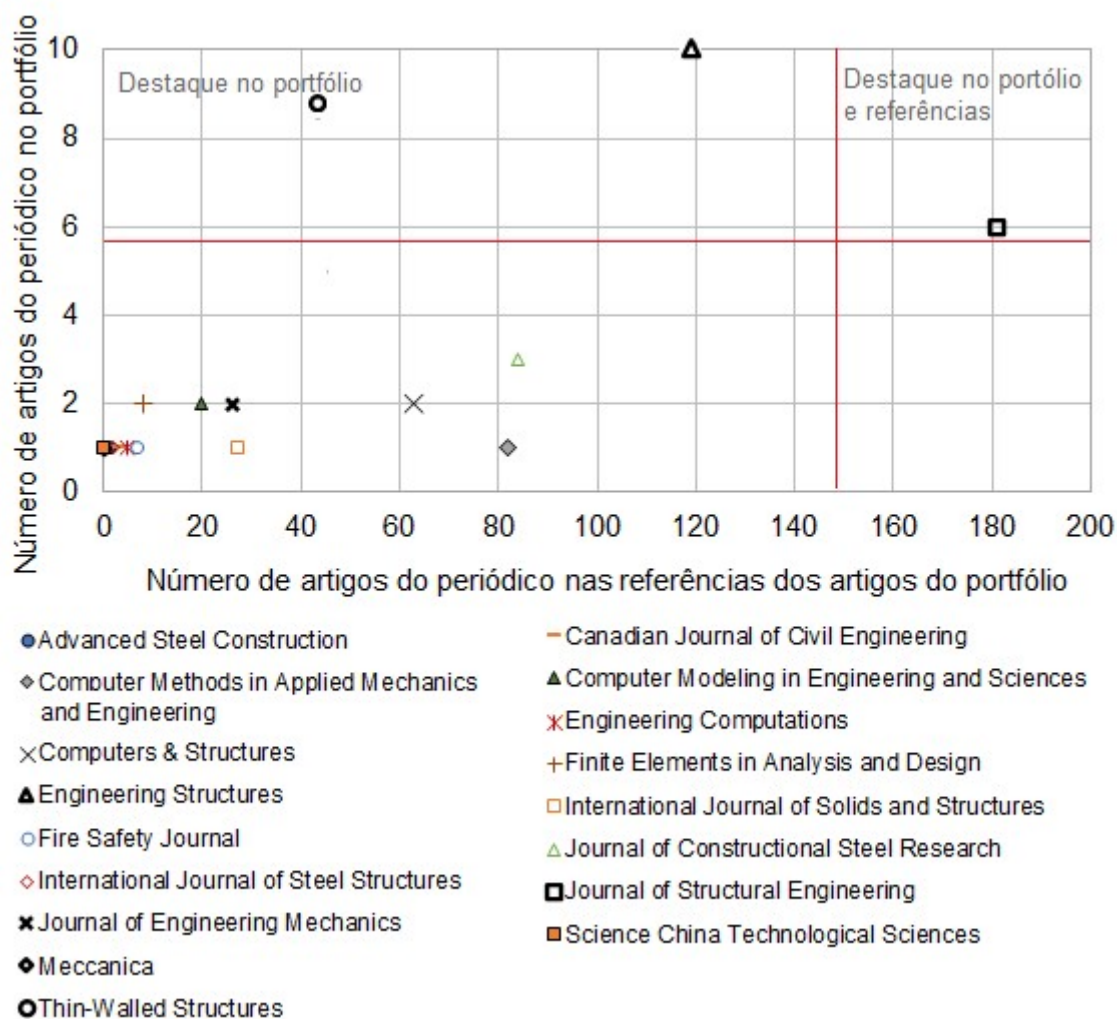
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

2.2.2 Análise bibliométrica do portfólio bibliográfico

Após a leitura dos artigos, fez-se a análise bibliométrica do portfólio de modo a identificar o grau de relevância dos periódicos dos artigos nele contidos, o reconhecimento científico dos artigos e o grau de relevância dos autores.

Ao analisar o grau de relevância dos periódicos, percebe-se que o periódico *Journal of Structural Engineering* (ISSN 0733-9445) se destaca tanto no portfólio quanto nas referências dos artigos do portfólio, uma vez que apareceu 6 vezes no portfólio bibliográfico e 181 vezes nas referências dos artigos selecionados, conforme indicado na Figura 1. Os periódicos que se destacam somente no portfólio bibliográfico, com 10 e 9 ocorrências, respectivamente, são *Engineering Structures* (ISSN 0141-0296) e *Thin-walled structures* (ISSN 1879-3223).

Figura 1 – Relevância dos periódicos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A análise do reconhecimento científico dos artigos do portfólio bibliográfico foi elaborada a partir da pesquisa do número de citações de cada publicação na base de dados do Google Acadêmico. Com base na Tabela 1, pode-se concluir que a publicação de Liew, J. Y. R. *et al.* (2000), intitulada “*Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures*”, é a publicação de maior relevância, visto que apresenta um elevado número de citações. No entanto, ao analisar os artigos mais recentes, publicados nos últimos 10 anos, verifica-se que as publicações de Ngo-huu, C.; Nguyen, P. C.; Kim, S. E. (2012a) e Nguyen, P. C.; Kim, S. E. (2014a) apresentam o maior número de citações, cada uma com 41 citações no Google Acadêmico.

Na análise do grau de relevância dos autores, constata-se que os autores Kim, S.E. e Nguyen, P. C. são os autores de destaque no portfólio bibliográfico.

2.2.3 Análise sistêmica dos artigos do portfólio

A análise sistêmica tem como objetivo identificar as lacunas e destaques no conhecimento em torno do tema pesquisado. Para isso, utiliza-se uma abordagem denominada “lentes”. Neste trabalho, as lentes de pesquisa foram estabelecidas considerando os aspectos mais relevantes para o levantamento do estado da arte da Análise Avançada de Estruturas Reticuladas Tridimensionais de Aço. O Quadro 2 apresenta as lentes de pesquisa pelas quais a revisão sistêmica foi realizada.

Quadro 2 – Lentes de pesquisa para análise do portfólio bibliográfico

Index	Lente	O que busca
1	Descrição cinemática	Qual a descrição cinemática do movimento do elemento finito é adotada? O empenamento é considerado?
2	Não linearidade do material	Qual o método utilizado para capturar a plasticidade do material? Quais são as vantagens e/ou desvantagens da metodologia empregada?

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

2.2.3.1 Descrição cinemática

As descrições cinemáticas empregadas nas formulações de elementos finitos para a análise geometricamente não linear podem ser classificadas em três categorias: Formulação Lagrangiana Total, Formulação Lagrangiana Atualizada e Formulação Corrotacional (Felippa e Haugen, 2005). Dentre essas abordagens, a Formulação Corrotacional é a mais recente, sendo abordada em vários trabalhos presentes no portfólio bibliográfico (Krenk, Vissing-Jørgensen e Thesbjerg, 1999; Teh e Clarke, 1999; Cai, Paik e Atluri, 2009a, 2009b; Alsafadie *et al.*, 2011; Alsafadie, Hjiat e Battini, 2011; Liu, Liu e Chan, 2014a; Liu *et al.*, 2016; Re, Di e Addessi, 2018). Em relação às formulações Lagrangianas, a Formulação Corrotacional apresenta duas vantagens: 1 – a integração da equação constitutiva apresenta a mesma forma que no caso da hipótese de pequenas deformações; 2 – a matriz de transformação entre as coordenadas local e global não depende das suposições feitas para o elemento local (Alsafadie *et al.*, 2011).

Por sua vez, na Formulação Lagrangiana Atualizada, a última configuração conhecida é usada como a configuração de referência para definir as equações de

equilíbrio não lineares do elemento na configuração corrente (Thai e Kim, 2009). Portanto, realiza-se a atualização das coordenadas nodais no final de cada passo de tempo, e os deslocamentos, tensões e deformações estão relacionados à última configuração atualizada do elemento. Considerando o portfólio de artigos obtido, os trabalhos de Al-Bermani e Kitipornchai (1990), Chiorean e Barsan (2005), Jiang, Chen e Liew (2002), Liew et al. (2000), Nguyen e Kim (2018b), Savard, Beaulieu e Fafard (1994), Souza Junior e Creus (2007), Shugyo (2003), Turkalj, Brnic e Kravanja (2011) e Zubyan (2013) utilizaram a descrição Lagrangiana Atualizada.

Na Formulação Lagrangiana Total, as variáveis do sistema são escritas em função da posição inicial do elemento, conduzindo a relações deslocamento-deformação mais complexas (Liu e To, 1995; Marzouk *et al.*, 2002; Lu, 2005). Como exemplo de trabalhos que adotam tal abordagem pode-se citar os artigos de Huang e Tan (2007) e Yang e Wang (2010).

Algumas das formulações para análise de estruturas reticuladas espaciais apresentadas nos artigos do portfólio são capazes de considerar, além dos efeitos de segunda ordem e escoamento do material, o efeito do empenamento das seções transversais (Izzuddin e Smith, 1996b; Hajjar, Schiller e Molodan, 1998; Shugyo, 2003; Nukala e White, 2004; Huang e Tan, 2007; Cai, Paik e Atluri, 2009a, 2009b; Yang e Wang, 2010; Alsafadie *et al.*, 2011; Alsafadie, Hjjaj e Battini, 2011; Turkalj, Brnic e Kravanja, 2011; Re, Di e Addessi, 2018). Verificou-se que a maioria dos trabalhos não considera a influência do empenamento e, portanto, as formulações se aplicam para seções fechadas ou para as seções transversais nas quais a influência do efeito do empenamento na deformação e resistência do elemento pode ser desprezada (Ma e Richard Liew, 2004).

Em Alsafadie et al. (2011) são apresentadas formulações para elementos com seção transversal aberta de parede fina baseadas nas hipóteses de Euler-Bernoulli e Timoshenko (Timoshenko e Gere, 1994). Para os elementos de Timoshenko e Euler-Bernoulli, a torção é descrita a partir da teoria de torção de Bencoter (1954) e de Vlasov (1961), respectivamente. Na teoria de Bencoter, admite-se um parâmetro de empenamento diferente do gradiente do ângulo de torção ($\theta(x) \neq \theta'_x$). Além disso, as distorções devido ao empenamento são consideradas, sendo, portanto, uma teoria compatível com a descrição de Timoshenko, na qual as deformações por cisalhamento devido à flexão são levadas em consideração. Cabe ressaltar que as teorias de Bencoter e de Vlasov degeneram-se na teoria de Saint-Venant quando a

derivada do parâmetro de empenamento é igual a zero ($\theta' = 0$) (Alsafadie, Hjiat e Battini, 2011).

Nesse sentido, Alsafadie *et al.* (2011) adotaram 9 graus de liberdade para o sistema de referência local do elemento: o alongamento axial, as rotações em torno de cada eixo local nas extremidades do elemento, e um grau de liberdade de empenamento em cada nó.

Yang e Wang (2010) apresentaram um modelo de elemento finito para análise física e geometricamente não linear de vigas espaciais com seção arbitrária de paredes finas. O desenvolvimento teórico é baseado nas teorias de Euler-Bernoulli e Vlasov. Considerando o sistema de coordenadas local, foram estabelecidos 7 graus de liberdade: o deslocamento axial da seção transversal; os deslocamentos transversais do centro de cisalhamento ao longo dos eixos y e z , as rotações em torno dos eixos x , y e z , e o ângulo de torção.

2.2.3.2 Não linearidade do material

A não linearidade física está relacionada ao comportamento não linear do material em função da deformação corrente, taxa de deformação, histórico de deformação, temperatura etc. Os métodos utilizados para a consideração da não linearidade do material dividem-se basicamente em dois: métodos de plasticidade distribuída e métodos de plasticidade concentrada. Considerando o portfólio de artigos obtido, verifica-se que a maioria dos estudos empregaram o método da plasticidade concentrada (Al-Bermani e Kitipornchai, 1990; Chandra, Krishna e Trikha, 1990; Krenk, Vissing-Jørgensen e Thesbjerg, 1999; Liew *et al.*, 2000; Kim, Park e Choi, 2001b; Shugyo, 2003; Ma e Richard Liew, 2004; Chan, Huang e Fang, 2005; Kim e Choi, 2005; Krishnan e Hall, 2006; Kim, Ngo-Huu e Lee, 2006b; Ngo-Huu, Kim e Oh, 2007; Junior e Creus, 2007; Cai, Paik e Atluri, 2009a; Turkalj, Brnic e Kravanja, 2011; Ngo-Huu, Nguyen e Kim, 2012b; Liu, Liu e Chan, 2014a; Nguyen e Kim, 2014b, 2018b; Cosgun e Sayin, 2014; Liu *et al.*, 2016). Na abordagem de plasticidade concentrada, a formação de rótulas plásticas é permitida em regiões específicas do elemento quando as forças atuantes na seção transversal superam a sua capacidade plástica. Portanto, é assumido o comportamento elástico para as demais regiões. A vantagem desse método reside no fato dele não demandar um processo de integração na seção transversal, além de permitir o uso de poucos elementos para cada membro estrutural, reduzindo-se, desse modo, o esforço computacional. Não obstante, como a

plastificação no membro é concentrada, esse modelo é menos preciso na obtenção da rigidez do elemento (Chiorean e Barsan, 2005).

No método de plasticidade distribuída, permite-se a ocorrência da plastificação ao longo do comprimento e da área da seção transversal dos elementos estruturais e a rigidez do elemento é obtida pela integração numérica das tensões atuantes na seção transversal. Uma solução para capturar a evolução da plastificação emprega relações momento-normal-curvatura para cada seção transversal. De forma alternativa pode-se dividir a seção transversal em vários elementos de área visando o monitoramento do estado de tensões, deformações de cada subdomínio. Nesse caso, os efeitos das imperfeições geométricas iniciais, das tensões residuais e do endurecimento do material podem ser incluídos na análise por zonas plásticas de maneira precisa. Em ambos casos, é necessário subdividir os membros estruturais em vários elementos finitos. Dentre os artigos analisados, aproximadamente, 43% utilizaram o método de plasticidade distribuída na análise de estruturas espaciais (Izzuddin e Smith, 1996b; Teh e Clarke, 1999; Jiang, Chen e Liew, 2002; Nukala e White, 2004; Chiorean e Barsan, 2005; Huang e Tan, 2007; Cai, Paik e Atluri, 2009b, 2009a; Yang e Wang, 2010; Alsafadie *et al.*, 2011; Alsafadie, Hjiat e Battini, 2011; Zubydan, 2013; Nguyen e Kim, 2015a, 2014a; Zubydan *et al.*, 2018; Prakash e Srivastava, 2019; Du *et al.*, 2019).

A principal desvantagem do método de zona plástica é o alto custo computacional requerido, o que pode limitar sua aplicação prática na análise de estruturas de grande porte. Por isso, ele é mais frequentemente utilizado em pesquisas para obter soluções precisas em problemas de engenharia que envolvem estruturas de pequeno a médio porte.

3 ANÁLISE ESTRUTURAL EM PROBLEMAS NÃO LINEARES

3.1 Considerações iniciais

As análises estruturais têm como finalidade determinar as respostas de uma estrutura sujeita a determinadas condições de contorno e carregamento. As principais respostas obtidas são as tensões, deformações, esforços solicitantes, deslocamentos e reações de apoio. Basicamente, essas análises podem se diferir pela forma de condução do estudo do equilíbrio da estrutura, pelas considerações utilizadas na previsão do comportamento do material e pelas técnicas de modelagem empregadas.

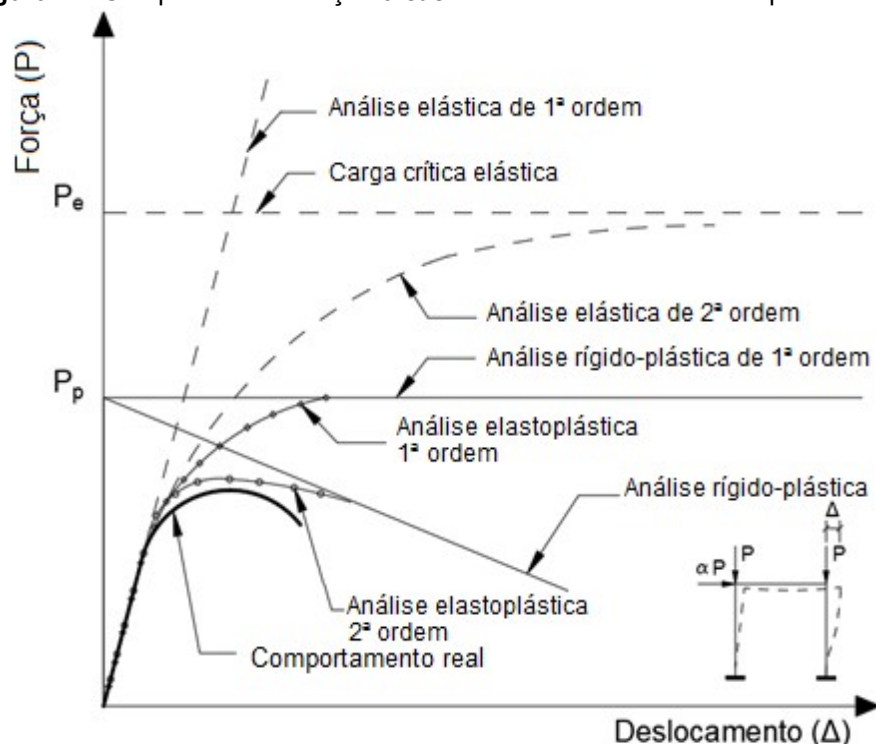
No que se refere à formulação do equilíbrio da estrutura, a análise estrutural pode ser realizada em teoria de primeira ordem ou teoria de segunda ordem. Na análise de primeira ordem, considera-se o equilíbrio da estrutura em sua posição inicial indeformada para a determinação dos esforços e deslocamentos. Esse tipo de análise é conhecido como análise geometricamente linear e, nessa situação, é válida a hipótese de pequenos deslocamentos. Em oposição, na análise de segunda ordem, o equilíbrio da estrutura é estabelecido na posição deslocada, e, portanto, consideram-se os esforços adicionais oriundos da ação das forças sobre os deslocamentos, conhecidos como efeitos $P - \Delta$ (P-delta) e $P - \delta$ (P-deltinha). Trata-se de uma análise geometricamente não linear. Neste caso, a análise pode ser feita tanto em regime de pequenos deslocamentos quanto de grandes deslocamentos.

Quanto ao comportamento do material, pode-se dividir as análises em dois grupos: elásticas e elastoplásticas. No primeiro caso, considera-se a existência de uma proporcionalidade entre as tensões e as deformações, sendo válida a Lei de Hooke. No segundo caso, avalia-se o efeito da plastificação do material, incluindo-se, portanto, o efeito da dissipação de energia em virtude do processo de degradação do material. Cabe frisar que as análises elásticas e elastoplásticas podem ser realizadas em teoria de primeira ordem ou de segunda ordem.

A partir dos diversos métodos apresentados definem-se diferentes comportamentos estruturais, conforme apresentado na Figura 2, na qual é apresentada a trajetória de equilíbrio de um pórtico simples hipotético. Nessa figura, pode-se verificar que na análise elástica de primeira ordem tem-se um comportamento linear. Já na análise elástica de segunda ordem, observa-se que a curva força (P) *versus* deslocamento lateral (Δ) tende assintoticamente para a carga crítica elástica (P_e) da estrutura, que provoca flambagem elástica. Para um material elastoplástico

perfeito, a trajetória de equilíbrio de uma análise elastoplástica de primeira ordem aproxima-se assintoticamente da carga limite plástica (P_p). Trata-se de uma análise fisicamente não linear. Além disso, pela Figura 2, verifica-se que a análise elastoplástica em teoria de segunda ordem é capaz de obter um comportamento mais próximo do real. Nessa ocasião, pode-se determinar o máximo fator de carga que a estrutura poderá suportar, associado à ocorrência de flambagem elastoplástica ou à formação de mecanismo plástico.

Figura 2 – Comportamento força *versus* deslocamento dos vários tipos de análise



Fonte: Viana (2019)

A seguir é apresentado o conceito de Análise Avançada, que representa uma análise elastoplástica de segunda ordem.

3.2 Análise avançada

O dimensionamento estrutural tem como intuito definir as características dos elementos do sistema de tal modo que a estrutura seja capaz de resistir às solicitações impostas. Geralmente, na concepção do projeto essa etapa é desacoplada da análise estrutural. Nesse caso, existe a necessidade de verificar, de forma isolada, a

estabilidade e resistência de cada membro da estrutura por meio do uso de equações de interação entre momento fletor, força normal e força cortante.

Com a evolução da tecnologia computacional, foi possível implementar novas formulações de elementos finitos não lineares que consideram diversos fatores relevantes para a análise e dimensionamento de estruturas, de tal forma que as verificações de cada elemento realizadas isoladamente, a posteriori, sejam dispensadas. Essa avaliação de forma integrada é conhecida como Análise Avançada (Toma e Chen, 1994). Obviamente, nesse tipo de análise devem ser levados em conta os aspectos relevantes que afetam o comportamento das estruturas, entre os quais se destacam: os efeitos de segunda ordem, oriundos dos grandes deslocamentos e rotações das estruturas, o processo de plastificação da seção transversal, a flexibilidade das ligações, as tensões residuais e as imperfeições geométricas iniciais (Chen e Kim, 1997; Silva, 2010).

Algumas normas técnicas, como o AISC-LRFD (2016), já prescrevem o método avançado de análise para a elaboração do projeto estrutural. Ao viabilizar a obtenção de respostas mais condizentes com o comportamento real das estruturas, a Análise Avançada permite a concepção de estruturas mais leves, esbeltas e resistentes, com um melhor aproveitamento dos recursos empregados, aumentando a qualidade e a segurança.

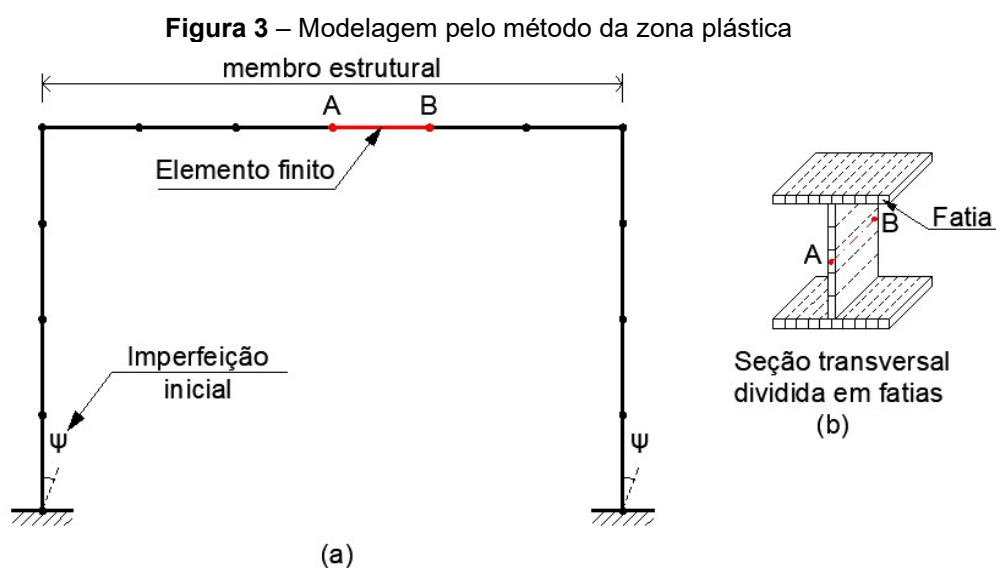
3.3 Métodos de análise plástica

Para incluir os efeitos da plastificação do aço, os programas computacionais adotam, geralmente, duas abordagens: a plasticidade concentrada, baseada no conceito de rótula plástica, e a plasticidade distribuída, conhecida como método da zona plástica (Nguyen e Kim, 2015a). Na abordagem por plasticidade concentrada, são definidos nós nas seções mais solicitadas do elemento estrutural para avaliar a plasticidade. Supõe-se que o elemento permanece em regime elástico até que a resistência plástica da seção seja alcançada formando uma rótula plástica. Essa abordagem pode ser aprimorada de modo a considerar a perda de rigidez, de forma gradativa entre as curvas de início de plastificação e de resistência, sendo conhecida como método da rótula plástica refinado (MRPR) (Chen, Goto e Liew, 1996).

Nas pesquisas desenvolvidas por White (1993), Ngo-Huu, Nguyen e Kim (2012a) são apresentadas formulações baseadas no método da rótula plástica, enquanto que as pesquisas desenvolvidas por Kim e Chen (1996), Liew (1993), Kim et al. (2006a),

lu e Bradford (2012), Chiorean (2013), Gonçalves *et al.* (2019) Silva *et al.* (2021), Lemes *et al.* (2023) empregam o método da rótula plástica refinado.

Na abordagem por plasticidade distribuída, considera-se a plastificação ao longo do comprimento e da área da seção transversal dos elementos estruturais, seja adotando relações momento-normal-curvatura ou discretizando a seção transversal em subdomínios, conhecidos como fatias (Ver Figura 3b). Além disso, o comprimento do componente estrutural é dividido em vários elementos finitos, conforme ilustrado na Figura 3a. Tal método é mais preciso em relação aos anteriores, no entanto, requer um maior tempo de processamento e esforço computacional. Não obstante, com os rápidos avanços nas tecnologias de hardware e software, esse tipo de modelagem tem se tornado cada vez mais viável (El-Tawil e Deierlein, 2001; Nguyen e Kim, 2014c; Silva *et al.*, 2018; Viana *et al.*, 2020).



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como exemplos de estudos que empregam a abordagem por plasticidade distribuída, pode-se citar os trabalhos desenvolvidos por Vogel (1985), Clarke *et al.* (1992), Foley e Vinnakota (1997), Jiang *et al.* (2002), Silva *et al.* (2018) e Costa *et al.* (2022)

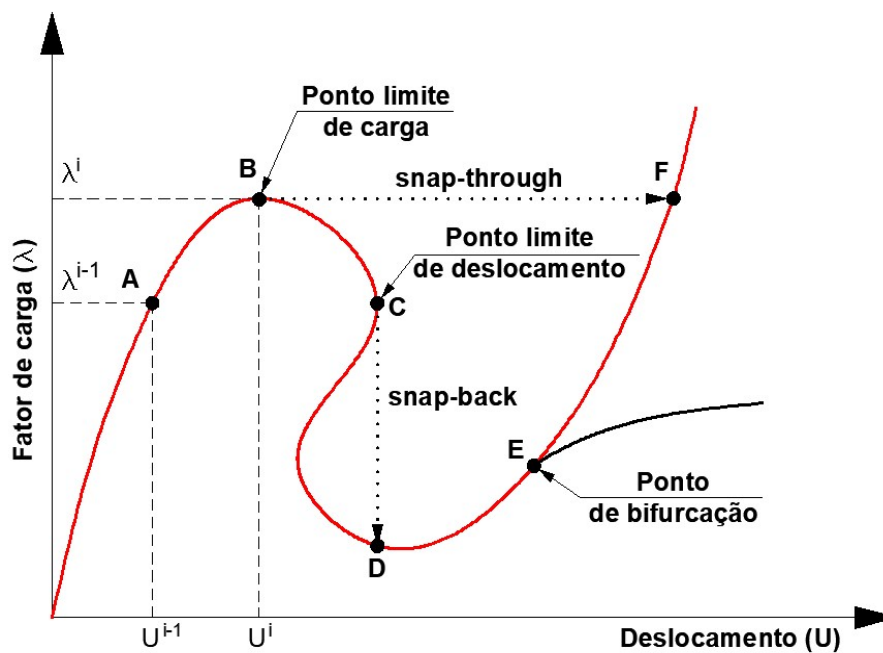
Por considerarem os principais fatores que afetam o comportamento das estruturas e permitirem, assim, capturar a interação entre a resistência e a estabilidade do sistema estrutural e de seus elementos, o método da zona plástica e o método da rótula plástica refinado são considerados métodos de análise avançada, segundo White (1993), Lavall (1996), Chan e Chui (2000), Thai e Kim (2011), Liu *et al.* (2012).

3.4 Solução das equações de equilíbrio não lineares

Com o objetivo de representar o comportamento estático não linear de estruturas, usualmente, adota-se a curva carga *versus* deslocamento, conhecida como trajetória de equilíbrio. Cada ponto dessa curva representa uma configuração de equilíbrio estático, que pode ser obtida pela variação de um parâmetro de controle, como carga externa aplicada e deslocamento. Portanto, conhecido um campo de deslocamento U e um fator de carga λ correspondente, deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental seja controlada.

Nessa situação, faz-se necessário a utilização de um método incremental-iterativo capaz de prever a ocorrência de pontos limites de carga e de deslocamentos na trajetória de equilíbrio, conforme representado na Figura 4 pelos pontos B e C, respectivamente. Como ilustrado na Figura 4, próximo a esses pontos, a estrutura perde a estabilidade, podendo ocorrer os fenômenos de *snap-through* (salto dinâmico sob controle de carga – B para F) ou *snap-back* (salto dinâmico sob controle de deslocamento – C para D).

Figura 4 – Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não-lineares



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Além disso, uma metodologia eficiente de solução de equações não lineares deve ser capaz de lidar com situações comuns encontradas na trajetória de equilíbrio de estruturas, como fenômenos de aumento de deslocamentos com decréscimo de cargas, decréscimo de deslocamentos com decréscimo de cargas e pontos de bifurcação (Figura 4 – Ponto E), que são pontos dos quais se originam duas ou mais trajetórias de equilíbrio.

A estratégia de solução incremental-iterativa demandada nesses problemas pode ser resumida em duas etapas. No primeiro momento, com base no sistema de equações não lineares, obtém-se a solução dos deslocamentos incrementais considerando-se um determinado acréscimo de carga. Em seguida, visando a correção das forças internas do sistema obtidas na primeira etapa, inicia-se um processo iterativo no qual o sistema de equações é solucionado pelo efeito das forças desbalanceadas que geram acréscimos de deslocamentos. Esse processo é finalizado quando algum critério de convergência é satisfeito. A partir de então, é iniciado um novo passo ou incremento.

A maioria dos métodos de resolução de problemas estruturais não lineares são baseados nos métodos de Newton-Raphson Padrão (NRP) e Newton-Raphson Modificado (NRM) (Crisfield, 1991). O método de Newton-Raphson Padrão pressupõe que a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração. Já no método de Newton-Raphson Modificado a matriz de rigidez é atualizada somente na primeira iteração de cada passo e usada em todo o processo iterativo até a convergência. A seguir, apresenta-se uma descrição dos métodos incrementais-iterativos.

3.4.1 Métodos incrementais-iterativos

A análise de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos conduz a um sistema de equações que relaciona o vetor de cargas aplicadas, $\mathbf{P}$, com o vetor de deslocamentos, $\mathbf{U}$, pela matriz de rigidez tangente global do sistema, $\mathbf{K}$, dada por:

$$\mathbf{KU} - \mathbf{P} = 0 \quad (3.1)$$

Caso a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ dependa das incógnitas de $\mathbf{U}$ ou de suas derivadas, o problema torna-se não linear, fazendo-se necessário a utilização de um método incremental-iterativo para a solução do problema. Nessa ocasião, a equação de equilíbrio incremental na iteração j do passo i pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \cdot \delta \mathbf{U}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \mathbf{P} + \mathbf{R}_{j-1}^i \quad (3.2)$$

onde,

K_{j-1}^i é a matriz de rigidez tangente da iteração $j - 1$ (precedente) do passo i (corrente), função do campo de deslocamentos U_{j-1}^i ;

δU_j^i é o vetor de deslocamentos incrementais da iteração j (corrente) do passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i ;

P é o vetor de cargas de referência;

R_{j-1}^i é o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ do passo i .

Primeiramente, deve-se estabelecer um incremento do fator de carga λ_j^i para assim obter o vetor de deslocamentos incrementais δU_j . Esse vetor pode ser decomposto em duas parcelas, uma relacionada à carga de referência δU_j^P e, a outra, à carga residual δU_j^R . As equações a seguir descrevem esse procedimento.

$$\delta U_j = \delta \lambda_j \cdot \delta U_j^P + \delta U_j^R \quad (3.3)$$

com

$$K_{j-1} \cdot \delta U_j^P = P \quad (3.4)$$

e

$$K_{j-1} \cdot \delta U_j^R = R_{j-1} \quad (3.5)$$

Após determinar os vetores δU_j^P e δU_j^R , verifica-se a convergência do processo, a qual pode ser avaliada pela magnitude do vetor de forças residuais e/ou pela magnitude do vetor de deslocamentos iterativos. Caso o critério de convergência estabelecido não seja satisfeito, o valor do incremento do fator de cargas $\delta \lambda_j^i$ deve ser calculado utilizando uma equação de restrição que engloba uma conjunção das grandezas do problema.

A atualização das variáveis é executada da seguinte maneira:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta \lambda_j \quad (3.6)$$

$$U_j = U_{j-1} + \delta U_j \quad (3.7)$$

Por sua vez, o vetor R_j pode determinado por:

$$R_j = \lambda_j \cdot P - F_j \quad (3.8)$$

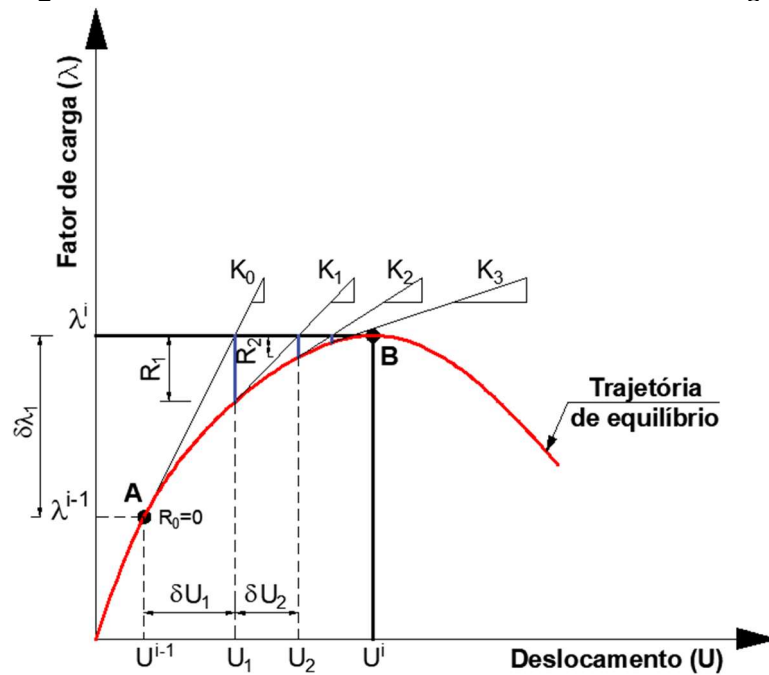
onde, F_j é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração j .

Conforme destacado anteriormente, a obtenção do parâmetro de carga depende do método de controle adotado. Dentre os principais métodos incrementais

empregados na análise não linear de estruturas destacam-se os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamento e de controle de comprimento de arco (Fuina, 2004).

O método de controle de carga consiste em manter o parâmetro de carga constante durante o ciclo iterativo de um incremento de carga, portanto, $\delta\lambda_j = 0$. Desse modo, pode-se determinar somente os pontos da trajetória de equilíbrio até o primeiro ponto limite de carga, conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Processo incremental-iterativo com controle de carga



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Por sua vez, no método de controle direto de deslocamentos, uma componente (k) do vetor de deslocamentos é selecionada como parâmetro de controle e as iterações são processadas a um deslocamento constante, ou seja, o vetor $\delta\mathbf{U}_j^k$ é nulo após a primeira iteração (Batoz e Dhatt, 1979).

Ao substituir o vetor de deslocamentos incrementais pela sua componente k , escolhida para gerenciar o processo, na Eq.(3.3), obtém-se:

$$\delta\lambda_j = \frac{\delta\mathbf{U}_j^k - \delta\mathbf{U}_j^{R^k}}{\delta\mathbf{U}_j^{P^k}} \quad (3.9)$$

Considerando que o vetor de cargas residuais é nulo para a primeira iteração de cada passo, tem-se:

Portanto, verifica-se que os métodos apresentados não atendem completamente aos seguintes critérios: (a) estabilidade numérica ao se aproximar de pontos críticos, como pontos limite de carga e deslocamento; (b) adequação dos incrementos de carga para refletir variações na rigidez da estrutura; e (c) capacidade de se adaptar automaticamente para determinar a direção do carregamento. Visando contornar essas deficiências, Yang e Shieh (1990) propuseram o método do controle de deslocamento generalizado, que se baseia na seguinte expressão para o fator de carga.

$$\delta\lambda_j = \frac{H_j - \delta\lambda_1 \delta\mathbf{U}_1^{P,i-1T} \delta\mathbf{U}_j^{R,i}}{\delta\lambda_1 \delta\mathbf{U}_j^{P,i-1T} \delta\mathbf{U}_j^{P,i}} \quad (3.12)$$

onde $\delta\mathbf{U}_1^{P,i-1}$ representa o acréscimo de deslocamento decorrente da primeira iteração do último passo incremental, e H_j pode ser entendido como um deslocamento generalizado.

Considerando que o vetor $\delta\mathbf{U}_j^R$ é nulo para a primeira iteração, tem-se:

$$\delta\lambda_1 = \left(\frac{H_1}{\delta\mathbf{U}_1^{P,i-1T} \delta\mathbf{U}_1^{P,i}} \right)^{0,5} \quad (3.13)$$

Nas iterações subsequentes H_j deve ser zerado para assegurar o controle estabelecido na primeira iteração. Portanto, a partir da Eq.(3.12), obtém-se:

$$\delta\lambda_j = - \frac{\delta\mathbf{U}_1^{P,i-1T} \delta\mathbf{U}_j^{R,i}}{\delta\mathbf{U}_j^{P,i-1T} \delta\mathbf{U}_j^{P,i}} \quad (3.14)$$

Para o primeiro passo incremental, toma-se $\delta\mathbf{U}_1^{P,0} = \delta\mathbf{U}_1^{P,1}$ e, substituindo na Eq.(3.13), tem-se:

$$H_1 = (\delta\lambda_1^1)^2 \delta\mathbf{U}_1^{P,1T} \delta\mathbf{U}_1^{P,1} \quad (3.15)$$

Então, substituindo a Eq. (3.15) na Eq.(3.13), chega-se a:

$$\delta\lambda_1 = \pm \delta\lambda_1^1 |GSP|^{0,5} \quad (3.16)$$

sendo GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) o parâmetro de rigidez generalizado, dado por:

$$GSP = \left(\frac{\delta\mathbf{U}_1^{P,1T} \delta\mathbf{U}_1^{P,1}}{\delta\mathbf{U}_1^{P,i-1T} \delta\mathbf{U}_1^{P,i}} \right)^{0,5} \quad (3.17)$$

O GSP, conforme definido anteriormente, apresenta diversas características significativas:

1. O numerador e o denominador na expressão do parâmetro de rigidez generalizado representam, respectivamente, os deslocamentos no primeiro passo e, aproximadamente, os deslocamentos no passo atual. Assim, o GSP reflete a variação da rigidez da estrutura, tornando automático o ajuste do tamanho do passo incremental;
2. O valor do GSP é negativo apenas próximo dos pontos limites, pois seu sinal depende exclusivamente do produto escalar $\delta \mathbf{U}_1^{P,i-1^T} \delta \mathbf{U}_1^{P,i}$. Dessa forma, o parâmetro fornece uma indicação da mudança no sinal do incremento de carga.

3.4.2 Critérios de convergência

O processo iterativo se encerra quando algum critério de convergência é atendido considerando-se uma tolerância adequada previamente estabelecida. Geralmente, são definidos critérios de convergência relacionados com os deslocamentos, forças nodais ou energia incremental interna (Costa, 2014).

Neste trabalho, serão considerados critérios de convergência envolvendo deslocamentos e/ou forças. O critério de convergência para deslocamentos adotado compara a norma do vetor de deslocamentos incrementais $\delta \mathbf{U}_j^i$ com a norma do vetor de deslocamentos nodais $\mathbf{U}_j^i$, em cada iteração, conforme a Eq. (3.18). Se essa relação for menor ou igual ao fator de tolerância η , admite-se que a convergência foi atingida.

$$\frac{|\delta \mathbf{U}_j^i|}{|\mathbf{U}_j^i|} \leq \eta \quad (3.18)$$

A convergência para forças é baseada na comparação entre as normas dos vetores de forças residuais $\mathbf{R}_j^i$ e forças externas em cada iteração $\mathbf{P}_j^i$. Nesse caso, consideram-se as componentes de força e componentes de momento fletor separadamente, para se evitar inconsistência dimensional. Considerando esse critério, admite-se que o processo converge se:

$$\frac{|\mathbf{R}_j^i|}{|\mathbf{P}_j^i|} \leq \eta \quad (3.19)$$

Para uma verificação mais rigorosa da convergência, recomenda-se a utilização simultânea dos dois critérios acima ou o emprego do critério baseado no incremento da energia interna, no qual os trabalhos realizados no final e no início de cada iteração

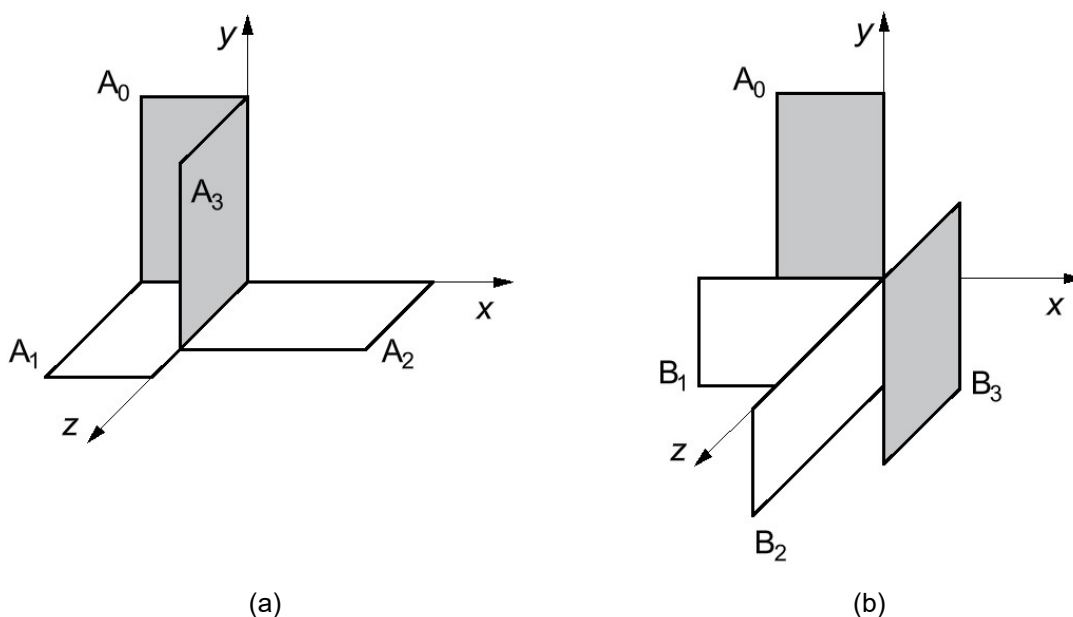
são comparados (Costa, 2014). Portanto, neste trabalho serão implementados os critérios de deslocamento e de forças, verificados simultaneamente, podendo também verificar a convergência somente por um desses critérios. De acordo Crisfield (1991), valores típicos para a tolerância ficam entre 0,1% e 1%.

4 TENSOR ROTAÇÃO

4.1 Considerações iniciais

É uma prática frequente tratar rotações no plano como vetores. No entanto, em problemas tridimensionais que envolvem grandes rotações, a falta de comutatividade nas rotações impede que sejam consideradas como grandezas vetoriais. Para exemplificar essa situação, aplica-se uma sequência de rotações de 90° no sentido anti-horário ao corpo rígido representado pelo retângulo A_0 na Figura 7(a). Inicialmente, o corpo sofre uma rotação em torno do eixo x , levando-o à posição A_1 . Em seguida, ao girá-lo em torno do eixo y , tem-se a configuração A_2 . Por fim, o corpo é rotacionado em torno do eixo z , ocupando a posição A_3 .

Figura 7 – Característica não vetorial da rotação no caso tridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

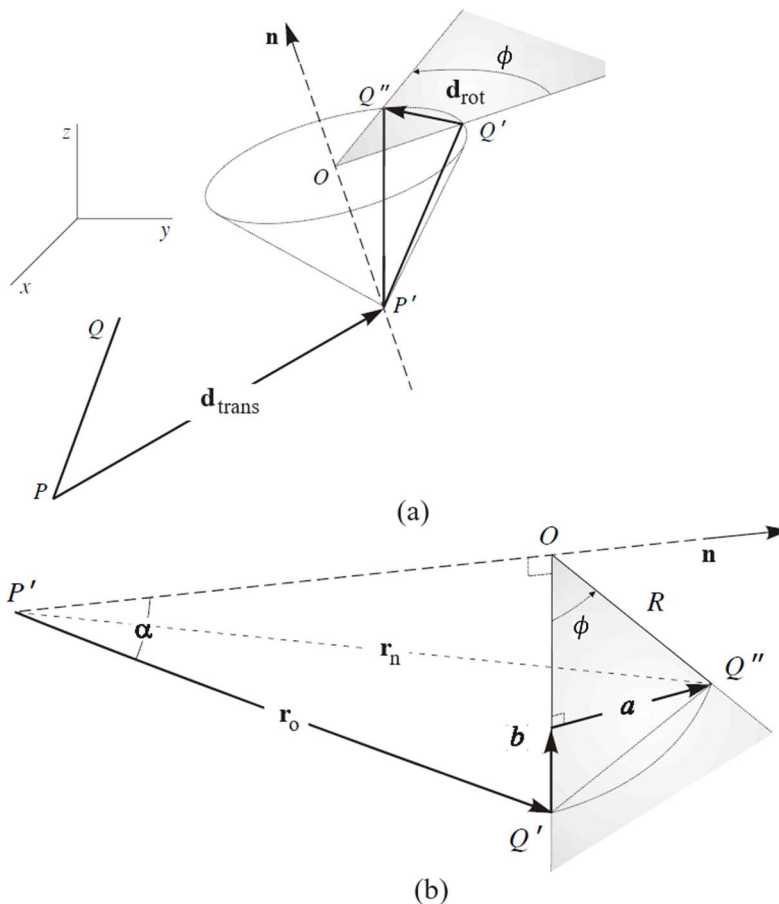
Caso as rotações sejam aplicadas em ordem inversa, isto é, primeiramente executa-se uma rotação em torno do eixo z , seguida das rotações em torno dos eixos y e x , o corpo não ocuparia a posição A_3 , mas sim a posição B_3 , como ilustrado na Figura 7(b). Isso demonstra a não obediência da propriedade comutativa das grandezas vetoriais. No entanto, se as rotações forem efetuadas em torno de um único eixo, pode-se tratá-las como grandezas vetoriais, assim como nos problemas bidimensionais. Portanto, tal aspecto deve ser considerado no desenvolvimento de uma formulação não linear de elementos finitos para barras tridimensionais. Para

calcular as matrizes de rotação nessas circunstâncias, a fórmula de Rodrigues (1840) tem sido geralmente empregada.

4.2 Matriz de rotação – Fórmula de Rodrigues

A Figura 8(a) ilustra dois pontos quaisquer de um corpo rígido, denotados por P e Q. Após sofrerem um mesmo deslocamento de translação $\mathbf{d}_{trans}$, os pontos passam para as posições P' e Q', respectivamente. Em seguida, o corpo é rotacionado de um ângulo ϕ em torno do vetor unitário $\mathbf{n}$ que passa por P'. Por consequência, o ponto Q' passa a ocupar a posição Q''.

Figura 8 – Translação e rotação de um vetor no espaço



Fonte: Adaptado de Monteiro (2004).

Considerando a Figura 8(b), o vetor deslocamento do ponto Q devido à rotação é dado por:

$$\mathbf{d}_{rot} = \overrightarrow{Q'Q''} = \overrightarrow{P'Q''} - \overrightarrow{P'Q'} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_o \quad (4.1)$$

onde

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o + \mathbf{d}_{rot} = \mathbf{r}_o + \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (4.2)$$

Os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ortogonais e podem ser determinados pelas Eqs. (4.3) e (4.4), respectivamente:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o}{|\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o|} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{a}|} \quad (4.4)$$

Considerando que $\mathbf{n}$ é um vetor unitário, que forma um ângulo α e de 90° com os vetores $\mathbf{r}_o$ e $\mathbf{a}$, respectivamente, tem-se:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o}{|\mathbf{r}_o| \sin \alpha} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad (4.6)$$

A trajetória descrita por Q, entre Q' e Q'' é um arco de circunferência de raio R contido no plano perpendicular ao eixo de rotação $\mathbf{n}$ e com centro em O. Portanto, obtém-se as seguintes relações:

$$R = |\mathbf{r}_o| \sin \alpha \quad (4.7)$$

$$|\mathbf{a}| = R \sin \phi \quad (4.8)$$

$$|\mathbf{b}| = R(1 - \cos \phi) \quad (4.9)$$

Substituindo as Eqs. (4.7) e (4.8) na Eq. (4.5) chega-se a:

$$\mathbf{a} = \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o) \quad (4.10)$$

Inserindo a Eq. (4.7) na (4.8) e substituindo a expressão obtida na Eq. (4.6) pode escrever $\mathbf{b}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{b} = (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o) \quad (4.11)$$

Portanto, a Eq. (4.2) pode ser reescrita como

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o) + (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o) \quad (4.12)$$

A Eq. (4.12), conhecida como fórmula de Rodrigues, também pode ser dada por:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o \cos \phi + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o) + (1 - \cos \phi) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o) \mathbf{n} \quad (4.13)$$

O produto vetorial pode ser escrito como um produto de matrizes:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{r}_o = \mathbf{S}(\mathbf{n}) \mathbf{r}_o \quad (4.14)$$

sendo $\mathbf{S}$ uma matriz antissimétrica dada por:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Logo, uma versão mais compacta da fórmula de Rodrigues, obtida a partir da substituição da Eq.(4.14) na Eq. (4.12), é:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}(\boldsymbol{\phi})\mathbf{r}_o \quad (4.16)$$

onde

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} + \sin\phi \mathbf{S}(\mathbf{n}) + (1 - \cos\phi)[\mathbf{S}(\mathbf{n})]^2 \quad (4.17)$$

sendo $\mathbf{I}$ uma matriz identidade 3 x 3.

A rotação ϕ pode ser representada por um pseudo-vetor $\boldsymbol{\phi}$, também conhecido como vetor rotacional, definido por:

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] = \phi \mathbf{n} \quad (4.18)$$

Esse vetor é paralelo ao vetor $\mathbf{n}$ e possui norma igual a rotação ϕ .

$$\phi = |\boldsymbol{\phi}| = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2} \quad (4.19)$$

Substituindo a Eq. (4.18) na Eq.(4.17), obtém-se:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} + \frac{\sin\phi}{\phi} \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}) + \frac{(1 - \cos\phi)}{\phi^2} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^2 \quad (4.20)$$

Pode-se também expressar o tensor rotação de Rodrigues considerando a expansão em série de Taylor para as funções trigonométricas.

$$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \frac{1}{7!}\phi^7 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \phi^{(2n+1)} \quad (4.21)$$

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 - \frac{1}{6!}\phi^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \phi^{2n} \quad (4.22)$$

Substituindo as Eqs. (4.21) e (4.22) na Eq. (4.20) e levando em conta que as potências de $\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})$ são dadas por:

$$[\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^{(2n-1)} = (-1)^{(n-1)} \phi^{2(n-1)} \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}) \quad (4.23)$$

$$[\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^{(2n)} = (-1)^{(n-1)} \phi^{2(n-1)} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^2 \quad (4.24)$$

pode-se reescrever a Eq. (4.20) da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{2!} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^2 + \frac{1}{3!} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^3 + \dots + \frac{1}{n!} [\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})]^n \quad (4.25)$$

que corresponde ao mapeamento exponencial da matriz antissimétrica $\mathbf{S}_\phi$.

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})) = e^{\mathbf{S}(\boldsymbol{\phi})} \quad (4.26)$$

Caso o corpo rígido da Figura 8 sofra uma rotação infinitesimal em torno do eixo $\mathbf{n}$, ou seja, quando ϕ se aproxima de zero, a Eq. (4.20) pode ser escrita como:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\phi}) \quad (4.27)$$

4.3 Extração do vetor rotacional a partir da matriz de rotação

Em alguns casos, é necessário calcular o vetor rotacional que corresponde a uma matriz de rotação dada. O vetor rotacional ϕ pode ser extraído da parte antissimétrica da matriz de rotação $R(\phi)$ (Souza, De, 2000). A parte antissimétrica de $R(\phi)$ é dada por:

$$\text{sen}\phi S(\mathbf{n}) = \frac{\text{sen}\phi}{\phi} S(\phi) = \frac{R(\phi) - [R(\phi)]^T}{2} \quad (4.28)$$

Logo, tem-se a seguinte igualdade:

$$\text{sen}\phi \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R_{12} - R_{21} & R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} & 0 & R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} & R_{32} - R_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde R_{ij} , são as componentes de $R(\phi)$.

Considerando a Eq. (4.29) pode-se escrever

$$\text{sen}\phi \mathbf{n} = \text{sen}\phi \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.30)$$

Uma vez que $|\mathbf{n}| = 1$, a norma de $\boldsymbol{\tau}$ é dada por:

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\text{sen}\phi \mathbf{n}| = \text{sen}\phi \quad (4.31)$$

A partir das Eqs. (4.30) e (4.31) obtém-se:

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\text{sen}\phi} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad (4.32)$$

Por fim, sabendo-se que $\phi = \phi \mathbf{n}$, escreve-se:

$$\phi = \arcsen(|\boldsymbol{\tau}|) \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad (4.33)$$

Observa-se que, devido à presença da função arco-seno, esta equação está limitada a ângulos $\phi \leq 90^\circ$.

4.4 Rotações sucessivas

Como mencionado previamente, o efeito das rotações sucessivas aplicadas a um objeto varia de acordo com a ordem em que essas rotações são realizadas. Isso significa que as rotações não obedecem às mesmas regras estabelecidas para vetores. Por exemplo, se um vetor $\mathbf{r}_o$ é girado para se tornar um vetor $\mathbf{r}_n$ utilizando um pseudovetor ϕ_1 , e, em seguida, o vetor resultante for girado para se tornar um vetor $\mathbf{r}_p$ utilizando um pseudovetor ϕ_2 , pode-se escrever as seguintes expressões:

$$\mathbf{r}_n = R(\phi_1) \mathbf{r}_o \quad (4.34)$$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}_2)\mathbf{r}_n \quad (4.35)$$

Então, substituindo a Eq. (4.34) na Eq. (4.35) obtém-se:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}_2)\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}_1)\mathbf{r}_o \quad (4.36)$$

Portanto, a atualização da rotação pode ser realizada multiplicando duas matrizes de rotação consecutivas conforme especificado pela Eq. (4.36).

5 TORÇÃO EM BARRAS PRISMÁTICAS

5.1 Considerações iniciais

As combinações dos elementos das estruturas de edifícios, geralmente, são realizadas de modo que as barras não fiquem sujeitas a esforços de torção consideráveis. Contudo, em certas situações, as barras podem estar sujeitas a instabilidade por flexo-torção. Portanto, a análise da torção em elementos estruturais, principalmente, nos casos de barras de seção transversal aberta de paredes finas, se torna essencial nos projetos de engenharia.

Cabe ressaltar que as teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko não são adequadas para seções de paredes finas, já que o empenamento da seção não é considerado nessas teorias devido à hipótese básica de que as seções planas permanecem planas após a deformação (Gere e Timoshenko, 1961).

De acordo com Vlasov (1961) as vigas de parede fina satisfazem as seguintes relações:

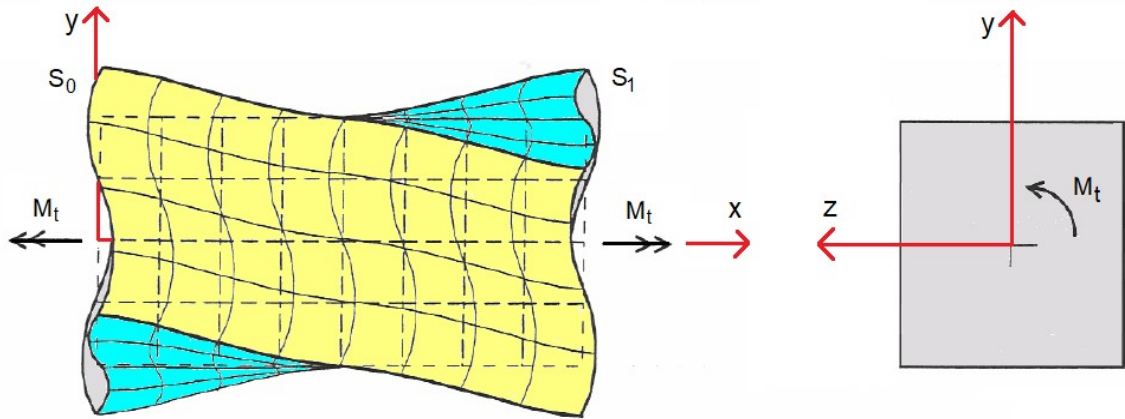
$$\frac{d}{L} \leq 0,1 \text{ e } \frac{t}{d} \leq 0,1 \quad (5.1)$$

onde t é a espessura da parede; L é o comprimento da viga; d é a dimensão característica da seção transversal.

Nesse sentido, visando o desenvolvimento de uma formulação geral que possa ser aplicada nesse contexto, são apresentadas a seguir as hipóteses básicas da teoria de torção uniforme de Saint-Venant (1855), bem como os princípios da teoria de Vlasov (1961).

5.2 Torção uniforme de Saint-Venant

A Figura 9 ilustra uma barra prismática constituída de material isotrópico com comportamento elástico linear, submetida a um momento de torção M_t . Nessa situação, a barra está livre para sofrer deslocamentos longitudinais, na direção x , ou seja, o empenamento não é restringido.

Figura 9 – Torção uniforme em barra prismática

Fonte: Adaptado de Silva (2005)

Esse problema consiste em determinar os deslocamentos longitudinal (u) e transversais (v e w), as tensões normais (σ_x , σ_y , σ_z) e cisalhantes (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}), as deformações normais (ε_x , ε_y , ε_z) e distorções (γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz}) de um ponto material, que atendam às condições de contorno do problema e que também sejam a solução do sistema de equações da teoria da elasticidade, dadas por:

a) Equações de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

b) Relações deslocamentos-deformações

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.10)$$

c) Relações tensões-deformações (Equações constitutivas)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (5.13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (5.14)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (5.15)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (5.16)$$

onde E e G são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e transversal, e ν , o coeficiente de Poisson.

Se a barra da Figura 9 estiver engastada na extremidade S_0 ocorrerá torção não uniforme nessa região. No entanto, nas regiões mais afastadas da extremidade S_0 , pode-se assumir que a torção seja uniforme. Dessa forma, para as regiões sujeitas a esse tipo de solicitação, a solução do problema é alcançada fazendo-se hipóteses sobre a componente dos deslocamentos, artifício conhecido como método semi-inverso. Caso as equações da elasticidade sejam atendidas, tem-se a solução do problema (Boresi, Chong e Lee, 2010). Portanto, Saint-Venant (1855) estabeleceu as seguintes hipóteses:

- i) A rotação θ_x da barra em torno do eixo longitudinal (x) varia linearmente ao longo do comprimento, ou seja, a rotação específica θ'_x (derivada do ângulo de torção em relação a x) é constante;
- ii) As seções transversais deixam de ser planas (empenam) e o empenamento não varia para seções transversais distintas; sua intensidade é proporcional à rotação específica θ'_x . Portanto, o deslocamento longitudinal pode ser arbitrariamente tomado como:

$$u = \theta'_x \omega(y, z) \quad (5.17)$$

onde $\omega(y, z)$ é a função de empenamento, definida no domínio da seção transversal.

- iii) A forma da seção transversal não é modificada. Logo, as distorções da seção transversal em seu próprio plano não são consideradas ($\tau_{yz} = 0$; $\gamma_{yz} = 0$).

É importante destacar que as barras de seção transversal circular não sofrem empenamento na torção e as barras de seção delgada cujas ramificações são concorrentes em um ponto, perfis (L, T, Y etc), não sofrem empenamento nos pontos situados sobre a linha do esqueleto (Dias, 1997).

Se a seção transversal da barra e o momento de torção aplicado permanecem inalterados ao longo do comprimento e se a barra não possui limitações nos deslocamentos longitudinais, o valor do momento de torção pode ser determinado por:

$$M_t = GJ\theta'_x \quad (5.18)$$

onde J é a constante de torção, determinada pela Eq.(5.19) (Love, 2013):

$$J = \int_A \left(z^2 + y^2 - y \frac{\partial \omega}{\partial z} + z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA \quad (5.19)$$

Para seções abertas de parede fina, a constante de torção pode ser determinada por:

$$J = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (5.20)$$

sendo t a espessura da parede da seção e ds o comprimento infinitesimal ao longo de uma ordenada s que se estende ao longo da linha do esqueleto (linha que divide a espessura t ao meio).

As tensões de cisalhamento da torção livre τ_{sv} podem ser calculadas por meio da Eq. (5.21).

$$\tau_{sv} = \frac{M_t t}{J} \quad (5.21)$$

Substituindo a Eq. (5.18) na Eq.(5.21) obtém-se:

$$\tau_{sv} = Gt \theta'_x \quad (5.22)$$

Pode-se concluir que as tensões de cisalhamento da torção livre são diretamente proporcionais à rotação específica.

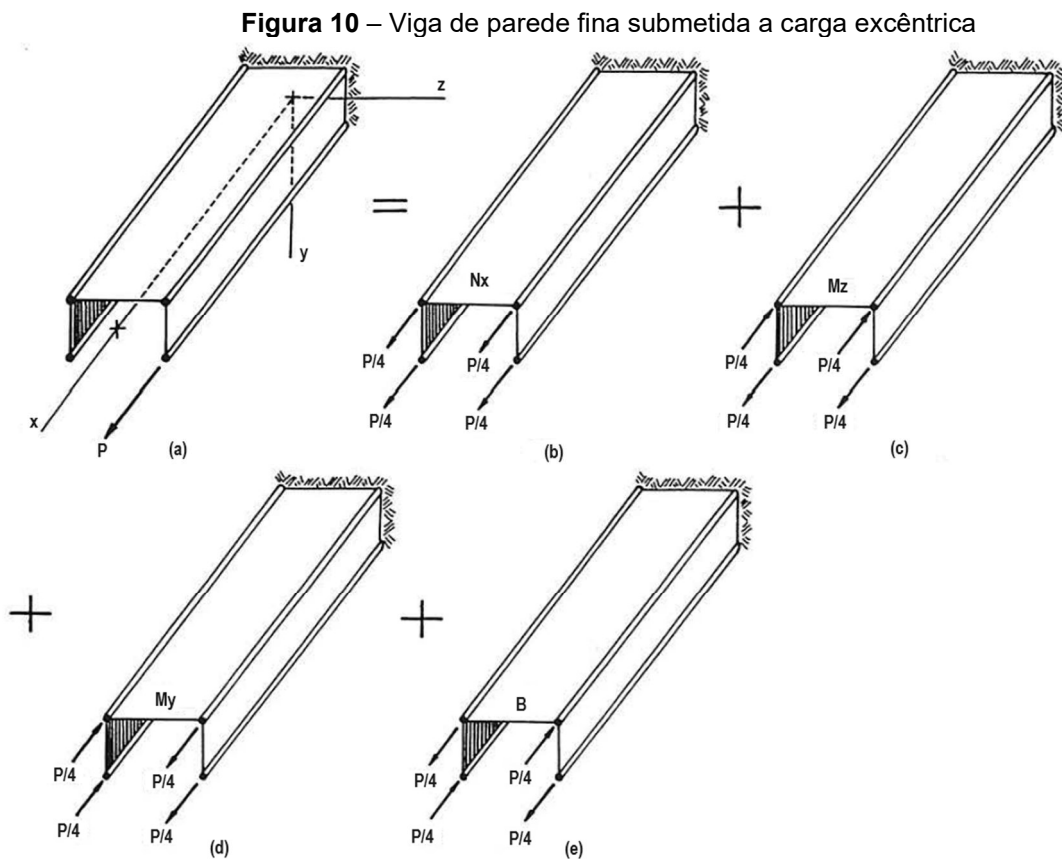
5.3 Torção não uniforme ou flexo-torção

Se a barra da Figura 9 apresentar qualquer restrição ao empenamento, aparecerão tensões normais, que formam um sistema de forças e momentos internos auto equilibrados na seção transversal. De maneira geral, essas tensões normais costumam mudar ao longo do elemento, e, portanto, são acompanhadas por uma distribuição desigual de tensões de cisalhamento, as quais, por sua vez, afetam a torção da seção. Portanto, haverá alterações locais no campo de deformações e de

tensões, caracterizando uma torção não uniforme ou flexo-torção (Oden, Ripperger e Saunders, 1981).

Uma situação semelhante ocorre quando há variação no momento torçor ou na seção transversal ao longo do comprimento da barra. Nesse cenário, as seções vizinhas têm tendência a girar com diferentes ângulos, invalidando a suposição de que elas permanecem planas após a deformação. Portanto, o momento de torção gerado em cada seção não está diretamente relacionado a taxa de torção θ'_x (rotação específica), e as tensões de cisalhamento resultantes não podem ser simplesmente determinadas pela superposição daquelas produzidas pela torção uniforme e flexão. Nesse sentido, aplicar o princípio de Saint-Venant para esse tipo de problema pode resultar em grandes imprecisões (Oden, Ripperger e Saunders, 1981).

A Figura 10(a) exibe uma viga composta por quatro barras longitudinais de área igual, conectadas por placas finas. Para simplificar, supõe-se que as barras estão submetidas apenas a tensões normais, enquanto as placas, somente tensões de cisalhamento.



Fonte: Adaptado de Oden e Ripperger (1981)

De acordo com a teoria de Bernoulli-Navier para flexão, a carga excêntrica P produz a força axial N_x e os momentos fletores M_y e M_z . A sobreposição dos casos (b), (c) e (d) na Figura 10 não resulta na força P . Logo, um sistema adicional de forças, mostrado na Figura 10(e), é requerido. Esse sistema equivale a dois binários de igual magnitude e direções opostas, representados como B , atuando em planos paralelos. Vlasov (1961) nomeou de "bimomento" esses binários que são estaticamente auto equilibrados e que geram um empenamento da seção muito similar àquele produzido pela torção. É importante destacar que o bimomento não afeta os deslocamentos lineares e angulares do eixo do elemento, nem a rotação da seção transversal. Por outro lado, quando um momento de torção é aplicado na extremidade livre da viga em vez de uma carga axial, as restrições que eliminam o empenamento no bordo fixo também geram bimomentos.

Para seções fechadas os efeitos das tensões produzidas por empenamento diminuem ao afastar-se do ponto de aplicação, conforme Princípio de Saint-Venant. No entanto, para seções abertas, especialmente, de paredes finas, essas tensões diminuem muito lentamente a partir do ponto de aplicação e podem representar as tensões mais relevantes geradas (Oden, Ripperger e Saunders, 1981).

A teoria de Vlasov (1961), aplicada à barras de seção aberta e paredes finas submetidas a um carregamento qualquer, considera as seguintes hipóteses:

- i) A forma da seção transversal é constante, ou seja, as distorções da seção em seu próprio plano não são consideradas ($\tau_{yz} = 0$);
- ii) As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas;
- iii) O empenamento da seção transversal é constante ao longo da espessura e pode ser representado pelo seu valor ao longo da superfície média.

Essa teoria consiste em adotar a derivada primeira do ângulo de rotação (θ'_x) como o grau de liberdade do empenamento, ainda considerando válida a Eq. (5.17). No entanto, ao contrário da teoria de Saint-Venant, admite-se que $\theta''_x \neq 0$, ou seja, a derivada primeira do ângulo de rotação não é constante. Então, pode-se inferir que existirão deformações normais, uma vez que os deslocamentos longitudinais serão variáveis ao longo do comprimento. Logo, tem-se:

$$\varepsilon_x = \theta''_x \omega \quad (5.23)$$

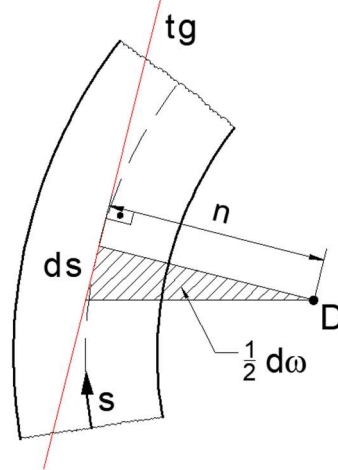
onde ω é a área setorial da seção transversal, uma grandeza puramente geométrica, que corresponde à função empenamento da teoria de torção uniforme.

Conforme a Figura 11, a área setorial de um ponto localizado na coordenada s_1 em relação a um ponto de rotação (polo) D e origem setorial s_0 pode ser determinada pela expressão:

$$\omega = \int_{s_0}^{s_1} n ds \quad (5.24)$$

sendo n a menor distância do polo à tangente da linha do esqueleto da seção do trecho de interesse.

Figura 11 – Área setorial



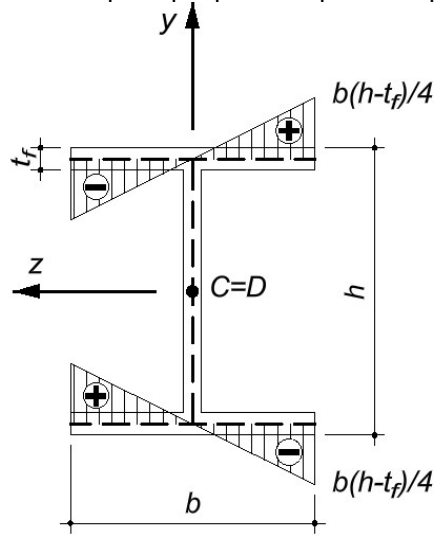
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

De acordo com a Figura 11, a área setorial representa o dobro da área do setor determinado pelo elemento ds do esqueleto e polo D. Para perfis I duplamente simétricos, a área setorial com polo no centro de cisalhamento (D), que coincide com o centro de gravidade da seção transversal (C), é dada por:

$$\omega(z) = \pm z \frac{h - t_f}{2} \quad (5.25)$$

A Figura 12 apresenta a área setorial principal para um perfil I duplamente simétrico.

Figura 12 – Área setorial principal para um perfil I duplamente simétrico



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Considerando, então, o surgimento de deformações longitudinais, dadas pela Eq. (5.23), e aplicando a Lei de Hooke, chega-se a:

$$\sigma_x = E \theta_x'' \omega \quad (5.26)$$

Tem-se demonstrado na literatura, que a tensão normal de flexo-torção dada pela Eq. (5.26) não tem esforço resultante na seção, seja força normal ou momento fletor. Segundo Vlasov (1961), essas tensões são causadas por um novo esforço solicitante, chamado de bimomento (B), definido como sendo:

$$B = \int \sigma_x \omega dA \quad (5.27)$$

onde dA é um elemento de área da seção, dado por $dA = t \cdot ds$.

Substituindo a Eq. (5.26) na Eq. (5.27), escreve-se:

$$B = E \theta_x'' I_\omega \quad (5.28)$$

sendo I_ω o momento de inércia setorial, conhecido como constante de empenamento, expresso por:

$$I_\omega = \int \omega^2 dA \quad (5.29)$$

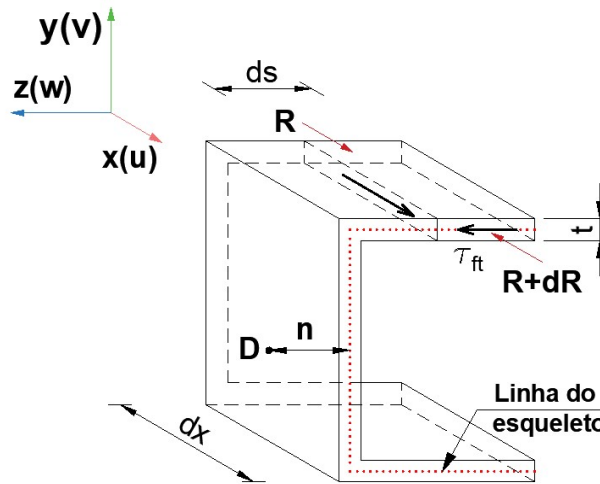
Levando a Eq. (5.28) à Eq.(5.26), obtém-se:

$$\sigma_x = \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (5.30)$$

Se as tensões normais variam ao longo do comprimento da barra, isto é, $\theta_x''' \neq 0$, o equilíbrio exige o aparecimento de tensões de cisalhamento devido à torção não uniforme. Admite-se que a tensão tangencial de flexo-torção τ_{ft} seja uniformemente

distribuída sobre a espessura t da seção transversal de parede fina. Então, considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx e largura ds , conforme ilustrado na Figura 13, a variação das tensões normais σ_x causam um incremento de forças internas dR , que é equilibrado através da tensão de cisalhamento τ_{ft} .

Figura 13 – Equilíbrio de forças num elemento de um perfil aberto U



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Logo, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$R = \int \sigma_x dA = E \theta_x'' \int \omega dA \quad (5.31)$$

Considerando o equilíbrio do elemento apresentado na Figura 13 na direção x , tem-se que a tensão de cisalhamento τ_{ft} é dada por:

$$\tau_{ft} = \frac{1}{t} \frac{dR}{dx} \quad (5.32)$$

Inserindo a derivada em relação a x da Eq. (5.31) na Eq. (5.32), tem-se:

$$\tau_{ft} = \frac{1}{t} E \theta_x''' \int \omega dA \quad (5.33)$$

Dado o conceito de momento estático setorial (S_ω), pode-se reescrever a Eq. (5.33) como:

$$\tau_{ft} = \frac{E \theta_x'''}{t} S_\omega \quad (5.34)$$

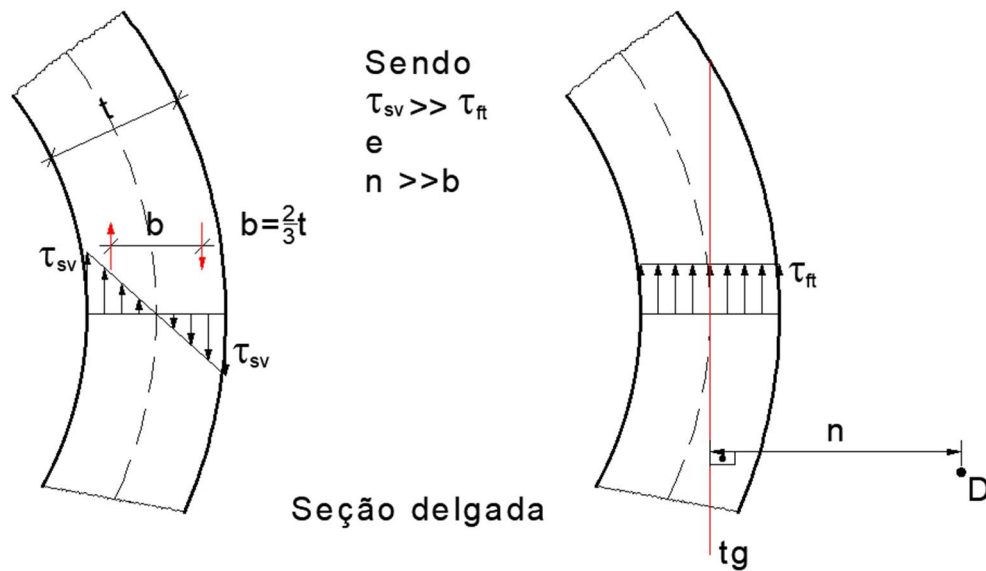
Então, considerando a derivada da Eq. (5.28) na Eq. (5.34), tem-se:

$$\tau_{ft} = \frac{B' S_\omega}{t I_\omega} \quad (5.35)$$

É importante destacar que o valor de S_ω é igual a área do diagrama função ω vezes a espessura t , tomada até o ponto em questão, e que a tensão τ_{ft} é positiva quando estiver no sentido positivo adotado para a coordenada s .

Apesar das tensões de cisalhamento da flexo-torção serem relativamente pequenas para as seções transversais de parede fina, suas contribuições como reação ao carregamento externo são consideráveis, uma vez que as forças resultantes dessas tensões possuem braços de alavanca n muito maiores do que as tensões de cisalhamento da torção livre τ_{sv} , cujo braço é apenas $(2/3)t$, conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Forças resultantes das tensões de cisalhamento da torção livre e da flexo-torção



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Sendo M_{ft} o momento devido à contribuição das tensões τ_{ft} , denominado momento torçor de flexo-torção, pode-se escrever:

$$M_{ft} = \int \tau_{ft} n dA = -E I_\omega \theta_x''' \quad (5.36)$$

Portanto, o momento de torção solicitante M_t pode ser dado pela soma do momento de torção livre (M_l) e momento de flexo-torção (M_{ft}):

$$M_t = M_l + M_{ft} = GJ\theta_x' - E I_\omega \theta_x''' \quad (5.37)$$

Ao determinar o ângulo de rotação pela resolução da Eq. (5.37) será possível determinar todas as grandezas envolvidas no problema de barras abertas de paredes finas.

A Eq. (5.37) é uma equação diferencial linear não homogênea de terceira ordem, com coeficientes constantes. Para encontrar a sua solução geral, denotada por $S = S_h + S_p$, deve-se procurar uma solução para a equação homogênea correspondente e, em seguida, determinar a expressão para a solução particular. Ao derivar em relação a x e dividir os termos por $G J_t$, a Eq. (5.37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$r^2 \theta_x'''' - \theta_x'' = \frac{-m}{GJ} \quad (5.38)$$

onde m é a carga de torção distribuída, cujo valor é igual a derivada de M_t , e r , o comprimento de comparação, dado por:

$$r = \sqrt{\frac{EI_\omega}{GJ}} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)I_\omega}{J}} \quad (5.39)$$

A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$\theta_x = A_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + A_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + A_3 x + A_4 + S_p \quad (5.40)$$

onde A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são constantes determinadas a partir das condições de contorno e características específicas do problema.

Se o momento de torção M_t for constante ou variar linearmente ao longo do comprimento da barra, a solução particular é dada por:

$$S_p = \frac{mx^2}{2GJ} \quad (5.41)$$

Destaca-se que as expressões das funções hiperbólicas são expressas por:

$$\sinh\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} \quad (5.42)$$

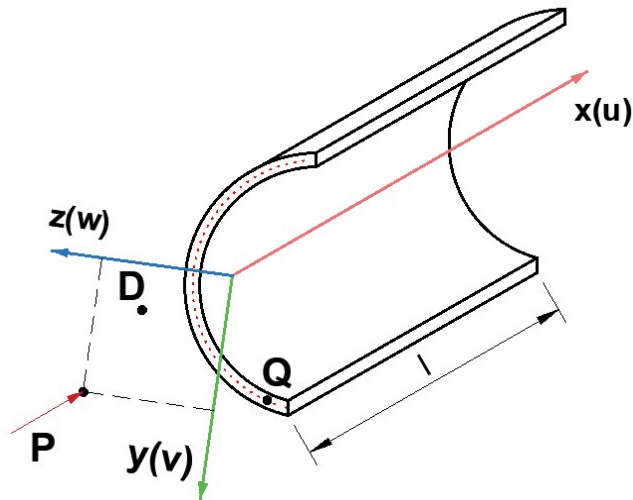
$$\cosh\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2} \quad (5.43)$$

5.4 Instabilidade por flexão e torção

A Figura 15 representa uma barra de comprimento l com seção transversal aberta de parede fina, cujos eixos principais de inércia da seção transversal são os eixos y e z . O eixo longitudinal que contém o centro de gravidade da seção transversal é o eixo x . Para esse elemento, o centro de torção é indicado pelo ponto D (z_D , y_D) enquanto Q (z , y) representa um ponto genérico do esqueleto. O elemento estrutural em questão pode estar submetido aos seguintes esforços solicitantes: força normal (N_x), forças

cortantes (Q_y, Q_z), momentos fletores (M_y, M_z), momento de torção (M_t) e bimomento (B).

Figura 15 – Seção transversal de parede delgada



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Portanto, no caso em que os eixos da seção transversal são centrais e principais, a tensão normal longitudinal será:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (5.44)$$

Na expressão anterior, consideram-se M_y e M_z positivos quando tracionam em $z > 0$ e $y > 0$, respectivamente; N_x positivo quando traciona o elemento; e B positivo quando tracionada $\omega > 0$.

As coordenadas do centro de torção podem ser obtidas a partir da interpretação geométrica do cálculo da área setorial, conforme apresentado por Javaroni (1999). Adotando-se um polo P arbitrário (Figura 15), tem-se que:

$$z_D = z_P - \frac{1}{I_z} \int \omega_P y dA \quad (5.45)$$

$$y_D = y_P - \frac{1}{I_y} \int \omega_P z dA \quad (5.46)$$

onde ω_P é a área setorial com polo provisório P, I_y e I_z são os momentos de inércia em relação aos eixos y e z, respectivamente.

O ponto genérico Q está sujeito a deslocamentos nas direções x, y e z. Para uma nova posição de equilíbrio da barra, quando esta estiver submetida a um

carregamento capaz de causar sua instabilidade, as expressões dos deslocamentos do ponto Q da seção, segundo os eixos principais, são:

$$u = \omega \theta'_x \quad (5.47)$$

$$v = v_D + (z - z_D) \theta_x \quad (5.48)$$

$$w = w_D - (y - y_D) \theta_x \quad (5.49)$$

Para o caso de flexão, tem-se que:

$$E I_z v''_D = -M_z \quad (5.50)$$

$$E I_y w''_D = -M_y \quad (5.51)$$

Para o caso de flexo-torção, pode-se escrever:

$$E I_\omega \theta'''_x - GJ \theta'_x = -M_t \quad (5.52)$$

Derivando as Eqs. (5.50) e (5.51) duas vezes e a Eq. (5.52) uma única vez em relação ao eixo x, chega-se a:

$$E I_z v''''_D = p_y + \int \sigma_x v'' dA \quad (5.53)$$

$$E I_y w''''_D = p_z + \int \sigma_x w'' dA \quad (5.54)$$

$$EI_\omega \theta''''_x - GJ \theta''_x = -m + \int \{ \sigma_x v'' [(z - z_D) - (y - y_D) \theta_x] - \sigma_x w'' [(y - y_D) + (z - z_D) \theta_x] \} dA \quad (5.55)$$

sendo p_y e p_z as cargas distribuídas ao longo do eixo x nas direções y e z, respectivamente, e m o momento torçor distribuído ao longo do eixo x.

Então, considerando a Eq. (5.44) e o campo de deslocamentos nas Eqs. (5.53), (5.54) e (5.55), e admitindo $p_y = p_z = m = 0$, as equações gerais da instabilidade global por flexão e torção são dadas por:

$$E I_z v''''_D - N v''_D + (N z_D - M_y) \theta''_x = 0 \quad (5.56)$$

$$E I_y w''''_D - N w''_D + (N y_D - M_z) \theta''_x = 0 \quad (5.57)$$

$$EI_\omega \theta''''_x - [N i_D^2 + 2M_y(k_z - z_D) + 2M_z(k_y - y_D) + GJ] \theta''_x - (M_y - N z_D) v''_D + (M_z - N y_D) w''_D = 0 \quad (5.58)$$

onde i_D^2 é o raio de giração polar; k_y e k_z são características geométricas da seção transversal, dadas por:

$$k_y = \frac{1}{2I_z} \int y(z^2 + y^2) dA \quad (5.59)$$

$$k_z = \frac{1}{2I_y} \int z(z^2 + y^2) dA \quad (5.60)$$

que são as coordenadas do centro do círculo de estabilidade nos eixos y e z , respectivamente.

Para a obtenção das equações gerais da instabilidade global por flexão e torção foram desprezados os termos de alta ordem.

Portanto, dependendo das condições de carregamento e da geometria da barra, poderão ocorrer as seguintes situações:

- a) Flambagem elástica por flexão v e w ou flambagem de Euler;
- b) Flambagem elástica por torção θ_x ou flambagem puramente torcional;
- c) Flambagem elástica por flexão v e w e torção θ_x ou flambagem lateral com torção (Javaroni, 1999).

6 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS CONSIDERANDO AS TEORIAS DE SAINT VENANT E VLASOV

6.1 Considerações iniciais

Neste capítulo, é exposta uma formulação para a análise de pórticos espaciais, fundamentada no método dos elementos finitos, que abrange a não linearidade geométrica e do material. Essa abordagem visa capturar de maneira mais precisa o comportamento dessas estruturas, levando em consideração pequenas deformações sob grandes deslocamentos e rotações, os efeitos da plasticidade distribuída, a influência das tensões residuais e das imperfeições geométricas iniciais, bem como do empenamento da seção transversal.

Para a atualização da geometria e obtenção das deformações do elemento são utilizados os procedimentos propostos por Kuo, Yang e Chou (1993). Nessa abordagem, aplica-se a teoria de rotações finitas de Euler para a consideração da natureza não-comutativa das rotações no espaço. Além disso, os deslocamentos são decompostos em deslocamentos de corpo rígido e deslocamentos naturais por meio da técnica corrotacional. Portanto, a partir dos deslocamentos incrementais da estrutura, calculados por meio da solução das equações de equilíbrio, são determinados os incrementos de deslocamentos naturais para cada elemento.

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento aplica-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e a Formulação Lagrangeana Atualizada (FLA). Os momentos internos são determinados a partir da integração de tensões calculadas pelas teorias de Euler-Bernoulli para momentos fletores e Timoshenko-Vlasov para momentos torçores. Nesse processo, assume-se que as rotações naturais são pequenas, o que é aceitável para aplicações práticas da engenharia de estruturas. Destaca-se que, para o cálculo do momento de torção e do bimomento, adota-se um comportamento elástico linear. Consequentemente, as rigidezes à torção e ao empenamento não são afetadas pela plastificação do elemento.

Neste estudo, utiliza-se a tensão e a deformação de engenharia que são pares de medidas conjugadas, ou seja, ao se integrar o produto da tensão pela deformação em todo o volume do elemento é obtida a energia interna total. Além disso, em razão da adoção do sistema de coordenadas corrotacional no desenvolvimento da formulação deste trabalho, pode-se garantir que as tensões e as deformações de engenharia são também pares de medidas objetivas, isto é, são invariantes sob movimentos de corpo

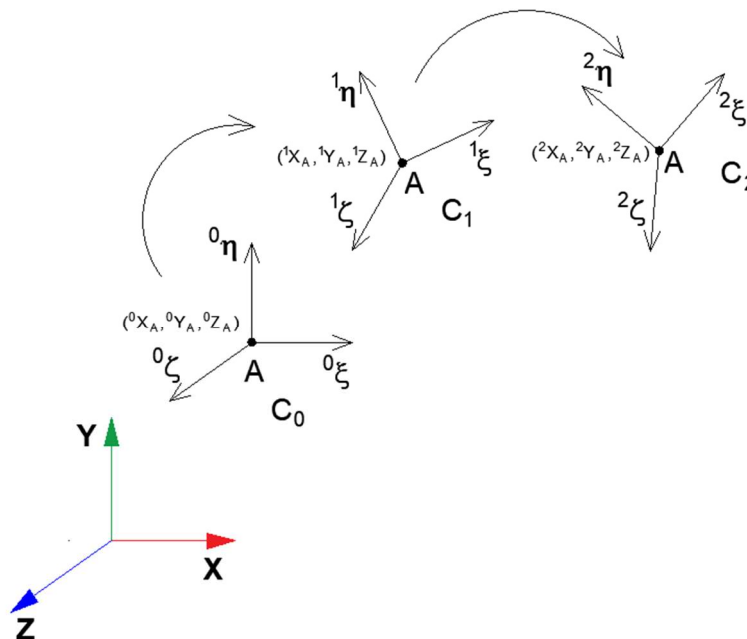
rígido. A seguir, apresenta-se, em tópicos, o desenvolvimento da formulação do elemento finito não linear de pórtico espacial que considera a torção livre e a torção não uniforme.

6.2 Sistemas de eixos de referência

Na análise não linear incremental, consideram-se diferentes configurações de referência. Pode-se denotar a configuração inicial indeformada de um elemento como C_0 , a última configuração de equilíbrio conhecida por C_1 , e a configuração deformada atual por C_2 . Portanto, neste trabalho, um sobrescrito α (com $\alpha = 0, 1, 2$) do lado esquerdo de uma grandeza denota a configuração na qual ela é determinada.

Um sistema de eixos ortogonais pode ser arbitrado para os nós inicial e final do elemento, referidos como A e B. Conforme exemplificado na Figura 16, os eixos de referência do nó A do elemento, na configuração C_α , são definidos por um conjunto de vetores unitários ${}^\alpha \mathbf{q}_A = [{}^\alpha \xi_A \quad {}^\alpha \eta_A \quad {}^\alpha \zeta_A]$, e as coordenadas do mesmo nó por $({}^\alpha X_A, {}^\alpha Y_A, {}^\alpha Z_A)$. Similarmente, para o nó B, cujas coordenadas são $({}^\alpha X_B, {}^\alpha Y_B, {}^\alpha Z_B)$, é definido um conjunto de vetores unitários ${}^\alpha \mathbf{q}_B = [{}^\alpha \xi_B \quad {}^\alpha \eta_B \quad {}^\alpha \zeta_B]$. É importante destacar que, para a configuração C_0 , esses vetores são paralelos aos eixos globais de referência XYZ.

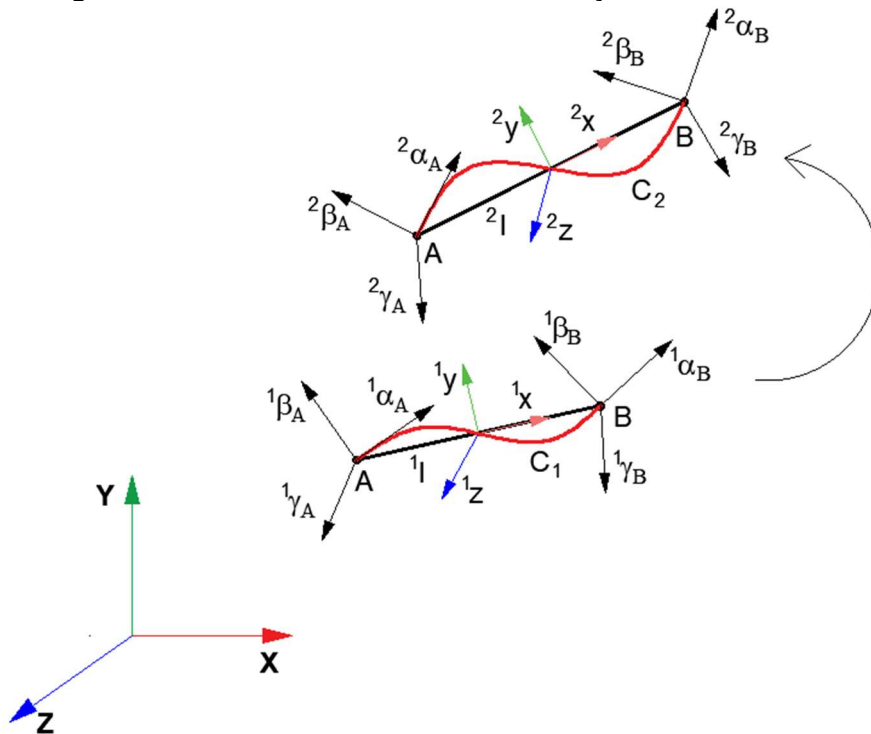
Figura 16 – Eixos nodais de referência e coordenadas dos nós nas diferentes configurações



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Além disso, podem ser definidos conjuntos de vetores ortonormais para estabelecer o sistema de eixos das seções transversais dos nós A e B, nas configurações C_α , designados como ${}^\alpha \mathbf{p}_A = [{}^\alpha \alpha_A \quad {}^\alpha \beta_A \quad {}^\alpha \gamma_A]$ e ${}^\alpha \mathbf{p}_B = [{}^\alpha \alpha_B \quad {}^\alpha \beta_B \quad {}^\alpha \gamma_B]$, respectivamente. O eixo ${}^\alpha \alpha$ é considerado como sendo coincidente com o eixo longitudinal, que passa pelo centroide da seção do nó. Por sua vez, os eixos ${}^\alpha \beta$ e ${}^\alpha \gamma$ são os eixos centrais principais de inércia da mesma seção. De maneira semelhante, é necessário inserir um terceiro sistema de eixos ortogonais para o elemento, composto pelos vetores ${}^\alpha \mathbf{x}$, ${}^\alpha \mathbf{y}$, ${}^\alpha \mathbf{z}$, onde ${}^\alpha \mathbf{x}$ é assumido como sendo o eixo baricêntrico do elemento. Os vetores que constituem esse sistema compõem a matriz de rotação ${}^\alpha \mathbf{R}$. A partir da Figura 17, verifica-se que os eixos da seção dos nós inicial e final e o eixo do elemento são paralelos na configuração C_0 .

Figura 17 – Eixos do elemento e eixos das seções inicial e final



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Desse modo, os eixos da seção podem ser definidos pela transformação de rotação dos eixos dos nós para os eixos de referência do elemento. Como na configuração C_0 todos os eixos da seção são paralelos aos eixos do elemento, pode-se escrever:

$${}^0 \mathbf{p}_j = {}^0 \mathbf{R} {}^0 \mathbf{q}_j \quad (j = A, B) \quad (6.1)$$

sendo ${}^0\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^0\alpha_j & {}^0\beta_j & {}^0\gamma_j \end{bmatrix}$.

A seguir são descritos os procedimentos para atualização das rotações nodais para cada elemento com base na teoria de rotação finita.

6.3 Atualização da geometria do elemento

A atualização da geometria do elemento é realizada por meio da teoria de rotações finitas, descrita no capítulo 4. Ao ocorrer a transição do elemento da configuração C_1 para a C_2 , as variações de deslocamento e rotação sofridas pelo nó j ($j = A, B$) podem ser expressas como:

$$\Delta \mathbf{u}_j = \Delta u_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta u_y \hat{\mathbf{j}} + \Delta u_z \hat{\mathbf{k}} \quad (6.2)$$

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_j = \Delta \phi_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta \phi_y \hat{\mathbf{j}} + \Delta \phi_z \hat{\mathbf{k}} \quad (6.3)$$

Por sua vez, a magnitude ϕ_j e o vetor unitário da direção $\mathbf{n}_j$ do incremento de rotação $\Delta \boldsymbol{\phi}_j$ podem ser determinados por:

$$\phi_j = |\Delta \boldsymbol{\phi}_j| = \sqrt{\Delta \phi_x^2 + \Delta \phi_y^2 + \Delta \phi_z^2} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{n}_j = \frac{\Delta \boldsymbol{\phi}_j}{\phi_j} \quad (6.5)$$

Desse modo, os vetores que constituem o eixo de referência da seção do nó j , atualizados para a próxima configuração podem ser determinados aplicando a Eq.(4.16). Assim, pode-se escrever a seguinte expressão:

$${}^\alpha \mathbf{p}_j = \mathbf{R}(\boldsymbol{\phi})^{\alpha-1} \mathbf{p}_j \quad (j = A, B) \quad (6.6)$$

6.4 Eixos do elemento e eixos das seções nodais

Para atualizar os eixos de referência do elemento deve-se inicialmente definir o eixo x , dado pelo vetor posição formado pelos nós A e B.

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}_{AB} + \mathbf{U}_{AB}}{l} \quad (6.7)$$

onde l se refere ao comprimento da corda que une os nós do elemento na configuração corrente, dado por:

$$l = |\mathbf{X}_{AB} + \mathbf{U}_{AB}| = [(\mathbf{X}_{AB} + \mathbf{U}_{AB})^T (\mathbf{X}_{AB} + \mathbf{U}_{AB})]^{1/2} \quad (6.8)$$

sendo $\mathbf{X}_{AB}$ o vetor que contém as diferenças entre as coordenadas dos nós B e A da configuração anterior, ou seja,

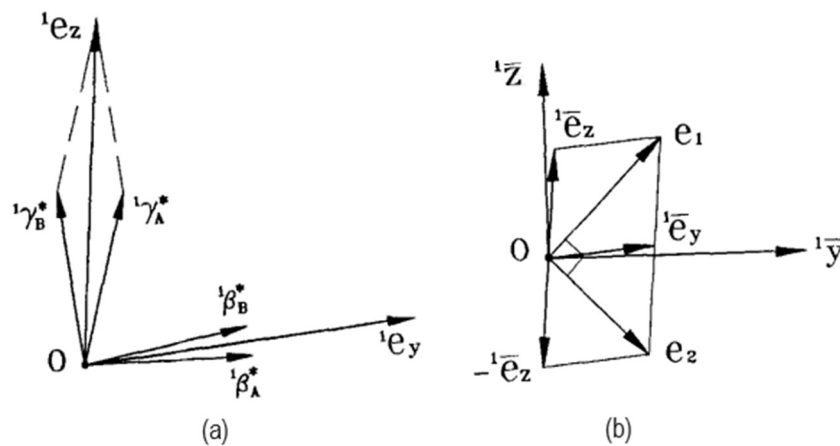
$$\mathbf{X}_{AB} = \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A \quad (6.9)$$

e $\mathbf{U}_{AB}$, o vetor que armazena as diferenças entre os deslocamentos sofridos pelos nós B e A no passo corrente.

$$\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A \quad (6.10)$$

No decorrer da deformação do elemento, os vetores dos eixos das seções localizadas nas extremidades não permanecem paralelos, uma vez que o eixo baricêntrico do elemento torna-se curvo. Nesse caso, para definir os eixos ortogonais y e z pode-se assumir um plano S perpendicular ao eixo axial x , no qual serão projetados os eixos centrais principais de inércia das duas seções nodais. A Figura 18(a) ilustra as projeções dos eixos centrais principais de inércia das seções localizadas nos nós A e B, identificadas por β_A^* , γ_A^* e β_B^* , γ_B^* , respectivamente.

Figura 18 – Determinação das novas coordenadas do elemento: (a) média das projeções dos eixos da seção; (b) novos eixos do elemento.



Fonte: Adaptado de Kuo, Yang e Chou (1993).

Essas projeções podem ser determinadas por:

$$\mathbf{p}_j^* = \mathbf{p}_j - \bar{\lambda}_{pj} \mathbf{x} \quad (j = A, B; \mathbf{p} = \beta, \gamma) \quad (6.11)$$

onde

$$\bar{\lambda}_{pj} = \mathbf{p}_j^T \mathbf{x} \quad (j = A, B; \mathbf{p} = \beta, \gamma) \quad (6.12)$$

Para obter vetores unitários nas mesmas direções das projeções, aplica-se a Eq. (6.13):

$$\bar{\mathbf{p}}_j = \frac{1}{|\mathbf{p}_j^*|} \mathbf{p}_j^* \quad (j = A, B; \mathbf{p} = \beta, \gamma) \quad (6.13)$$

Então, conforme ilustrado pela Figura 18, definem-se os vetores $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ dados pelas direções médias das projeções dos eixos da seção dos dois nós e seus respectivos vetores unitários $\bar{\mathbf{e}}_y$ e $\bar{\mathbf{e}}_z$, conforme equações seguintes:

$$\mathbf{e}_s = \bar{\mathbf{p}}_A + \bar{\mathbf{p}}_B \quad (s = y, z; \mathbf{p} = \beta, \gamma) \quad (6.14)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_s = \frac{1}{|\mathbf{e}_s|} \mathbf{e}_s \quad (s = y, z) \quad (6.15)$$

Os vetores $\bar{\mathbf{e}}_y$ e $\bar{\mathbf{e}}_z$ obtidos, geralmente, não formam um ângulo de 90° . Para a definição dos eixos ortogonais, considera-se que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e funcionam como bissetrizes dos ângulos internos. A partir do losango obtido com os vetores unitários $\bar{\mathbf{e}}_y$ e $\bar{\mathbf{e}}_z$, são definidos os vetores perpendiculares $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, que representam suas diagonais (Figura 18(b)). Nesse processo, são empregadas as seguintes equações:

$$\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_z \quad (6.16)$$

$$\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{e}}_y - \bar{\mathbf{e}}_z \quad (6.17)$$

Esses vetores podem ser normalizados utilizando a Eq. (6.18):

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \frac{1}{|\mathbf{e}_k|} \mathbf{e}_k \quad (k = 1, 2) \quad (6.18)$$

Por fim, ao girar os vetores unitários $\bar{\mathbf{e}}_1$ e $\bar{\mathbf{e}}_2$ no sentido anti-horário por um ângulo de 45° , obtém-se os vetores $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2) \quad (6.19)$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_2) \quad (6.20)$$

A matriz de rotação para o elemento na configuração corrente C_α (com $\alpha \geq 1$) é obtida pelo agrupamento dos vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

$${}^\alpha \mathbf{R} = [{}^\alpha \mathbf{x} \quad {}^\alpha \mathbf{y} \quad {}^\alpha \mathbf{z}] \quad (6.21)$$

6.5 Deslocamentos naturais do elemento

Durante uma análise incremental não linear, os incrementos de deslocamento determinados das equações de equilíbrio da estrutura podem ser decompostos em deslocamentos de corpo rígido e os deslocamentos naturais dos elementos estruturais.

Para o elemento de pórtico espacial proposto, o vetor de deslocamentos naturais $\mathbf{u}$ referenciado no sistema de eixos do elemento ${}^2\mathbf{x}$, ${}^2\mathbf{y}$ e ${}^2\mathbf{z}$, na configuração C_2 , contém 8 graus de liberdade (GL).

$$\mathbf{u} = [\Delta \quad \theta_{yA} \quad \theta_{zA} \quad \varphi_x \quad \theta_{yB} \quad \theta_{zB} \quad \theta'_{xA} \quad \theta'_{xB}]^T \quad (6.22)$$

onde Δ é a variação do comprimento da corda que une o nó inicial e final do elemento; θ_{yA} e θ_{zA} são as rotações no nó A em torno dos eixos 2y e 2z , respectivamente, φ_x é a rotação relativa entre os nós B e A em torno do eixo 2x , θ_{yB} e θ_{zB} são as rotações no nó B em torno dos eixos 2y e 2z , respectivamente; e θ'_{xA} e θ'_{xB} são os graus de liberdade relacionados ao empenamento da seção transversal nos nós A e B, respectivamente.

A variação do comprimento da corda do elemento é dada por:

$$\Delta = {}^2l - {}^1l \quad (6.23)$$

sendo 1l e 2l , o comprimento da corda do elemento nas configurações C_1 e C_2 , respectivamente.

Com base no sistema de eixos das seções nodais e eixos do elemento nas configurações C_1 e C_2 , pode-se determinar as demais componentes do vetor de deslocamentos naturais. Primeiramente, os eixos das seções devem ser escritos no referencial local do elemento, por meio da Eq. (6.24):

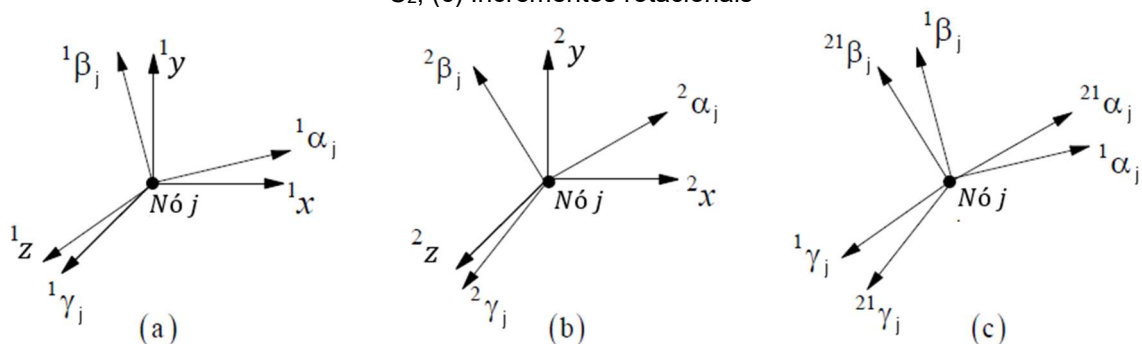
$${}^\alpha \mathbf{p}_{j,el} = {}^\alpha \mathbf{R}^T {}^\alpha \mathbf{p}_{j,g} \quad (j = A, B) \quad (6.24)$$

onde os subscritos *el* e *g* são empregados para denotar o sistema local (do elemento) e o sistema global, respectivamente.

A Figura 19 ilustra os vetores da seção de um nó expressos em relação ao referencial do elemento nas configurações C_1 e C_2 (${}^1\mathbf{p}_{j,el}$ e ${}^2\mathbf{p}_{j,el}$), que determinam as rotações naturais desse nó. Portanto, o vetor de incrementos de deformação do nó ${}^{21}\mathbf{p}_j$ pode ser escrito em relação aos eixos da seção da configuração C_1 (Figura 19(c)), aplicando a Eq.(6.25):

$${}^{21}\mathbf{p}_j = {}^1\mathbf{p}_{j,el}^T {}^2\mathbf{p}_{j,el} \quad (j = A, B) \quad (6.25)$$

Figura 19 – Variação do sistema de eixos das seções nodais: (a) Configuração C_1 ; (b) Configuração C_2 ; (c) Incrementos rotacionais



Fonte: Adaptado de Ribeiro (2022).

Desse modo, o ângulo de rotação θ_j para o nó j ($j = A, B$), que ocorre durante o movimento do elemento de C_1 para C_2 , e seu eixo de rotação $\mathbf{n}_j$ podem ser determinados como segue.

Primeiramente, considerando que $\mathbf{n}_j = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ define-se que:

$$|\mathbf{n}_j| = 1 \quad (6.26)$$

Em seguida, impõe-se que:

$$\mathbf{r}_p = {}^1\boldsymbol{\alpha}_{j,el} = [1 \ 0 \ 0]^T \text{ e } \mathbf{r}'_p = {}^{21}\boldsymbol{\alpha}_j = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T \quad (6.27)$$

Aplicando a expressão da rotação finita (Eq. (4.12)), pode-se obter as seguintes relações para o eixo ${}^{21}\boldsymbol{\alpha}_j$:

$$\alpha_1 = \cos\theta_j + (1 - \cos\theta_j)n_1^2 \quad (6.28)$$

$$\alpha_2 = n_3 \sin\theta_j + (1 - \cos\theta_j)n_1 n_2 \quad (6.29)$$

$$\alpha_3 = -n_2 \sin\theta_j + (1 - \cos\theta_j)n_1 n_3 \quad (6.30)$$

Similarmente, adotando-se:

$$\mathbf{r}_p = {}^1\boldsymbol{\beta}_{j,el} = [0 \ 1 \ 0]^T \text{ e } \mathbf{r}'_p = {}^{21}\boldsymbol{\beta}_j = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T \quad (6.31)$$

obtém-se a seguinte relação para o eixo ${}^{21}\boldsymbol{\beta}_j$:

$$\beta_1 = -n_3 \sin\theta_j + (1 - \cos\theta_j)n_1 n_2 \quad (6.32)$$

Subtraindo a Eq. (6.32) da Eq. (6.29) chega-se a:

$$n_3 = \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2 \sin\theta_j} \quad (6.33)$$

Definindo-se

$$\mathbf{r}_p = {}^1\boldsymbol{\gamma}_{j,el} = [0 \ 0 \ 1]^T \text{ e } \mathbf{r}'_p = {}^{21}\boldsymbol{\gamma}_j = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3]^T \quad (6.34)$$

pode-se mostrar que as seguintes relações são válidas:

$$n_2 = \frac{\gamma_1 - \alpha_3}{2 \sin\theta_j} \quad (6.35)$$

$$n_1 = \frac{\beta_3 - \gamma_2}{2 \sin\theta_j} \quad (6.36)$$

Substituindo as Eqs. (6.33), (6.35) e (6.36) na Eq.(6.26), tem-se que o ângulo de rotação θ_j é dado por:

$$\theta_j = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \quad (6.37)$$

onde

$$\lambda = \sqrt{(\beta_3 - \gamma_2)^2 + (\gamma_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \beta_1)^2} \quad (6.38)$$

O vetor $\mathbf{n}_j$ está referido aos eixos da seção ${}^1\mathbf{p}_{j,el}$, onde $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$, e pode ser escrito em relação ao sistema local, pela equação:

$$\mathbf{n}_{j,el} = {}^1\mathbf{p}_{j,el} \mathbf{n}_j \quad (6.39)$$

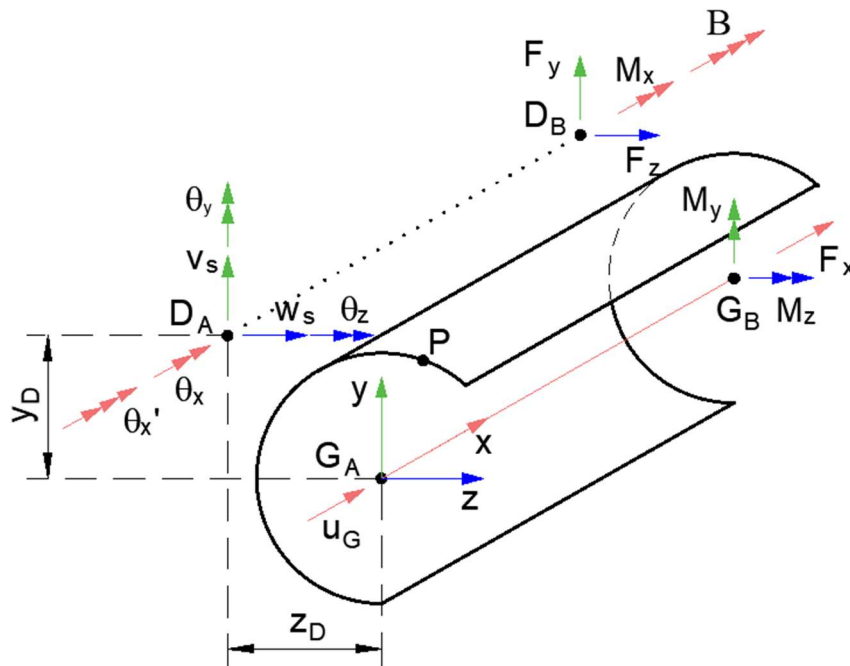
A partir das Eqs. (6.37) e (6.39), as rotações naturais associadas a cada nó do elemento, resultantes do movimento do elemento de C_1 para C_2 podem ser determinadas:

$$[\theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}] = \theta_j \mathbf{n}_{j,el}^T \quad (j = A, B) \quad (6.40)$$

6.6 Cinemática do elemento

A Figura 20 exibe os graus de liberdade de uma seção transversal de parede fina no sistema de coordenadas local. Conforme destacado nas seções anteriores, esse sistema é escolhido de tal forma que o eixo x coincide com o eixo longitudinal que passa pelo centroide (G) de cada seção transversal, enquanto os eixos y e z são os eixos principais de inércia. O centro de torção (D) é definido pelas coordenadas y_D e z_D . As rotações, as translações e as deformações de torção relacionadas a momentos, cortantes e bimomentos são definidas para atuar ao longo do eixo do centro de torção, ao passo que os deslocamentos na direção do comprimento do elemento atuam no eixo centroidal.

Figura 20 – Deslocamentos e forças nodais



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os deslocamentos incrementais da seção transversal podem ser definidos por:

$$\begin{aligned} u_G &= u_G(x), v_D = v_D(x), w_D = w_D(x), \theta_x = \theta_x(x), \\ \theta_y &= \theta_y(x), \theta_z = \theta_z(x), \theta'_x = \frac{d\theta_x}{dx} \end{aligned} \quad (6.41)$$

6.6.1 Campo de deslocamento

O campo de deslocamento adotado considera a hipótese de Euler-Bernoulli para a flexão e a teoria de Vlasov para a torção. Portanto, considerando a hipótese de pequenas rotações, os deslocamentos longitudinal e transversais de um ponto arbitrário **P** (Figura 20) com coordenadas x, y e z , pertencente à seção transversal, é definido no sistema local corrotacional pelas expressões (Banić, Turkalj e Lanc, 2023):

$$u(x, y, z) = u_G(x) - y\theta_z + z\theta_y - \theta'_x \bar{\omega}(y, z) \quad (6.42)$$

$$v(x, y, z) = v_D(x) - (z - z_D)\theta_x \quad (6.43)$$

$$w(x, y, z) = w_D(x) + (y - y_D)\theta_x \quad (6.44)$$

onde u_G , v_D e w_D são os deslocamentos da seção transversal associados ao centroide na direção x e ao centro de torção nas direções y e z , respectivamente; θ'_x é a rotação específica; $\bar{\omega}(y, z)$ representa a área setorial em relação ao centro de torção; y e z são as coordenadas do ponto genérico em relação ao centro de gravidade da seção (ponto **G**).

Conforme destacado por alguns autores, caso a hipótese de pequenas rotações seja violada, deve-se considerar os termos de segunda ordem no campo de deslocamento (Kim, Chang e Kim, 1996; Turkalj, Brnic e Kravanja, 2011; Banić, Turkalj e Lanc, 2023). Nesse caso, o deslocamento total de um ponto genérico da seção transversal é dado por:

$$u + \tilde{u}, \quad v + \tilde{v}, \quad w + \tilde{w} \quad (6.45)$$

sendo

$$\tilde{u}(x, y, z) = 0,5[-(y - y_D)\theta_x\theta_y + (z - z_D)\theta_x\theta_z] \quad (6.46)$$

$$\tilde{v}(x, y, z) = 0,5[-y(\theta_x^2 + \theta_z^2) + z\theta_y\theta_z + y_D\theta_x^2] \quad (6.47)$$

$$\tilde{w}(x, y, z) = 0,5[-z(\theta_x^2 + \theta_y^2) - y\theta_y\theta_z + z_D\theta_x^2] \quad (6.48)$$

Neste trabalho, serão considerados apenas os termos de primeira ordem do campo de deslocamentos. A adoção da hipótese de pequenas rotações em relação à corda do elemento não faz com que a formulação perca a sua generalidade devido ao sistema corrotacional adotado, podendo ocorrer grandes deslocamentos e curvaturas,

desde que os elementos utilizados sejam suficientemente curtos e os incrementos de carga suficientemente pequenos (Lavall, 1996).

Além disso, são consideradas seções duplamente simétricas, ou seja, o centro de torção coincide com o centro de gravidade ($y_D = z_D = 0$). Neste caso, os deslocamentos da seção transversal associados ao centroide G, u_G , v_G e w_G , coincidem com os deslocamentos associados ao centro de torção D, u_D , v_D e w_D .

6.6.2 Campo de deformação

A partir do campo de deslocamentos, pode-se determinar as expressões analíticas do campo de deformação consistente com a teoria estrutural adotada. Desprezando-se os termos que contém produto de ordem superior obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_G}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} + z \frac{d\theta_y}{dx} - \theta_x'' \bar{w}(y, z) \quad (6.49)$$

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x - y\theta_z' + z\theta_y' - \theta_x'' \bar{w}(y, z) \quad (6.49a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta_z - \frac{d\theta_x}{dx} \frac{d\bar{w}}{dy} + \frac{dv_D}{dx} - (z - z_D) \frac{d\theta_x}{dx} \quad (6.50)$$

$$\gamma_{xy} = \theta_x' \left[-\frac{d\bar{w}}{dy} - (z - z_D) \right] \quad (6.50a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \theta_y - \frac{d\theta_x}{dx} \frac{d\bar{w}}{dz} + \frac{dw_D}{dx} + (y - y_D) \frac{d\theta_x}{dx} \quad (6.51)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_x' \left[-\frac{d\bar{w}}{dz} + (y - y_D) \right] \quad (6.51a)$$

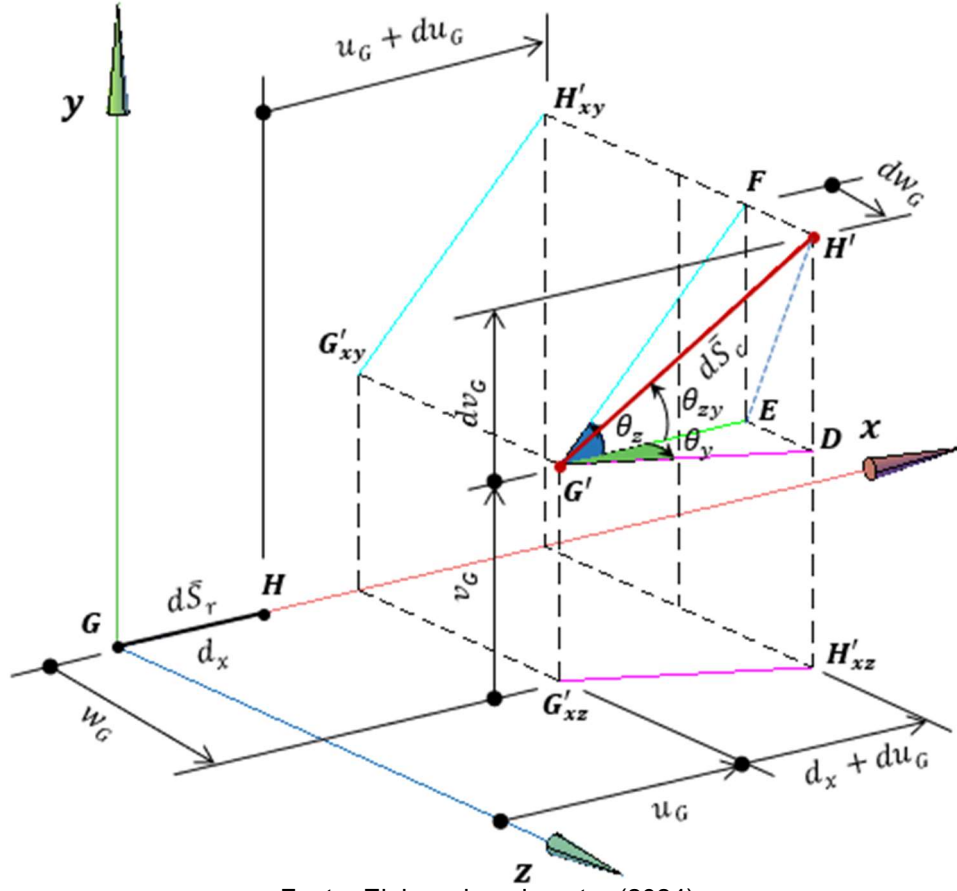
$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = -\theta_x + \theta_x \quad (6.52)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (6.52a)$$

onde o símbolo (') sobrescrito indica derivação em relação a x .

A Figura 21 ilustra o elemento infinitesimal localizado no eixo que une os centros de gravidade de um perfil com seção duplamente simétrica, antes ($\overline{GH}$) e após a deformação ($\overline{G'H'}$). Os pontos G'_{xy} e H'_{xy} definem a projeção no plano xy desse elemento após a deformação, enquanto os pontos G'_{xz} e H'_{xz} limitam a projeção desse elemento no plano xz . Os segmentos $\overline{G'F}$ e $\overline{G'D}$ são paralelos às projeções do elemento $\overline{G'H'}$, respectivamente, possuindo os mesmos comprimentos das projeções.

Figura 21 – Elemento infinitesimal antes e após deformação



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Pela Figura 21, verifica-se que as rotações de flexão θ_y e θ_z das seções transversais decorre dos deslocamentos u_G , v_G e w_G , sendo obtidas por, respectivamente:

$$\theta_y \cong \tan \theta_y = \frac{\overline{DE}}{\overline{G'E}} = \frac{dw_G}{dx + du_G} = \frac{\frac{dw_G}{dx}}{\frac{dx}{dx} + \frac{du_G}{dx}} = \frac{w'_G}{1 + u'_G} \quad (6.53)$$

$$\theta_z \cong \tan \theta_z = \frac{\overline{EF}}{\overline{G'E}} = \frac{dv_G}{dx + du_G} = \frac{\frac{dv_G}{dx}}{\frac{dx}{dx} + \frac{du_G}{dx}} = \frac{v'_G}{1 + u'_G} \quad (6.54)$$

Por sua vez, o ângulo θ_{zy} pode ser calculado por:

$$\theta_{zy} \cong \tan \theta_{zy} = \frac{\overline{EH'}}{\overline{G'E}} = \frac{[(dv_G)^2 + (dw_G)^2]^{1/2}}{dx + du_G} = \frac{[(v'_G)^2 + (w'_G)^2]^{1/2}}{1 + u'_G} \quad (6.55)$$

O comprimento infinitesimal da fibra analisada após a deformação pode ser obtido pelo triângulo $G'EH'$, sendo dado pela expressão:

$$d\bar{S}_c = [(dx + du_G)^2 + (dv_G)^2 + (dw_G)^2]^{1/2} \quad (6.56)$$

O alongamento ou encurtamento da mesma fibra é calculado dividindo-se a Equação (6.56) por $d\bar{S}_r = dx$:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{S}_c}{d\bar{S}_r} = \frac{d\bar{S}_c}{dx} = [(1 + u'_G)^2 + (v'_G)^2 + (w'_G)^2]^{1/2} \quad (6.57)$$

O estiramento da fibra do eixo da barra pode ser determinado pelo cosseno do ângulo θ_{zy} , obtido pela expressão:

$$\cos \theta_{zy} = \frac{dx + d\bar{u}}{d\bar{S}_c} = \frac{\frac{dx}{dx} + \frac{du_G}{dx}}{\frac{d\bar{S}_c}{dx}} = \frac{1 + u'_G}{\bar{\lambda}} \quad (6.58)$$

Logo, a Equação (6.58) pode ser reescrita como:

$$\bar{\lambda} = (1 + u'_G) \sec \theta_{zy} \quad (6.59)$$

A deformação longitudinal da fibra do eixo da barra pode ser obtida pela relação:

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{\lambda} - 1 \quad (6.60)$$

Assim, a expressão analítica do campo de deformações consistente com a mecânica dos sólidos, Eq. (6.49a) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_x = (1 + u'_G) \sec \theta_{zy} - 1 - y\theta'_z + z\theta'_y - \theta''_x \bar{w}(y, z) \quad (6.61)$$

Adotando-se aproximações de segunda ordem para a função trigonométrica presente na Equação (6.61) obtém-se:

$$\varepsilon_x = (1 + u'_G) \left(1 + \frac{\theta_{zy}^2}{2} \right) - 1 - y\theta'_z + z\theta'_y - \theta''_x \bar{w}(y, z) \quad (6.62)$$

A determinação das deformações, longitudinal e angular, depende da escolha de funções de interpolação expressas em função dos graus de liberdade naturais, portanto:

$$\varepsilon_x = f[u_n]; \gamma_{xy} = [u_n]; \gamma_{xz} = [u_n] \quad (6.63)$$

6.7 Funções de interpolação

Para que o campo de deformação seja conhecido é necessário definir funções interpoladoras para os deslocamentos u_G , v_G e w_G , assim como para os ângulos de rotação por flexão θ_y , θ_z e θ_{zy} e rotação por torção θ_x .

Adotando-se um polinômio de primeiro grau para o deslocamento longitudinal do eixo da barra, tal que, $u_G(x) = ax + b$, e considerando as condições de extremidade do elemento tem-se:

$$u_G(x) = \Psi_1 \Delta \quad (6.64)$$

sendo

$$\psi_1 = \left(\frac{x}{1l} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.65)$$

Para os deslocamentos transversais v_G e w_G adota-se um polinômio de terceiro grau, tal que, $v_G(x) = w_G(x) = cx^3 + dx^2 + ex + f$. Desse modo, são obtidas as seguintes expressões:

$$v_G(x) = \left(1 + \frac{\Delta}{1l} \right) (\psi_2 \theta_{zA} + \psi_3 \theta_{zB}) \quad (6.66)$$

$$w_G(x) = \left(1 + \frac{\Delta}{1l} \right) (\psi_2 \theta_{yA} + \psi_3 \theta_{yB}) \quad (6.67)$$

onde

$$\psi_2 = \frac{x^3}{1l^2} - \frac{x^2}{2 \cdot 1l} - \frac{x}{4} + \frac{1l}{8} \quad (6.68)$$

$$\psi_3 = \frac{x^3}{1l^2} + \frac{x^2}{2 \cdot 1l} - \frac{x}{4} - \frac{1l}{8} \quad (6.69)$$

Conforme demonstrado anteriormente, os ângulos de flexão θ_y , θ_z e θ_{zy} (Figura 21), podem ser obtidos por:

$$\theta_y = \arctan \left(\frac{w'_G}{1 + u'_G} \right) \quad (6.70)$$

$$\theta_z = \arctan \left(\frac{v'_G}{1 + u'_G} \right) \quad (6.71)$$

$$\theta_{zy} = \arctan \left(\frac{[(v'_G)^2 + (w'_G)^2]^{1/2}}{1 + u'_G} \right) \quad (6.72)$$

A partir dessas expressões pode-se determinar as funções de forma para as rotações por flexão:

$$\theta_y = \psi'_2 \theta_{yA} + \psi'_3 \theta_{yB} \quad (6.73)$$

$$\theta_z = \psi'_2 \theta_{zA} + \psi'_3 \theta_{zB} \quad (6.74)$$

$$\theta_{zy} = [(\psi'_2 \theta_{yA} + \psi'_3 \theta_{yB})^2 + (\psi'_2 \theta_{zA} + \psi'_3 \theta_{zB})^2]^{1/2} \quad (6.75)$$

onde

$$\psi'_2 = \frac{3x^2}{1l^2} - \frac{x}{1l} - \frac{1}{4} \quad (6.76)$$

$$\psi'_3 = \frac{3x^2}{1l^2} + \frac{x}{1l} - \frac{1}{4} \quad (6.77)$$

O ângulo de rotação θ_x da seção transversal por torção pode ser interpolado por um polinômio de terceiro grau. Considerando as condições de extremidade do elemento pode-se escrever:

$$\theta_x(x) = \Psi_4 \varphi_x + \Psi_2 \theta'_{xA} + \Psi_3 \theta'_{xB} \quad (6.78)$$

sendo as funções Ψ_2 e Ψ_3 dadas pelas Eqs. (6.68) e (6.69) e Ψ_4 por:

$$\Psi_4 = \left(-\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.79)$$

É importante ressaltar que para a teoria de Saint Venant, considera-se uma função de primeiro grau na interpolação do ângulo de rotação da seção transversal por torção. Portanto, tem-se:

$$\theta_x(x) = \Psi_1 \varphi_x \quad (6.80)$$

6.8 Valor médio de deformação

A deformação do eixo da barra $\bar{\varepsilon}_x$ é variável ao longo de seu comprimento, uma vez que as funções de interpolação dependem de x . Para facilitar o desenvolvimento analítico da formulação, adotar-se-á um valor constante para $\bar{\varepsilon}_x$, representado por seu valor médio, dado por:

$$\bar{\varepsilon}_{x_m} = \frac{1}{l} \int \bar{\varepsilon}_x dx \quad (6.81)$$

Resolvendo-se a integral acima, chega-se à expressão da deformação média:

$$\bar{\varepsilon}_{x_m} = \frac{\Delta}{l} + \left(1 + \frac{\Delta}{l} \right) \left[\frac{1}{15} (\theta_{yA}^2 + \theta_{yB}^2) - \frac{1}{30} \theta_{yA} \theta_{yB} + \frac{1}{15} (\theta_{zA}^2 + \theta_{zB}^2) - \frac{1}{30} \theta_{zA} \theta_{zB} \right] \quad (6.82)$$

Assim, a expressão final da deformação longitudinal é dada por:

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_{x_m} - y \theta'_z + z \theta'_y - \theta''_x \bar{\omega}(y, z) \quad (6.83)$$

onde θ'_y , θ'_z e θ''_x são dados pelas expressões:

$$\theta'_y = \Psi_2'' \theta_{yA} + \Psi_3'' \theta_{yB} \quad (6.84)$$

$$\theta'_z = \Psi_2'' \theta_{zA} + \Psi_3'' \theta_{zB} \quad (6.85)$$

$$\theta''_x = \Psi_4'' \varphi_x + \Psi_2'' \theta'_{xA} + \Psi_3'' \theta'_{xB} \quad (6.86)$$

6.9 Equações de equilíbrio

Uma vez conhecida a expressão do campo de deformação, dado pelas Equações (6.50), (6.51) e (6.83), o equilíbrio do elemento pode ser formulado aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que estabelece que, ao aplicar uma pequena

deformação virtual a um elemento deformável, em equilíbrio, submetido a um carregamento externo, o trabalho realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual produzido pelas forças internas ou tensões resultantes. Nesse sentido, a equação de equilíbrio para um elemento num instante $t + \Delta t$ pode ser definida por:

$$\int_{V_r} \sigma_x \delta \varepsilon_x dV_r + \int_{V_r} \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dV_r + \int_{V_r} \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dV_r + \int_{V_r} \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} dV_r = Q_i \delta u_i \quad (6.87)$$

onde dV_r é o volume infinitesimal do elemento na configuração de referência, σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} são a tensão normal e as tensões cisalhantes de uma fibra, respectivamente, $\delta \varepsilon_x$ a deformação longitudinal virtual de uma fibra, $\delta \gamma_{xy}$, $\delta \gamma_{xz}$ e $\delta \gamma_{yz}$ são as distorções virtuais de uma fibra, sendo a deformação por cisalhamento $\delta \gamma_{yz}$ nula, conforme Eq.(6.52a), Q_i é o vetor de forças do elemento nas coordenadas corrotacionais e δu_i são os deslocamentos naturais virtuais do elemento ($i = 1$ a 8).

A deformação longitudinal virtual e as distorções virtuais são expressas por:

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\delta \varepsilon_x}{\delta u_i} \delta u_i \quad (6.88)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta u_i} \delta u_i \quad (6.89)$$

$$\delta \gamma_{xz} = \frac{\delta \gamma_{xz}}{\delta u_i} \delta u_i \quad (6.90)$$

Inserindo as Equações (6.88), (6.89) e (6.90) na Equação (6.87), chega-se a equação de equilíbrio que governa o problema estático:

$$Q_i = \int_{V_r} (\sigma_x \varepsilon_{x,i} + \tau_{xy} \gamma_{xy,i} + \tau_{xz} \gamma_{xz,i}) dV_r \quad (6.91)$$

onde o subscrito i , após a vírgula, indica derivação em relação ao grau de liberdade natural (corrotacional) u_i ($i = 1$ a 8).

É importante destacar que para o cálculo do momento de torção e bimomento assume-se um comportamento linear para as tensões e deformações e, portanto, as rigidezes à torção e ao empenamento não são afetadas pela plastificação do material.

O vetor de forças nodais do elemento em coordenadas locais, denotado por $\mathbf{P}$, pode ser obtido a partir de uma matriz de transformação que relaciona os graus de liberdade corrotacionais com os graus de liberdade locais. Essa transformação será apresentada na próxima seção.

Por fim, pode-se agrupar as forças Q_i e P_j ($j = 1$ a 14) nos vetores $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{Q}^T = \{F_x \quad M_{yA} \quad M_{zA} \quad M_x \quad M_{yB} \quad M_{zB} \quad B_A \quad B_B\} \quad (6.92)$$

$$\mathbf{P}^T = \{F_{xA} \quad F_{yA} \quad F_{zA} \quad M_{xA} \quad M_{yA} \quad M_{zA} \quad B_A \quad F_{xB} \quad F_{yB} \quad F_{zB} \quad M_{xB} \quad M_{yB} \quad M_{zB} \quad B_B\} \quad (6.93)$$

6.10 Matriz de transformação

Na análise global de uma estrutura, é necessário transferir os deslocamentos e as forças dos elementos, como definidos nas Eqs. (6.22) e (6.92) para os graus de liberdade (GL) correspondentes nas coordenadas globais. Esse processo consiste em duas etapas de transformação: inicialmente, dos oito GL corrotacionais para os 14 GL nas coordenadas do elemento, e posteriormente, para os 14 GL nas coordenadas globais. A primeira etapa de transformação pode ser efetuada por meio da aplicação da equação a seguir, que se baseia nas relações entre momentos nas extremidades do elemento e as forças cortantes.

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q} \quad (6.94)$$

onde $\mathbf{P}$ é o vetor de forças do elemento, em coordenadas locais, com 7 componentes em cada nó, e $\bar{\mathbf{B}}$ é a matriz que relaciona os graus de liberdade corrotacionais com os graus de liberdade do sistema local do elemento, que pode ser expressa por:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2l} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2l} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2l} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

A matriz responsável por transformar os graus de liberdade do sistema local do elemento para as coordenadas globais pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

onde $\mathbf{R}$ é a matriz de rotação, definida pela Eq. (6.21), e $\mathbf{0}$ é uma matriz nula 3x3.

Por fim, considerando as matrizes de transformação, pode-se escrever o vetor de forças do elemento no sistema global, $\mathbf{F}$, conforme expressão:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{P} \quad (6.97)$$

6.11 Matriz de rigidez tangente do elemento

A matriz de rigidez do elemento em coordenadas naturais, $\mathbf{k}_c$, pode ser obtida derivando-se a Eq. (6.91) com relação aos graus de liberdade naturais u_j , com j inteiro variando de 1 a 8.

$$k_{c,i,j} = \int_{V_r} (\varepsilon_{x,i} D_f \varepsilon_{x,j} + \sigma_x \varepsilon_{x,ij} + \gamma_{xy,i} D_c \gamma_{xy,j} + \tau_{xy} \gamma_{xy,ij} + \gamma_{xz,i} D_c \gamma_{xz,j} + \tau_{xz} \gamma_{xz,ij}) dV_r \quad (6.98)$$

sendo D_f e D_c os coeficientes de rigidez axial e transversal tangente da fibra analisada, respectivamente, dados por:

$$D_f = d\sigma_x / d\varepsilon_x \quad (6.99)$$

$$D_c = d\tau_{xy} / d\gamma_{xy} = d\tau_{xz} / d\gamma_{xz} \quad (6.100)$$

A partir da Equação (6.98), definem-se $D_{i,j}^f$, $H_{i,j}^f$, $D_{i,j}^c$, $H_{i,j}^c$ como sendo, respectivamente:

$$D_{i,j}^f = \int_{V_r} \varepsilon_{x,i} D_f \varepsilon_{x,j} dV_r \quad (6.101)$$

$$H_{i,j}^f = \int_{V_r} \sigma_x \varepsilon_{x,ij} dV_r \quad (6.102)$$

$$D_{i,j}^c = \int_{V_r} (\gamma_{xy,i} D_c \gamma_{xy,j} + \gamma_{xz,i} D_c \gamma_{xz,j}) dV_r \quad (6.103)$$

$$H_{i,j}^c = \int_{V_r} (\tau_{xy} \gamma_{xy,ij} + \tau_{xz} \gamma_{xz,ij}) dV_r \quad (6.104)$$

Por consequência, a Equação (6.98) pode ser reescrita como:

$$k_{c,i,j} = D_{i,j}^f + H_{i,j}^f + D_{i,j}^c + H_{i,j}^c \quad (6.105)$$

Dado que $\mathbf{D}_{(8 \times 8)} = D_{i,j}^f + D_{i,j}^c$ e $\mathbf{H}_{(8 \times 8)} = H_{i,j}^f + H_{i,j}^c$, a matriz de rigidez tangente simétrica do elemento (8x8) em coordenadas naturais pode ser expressa em notação matricial como:

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{D} + \mathbf{H} \quad (6.106)$$

É importante destacar que o primeiro termo à direita da expressão anterior representa a parcela constitutiva da matriz de rigidez, enquanto o segundo, refere-se a parcela geométrica referente ao efeito P- δ .

Devido à natureza não conservativa das grandes rotações no espaço, a derivação da matriz de rigidez tangente global é complexa pelo método de variação do vetor de forças global, mesmo que a propriedade não aditiva das rotações naturais não seja considerada. Além disso, a matriz de rigidez tangente gerada por esse método não é simétrica. No entanto, ela pode ser simetrizada durante o processo de análise sem comprometer a convergência quadrática, exceto nos casos em que há momentos concentrados (Tang *et al.*, 2019).

De forma simplificada e análoga ao caso 2D, a matriz de rigidez tangente do elemento em coordenadas globais pode ser obtida a partir de uma interpretação física, conforme mostrado por Tang *et al.* (2019). Essa matriz simplificada e simétrica é usada principalmente como um preditor no procedimento incremental-iterativo não linear e, portanto, não afeta a precisão dos resultados da análise, podendo ser expressa por:

$$\mathbf{k}_{gl} = \mathbf{T}[\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{k}_\Delta] \mathbf{T} \quad (6.107)$$

A primeira parte após a igualdade da equação anterior representa a parcela constitutiva, a segunda e a terceira compõem a parcela geométrica, formada pelos efeitos P- δ e P- Δ , respectivamente.

Portanto, a Eq. (6.107) pode ser reescrita como

$$\mathbf{k}_{gl} = \mathbf{T}[\bar{\mathbf{k}}_M + \bar{\mathbf{k}}_G] \mathbf{T} \quad (6.108)$$

Nas próximas seções são apresentadas as matrizes de rigidez constitutiva e geométrica de um elemento prismático, constituído por uma seção duplamente simétrica, em regime elástico e elastoplástico.

6.11.1 Matriz de rigidez tangente constitutiva e geométrica em regime elástico

A matriz de rigidez tangente constitutiva para o regime elástico, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas, pode ser escrita com o auxílio da matriz $\bar{\mathbf{B}}_{(8 \times 14)}$ (Eq. (6.95) e da matriz de rigidez constitutiva em coordenadas corrotacionais $\mathbf{D}_{(8 \times 8)}$, constituída pelos elementos $D_{\alpha,\beta}^f$ e $D_{\alpha,\beta}^c$. Desprezando-se os termos multiplicados por θ_{yA} , θ_{yB} , θ_{zA} e θ_{zB} por serem suficientemente pequenos e considerando-se a deformação média $\bar{\epsilon}_{xm}$, obtém-se a matriz de rigidez constitutiva $\bar{\mathbf{k}}_M^e$.

$$\bar{k}_M^e = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ & & d & 0 & -e & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & -e & 0 & 0 \\ & & & f & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & -f & 0 & 0 & g \\ & & & & h & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & i & 0 & 0 \\ & & & & & j & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ S & & & & & & l & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & m \\ & & & & & & & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & I & & & & & & b & 0 & 0 & 0 & -c & 0 \\ & & & & & & & & & d & 0 & e & 0 & 0 \\ & & & & & M. & & & & & f & 0 & 0 & -g \\ & & & & & & & & & & & h & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & j & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & l \end{bmatrix} \quad (6.109)$$

com

$$a = \frac{EA}{1l}; b = \frac{12EI_z}{2l^2 1l}; c = \frac{6EI_z}{2l 1l}; d = \frac{12EI_y}{2l^2 1l}; e = \frac{6EI_y}{2l 1l}; f = \frac{6GJ}{5 1l} + \frac{12EI_\omega}{1l^3};$$

$$g = \frac{GJ}{10} + \frac{6EI_\omega}{1l^2}; h = \frac{4EI_y}{1l}; i = \frac{2EI_y}{1l}; j = \frac{4EI_z}{1l}; k = \frac{2EI_z}{1l}; l = \frac{2GJ 1l}{15} + \frac{4EI_\omega}{1l};$$

$$m = -\frac{GJ 1l}{30} + \frac{2EI_\omega}{1l}.$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, A é a área da seção transversal, I_y e I_z são os momentos de inércia em torno de y e z , respectivamente, G é o módulo de elasticidade transversal; J é a constante de torção; I_ω é o momento de inércia setorial (constante de empenamento).

Para a consideração da teoria de Saint Venant, basta anular todos os coeficientes das linhas e colunas nas 7ª e 14ª posições e considerar o coeficiente $f = \frac{6J}{1l}$ nas linhas e colunas das 4ª e 11ª posições.

Por sua vez, a matriz de rigidez geométrica $\bar{k}_G^e$, considerando a seção duplamente simétrica, é dada por:

[illegible]

com

$$a = \frac{C_{1m}}{1l}; b = \frac{C_{2m}}{1l}; c = \frac{C_{3m}}{1l}; d = \frac{12C_{6m}}{2l^2 1l}; e = \frac{12C_{5m}}{2l^2 1l}; f = \frac{6C_{5m}}{2l 1l}; g = \frac{6C_{6m}}{2l 1l};$$

$$h = \frac{12C_{4m}}{2l^2 1l}; i = \frac{6C_{4m}}{2l 1l}; j = \frac{12C_{9m}}{1l^3} + \frac{6C_{7m}}{5 1l}; k = \frac{4C_{4m}}{1l}; l = \frac{4C_{5m}}{1l}; m = \frac{2C_{4m}}{1l};$$

$$n = \frac{2C_{5m}}{1l}; o = \frac{4C_{6m}}{1l}; p = \frac{2C_{6m}}{1l}; q = \frac{6C_{8m}}{1l^2} + \frac{C_{7m}}{10}; r = \frac{4C_{8m}}{1l} + \frac{2C_{7m}}{15} 1l;$$

$$s = \frac{2C_{8m}}{1l} - \frac{C_{7m}}{30} 1l.$$

onde os coeficientes de rigidez $C_{\Omega m}$, com Ω inteiro variando de 1 a 8, são obtidos pela média aritmética entre os valores dos coeficientes C_{Ω} calculados para as seções transversais das extremidades do elemento A e B , respectivamente, ou seja, $C_{\Omega m} = (C_{\Omega A} + C_{\Omega B})/2$.

Novamente, para a consideração da teoria de Saint Venant, basta anular todos os coeficientes das linhas e colunas nas 7ª e 14ª posições e considerar o coeficiente $f = \frac{GJ}{1l}$ nas linhas e colunas das 4ª e 11ª posições.

Os coeficientes de rigidez C_{Ω} são expressos matematicamente por

$$C_1 = \int_A D^f dA \quad (6.112)$$

$$C_2 = \int_A D^f z dA \quad (6.113)$$

$$C_3 = \int_A D^f y dA \quad (6.114)$$

$$C_4 = \int_A D^f z^2 dA \quad (6.115)$$

$$C_5 = \int_A D^f yz dA \quad (6.116)$$

$$C_6 = \int_A D^f y^2 dA \quad (6.117)$$

$$C_7 = \int_A D^c \left[(z - z_D)^2 + (y - y_D)^2 + (y - y_D) \frac{\partial \omega}{\partial z} + (z - z_D) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] dA = GJ \quad (6.118)$$

$$C_8 = \int_A D^f \bar{\omega}^2 dA = EI_\omega \quad (6.119)$$

A matriz de rigidez geométrica do elemento no regime elastoplástico é análoga à matriz de rigidez geométrica no regime elástico, com os esforços calculados no regime elastoplástico.

6.12 Relações constitutivas

De acordo com o apresentado anteriormente, adota-se neste estudo a deformação e tensão de engenharia, que formam um par de medidas conjugadas. A deformação de engenharia é dada por:

$$\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{{}^2l}{{}^1l} - 1 \quad (6.120)$$

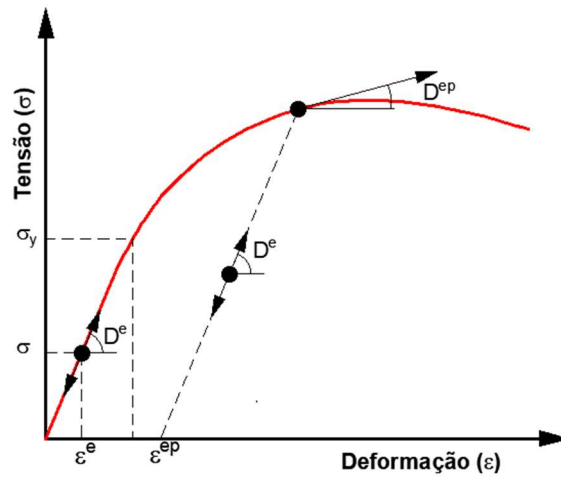
onde 2l e 1l são o comprimento deformado e o de referência da fibra analisada.

Por sua vez, a tensão de engenharia ou tensão nominal pode ser calculada pela expressão:

$$\sigma = \frac{N}{A_r} \quad (6.121)$$

onde N é a força normal que atua sobre uma fibra e A_r é a área da seção transversal da fibra na configuração de referência ou inicial.

As tensões e deformações são relacionadas entre si por uma lei constitutiva, na qual a tensão σ é função da deformação ε , conforme ilustrado na Figura 22.

Figura 22 – Diagrama tensão *versus* deformação do material

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Ao analisar uma barra em regime elastoplástico distinguem-se, conforme ilustrado na Figura 22, duas regiões: uma região elástica, onde a tensão atuante σ é menor que a resistência ao escoamento do material σ_y , e uma região elastoplástica, onde σ é maior que σ_y . A tangente a curva tensão-deformação no ponto que representa o estado atual de uma fatia reflete o módulo de rigidez do material da fibra.

Diz que uma fibra está em regime elástico se existe uma relação que associa cada deformação a uma só tensão. Neste caso, com base na Figura 22, tem-se que no regime elástico:

$$\dot{\sigma} = D^e \dot{\varepsilon} \quad (6.122)$$

e tanto em carga ($\varepsilon \dot{\varepsilon} > 0$), quanto em descarga ($\varepsilon \dot{\varepsilon} < 0$), o módulo de rigidez elástica é dado por:

$$D^e = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (6.123)$$

Verifica-se que esse valor é único e depende apenas de ε . Por outro lado, diz-se que uma fibra está em regime elastoplástico se

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} D^e \varepsilon, & \text{se } \varepsilon \dot{\varepsilon} < 0 \quad (\text{descarga}) \\ D^{ep} \varepsilon, & \text{se } \varepsilon \dot{\varepsilon} > 0 \quad (\text{carga}) \end{cases} \quad (6.124)$$

onde D^{ep} é o módulo de rigidez elastoplástica.

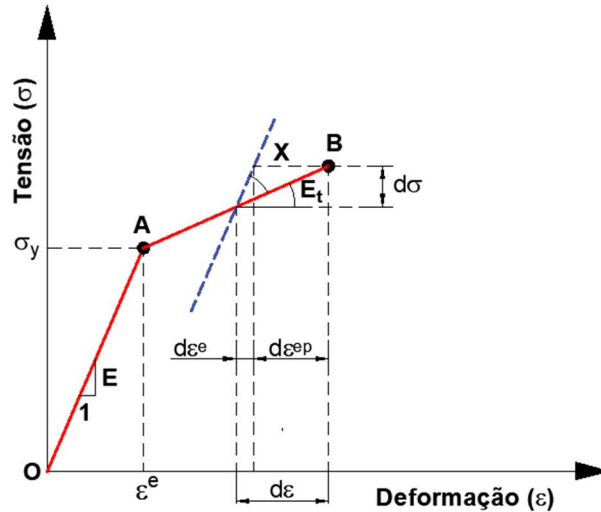
Neste trabalho, para o estudo do comportamento de materiais sujeitos a esforços de cisalhamento, considera-se que existe uma relação linear entre a tensão cisalhante aplicada e a distorção resultante.

6.12.1 Comportamento elastoplástico unidimensional

Nos materiais em regime elastoplástico a deformação longitudinal total é composta por duas parcelas: elástica e plástica. Conforme destacado anteriormente, no regime elastoplástico não existe uma correspondência unívoca entre a tensão normal e a deformação normal e, portanto, é necessário acompanhar o histórico de carregamento.

A Figura 23 idealiza o comportamento elastoplástico por meio de um diagrama bilinear, onde a região AO representa o comportamento elástico, com módulo de elasticidade longitudinal E , e a região AB, um comportamento elastoplástico, com encruamento linear e módulo tangente E_t .

Figura 23 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Considerando um processo incremental de carregamento, um acréscimo de tensão $d\sigma$ pode alterar o comportamento do material, de tal modo que ele passe do regime elástico para o regime plástico. Após o escoamento inicial, o acréscimo de deformação $d\epsilon$ pode ser escrito como:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (6.125)$$

onde $d\epsilon^e$ representa a parcela de deformação elástica e $d\epsilon^p$, a parcela de deformação plástica.

O acréscimo de deformação elástica pode ser obtido por:

$$d\epsilon^e = \frac{d\sigma}{E} \quad (6.126)$$

Por sua vez, o acréscimo de deformação total é determinado pela equação:

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E_t} \quad (6.127)$$

A deformação plástica pode ser determinada a partir do parâmetro de encruamento isotrópico ou módulo plástico H :

$$d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{H} \quad (6.128)$$

Substituindo-se as Eqs. (6.126), (6.127), (6.128) na Eq.(6.125), obtém-se:

$$E_t = \frac{EH}{E + H} \quad (6.129)$$

Pela Eq.(6.129) determina-se o parâmetro H , sendo dado por:

$$H = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}} \quad (6.130)$$

Então, os incrementos de tensões podem ser determinados por:

$$d\sigma = \begin{cases} E d\varepsilon & (fase\ elástica) \\ \frac{EH}{E + H} d\varepsilon & (fase\ plástica) \end{cases} \quad (6.131)$$

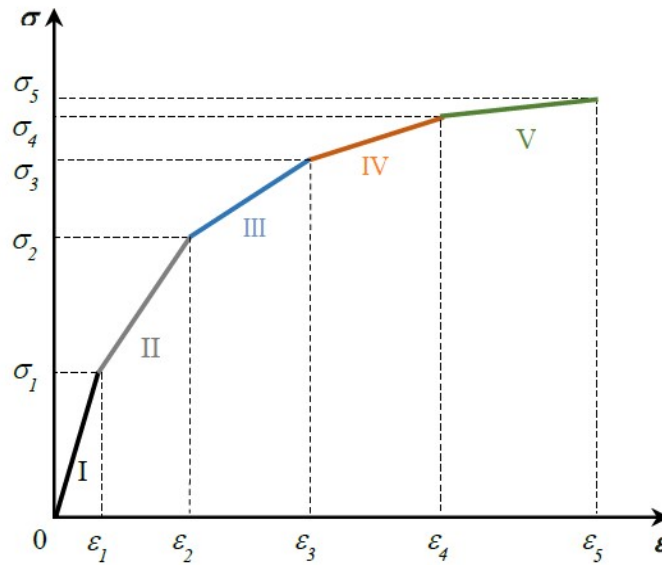
Quando $H = 0$ tem-se que $E_t = 0$ e o comportamento elástico perfeitamente plástico é contemplado.

Assim, considerando a Eq.(6.131) e as Eqs.(6.126) e (6.128), tem-se que os acréscimos de deformações elásticas e plásticas para o comportamento elastoplástico podem ser expressos como:

$$d\varepsilon^e = \left(\frac{E_t}{E} \right) d\varepsilon \quad (6.132)$$

$$d\varepsilon^p = \left(\frac{E}{E + H} \right) d\varepsilon \quad (6.133)$$

A fim de considerar diferentes comportamentos para o material, esse modelo bilinear pode ser estendido para diagramas tensão normal *versus* deformação longitudinal multilineares, conforme apresentado em Araújo (2010). Esse autor propõe um diagrama multilinear composto por cinco trechos lineares, conforme ilustrado na Figura 24. Tal solução é adotada neste trabalho.

Figura 24 – Diagrama *tensão normal x deformação normal* multilinear

Fonte: Adaptado de Costa(2014)

O trecho I corresponde ao comportamento elástico, definido pela Lei de Hooke. Nesse caso, o material apresenta módulo de rigidez E e parâmetro de encruamento nulo. Os demais trechos simulam o comportamento elastoplástico com módulo de rigidez tangente E_{ti} e parâmetro de encruamento H_i , com i inteiro, variando de 1 a 4. O algoritmo que rege a simulação do comportamento elastoplástico durante o processo de carregamento incremental segundo cada intervalo de deformação, levando-se em conta os eventos da descarga e recarga elástica, pode ser verificado no trabalho de Araújo (2010).

6.13 Esforços internos

Neste trabalho, é empregada a técnica das fatias; portanto, os esforços internos (força normal e momentos fletores) são obtidos pela integração das tensões atuantes nas fatias da seção transversal de cada nó. Assim, tem-se:

$$N = \int_{A_r} \sigma dA_r \quad (6.134)$$

$$M_y = \int_{A_r} \sigma z dA_r \quad (6.135)$$

$$M_z = - \int_{A_r} \sigma y dA_r \quad (6.136)$$

É possível simplificar a integração dos esforços ao longo da seção decompondo-a em m pequenas áreas, como será mostrado na próxima seção. Essa aproximação permite que, a partir do monitoramento das tensões e deformações em cada uma dessas áreas, se aproxime a resposta da seção transversal pela soma de suas contribuições.

Para o cálculo do momento de torção e bimomento assume-se um comportamento elástico linear para o material, obtendo-se:

$$M_x = GJ \left[\frac{6}{5} \frac{1}{l} \varphi_x - \frac{1}{10} (\theta'_{xA} + \theta'_{xB}) \right] + EI_\omega \left[\frac{12}{1l^3} \varphi_x - \frac{6}{1l^2} (\theta'_{xA} + \theta'_{xB}) \right] \quad (6.137)$$

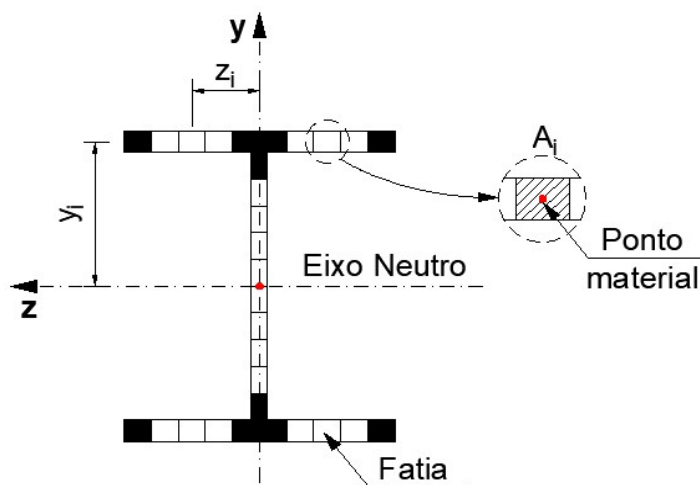
$$B_A = GJ \left[-\frac{1}{10} \varphi_x + \frac{1}{30} (4\theta'_{xA} - \theta'_{xB}) \right] + EI_\omega \left[-\frac{6}{1l^2} \varphi_x + \frac{2}{1l} (2\theta'_{xA} + \theta'_{xB}) \right] \quad (6.138)$$

$$B_B = GJ \left[-\frac{1}{10} \varphi_x - \frac{1}{30} (\theta'_{xA} - 4\theta'_{xB}) \right] + EI_\omega \left[-\frac{6}{1l^2} \varphi_x + \frac{2}{1l} (\theta'_{xA} + 2\theta'_{xB}) \right] \quad (6.139)$$

6.13.1 Decomposição da seção transversal em fatias

Com o objetivo de capturar o desenvolvimento da plasticidade nas barras, decompõe-se a seção transversal do elemento finito em pequenas regiões homogêneas, chamadas fatias, conforme mostrado na Figura 25. Cada região é degenerada a um único ponto, denominado ponto material, no qual se atribui as características representativas de toda a região, tais como: a posição em relação ao centroide da seção transversal (y_i, z_i), a área (A_i) e as variáveis de estado.

Figura 25 – Discretização da seção transversal



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Na Figura 25, as fatias hachuradas são aquelas que sofreram escoamento, enquanto as fatias sem hachura apresentam comportamento elástico. Portanto, o comportamento da seção é obtido pelo somatório do estado de cada uma dessas partes. Com esse procedimento, é possível obter os coeficientes de rigidez e os esforços internos do elemento.

Conforme descrito anteriormente, neste estudo, uma vez que a deformação longitudinal da fatia é obtida, a tensão atuante na fatia é calculada com base na relação tensão normal *versus* deformação longitudinal do material. Caso a tensão no centro de uma determinada fatia alcance a resistência ao escoamento, toda fatia passa ser considerada elastoplástica, enquanto que as fatias submetidas a uma tensão menor que a tensão de escoamento permanecem no regime elástico

6.13.2 Coeficientes de rigidez

Os coeficientes de rigidez C_Ω , sendo Ω de 1 a 8, das seções transversais localizadas nos nós da barra podem ser obtidos, numericamente, pelo somatório ao longo da área da seção transversal, conforme exemplificado pelas expressões a seguir para o comportamento elastoplástico:

$$C_1 = E_t A = \sum_{i=1}^m E_{ti} A_i \quad (6.140)$$

$$C_2 = E_t S_y = \sum_{i=1}^m E_{ti} z_i A_i \quad (6.141)$$

$$C_3 = E_t S_z = \sum_{i=1}^m E_{ti} y_i A_i \quad (6.142)$$

$$C_4 = E_t I_y = \sum_{i=1}^m E_{ti} (A_i z_i^2 + I_{yi}) \quad (6.143)$$

$$C_5 = E_t I_{yz} = \sum_{i=1}^m E_{ti} (A_i y_i z_i + I_{yzi}) \quad (6.144)$$

$$C_6 = E_t I_z = \sum_{i=1}^m E_{ti} (A_i y_i^2 + I_{zi}) \quad (6.145)$$

$$C_7 = G_t J \quad (6.146)$$

$$C_8 = E_t I_\omega \quad (6.147)$$

onde m é o número de fatias na seção transversal monitorada, E_{ti} e G_{ti} são, respectivamente, os módulos de elasticidade tangentes longitudinal e transversal do material da fatia i , I_{yi} e I_{zi} são os momentos de inércia em torno dos eixos y e z que passam pelo centroide da fatia i , respectivamente, e I_{yzi} é o produto de inércia em relação aos eixos y e z que passam pelo centroide da fatia i .

7 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

7.1 Considerações iniciais

A formulação apresentada no capítulo 6 foi implementada no programa *ASTRAS*. Conforme discutido anteriormente, tal metodologia é capaz de considerar os efeitos de segunda ordem, a influência da plasticidade distribuída, das tensões residuais, do empenamento da seção transversal, bem como das imperfeições geométricas iniciais.

Para a solução das equações de equilíbrio não lineares é adotado o Método de Newton-Raphson juntamente com a técnica incremental de controle de carga ou controle de deslocamento generalizado. A convergência do processo incremental iterativo é verificada através do critério dos deslocamentos ou das forças residuais nodais ou adotando-se ambos os critérios.

No programa, as tensões residuais são inseridas como dados de entrada e atribuídas a cada fatia da seção transversal dos elementos, sendo adicionadas automaticamente às tensões normais durante a análise.

Uma visão geral do programa *ASTRAS* e a descrição das sub-rotinas que o constituem são descritas na próxima seção deste capítulo.

7.2 Visão geral do programa *ASTRAS*

Para uma melhor compreensão do desenvolvimento do programa *ASTRAS*, é importante citar os principais trabalhos que lhe deram origem. Pode-se dizer que a base computacional desse programa foi apresentada inicialmente por Lavall (1996), que desenvolveu um programa usando a linguagem *Fortran 90* para a análise de pórticos planos de aço, nomeado PPLANLEP (Pórticos Planos de Aço, considerando a Análise Não Linear Elastoplástica).

A partir do ano de 1998, outros trabalhos de mestrado e doutorado foram realizados utilizando essa base sob a orientação desse pesquisador. Ferreira (1999) adaptou o programa PPLANLEP de modo a considerar a influência das tensões residuais no equilíbrio do elemento. Almeida (2006) implementou a matriz de rigidez tangente (constitutiva e geométrica) para o caso de elementos de pórtico plano com uma extremidade rotulada e outra rígida. Araújo (2010) implementou uma lei constitutiva multilinear, que permitiu a representação de diferentes comportamentos para o aço estrutural. Em seguida, Silva (2010) incluiu a influência das deformações por cisalhamento e flexibilidade das ligações viga-pilar nas sub-rotinas do programa.

Dando continuidade a esses trabalhos, Costa (2014) introduziu um elemento de treliça espacial considerando o efeito da variação uniforme de temperatura. Além disso, foram implementados os elementos de cabos espaciais que levavam em consideração, além dos efeitos da temperatura, a pretensão dos cabos. A fim de viabilizar a análise de torres estaiadas, que surgem da associação das estruturas treliçadas espaciais com os elementos de cabos, foram implementados outros algoritmos nas rotinas existentes. O novo programa obtido foi batizado como **Advanced STRuctural Analysis System (ASTRAS)**, algo necessário pois o nome do programa anterior restringia a aplicação do software a problemas envolvendo pórticos planos. Portanto, o programa *ASTRAS* permite realizar análises estruturais estáticas, considerando a não linearidade do material e a não linearidade geométrica de estruturas como pórticos planos, treliças planas e tridimensionais, cabos planos e tridimensionais e estruturas associadas como torre estaiadas.

Viana (2019) implementou um algoritmo para a análise avançada transiente não linear de pórticos planos de aço. Foram elaboradas sub-rotinas para a montagem da matriz de massa e de amortecimento de elementos de pórtico plano com extremidades rígidas, visando a construção das equações incrementais de movimento. O algoritmo de integração implícita de Newmark, combinado com a técnica de Newton-Raphson, foi adotado para a solução dos problemas transientes não lineares.

Machado (2022) desenvolveu um algoritmo para implementar o modelo de escoamento de von Mises na análise avançada de pórticos planos com seções transversais retangulares ou em perfis I, submetidos à flexão em relação ao eixo de maior inércia.

O programa *ASTRAS* é composto por duas partes: o programa principal e as sub-rotinas. O programa principal estabelece a sequência das sub-rotinas e controla o número de iterações a serem executadas durante as análises, ao passo que as sub-rotinas executam os procedimentos para a análise elastoplástica em teoria de segunda ordem.

Com o objetivo de viabilizar a análise estática não linear de pórticos espaciais no programa *ASTRAS* considerando as teorias de Saint Venant e Vlasov foram realizadas alterações nas sub-rotinas existentes. Uma descrição sucinta de cada sub-rotina empregada na solução dos problemas apresentados neste trabalho é apresentada a seguir.

1. DADOS: Realiza a leitura das informações inseridas pelo usuário em um arquivo texto a fim de obter os parâmetros característicos do problema e atribuir tais valores às variáveis. Portanto, são armazenadas informações relacionadas ao modelo da estrutura a ser analisada, o número total de elementos e nós, os dados relativos à seção transversal, as coordenadas, vinculações e carregamentos nodais, a incidência dos elementos, as tensões residuais em cada fatia da seção transversal, os dados sobre a lei constitutiva adotada e os parâmetros do processo incremental-iterativo.

2. INICIA: Inicializa vetores e matrizes envolvidas no processo de solução.

3. INCAR: Controla o processo incremental do carregamento.

4. ALGOR: Controla o tipo de algoritmo iterativo a ser empregado para a solução do problema (Newton-Raphson Padrão / Newton-Raphson Modificado).

5. MATRIG: Determina a matriz de rigidez tangente do elemento em cada iteração do processo, em regime elástico ou elastoplástico.

6. FATIA: avalia o estado de plastificação da seção transversal, por meio da contribuição de cada fatia no cálculo de propriedades geométricas e nos coeficientes de rigidez.

7. MONRIG: Monta a matriz de rigidez global do sistema por meio da superposição da matriz de rigidez de cada elemento de acordo com a incidência nodal adotada (Método da Rigidez Direta).

8. REDGAS: Executa os procedimentos necessários ao desenvolvimento da fase de eliminação progressiva do Método de Redução de Gauss para a solução do sistema de equações não lineares a cada iteração do processo. Além disso, monitora o sinal do elemento pivot da diagonal principal da matriz de rigidez. Caso o sinal do pivot seja menor ou igual a zero, é verificado o estado de limite último.

9. SUBREG: Realiza a substituição regressiva do sistema de equações triangular superior originado na **sub-rotina REDGAS**. São determinados os deslocamentos nodais e as reações de apoio e é realizada a atualização das coordenadas nodais.

10. DESNAT: Atualiza o sistema de eixos do elemento e determina os deslocamentos naturais (corrotacionais).

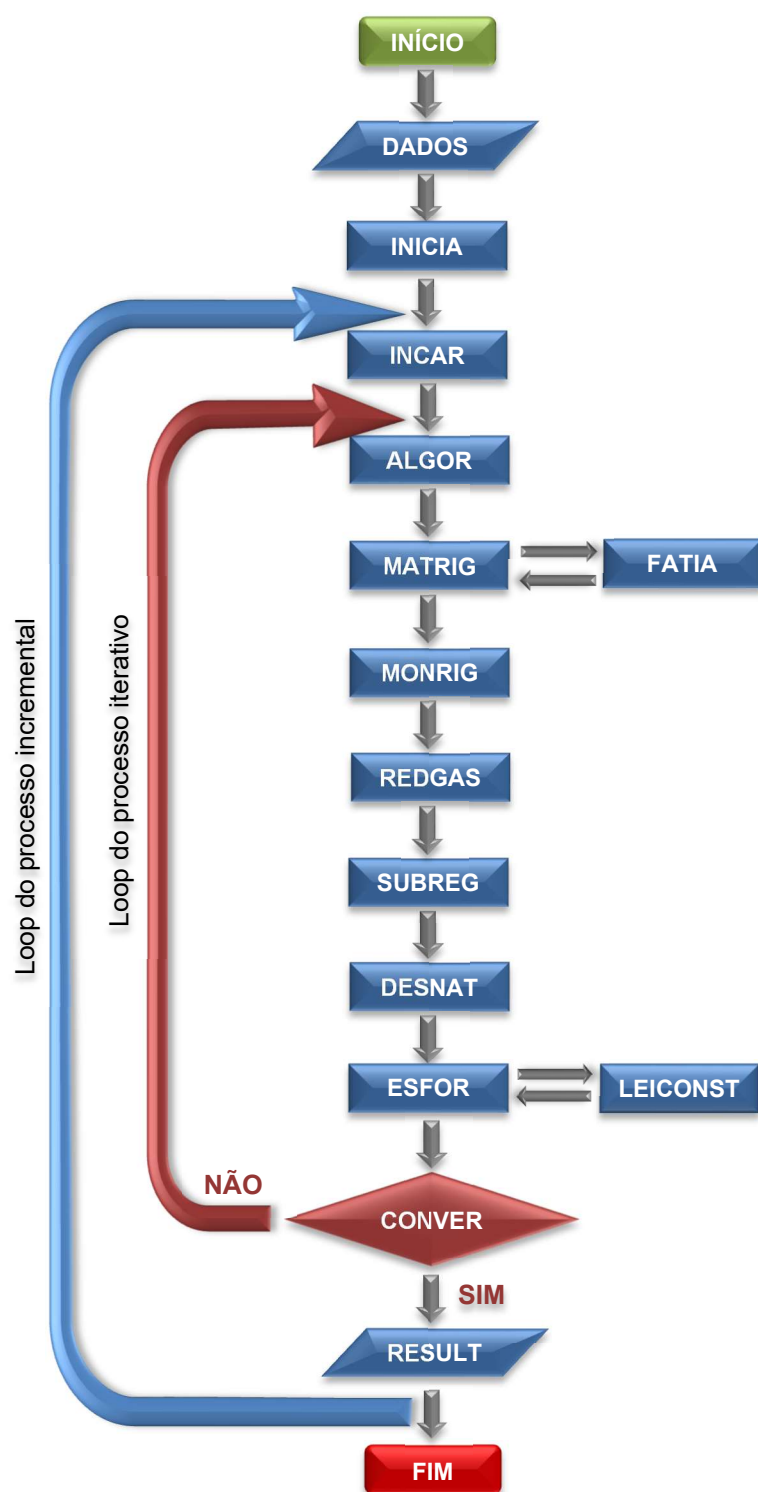
11. ESFOR: Determina as deformações ao longo da seção transversal, e, por meio da lei constitutiva, são determinados os esforços nodais equivalentes. Por fim, calcula-se o vetor de forças residuais, que serão reaplicadas até que a estrutura esteja em equilíbrio.

12. LEICONST: Auxilia a **subrotina ESFOR** percorrendo a lei constitutiva de cada material. Com base na lei constitutiva determina-se o vetor das forças nodais equivalentes internas e calculam-se as deformações.

13. CONVER: Verifica a convergência da solução através do critério dos deslocamentos ou das forças residuais nodais ou ambos os critérios, simultaneamente, conforme descrito na seção 3.4.2.

14. RESULT: Fornece a saída dos resultados, tais como os deslocamentos nodais e as reações de apoio segundo o sistema global de referência, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento, as deformações elásticas, plásticas e totais em cada fatia da seção transversal, bem como as tensões atuantes.

A Figura 26 mostra o fluxograma do procedimento de solução incremental-iterativo do tipo Newton-Raphson e as sub-rotinas envolvidas na análise estática de estruturas.

Figura 26 – Fluxograma do algoritmo de solução incremental-iterativa para análises estáticas

Fonte: Adaptado de Costa (2014)

8 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

8.1 Considerações iniciais

Este capítulo se dedica à apresentação de exemplos visando à análise de simulações numéricas para validar as formulações propostas e as implementações realizadas no ASTRAS para a análise não linear de sistemas estruturais, considerando as teorias de Saint Venant e Vlasov. O cerne desta investigação reside na comparação dos resultados obtidos nas análises estruturais realizadas com o software ASTRAS com aqueles reportados em referências bibliográficas, de modo a verificar a precisão e eficiência da metodologia adotada.

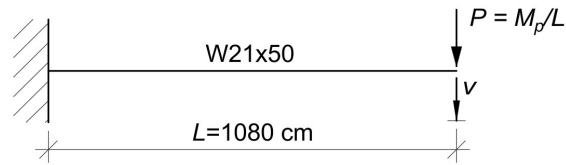
Durante as análises, para a solução das equações não lineares, foi adotado o Método de Newton-Raphson Padrão juntamente como a estratégia incremental-iterativa de Controle de Deslocamentos Generalizados ou o Controle de Carga. A convergência do processo iterativo é verificada a partir de critérios baseados em deslocamentos ou forças, sendo a tolerância especificada em cada problema.

8.2 Exemplos considerando a teoria de Saint-Venant

Os resultados dos exemplos apresentados a seguir se referem aos obtidos pela formulação baseada na teoria de Saint-Venant, sem a consideração da influência do empenamento das seções transversais.

8.2.1 Viga engastada submetida a uma carga concentrada

Este exemplo visa avaliar como a discretização da estrutura afeta os resultados numéricos, considerando o número de elementos finitos e o número de fatias utilizados na análise. Para isso, será considerada uma viga engastada com comprimento $L = 1080$ cm sujeita a um carregamento concentrado vertical na sua extremidade livre $P = M_p/L$, sendo M_p o momento plástico, conforme ilustrado na Figura 27. A estrutura possui seção W21x50 e é composta por aço estrutural com módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa, coeficiente de Poisson igual a 0,3 e resistência ao escoamento de 248 MPa. Considera-se que o material possui comportamento elastoplástico perfeito. Nas análises foi empregado o Método de Controle dos Deslocamentos Generalizados, com um parâmetro de carga inicial igual a 0,1. A verificação da convergência do processo iterativo foi realizada com base no critério de deslocamentos, com uma tolerância de 10^{-5} .

Figura 27 – Viga engastada com carga vertical na extremidade livre

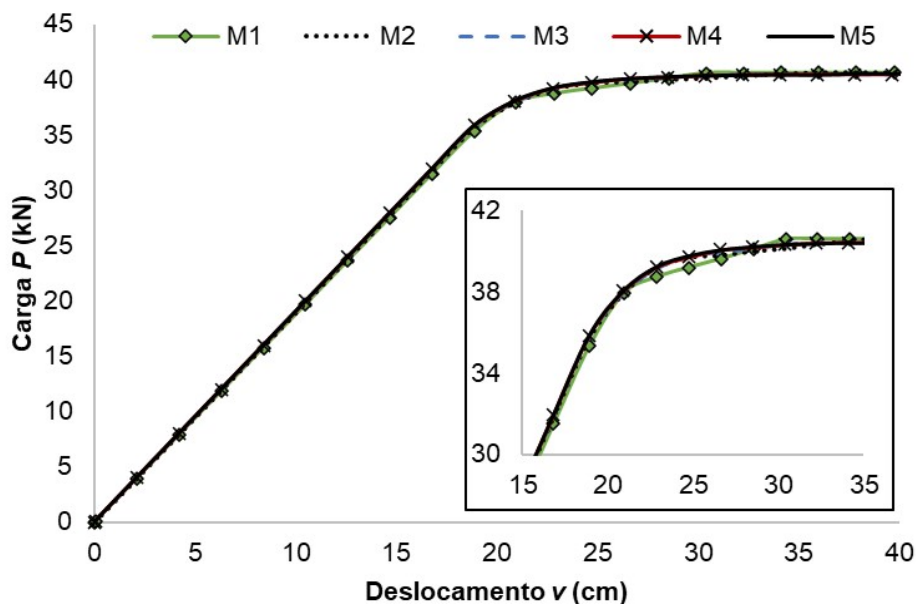
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Com o intuito de avaliar o impacto do número de fatias na discretização da seção transversal nos resultados numéricos, foram utilizados diferentes modelos. A Tabela 2 mostra a quantidade de fatias consideradas em cada modelo estrutural. Para este estudo, foram empregados 10 elementos finitos ao longo do comprimento da viga. Uma parte do arquivo de saída para o modelo M1 é apresentado no Apêndice A.1. A Figura 28 apresenta as trajetórias de equilíbrio para o nó com carga vertical aplicada.

Tabela 2 – Discretização da seção transversal por modelo

Modelo	Número de fatias		Total
	Mesas	Alma	
M1	10	4	24
M2	10	6	26
M3	10	9	29
M4	10	14	34
M5	10	20	40

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

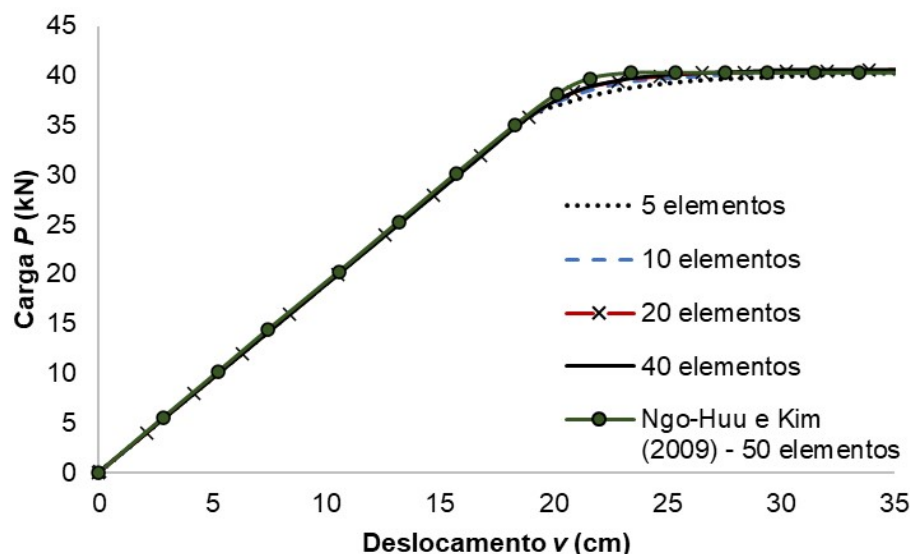
Figura 28 – Influência do número de fatias na resposta estrutural

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Nota-se que o número de fatias tem uma influência mínima sobre a carga máxima suportada pela estrutura, porém, no comportamento carga *versus* deslocamento, essa influência é mais preponderante, especialmente após o início da plastificação da seção transversal. Enquanto a carga máxima depende mais das propriedades globais do material e da geometria, o comportamento carga *versus* deslocamento, especialmente após a plastificação, é influenciado pela maneira como a seção transversal é discretizada e analisada.

Durante a fase elástica, a distribuição de tensões tende a ser uniforme e linear, o que faz com que a influência do número de fatias seja menos perceptível. No entanto, com o início da plastificação, o comportamento do material torna-se não linear, e diferentes regiões da seção transversal passam a exibir regimes distintos de comportamento (elástico e elastoplástico). Nessa fase, uma discretização mais refinada, obtida com um maior número de fatias, permite uma modelagem mais precisa dessas variações. Como resultado, a curva carga *versus* deslocamento se torna mais detalhada e sensível às mudanças no comportamento da estrutura.

Em seguida, foi avaliada a influência do número de elementos finitos adotados ao longo do comprimento total da estrutura nos resultados numéricos. Quatro discretizações distintas para o comprimento total da estrutura são adotadas, sendo 5, 10, 20, 40 elementos finitos. Nesse estudo, a seção transversal foi subdividida em 50 fatias (20 fatias para cada mesa e 10 para a alma). A Figura 29 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento obtidas para a estrutura em questão considerando diferentes quantidades de elementos. Esses resultados são comparados com aqueles reportados por Ngo-Huu e Kim (2009), os quais adotaram 50 elementos finitos e o Método da Rótula Plástica Refinado.

Figura 29 – Influência do número de elementos finitos na resposta estrutural

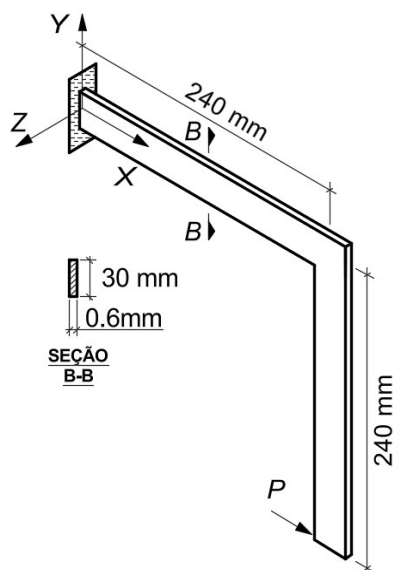
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A partir da Figura 29, é observada uma boa concordância entre os resultados obtidos pela formulação proposta e pelo método empregado por Ngo-Huu e Kim (2009). Verifica-se que o número de elementos finitos possui um efeito muito pequeno na carga máxima prevista da estrutura, ao passo que as curvas carga *versus* deslocamento se tornam ligeiramente distintas após o início do escoamento do material. Essa diferença está relacionada ao método de análise plástica utilizado. O método da rótula plástica pode subestimar a deformabilidade da estrutura, resultando em uma curva carga *versus* deslocamento com menor flexibilidade em comparação com o método da zona plástica, que considera uma distribuição mais contínua e detalhada das deformações.

8.2.2 Pórtico L em balanço no plano XY

O pórtico apresentado na Figura 30 foi inicialmente analisado por Argyris *et al.* (1979) e, desde então, tem sido utilizado por outros autores na validação de formulações não lineares tridimensionais. Essa estrutura está no plano XY e submetida a uma carga concentrada P na direção X na extremidade livre, conforme indicado na Figura 30. O pórtico possui seção transversal retangular de 0,6 mm x 30 mm e é constituído por um material com módulo de elasticidade longitudinal igual a 71240 MPa e coeficiente de Poisson de 0,31.

Figura 30 – Pórtico L em balanço submetido a carga concentrada na direção X



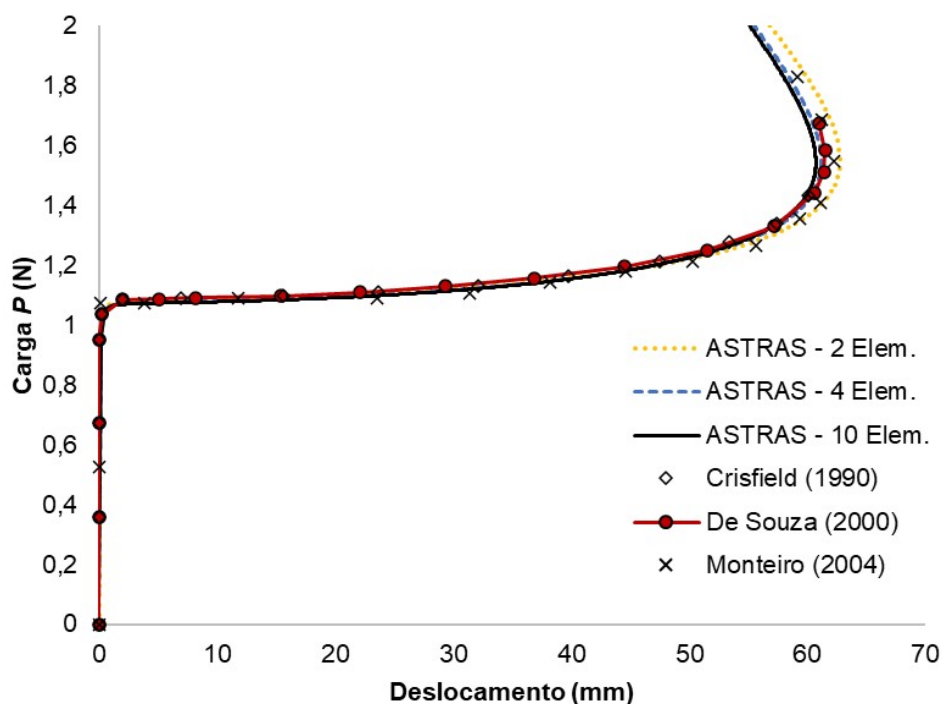
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A estrutura exibe, inicialmente, um comportamento plano até o valor de $P = P_{cr}$. Então, devido a alta esbeltez da seção ($b/h = 1/50$), a estrutura sofre flambagem lateral, resultando em uma resposta tridimensional.

Para induzir a instabilidade da estrutura, é introduzida uma pequena carga perturbadora de 2×10^{-4} N na extremidade livre no sentido do eixo Z positivo, conforme realizado por Crisfield (1990). Na discretização do pórtico, foram adotados 2, 4 e 10 elementos finitos por componente estrutural com uma malha de 8×8 fatias na seção transversal. O Método de Controle dos Deslocamentos Generalizados foi utilizado nas análises considerando um parâmetro de carga inicial de 0,1. Para avaliar a convergência adotou-se o critério de deslocamentos com uma tolerância de 10^{-4} .

A curva carga *versus* deslocamento lateral na direção Z (w) para o nó localizado na extremidade livre é exibida na Figura 31. Os resultados obtidos são comparados com aqueles obtidos por Crisfield (1990), De Souza (2000) e Monteiro (2004).

Figura 31 – Curva carga *versus* deslocamento lateral (w) para o pórtico L

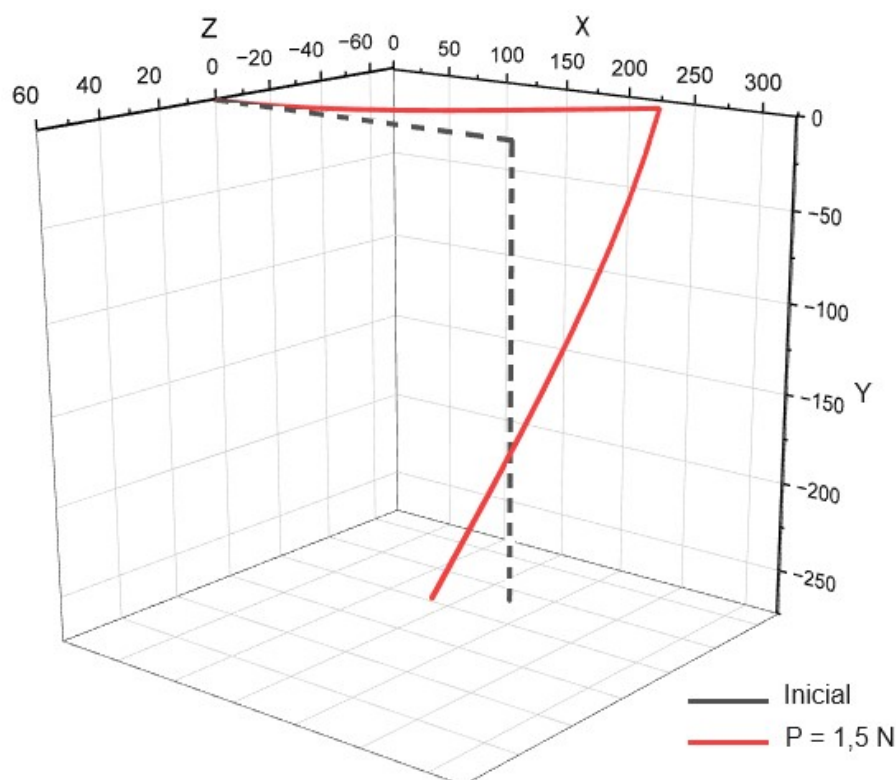


Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Na discretização desta estrutura, De Souza (2000) aplicou 4 elementos por componente estrutural, enquanto Crisfield (1990) e Monteiro (2004) adotaram 5 elementos por componente. Esses autores também aplicaram a técnica corrotacional para a análise não linear em teoria de segunda ordem.

A partir da Figura 31, observa-se uma boa correspondência entre os resultados da formulação proposta e os registrados pelos autores mencionados. Além disso, é notável que a curva obtida com 4 elementos por componente é muito semelhante à curva obtida com 10 elementos.

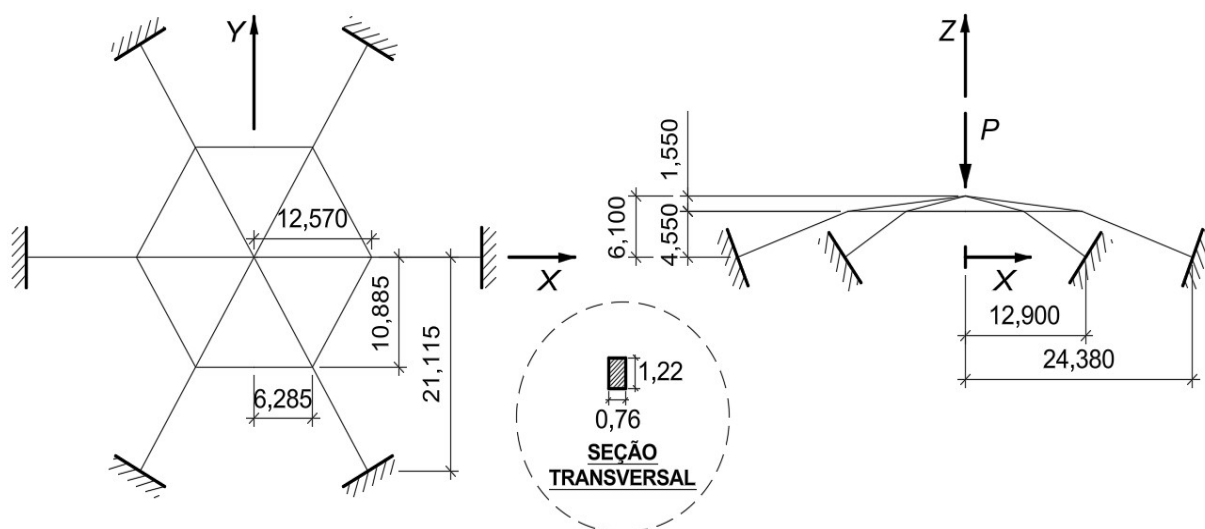
A Figura 32 ilustra a configuração inicial e deformada da estrutura para $P = 1,5$ N.

Figura 32 – Configuração deformada do pórtico L em balanço

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

8.2.3 Domo espacial submetido a carga vertical

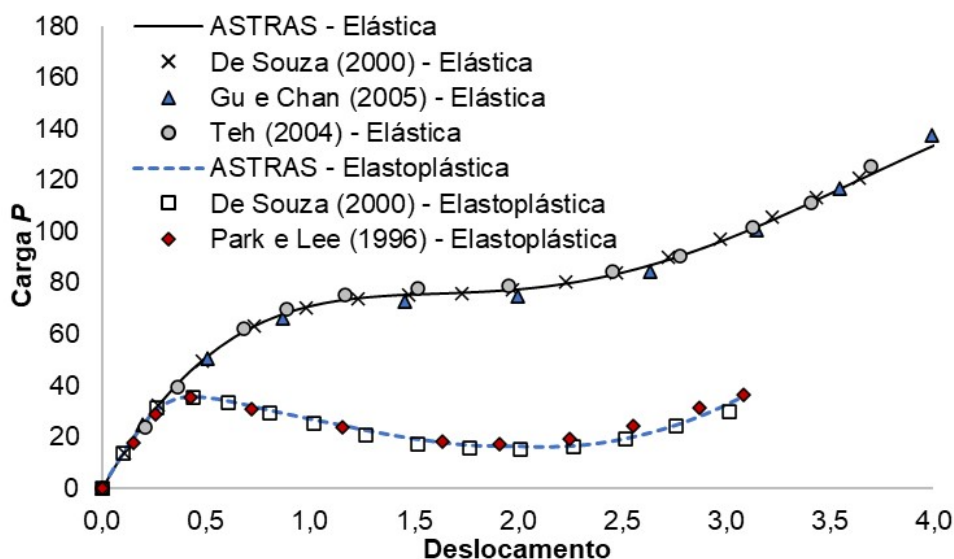
A estrutura ilustrada na Figura 33 tem sido amplamente considerada na verificação de métodos de análise não linear para estruturas tridimensionais (Teh, 2004; Gu e Chan, 2005; Ribeiro, 2022; Titus e Jayachandran, 2022). Trata-se de um domo com base hexagonal com raio de 24,38 unidades (un) e altura de 6,10 un, submetido a uma carga vertical aplicada no nó central superior, no sentido negativo do eixo Z global, com apoios engastados. As seções transversais são retangulares com altura igual a 1,22 un e base igual a 0,76 un.

Figura 33 – Geometria da estrutura em vista superior e em elevação

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A configuração da estrutura foi subdividida em 85 nós e 90 elementos de pórtico espacial (5 elementos por componente estrutural), e a seção transversal foi discretizada em 49 fatias (7 fatias ao longo da altura e da base). Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são, respectivamente, 20690 un e 8830 un. Para a análise elastoplástica em 2ª ordem foi empregado o modelo elastoplástico perfeito considerando a resistência ao escoamento do material (f_y) igual a 80 un. A execução da análise não linear foi conduzida empregando o Método do Controle dos Deslocamentos Generalizados, com um parâmetro de carga inicial estabelecido em 2. A convergência do processo iterativo foi verificada com base no critério de forças com uma tolerância de 10^{-3} .

As trajetórias de equilíbrio, representativas do deslocamento do nó superior na direção do eixo Z para as análises elástica e elastoplástica, estão ilustradas na Figura 34. Tais curvas são comparadas com os resultados obtidos por Teh (2004), Gu e Chan (2005) e De Souza (2000).

Figura 34 – Trajetórias de equilíbrio para o nó do topo

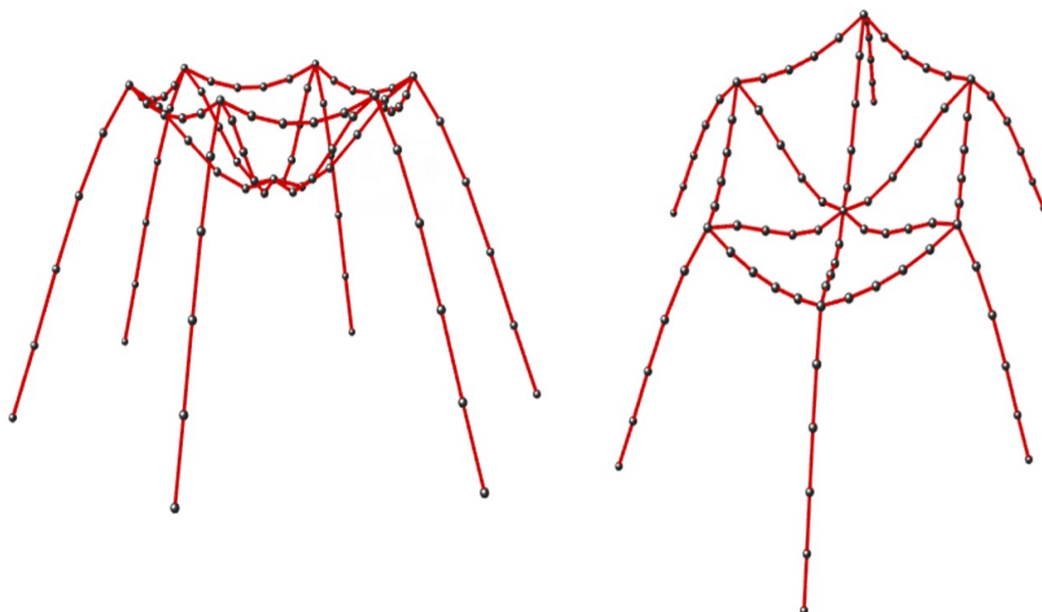
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Avaliando as trajetórias de equilíbrio, verifica-se uma boa concordância entre os resultados da formulação proposta e os reportados por outros autores.

Para esse problema, no que se refere à análise elastoplástica, é importante destacar que De Souza (2000) e Park e Lee (1996) adotaram uma discretização diferente dos componentes e da seção transversal. De Souza (2000) empregou 1 elemento por componente estrutural e aplicou uma formulação baseada no método da flexibilidade, assumindo um estado de tensão uniaxial e um comportamento linear para a torção. Park e Lee (1996) adotaram 8 elementos por componente e uma formulação baseada no método da rigidez.

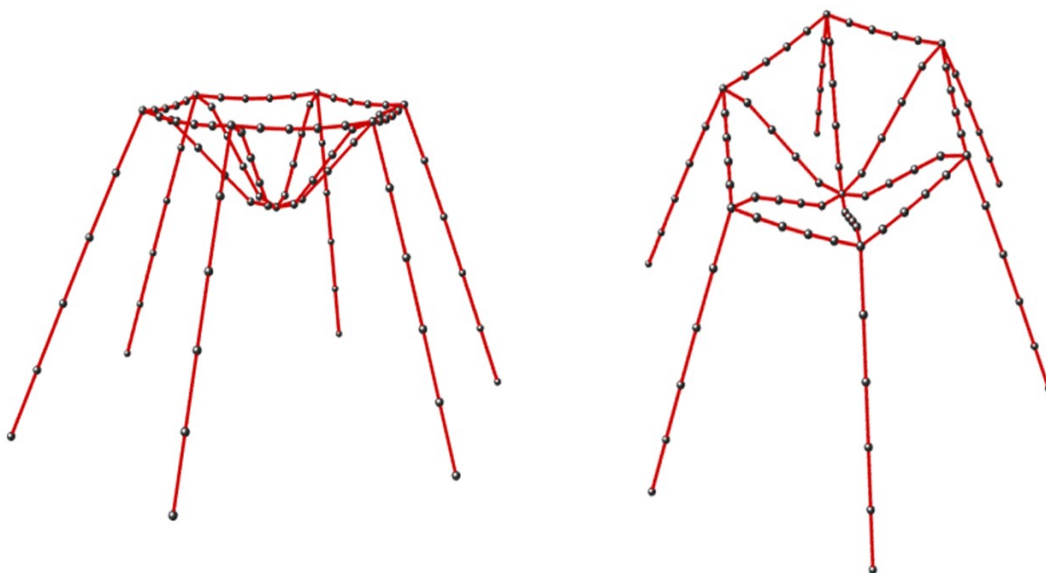
A Figura 35 exhibe a configuração deformada da estrutura obtida por meio da análise elástica para $P = 100$ un. Por sua vez, a Figura 36 apresenta a configuração deformada para $P = 36$ un obtida por meio da análise elastoplástica. Para uma melhor visualização, os deslocamentos nos planos X e Y foram amplificados duas vezes.

Figura 35 – Configuração deformada do domo (análise elástica)



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 36 – Configuração deformada do domo (análise elastoplástica)



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

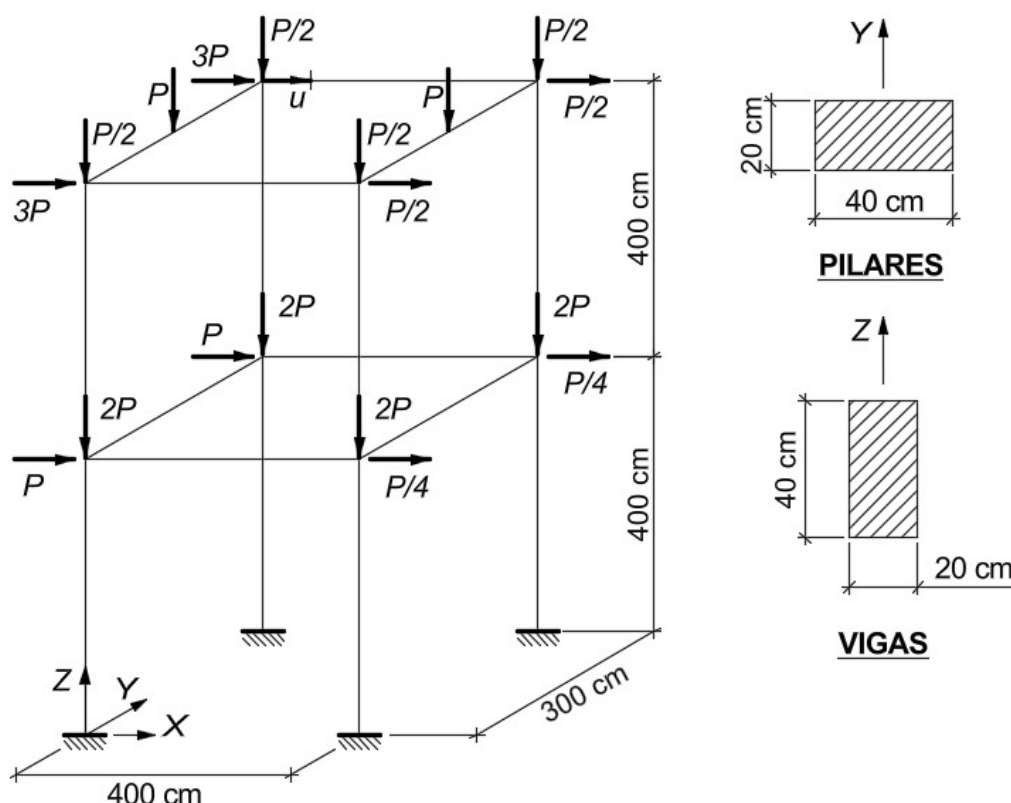
8.2.4 Pórtico tridimensional de dois andares com seções retangulares

O pórtico tridimensional de dois andares com bases engastadas mostrado na Figura 37 foi inicialmente analisado por Argyris (1982). Os componentes estruturais

são compostos por seções retangulares de dimensões 20 cm x 40 cm, cujo material possui comportamento elástico perfeitamente plástico com módulo de elasticidade longitudinal (E) igual a 19613 MPa, resistência ao escoamento (f_y) de 98 MPa e coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,17.

A estrutura foi dividida em 72 elementos finitos (4 elementos por viga e 5 elementos por pilar) e a seção transversal discretizada em 10 fatias ao longo da altura e 6 fatias ao longo da base, totalizando 60 fatias. Como estratégia incremental iterativa adotou-se o Método de Controle de Deslocamentos Generalizados e a convergência foi verificada com base nas forças, com tolerância de 10^{-3} . Imperfeições iniciais não são consideradas. Para analisar essa estrutura, Liu, Liu e Chan (2014a) adotaram o método da rótula plástica refinado.

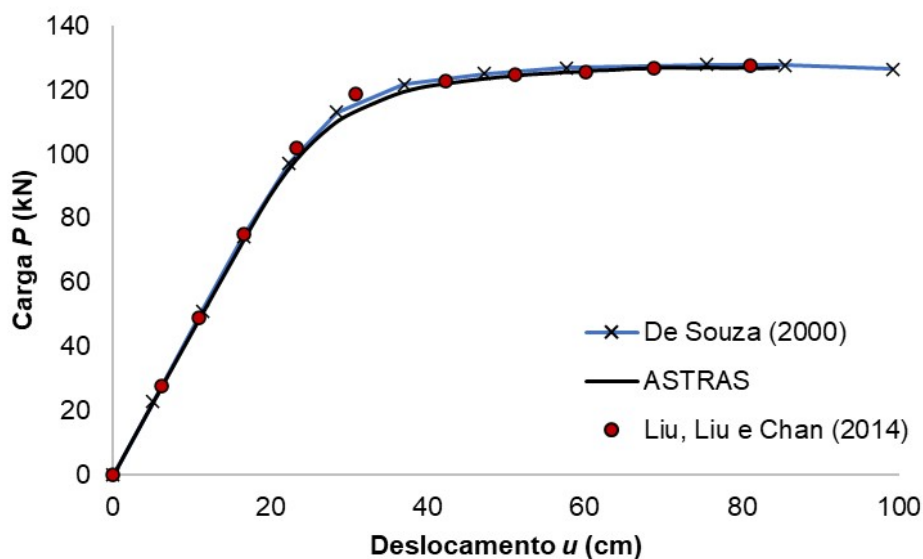
Figura 37 – Pórtico de dois andares com bases engastadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A curva carga aplicada *versus* deslocamento lateral obtida pelo programa ASTRAS foi comparada com os resultados reportados por De Souza (2000) e Liu, Liu e Chan (2014b), conforme ilustrado na Figura 38. Verifica-se novamente uma excelente concordância entre os resultados.

Figura 38 – Curva carga aplicada *versus* deslocamento lateral do pórtico de dois andares com bases engastadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

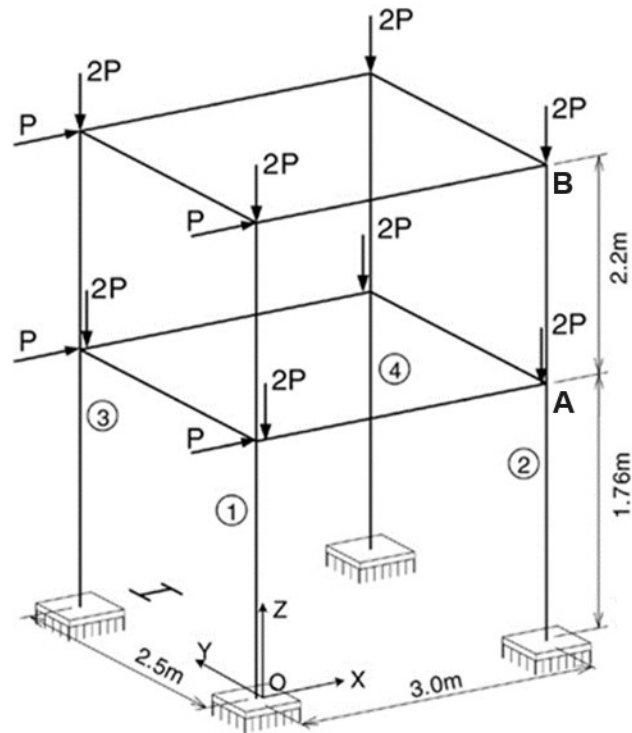
8.2.5 Pórtico espacial de dois andares e um vão com perfis H

A Figura 39 ilustra um pórtico de dois andares e um vão cujas seções dos pilares e vigas são compostas por perfil H160x150x6,5x10. Essa estrutura possui 3,0 m de largura na direção X e 2,5m de comprimento na direção Y . Os pilares do primeiro e segundo pavimentos possuem altura de 1,76m e 2,2m, respectivamente. O material dos elementos estruturais possui limite de escoamento de 320 MPa, módulo de elasticidade longitudinal igual a 221 GPa, módulo de elasticidade transversal de 85 GPa e comportamento elástico perfeitamente plástico. Além disso, imperfeições geométricas iniciais de desalinhamento foram modeladas explicitamente, conforme mostra a Tabela 3. Tendo por base o modelo de distribuição de tensões residuais proposto pela ECCS (1984) para perfis laminados, são aplicadas tensões residuais distribuídas linearmente nas mesas e alma do perfil, com tensão máxima igual a 50% da resistência ao escoamento do material. O carregamento vertical e horizontal concentrado aplicado é também mostrado na Figura 39.

A estrutura foi subdividida em 72 elementos finitos, utilizando 4 elementos para as vigas e 5 elementos para os pilares. A seção transversal foi dividida em 50 fatias, sendo 10 fatias para a alma e 20 fatias para cada mesa. O Método de Controle de

Deslocamentos Generalizados foi adotado como estratégia incremental iterativa, e a convergência foi avaliada com base nas forças, com uma tolerância de 10^{-3} .

Figura 39 – Pórtico espacial de dois andares e um vão com perfis H



Fonte: Adaptado de Ngo-Huu, Kim e Oh (2007)

Tabela 3 – Imperfeição de desalinhamento do pórtico espacial de dois andares com seção H

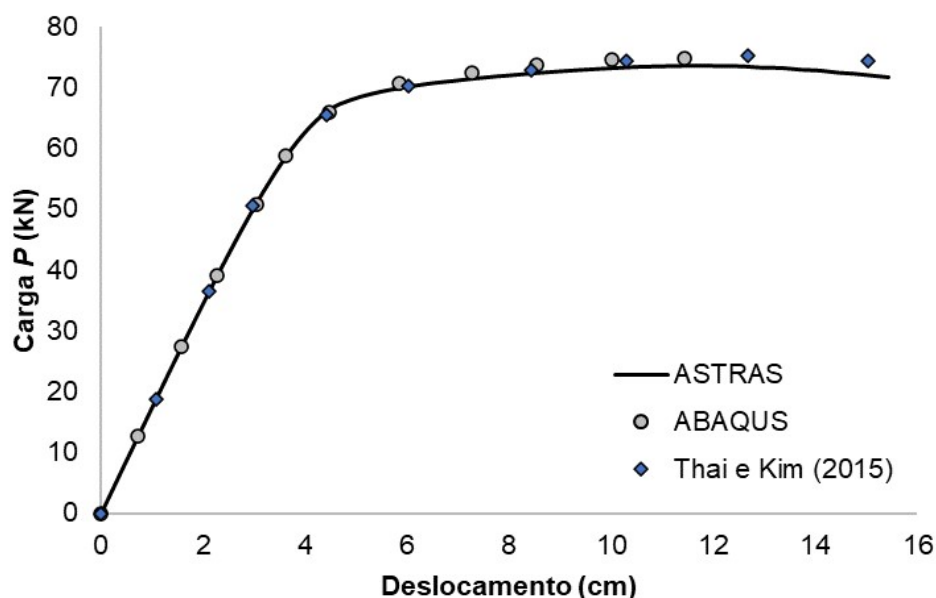
Nível	Imperfeição (mm)							
	Pilar 1		Pilar 2		Pilar 3		Pilar 4	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
Cobertura	4,51	11,08	5,49	11,41	-8,17	6,58	-4,31	12,04
2º andar	1,39	6,88	-0,68	6,77	-5,11	2,11	-3,96	6,19
Base	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

As Figuras 40 e 41, mostram, respectivamente, a curva carga aplicada *versus* deslocamento lateral para o nó A do topo do primeiro pavimento e para o nó B da cobertura. Os resultados obtidos por Thai e Kim (2015) e pelo software ABAQUS (Ngo-Huu e Kim, 2009) também são plotados nos gráficos. Na modelagem do pórtico, Thai e Kim (2015) empregaram o modelo de fatias que considera a propagação do escoamento do material. Neste exemplo, os autores utilizaram um único elemento com cinco pontos de integração ao longo do comprimento e 80 fatias em cada seção,

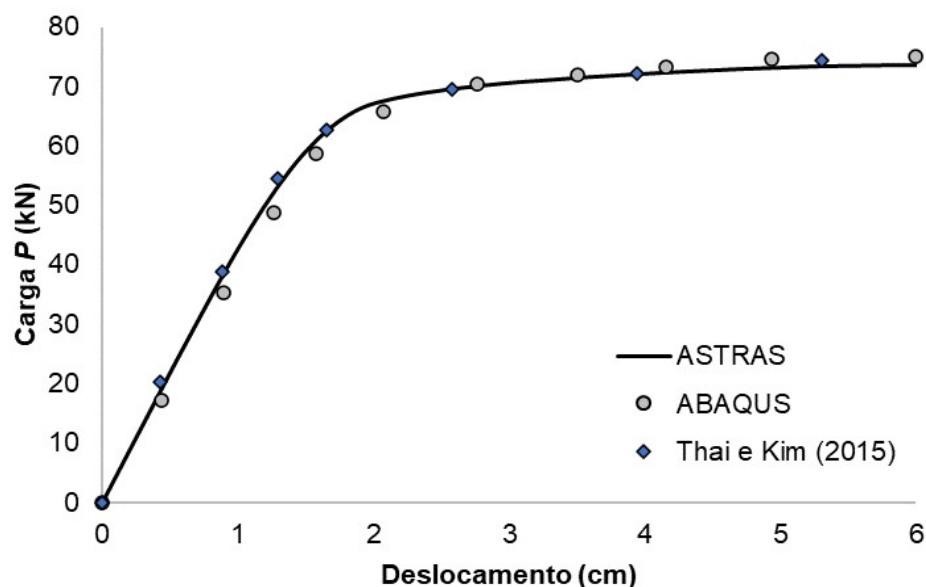
sendo 20 em cada mesa e 40 na alma. Na modelagem da estrutura por meio do software ABAQUS, Ngo-Huu e Kim (2009) utilizaram o elemento de casca S4R.

Figura 40 – Curva carga aplicada *versus* deslocamento lateral para o nó A do topo do primeiro pavimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 41 – Curva carga aplicada *versus* deslocamento lateral para o nó B da cobertura



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observa-se que os resultados obtidos pela formulação proposta são praticamente idênticos aos reportados por Thai e Kim (2015) e aqueles obtidos por Ngo-Huu e Kim

(2009) por meio do software ABAQUS. No entanto, uma pequena diferença é notada nas cargas máximas obtidas por cada método. É compreensível que a carga máxima calculada pelo ABAQUS seja superior à obtida pelo modelo de elementos viga-coluna, uma vez que a simulação detalhada das restrições de base e ligações utilizando elementos de casca pode aumentar a resistência do modelo estrutural, em comparação com aquele modelado por elementos viga-coluna.

8.3 Exemplos considerando a teoria de Vlasov

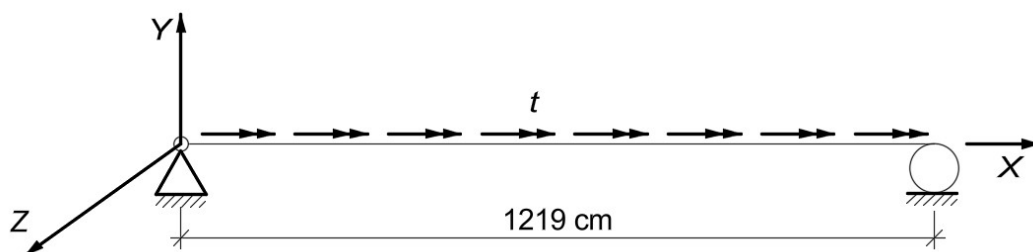
A seguir, são apresentados os resultados dos exemplos numéricos obtidos pela formulação considerando a teoria de Vlasov. Os exemplos mostram como a consideração do empenamento influencia a resposta estrutural, abrangendo diversos cenários de carga e condições de contorno. Essa seção tem como objetivo avaliar a precisão da formulação implementada, além de ilustrar a aplicabilidade e a importância da teoria de Vlasov na resolução de problemas de engenharia estrutural.

8.3.1 Viga com momento torçor distribuído

Este exemplo tem como objetivo avaliar o efeito da consideração do empenamento da seção transversal na análise e o impacto da sua restrição ou liberação na seção transversal nos apoios. Para isso, uma viga submetida a um momento torçor uniformemente distribuído ao longo do vão é analisada, conforme ilustrado na Figura 42.

A estrutura analisada é constituída por perfil W36x230 cujo material possui módulos de elasticidade longitudinal e transversal iguais a 200 GPa e 77,2 GPa, respectivamente. O comprimento da viga, L , é igual a 1219 cm e o momento torçor distribuído aplicado, t , é igual a 1,88 kN.cm/cm. A viga foi discretizada em 10 elementos finitos e a seção transversal em 40 fatias, sendo 16 fatias nas mesas e 8 fatias na alma. O momento torçor distribuído foi convertido em nove momentos de torção concentrados nos nós intermediários, cada um com magnitude de 229,2 kN.cm, e dois momentos de torção concentrados nos apoios, cada um com magnitude de 114,5 kN.cm.

Figura 42 – Viga submetida a momento torçor uniformemente distribuído



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Murray (1986, *apud* Grigoletti, 1999) fornece a solução analítica para esse problema, levando em conta tanto a restrição quanto a liberação do empenamento da seção transversal nos apoios.

a) Caso 1: Empenamento livre nos apoios ($x = 0$ e $x = L \rightarrow \theta_x = B = 0$ e $\theta'_x \neq 0$)

$$\theta_x = \frac{t}{\lambda^2 GJ} \left\{ \frac{\lambda^2}{2} (Lx - x^2) - 1 + \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh[\lambda(L - x)]}{\sinh(\lambda L)} \right\} \quad (8.1)$$

$$B = \frac{t}{\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{\sinh(\lambda x) + \sinh[\lambda(L - x)]}{\sinh(\lambda L)} \right\} \quad (8.2)$$

$$T_w = -\frac{t}{\lambda} \left\{ \frac{\cosh(\lambda x) + \cosh[\lambda(L - x)]}{\sinh(\lambda L)} \right\} \quad (8.3)$$

$$T_{sv} = \frac{t}{\lambda} \left\{ \lambda \left(\frac{L}{2} - x \right) + \frac{\cosh(\lambda x) + \cosh[\lambda(L - x)]}{\sinh(\lambda L)} \right\} \quad (8.4)$$

$$M_x = T_w + T_{sv} = t \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (8.5)$$

sendo T_w a torção de empenamento, T_{sv} a torção de Saint Venant e λ o inverso do comprimento de comparação (r), dado por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \quad (8.6)$$

b) Caso 2: Empenamento restringido nos apoios ($x = 0$ e $x = L \rightarrow \theta_x = 0$ e $\theta'_x = 0$)

$$\theta_x = \frac{t}{2 \lambda^2 GJ} \left\{ \lambda^2 (Lx - x^2) - \lambda L \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda L \sinh(\lambda L) (1 - \cosh(\lambda x))}{1 - \cosh(\lambda L)} \right\} \quad (8.7)$$

$$B = \frac{t}{\lambda^2} \left\{ \frac{\lambda L}{2} \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda L \sinh(\lambda L) \cosh(\lambda x)}{2[1 - \cosh(\lambda L)]} + 1 \right\} \quad (8.8)$$

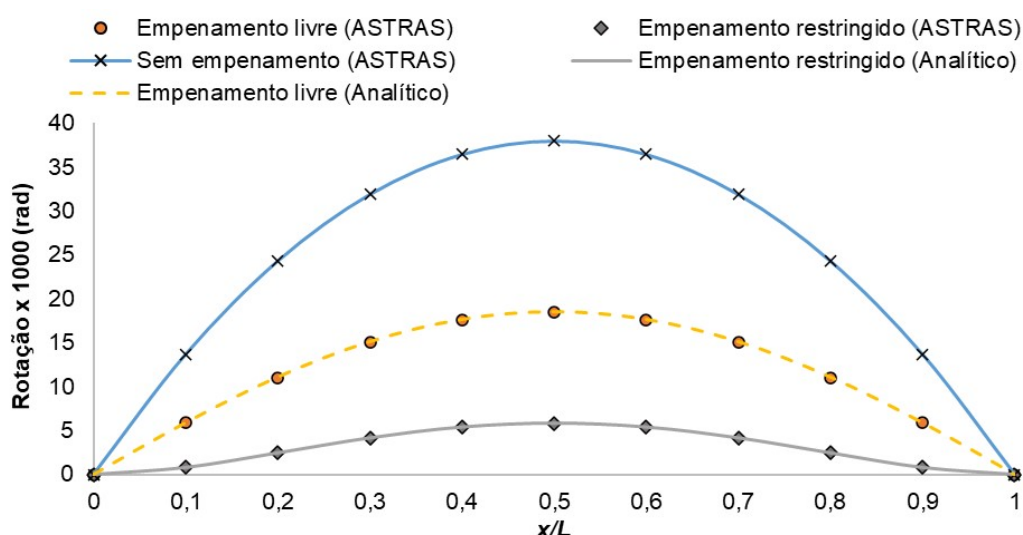
$$T_w = \frac{tL}{2} \left\{ \cosh(\lambda x) + \frac{\sinh(\lambda L) \sinh(\lambda x)}{1 - \cosh(\lambda L)} \right\} \quad (8.9)$$

$$T_{sv} = t \left\{ \frac{L}{2} - x - \frac{L}{2} \cosh(\lambda x) - \frac{L \sinh(\lambda L) \sinh(\lambda x)}{2[1 - \cosh(\lambda L)]} \right\} \quad (8.10)$$

$$M_x = T_w + T_{sv} = t \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (8.11)$$

A Figura 43 apresenta as soluções para o ângulo de torção ao longo da viga nos cenários previamente mencionados (casos 1 e 2) e sem a consideração do empenamento.

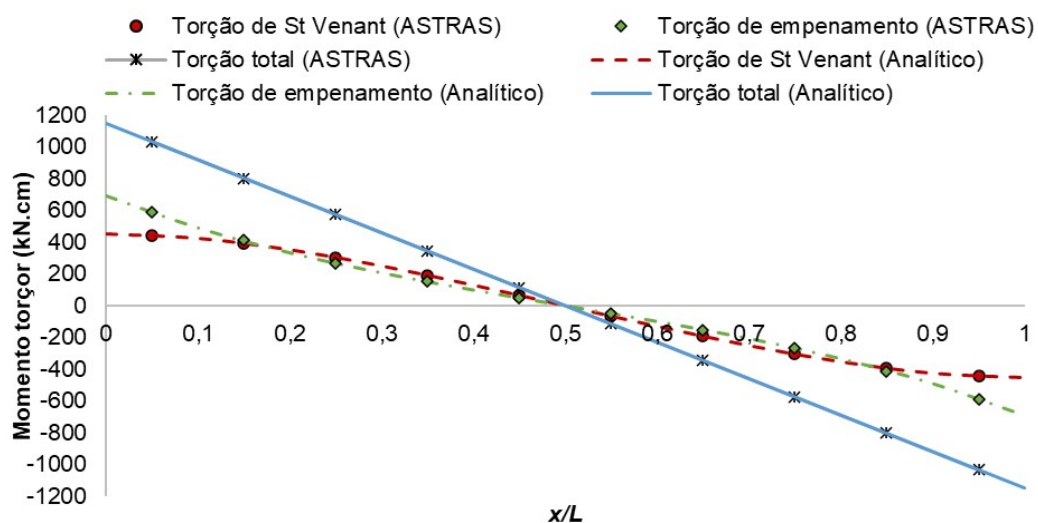
Figura 43 – Variação do ângulo de torção (θ_x) ao longo do vão da viga



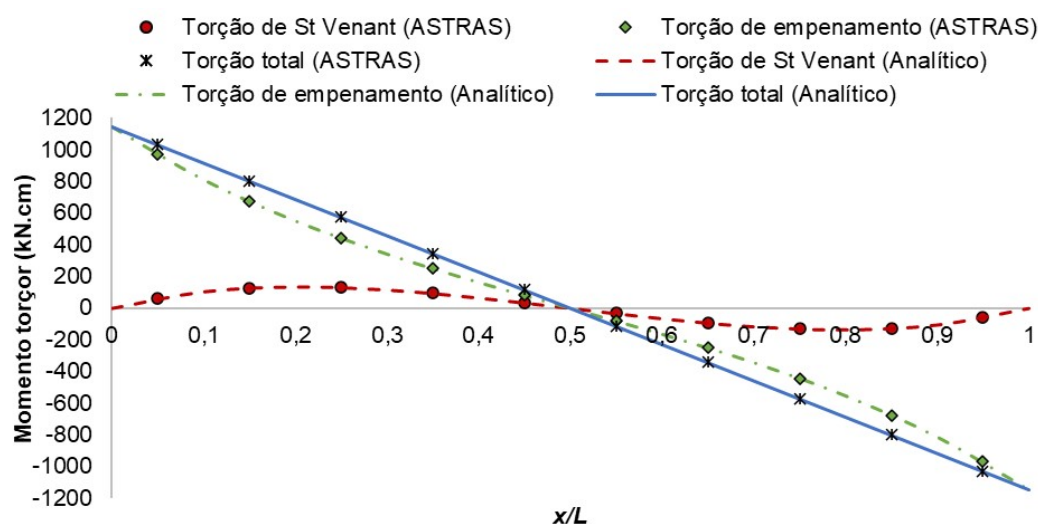
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A partir da Figura 43, verifica-se que os resultados do programa concordam com as soluções analíticas. Além disso, pode-se observar que, ao restringir o empenamento nos apoios, altera-se consideravelmente a distribuição de esforços ao longo do comprimento da viga, conferindo maior rigidez à estrutura.

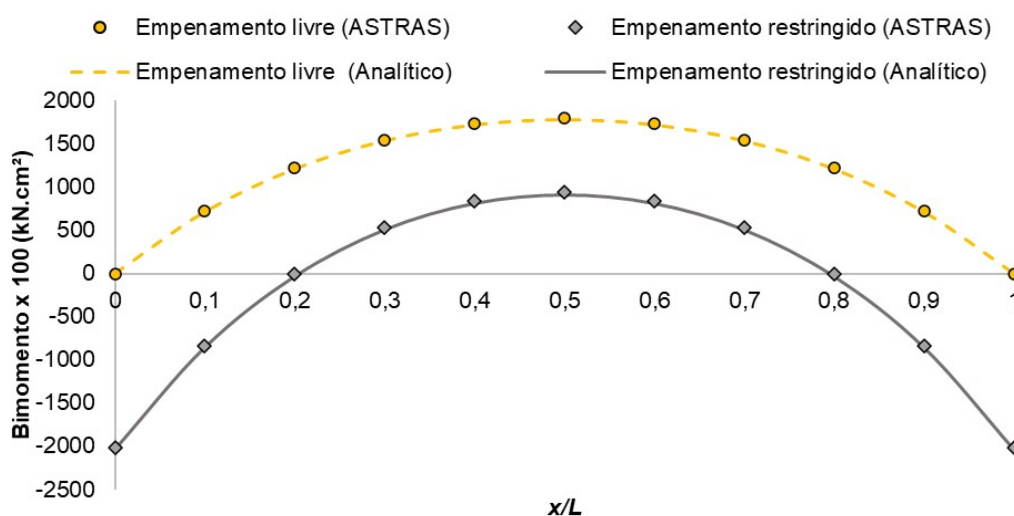
As Figuras 44 e 45 apresentam os resultados obtidos para o momento torçor ao longo da viga, considerando o empenamento livre e restringido nos apoios, respectivamente. Uma vez que é assumida a hipótese de torção constante no interior do elemento, os resultados de torção são considerados no centro dos elementos. Por sua vez, a Figura 46 apresenta os resultados para o bimomento.

Figura 44 – Variação do momento torçor considerando empenamento livre nos apoios

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 45 – Variação do momento torçor considerando empenamento restringido nos apoios

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 46 – Variação do bimomento ao longo do vão da viga

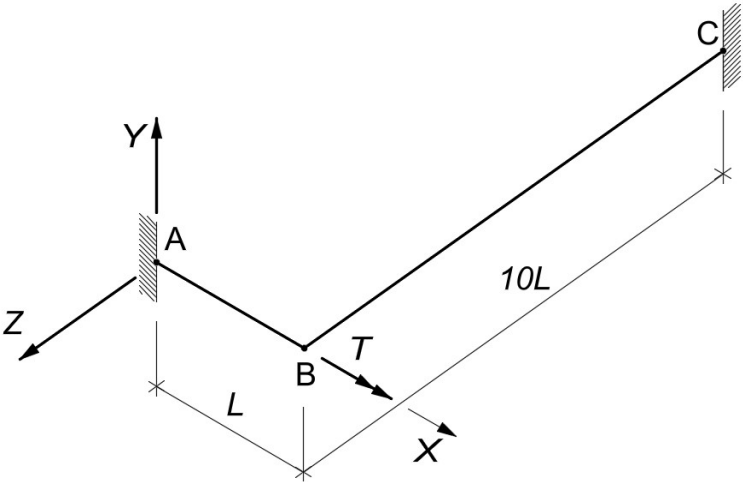
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A partir da observação das Figuras 44 a 46, verifica-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos pelo programa e os resultados analíticos.

8.3.2 Grelha submetida a um momento torçor concentrado

Neste exemplo, é realizada uma análise da grelha indicada na Figura 47, com o objetivo principal de avaliar o efeito da restrição ao empenamento da seção transversal. A estrutura é constituída por perfil W36x230, cujo material possui módulos de elasticidade longitudinal e transversal iguais a 206,7 GPa e 82,7 GPa, respectivamente. O momento torçor T , aplicado no nó B, é igual a 1130 kN.cm e $L = 152,4$ cm. Na análise da estrutura, foram adotadas duas discretizações distintas: uma com 8 elementos finitos (EF) por componente estrutural e outra com 1 elemento por componente estrutural. Em ambas as abordagens, a seção transversal foi dividida em 40 fatias, sendo 16 fatias para cada mesa e 8 fatias para a alma. Foi adotado um incremento de carga constante de $0,01T$, com o critério de convergência baseado em forças e uma tolerância de 10^{-6} .

Figura 47 – Grelha submetida a um momento torçor concentrado



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Nas Tabelas 4 e 5 são apresentados os resultados obtidos pelo programa desenvolvido para momento de torção, momento fletor e bimomento considerando 8 EF's e 1 EF por componente estrutural, respectivamente, e as seguintes situações: 1 – Nós A, B e C restringidos ao empenamento; 2 – Nós A e C restringidos ao empenamento; e 3 – Empenamento livre. Tais resultados são comparados com as respostas obtidas por Conci (1988).

Tabela 4 – Valores obtidos para momento de torção, momento fletor e bimomento (8 EF's)

Situação	Nó	$M_x/T \times 10^2$			$M_z/T \times 10^2$			$B/(TL) \times 10^3$		
		ASTRAS	Ref.	Dif. %	ASTRAS	Ref.	Dif. %	ASTRAS	Ref.	Dif. %
1	A	13,916	13,745	1,24	12,899	12,924	-0,19	68,745	67,928	1,20
	BA ¹	13,916	13,745	1,24	0,001	0,001	0,00	68,745	67,928	1,20
	BC ²	0,001	0,001	0,00	86,084	86,255	-0,20	0,025	0,025	0,00
	C	0,001	0,001	0,00	42,913	42,998	-0,20	0,025	0,025	0,00
2	A	5,388	5,355	0,61	14,056	14,062	-0,04	42,692	42,263	1,01
	BA	5,388	5,355	0,61	0,122	0,121	0,66	9,352	9,537	-1,94
	BC	0,122	0,121	0,66	94,612	94,645	-0,03	9,352	9,537	-1,94
	C	0,122	0,121	0,66	47,166	47,183	-0,04	2,775	2,500	10,99
3	A	0,776	0,788	-1,52	14,810	14,806	0,03	0,000	0,000	0,00
	BA	0,776	0,788	-1,52	0,059	0,061	-3,40	5,835	6,048	-3,52
	BC	0,059	0,061	-3,40	99,224	94,645	4,84	5,835	6,048	-3,52
	C	0,059	0,061	-3,40	49,464	47,183	4,83	0,000	0,000	0,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

¹ BA: Representa a direção do nó B em relação ao nó A

² BC: Representa a direção do nó B em relação ao nó C

Tabela 5 – Valores obtidos para momento de torção, momento fletor e bimomento (1 EF)

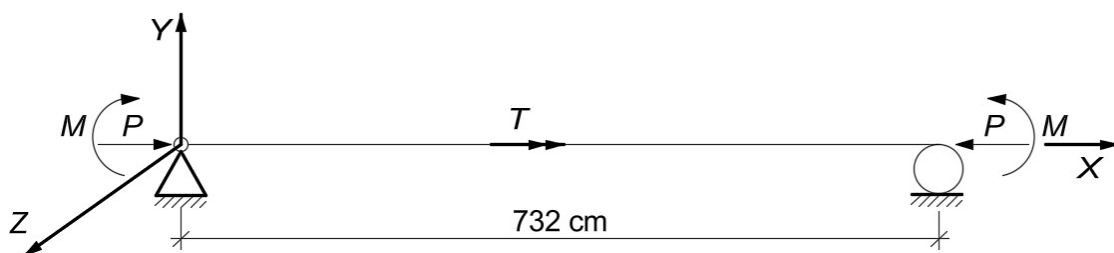
Situação	Nó	$M_x/T \times 10^2$		Dif. %	$M_z/T \times 10^2$		Dif. %	$B/(TL) \times 10^3$		Dif. %
		ASTRAS	Ref.		ASTRAS	Ref.		ASTRAS	Ref.	
1	A	13,916	13,745	1,24	12,899	12,924	-0,19	68,745	67,928	1,20
	BA	13,916	13,745	1,24	0,001	0,001	0,00	68,745	67,928	1,20
	BC	0,001	0,001	0,00	86,084	86,255	-0,20	0,025	0,025	0,00
	C	0,001	0,001	0,00	42,913	42,998	-0,20	0,025	0,025	0,00
2	A	5,446	5,355	1,70	14,046	14,062	-0,11	42,870	42,263	1,44
	BA	5,446	5,355	1,70	0,123	0,121	1,76	9,757	9,537	2,30
	BC	0,123	0,121	1,76	94,554	94,645	-0,10	9,757	9,537	2,30
	C	0,123	0,121	1,76	47,137	47,183	-0,10	2,502	2,500	0,10
3	A	0,813	0,788	3,19	14,801	14,806	-0,04	0,000	0,000	0,00
	BA	0,813	0,788	3,19	0,063	0,061	2,70	6,208	6,048	2,64
	BC	0,063	0,061	2,70	99,187	94,645	4,80	6,208	6,048	2,64
	C	0,063	0,061	2,70	49,45	47,183	4,80	0,00	0,000	0,00

Com base na Tabela 4, pode-se concluir que a maioria dos resultados obtidos para momento de torção, momento fletor e bimomento apresentam uma boa correlação com os valores encontrados por Conci (1988), com diferenças de até 3,40%, 4,84% e 10,99% para esses esforços, respectivamente. Considerando apenas 1 EF por membro estrutural, as diferenças são de até 3,19%, 4,80% e 2,64% para esses esforços, respectivamente. Além disso, constata-se que o efeito da restrição ou da liberação ao empenamento não é desprezível em nenhum dos esforços analisados. A restrição ao empenamento introduz bimomentos significativos no menor vão da estrutura.

A partir dos dados apresentados na Tabelas 4 e 5, é possível inferir que a diferença nos resultados pode ser atribuída ao uso de diferentes formulações e discretizações na análise da estrutura. Destaca-se que Conci (1988) não informa o número de elementos finitos utilizados na análise.

8.3.3 Viga-pilar submetida à flexo-torção

A viga de aço solicitada a flexo-compressão ilustrada na Figura 48 possui um vão L igual a 732 cm e é composta por perfil W24x76. Essa estrutura está submetida a força normal de compressão P , cuja excentricidade $e_y = 38,1 \text{ cm}$ produz um momento fletor $M_z = P \cdot e_y$. O material da estrutura possui módulos de elasticidade longitudinal e transversal iguais a 200 GPa e 77,2 GPa, respectivamente.

Figura 48 – Viga-pilar submetida à flexo-torção

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Para a análise elástica geometricamente não linear, são adotados 10 elementos finitos ao longo do comprimento da estrutura e 50 fatias na seção transversal, sendo 20 fatias para as mesas e 10 fatias para a alma. O Método de Controle de Deslocamentos Generalizados foi adotado como estratégia incremental iterativa, e a convergência foi verificada com base nas forças, com uma tolerância de 10^{-6} .

Inicialmente, aplica-se um momento torçor $T = \alpha P$ no meio do vão, com $\alpha = 0,05$. O valor do parâmetro α foi escolhido com base no trabalho de Yang (1984), que comparou os resultados obtidos para carga crítica com α variando de 0,05 a 0,15. O autor concluiu que ao adotar o parâmetro $\alpha = 0,05$, obtém-se o resultado mais próximo da solução analítica considerando o empenamento livre, dada pela expressão (Timoshenko e Gere, 2012):

$$(P - P_{cy})(P - P_{ct}) = P^2 \frac{Ae_y^2}{I_p} \quad (8.12)$$

onde

P_{cy} : a carga crítica de flambagem em relação ao eixo y;

P_{ct} : a carga crítica de flambagem torcional;

A : a área do perfil; e

I_p : o momento de inércia polar em relação ao centro de torção.

Para esse exemplo, a carga crítica de flambagem em relação ao eixo y pode ser obtida por:

$$P_{cy} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (8.13)$$

em que, I_y é o momento de inércia em relação ao eixo y.

Em contrapartida, a carga crítica de flambagem por torção considerando empenamento livre nas extremidades é obtida por:

$$P_{ct} = \frac{A}{I_y + I_z} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right) \quad (8.14)$$

sendo I_z é o momento de inércia em relação ao eixo z , J a constante de torção e I_ω , o momento de inércia setorial ou constante de empenamento.

Substituindo as expressões (8.13) e (8.14) na Eq.(8.12) e resolvendo-a, obtém-se o valor de 737,96 kN para a carga crítica.

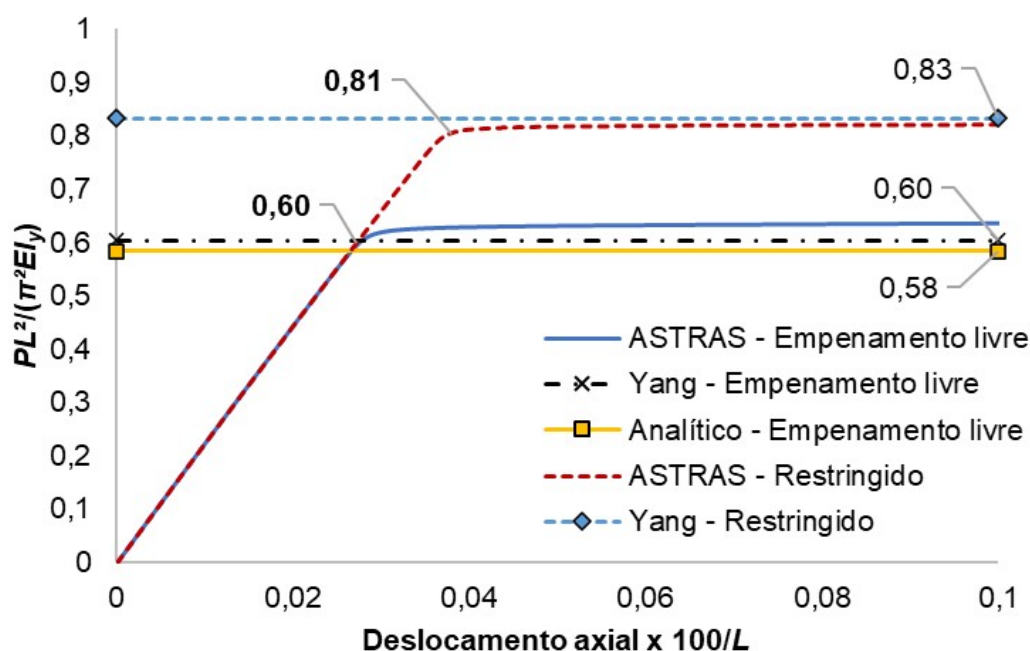
Os resultados obtidos pelo programa desenvolvido para o empenamento restringido e empenamento livre são apresentados na Tabela 6 e Figura 49. Os valores de carga crítica obtidos por Yang (1984) por meio da análise por autovalores também são apresentados.

Tabela 6 – Valores de carga crítica para viga-pilar submetida a flexo-torção

Condição	Carga crítica (kN)		Diferença relativa
	ASTRAS	Yang (1986)	
Empenamento livre	759,10	763,36	-0,56%
Empenamento restringido	1025,00	1053,69	-2,72%
Diferença (%)	35,03%	38,03%	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 49 – Comportamento geometricamente não linear da viga-pilar submetida a flexo-torção



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

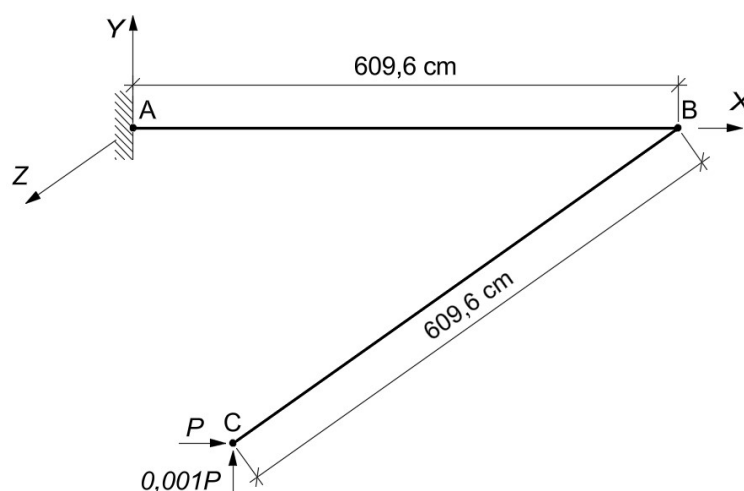
Nota-se que a carga crítica determinada pelo programa desenvolvido para a condição de empenamento livre é, aproximadamente, 2,86% maior que a carga obtida

analiticamente, e 0,56% menor que a carga obtida por Yang (1984). Para a condição de empenamento restringido, a diferença percentual entre o valor da carga crítica obtida pelo programa proposto e a determinada por Yang (1984) também é muito pequena, sendo apenas -2,72%.

A análise da Figura 49 revela que a restrição ao empenamento exerce uma influência significativa na carga máxima que a estrutura pode suportar. Esse fenômeno ocorre porque a restrição ao empenamento limita a capacidade de deformação da seção transversal da estrutura, o que, por sua vez, afeta diretamente a distribuição de tensões internas e a estabilidade global do sistema. Com a restrição ao empenamento, a estrutura pode resistir a maiores cargas antes de alcançar o estado de colapso. Assim, a consideração dessa restrição é essencial no cálculo da capacidade de carga de elementos estruturais, especialmente em situações onde a estabilidade é um fator crítico.

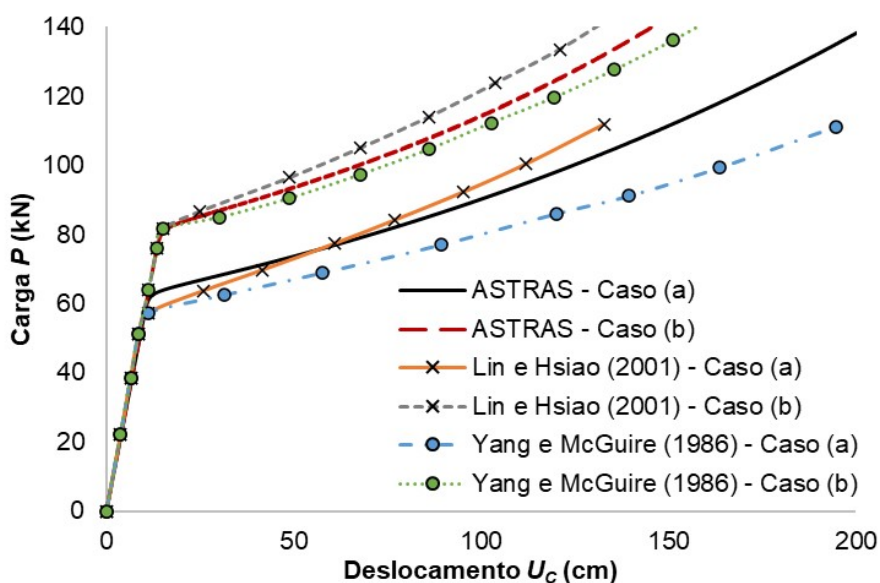
8.3.4 Pórtico L em balanço no plano XZ

Neste exemplo será analisado um pórtico *L* em balanço no plano XZ submetido a uma força *P* aplicada em sua extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 50. Ambos os elementos possuem um comprimento igual a 609.6 cm. Uma força desestabilizadora de $0,001P$ é aplicada na extremidade livre para iniciar um deslocamento lateral na análise elástica geometricamente não linear. Essa estrutura foi analisada primeiramente por Yang e McGuire (1986) e desde então tem sido utilizada em trabalhos que incluem a influência do empenamento na análise não linear. O pórtico de aço é composto por perfil W21x93 com a alma localizada no plano da estrutura. O material possui módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. Neste trabalho, dois casos são considerados para a condição de empenamento nas extremidades: a) empenamento livre; b) empenamento restringido nas extremidades A e B e livre na extremidade C.

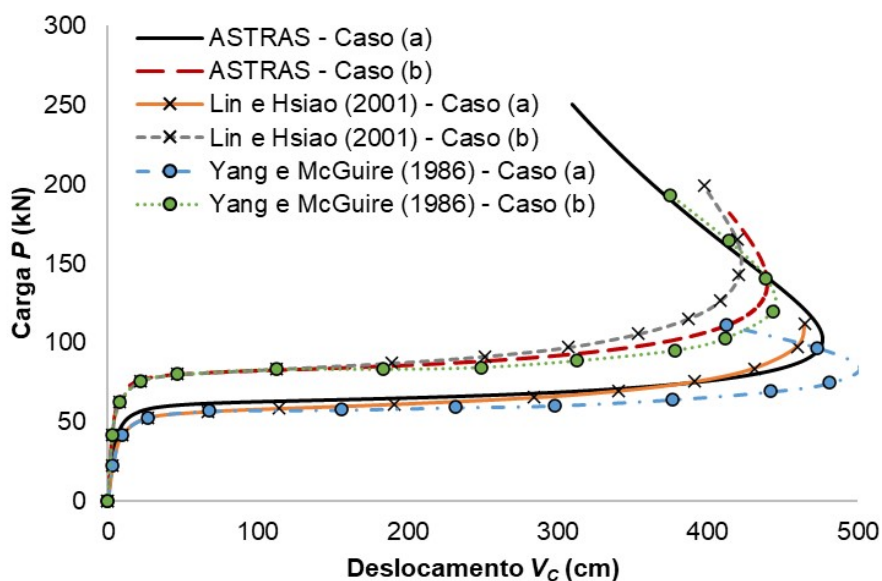
Figura 50 – Pórtico L em balanço no plano XZ

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

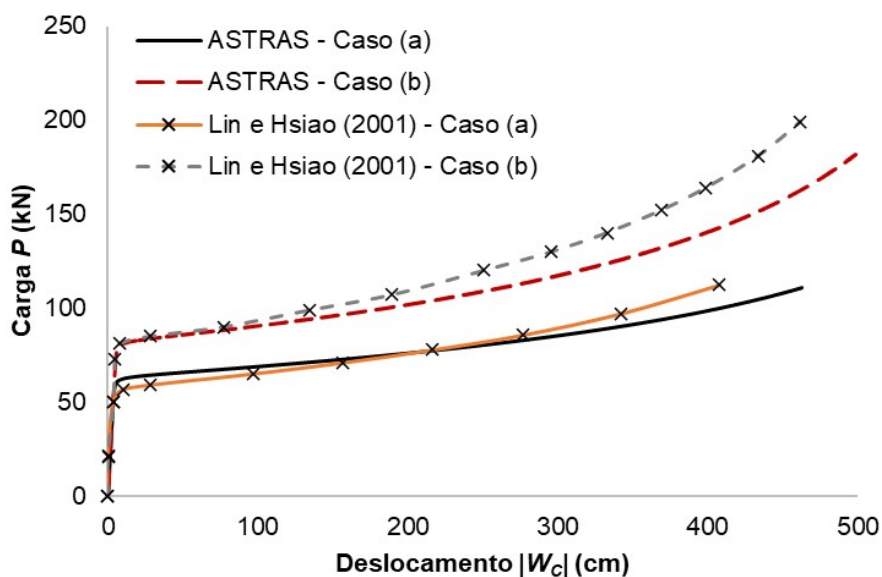
O método de controle de deslocamentos generalizados com tolerância para as forças de 10^{-4} foi adotado na análise. Cada componente estrutural foi discretizado em 10 elementos finitos. As Figuras 51 a 53 apresentam as curvas carga *versus* deslocamento na extremidade livre (nó C), nas direções X, Y e Z, respectivamente. Os resultados obtidos por Yang e McGuire (1986) e Lin e Hsiao (2001) também são representados nas Figuras 51 a 53.

Figura 51 – Carga *versus* deslocamento U_c do pórtico L

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 52 – Carga versus deslocamento V_c do pórtico L

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 53 – Carga versus deslocamento $|W_c|$ do pórtico L

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

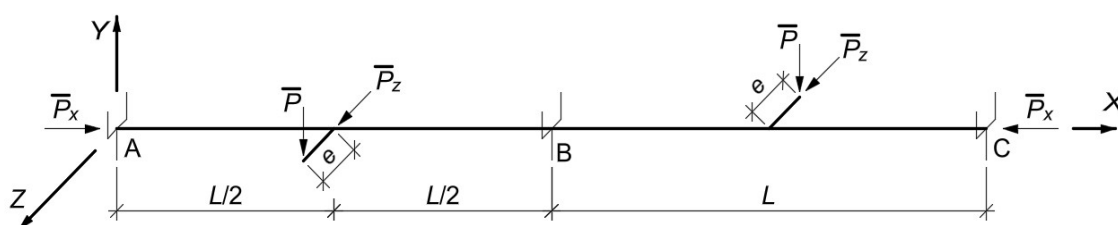
Observa-se que os deslocamentos obtidos pela metodologia proposta são aproximadamente idênticos aos obtidos nos estudos de referência quando a carga é menor que a carga crítica de flambagem. No entanto, a partir da carga crítica e à medida que o carregamento aumenta, surgem diferenças significativas entre os resultados obtidos pelo programa ASTRAS e os reportados por Yang e McGuire (1986) e Lin e Hsiao (2001). Além disso, observa-se que as curvas obtidas pelo programa ASTRAS, considerando o empenamento livre (caso a), apresentam melhor

concordância com os resultados de Lin e Hsiao (2001). Por outro lado, no caso (b), quando o empenamento é restringido nas extremidades A e B e livre na extremidade C, os resultados obtidos estão mais alinhados com os resultados de Yang e McGuire (1986). Essas diferenças podem ser ocasionadas pela formulação ou até mesmo a quantidade de elementos finitos adotados por cada autor.

8.3.5 Flambagem lateral de uma viga contínua com dois vãos

Para obter uma compreensão sobre a influência da rigidez de empenamento, da configuração de carregamento e da plasticidade do material na capacidade de carga da estrutura, é considerado um exemplo de uma viga contínua de dois vãos carregada por uma combinação de cargas laterais e axiais, com $L = 500$ cm, conforme ilustrado na Figura 54. A viga é composta por perfil IPE 200. Em todos os apoios, assume-se que as rotações torcionais em torno do eixo X são impedidas, enquanto as rotações de flexão nos planos XZ e XY são permitidas. O comportamento do material elastoplástico é modelado por uma lei constitutiva bilinear, com tensão de escoamento de 240 MPa, módulo de elasticidade de 210 GPa e módulo tangente constante pós-escoamento de $E_t = 0,001E$.

Figura 54 – Viga contínua com dois vãos



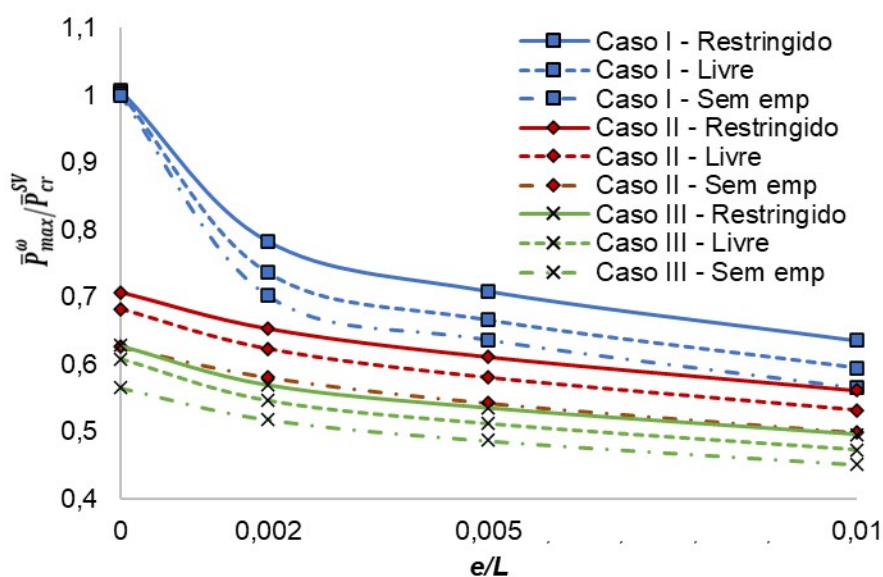
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Para a análise desta estrutura, foram adotados 20 elementos finitos ao longo de seu comprimento, e o método de controle de deslocamento generalizado foi empregado com uma tolerância para forças de 10^{-4} .

A Figura 55 apresenta os resultados obtidos pelo programa ASTRAS, considerando as condições de empenamento restringido e livre nos apoios A e C, bem como a ausência de empenamento, para os seguintes casos: Caso I - $\bar{P}_x = \bar{P}_z = 0$; Caso II - $\bar{P}_x = 0$; $\bar{P}_z = 0,1\bar{P}$; e Caso III - $\bar{P}_x = 2,5\bar{P}$; $\bar{P}_z = 0,1\bar{P}$. Considerando o Caso I com a excentricidade $e = 0$ e adotando a teoria de Saint Venant (sem considerar o

empenamento), a menor carga crítica suportada pela viga é $\bar{P}_{cr}^{SV} = 57,18 \text{ kN}$. Na Figura 55, são plotadas as cargas máximas $\bar{P}_{max}^{\omega}$ obtidas para cada caso, considerando a rigidez ao empenamento na análise, normalizadas por $\bar{P}_{cr}^{SV}$, em função do parâmetro de excentricidade e/L .

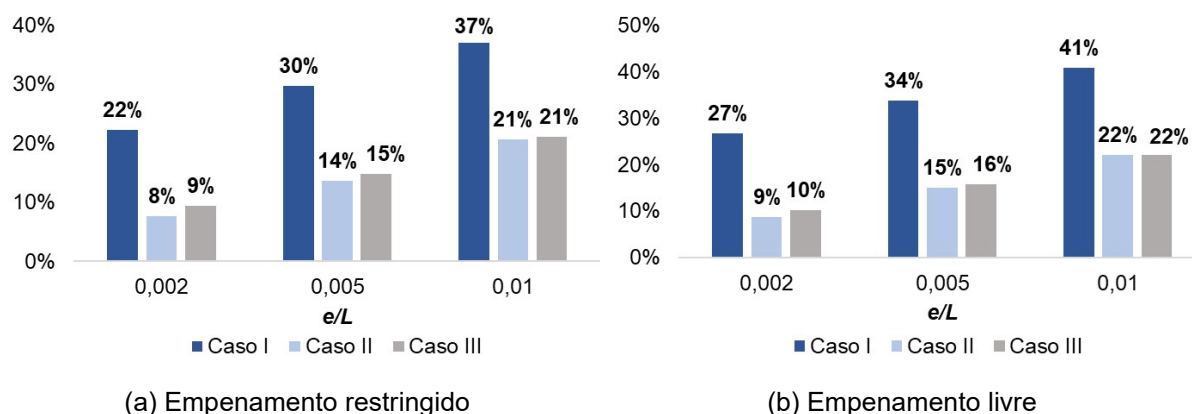
Figura 55 – Relação $\bar{P}_{max}^{\omega}/\bar{P}_{cr}^{SV}$ versus parâmetro de excentricidade e/L



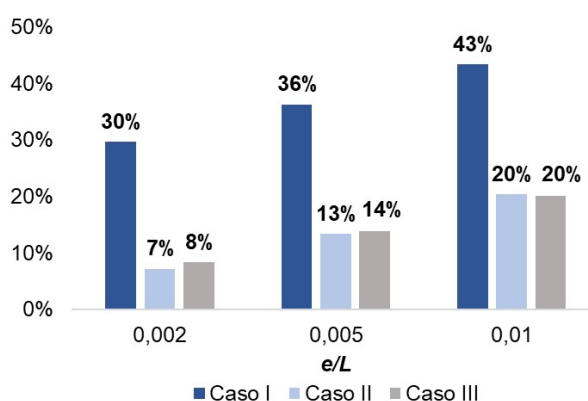
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Com base na Figura 55, observa-se que, nos três casos analisados, a estrutura demonstra uma sensibilidade significativa à excentricidade inicial e , o que diminui sua capacidade de carga. Além disso, verifica-se que ao restringir o empenamento nos apoios A e C, a viga apresenta uma maior capacidade resistente de carga em todos os casos. Se o empenamento é desconsiderado, o modelo estrutural obtido é menos rígido, resultando em menores capacidades de carga.

As Figuras 56 (a), (b) e 57 ilustram as reduções percentuais da capacidade de carga da estrutura para as condições de empenamento restringido, livre e ausência de empenamento, respectivamente, em função de diferentes excentricidades iniciais e . Os valores exibidos nesses gráficos foram calculados com base na diferença entre a carga máxima suportada pela estrutura sem excentricidade inicial e a capacidade de carga correspondente para cada excentricidade considerada.

Figura 56 – Redução da capacidade resistente

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

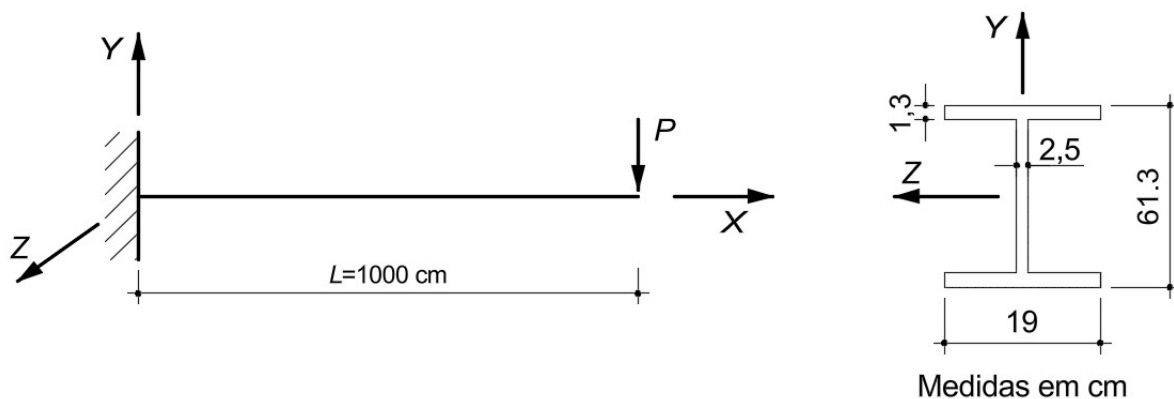
Figura 57 – Redução da capacidade resistente sem empenamento

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A partir das Figuras 56 (a), (b) e 57, verifica-se que a remoção das forças desestabilizadoras $\bar{P}_x$ e $\bar{P}_z$ (Caso I), leva a uma sensibilidade à excentricidade inicial mais acentuada. Para o Caso I, nota-se que o modelo que desconsidera o empenamento na análise apresenta a maior redução na capacidade de carga com o aumento da excentricidade inicial, seguido pelo modelo que considera o empenamento livre nas extremidades A e C.

8.3.6 Viga engastada submetida a flambagem lateral

A viga engastada mostrada na Figura 58 está submetida a uma carga vertical concentrada na extremidade livre. A seção transversal da estrutura está completamente restringida ao empenamento no apoio e é composta por um material de comportamento elastoplástico perfeito, com um módulo de elasticidade longitudinal de 206 GPa, coeficiente de Poisson de 0,3 e resistência ao escoamento de 206 MPa.

Figura 58 – Viga engastada submetida a flambagem lateral

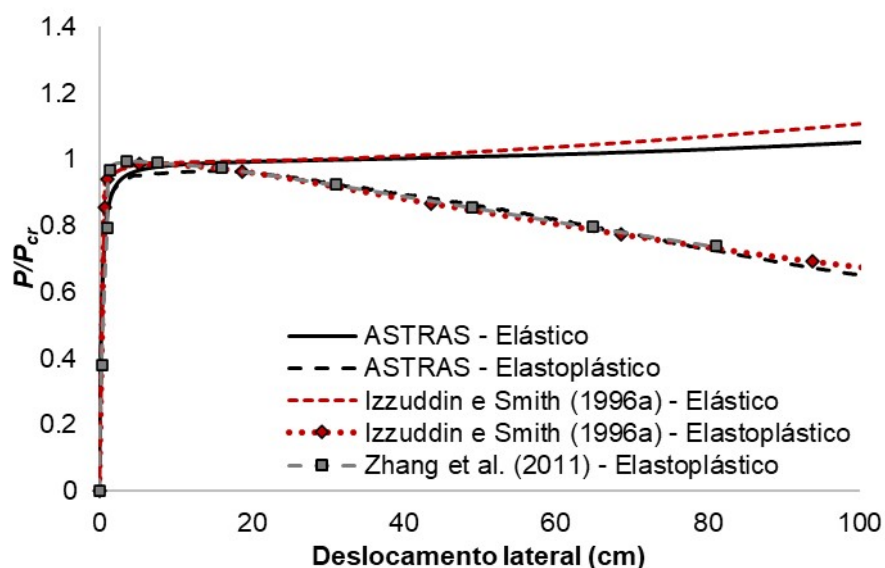
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Esse problema também foi analisado por Izzuddin e Smith (1996a) e Zhang *et al.* (2011), cujos resultados foram utilizados neste trabalho para validar a implementação realizada. Para essa viga, a carga crítica de flambagem elástica lateral com torção é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{L^2} \left(3,95 + 3,52 \sqrt{\frac{\pi^2 EI_\omega}{GJ L^2}} \right) = 47,35 \text{ kN} \quad (8.15)$$

A viga foi modelada utilizando 20 elementos finitos ao longo de seu comprimento, e a seção transversal foi discretizada em 50 fatias, sendo 20 fatias para as mesas e 10 fatias para a alma. Para iniciar uma flambagem fora do plano XY, foi aplicada uma pequena carga lateral de $0,001P$ na extremidade livre da viga no sentido do eixo Z positivo. O método de controle de deslocamento generalizado foi empregado com uma tolerância para forças de 10^{-4} .

A Figura 59 exibe o comportamento carga *versus* deslocamento lateral da extremidade livre da viga, considerando material elástico e elastoplástico, obtida pelo programa ASTRAS e as apresentadas nos trabalhos de Izzuddin e Smith (1996a) e Zhang *et al.* (2011). Nota-se uma boa concordância entre as curvas, com pequenas diferenças na carga máxima suportada pela estrutura. Para o caso de material com comportamento elástico, verifica-se que, a partir de um deslocamento de 40 cm, a curva obtida por meio do programa ASTRAS revela uma estrutura mais flexível em comparação com a obtida por Izzuddin e Smith (1996a). Essas diferenças podem ser decorrentes da formulação utilizada, da carga perturbadora inicial ou da quantidade de elementos finitos adotados para a análise.

Figura 59 – Comportamento carga *versus* deslocamento lateral da viga engastada

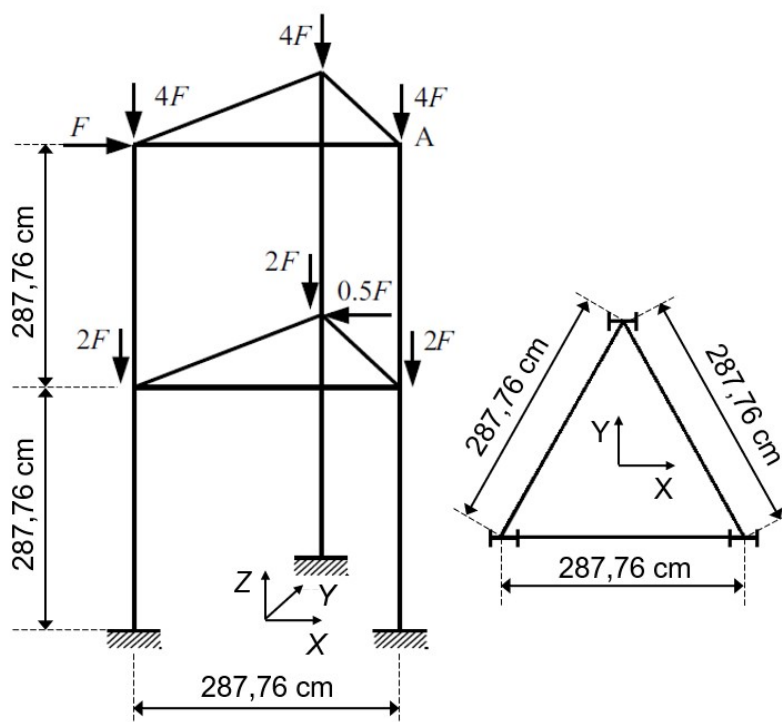
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

8.3.7 Pórtico espacial de dois pavimentos com planta baixa triangular

A Figura 60 apresenta um pórtico espacial de dois andares e um vão com planta baixa triangular cujos componentes estruturais possuem comprimento de 287,76 cm. Essa estrutura é constituída por perfis W14x43 com módulos de elasticidade longitudinal e transversal iguais a 210 GPa e 80 GPa, respectivamente, e resistência ao escoamento de 248,3 MPa. O empenamento é totalmente restringido nos apoios e nas conexões viga-pilar. Forças concentradas foram aplicadas conforme mostra a Figura 60. A carga crítica de flambagem elástica, determinada pelo método de autovalores, é $P_{cr} = 744,9$ kN.

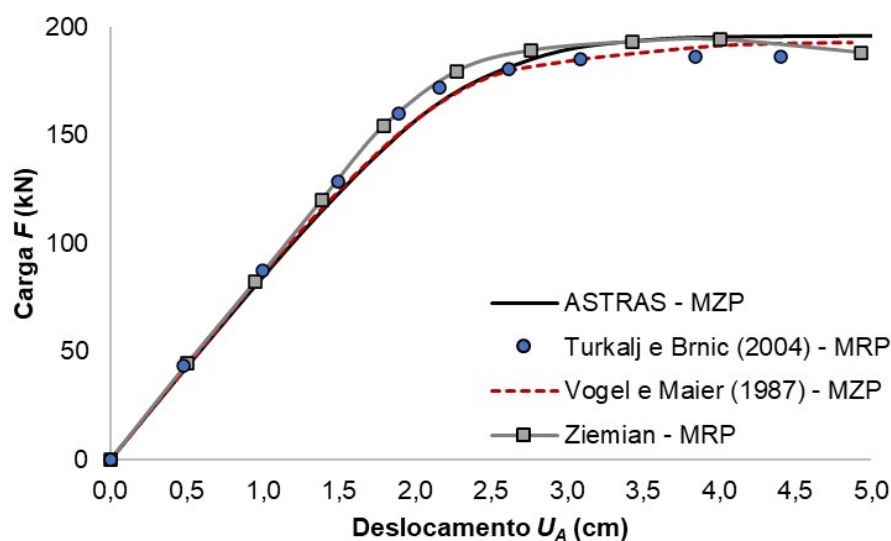
Na modelagem da estrutura, foram utilizados 4 elementos finitos por componente estrutural. Para a discretização da seção transversal, adotou-se um total de 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 fatias para a alma. As tensões residuais, distribuídas linearmente nas mesas e na alma do perfil, foram aplicadas no início da análise, considerando uma tensão residual máxima igual a 30% da resistência ao escoamento do material. Além disso, assume-se um comportamento elastoplástico perfeito para o material.

Figura 60 – Pórtico espacial com planta baixa triangular



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A Figura 61 apresenta a curva carga *versus* deslocamento na direção X (U_A) para o nó A, obtida tanto pelo programa desenvolvido quanto por outros autores. A carga última encontrada na presente pesquisa foi $196,5 \text{ kN}$, valor bem próximo àquele reportado por Vogel e Maier ($F_{lim} = 192,5 \text{ kN}$), que também utilizaram o método da zona plástica (MZP) na análise desta estrutura. A carga última determinada por Turkalj e Brnic (2004) aplicando o método da rótula plástica (MRP) foi $F_{lim} = 185,6 \text{ kN}$. Ziemian (*apud* Turkalj e Brnic, 2004) também analisou a estrutura utilizando o método da rótula plástica.

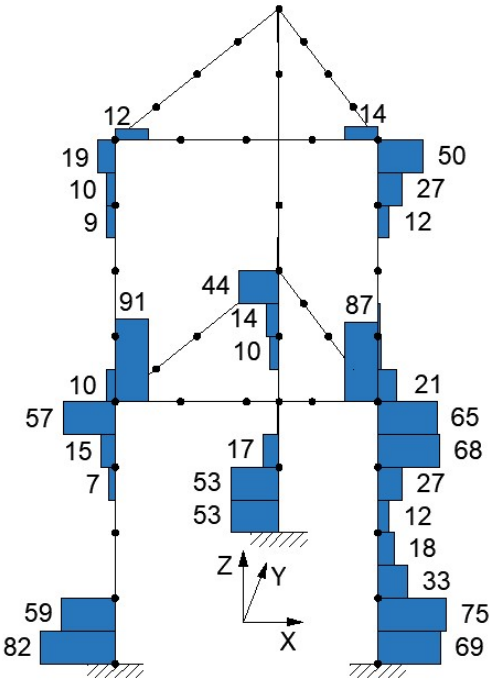
Figura 61 – Comportamento não linear do pórtico de dois andares com planta baixa triangular

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Ao comparar as trajetórias de equilíbrio, observa-se a partir da Figura 61, que o método da rótula plástica tende a resultar em uma estrutura aparentemente mais rígida. Isso ocorre porque esse método simplifica o comportamento estrutural, assumindo que as deformações plásticas se concentram em pontos discretos (rótulas), enquanto o restante da estrutura permanece elástico. Por outro lado, no método da zona plástica, assume-se que o escoamento está distribuído ao longo do volume do elemento estrutural, proporcionando uma modelagem mais realista e detalhada do comportamento da estrutura sob carga.

A Figura 62 exibe o valor percentual da área da seção transversal que sofreu escoamento, tanto no nó inicial quanto no nó final dos elementos, para a carga última. Graficamente, esse valor é considerado para cada metade do elemento. Observa-se que o processo de plastificação ocorre principalmente próximo às extremidades das vigas e pilares localizados no plano XZ.

Figura 62 – Plastificação nas barras do pórtico de dois andares com base triangular



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa apresentou um desenvolvimento teórico e a implementação computacional de uma formulação não linear para a análise avançada de pórticos espaciais de aço, considerando as teorias de Saint Venant e Vlasov. As relações cinemáticas adotadas permitiram a análise de estruturas com a consideração de grandes translações e rotações de corpo rígido, acompanhadas de pequenas deformações. A consideração do comportamento elastoplástico do material, por meio do conceito de plasticidade distribuída e de relações constitutivas adequadas, permitiu acompanhar o escoamento ao longo da altura da seção transversal e do comprimento do elemento. Destaca-se que na formulação baseada na teoria de Vlasov, assumiu-se que as rigidezes à torção e ao empenamento não são afetadas pela plastificação do elemento estrutural.

Para o caso de seções compactas, a metodologia apresentada permite a avaliação simultânea da resistência e estabilidade do sistema estrutural como um todo, de tal forma que as verificações posteriores, de cada componente estrutural, realizadas isoladamente, possam ser dispensadas. Além disso, o modelo descrito viabiliza a modelagem das tensões residuais e a consideração das imperfeições geométricas iniciais explicitamente.

Com base nos exemplos estudados na seção 8.2, que consideraram a formulação baseada na teoria de Saint Venant, sem a influência do empenamento, chegaram-se à várias observações sobre o comportamento estrutural em diferentes condições de análise. No exemplo 8.2.1, verificou-se que o número de fatias utilizadas na discretização da seção transversal tem pouca influência na carga máxima suportada pela estrutura, mas afeta significativamente o comportamento carga *versus* deslocamento. Durante a fase elástica, essa influência é mínima, mas se torna relevante na fase elastoplástica, onde uma maior discretização proporciona uma modelagem mais precisa das tensões e deformações atuantes. Além disso, a quantidade de elementos finitos adotados ao longo do comprimento da estrutura mostrou ter um efeito mínimo na carga máxima prevista, embora produza diferenças no comportamento carga *versus* deslocamento, especialmente após o início do escoamento.

A partir dos exemplos 8.2.2 a 8.2.5, foi observada uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo programa ASTRAS e aqueles reportados em estudos

anteriores na literatura. Nas análises elastoplásticas, verificou-se que o método da rótula plástica tende a resultar em uma estrutura aparentemente mais rígida. Esse fenômeno ocorre devido à simplificação inerente do método, que assume que as deformações plásticas se concentram em pontos discretos (rótulas), enquanto o restante do elemento estrutural permanece elástico. Em contrapartida, o método da zona plástica, adotado na presente pesquisa, oferece uma representação mais precisa das deformações e tensões, uma vez que captura a progressão do escoamento de forma contínua ao longo da seção transversal e do comprimento dos elementos. Por consequência, essa metodologia permite avaliar melhor a redistribuição de tensões e identificar pontos de fragilidade que poderiam ser negligenciados pelo método da rótula plástica. Adicionalmente, a análise pelo método da zona plástica é capaz de incorporar a não linearidade geométrica e de material de maneira mais abrangente, resultando em uma representação mais fiel das respostas estruturais.

Os resultados dos exemplos numéricos utilizando a formulação baseada na teoria de Vlasov demonstraram a influência significativa do empenamento na resposta estrutural. A análise abrangeu diversos cenários de carga e condições de contorno, afim de evidenciar a aplicabilidade e a importância da formulação implementada.

Os resultados do programa obtidos para o exemplo 8.3.1 demonstraram uma excelente concordância com as soluções analíticas. Observou-se que a restrição do empenamento nos apoios alterou consideravelmente a distribuição de esforços ao longo da viga, aumentando a rigidez da estrutura. Por sua vez, os resultados obtidos para o exemplo 8.3.2 destacaram a importância da consideração do efeito da restrição ou liberação ao empenamento no momento de torção, momento fletor e bimomento. A restrição ao empenamento introduz bimomentos na estrutura, evidenciando a importância de considerar essas condições para uma análise precisa do comportamento estrutural.

Conforme evidenciado nos exemplos 8.3.3 e 8.3.4, ao restringir o empenamento, afeta-se a distribuição de tensões internas e a estabilidade global do sistema. Com a restrição ao empenamento, a estrutura pode suportar maiores cargas antes de colapsar, destacando a importância de considerar essa restrição no cálculo da sua capacidade de carga, especialmente em cenários críticos de estabilidade.

A partir do exemplo 8.3.5, observou-se que, na ausência de cargas desestabilizadoras laterais e longitudinais ao eixo de uma viga, o modelo que

desconsidera o empenamento apresenta a maior redução na capacidade de carga com o aumento da excentricidade inicial, seguido pelo modelo que considera o empenamento livre nas extremidades da estrutura.

Por fim, nos exemplos 8.3.6 e 8.3.7, foi possível verificar mais uma das vantagens da utilização do método da zona plástica na análise avançada de pórticos espaciais de aço. O programa proposto possibilitou uma avaliação satisfatória do comportamento carga-deslocamento, considerando material elástico e elastoplástico, assim como da distribuição do escoamento ao longo do comprimento dos componentes estruturais.

Os exemplos numéricos apresentados corroboraram a consistência e precisão da formulação proposta, demonstrando sua aplicabilidade e eficiência para a análise de pórticos espaciais de aço com a consideração da torção livre ou flexo-torção.

Ao integrar metodologias que consideram efeitos não lineares significativos, como grandes deslocamentos e rotações, e ao adotar o método da zona plástica para capturar a evolução da plastificação, a formulação adotada permite um entendimento mais detalhado do comportamento das estruturas sob condições extremas. Com isso, é possível otimizar o uso de materiais, reduzir a geração de resíduos e minimizar impactos ambientais, alinhando-se assim aos objetivos de desenvolvimento sustentável da indústria da construção civil.

Como continuidade deste estudo, são sugeridos os seguintes trabalhos futuros:

- Incorporar o efeito do cisalhamento no comportamento não linear das estruturas.
- Incluir a análise de seções assimétricas, focando na avaliação de seções de parede fina onde o centro de torção não coincide com o centro de gravidade.
- Introduzir elementos de mola 3D no programa para representar o comportamento de ligações semirrígidas de forma mais precisa.
- Avaliar o efeito da restrição ou liberação do empenamento no processo de propagação do escoamento nas seções transversais dos componentes estruturais;
- Adaptar a formulação visando a análise dinâmica não linear;
- Implementar a análise de pórticos espaciais em situação de incêndio, com o objetivo de avaliar os efeitos térmicos na resistência e no comportamento estrutural durante condições adversas;

- Incluir o efeito Wagner, associado à carga axial e aos momentos fletores atuando nos deslocamentos relacionados à torção do elemento, na matriz de rigidez geométrica do elemento finito.

REFERÊNCIAS

- ABDELRAHMAN, A. H. A.; CHEN, Liang; LIU, Si-Wei; e ZIEMIAN, Ronald D. Timoshenko line-element for stability analysis of tapered I-section steel members considering warping effects. **Thin-Walled Structures**, v. 175, p. 109198, 2022. ISSN 0263-8231.
- ABDELRAHMAN, A. H. A.; LOTFY, Sameh; e LIU, Si-Wei. Generalized line-element formulations for geometrically nonlinear analysis of nonsymmetric tapered steel members with warping and Wagner effects. **Engineering Structures**, v. 273, p. 115052, 2022. ISSN 0141-0296.
- ABNT, N. B. R. 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. **Associação Brasileira de Normas Técnicas**, 2008.
- AL-BERMANI, Faris G. A.; e KITIPORNCHAI, S. Elasto-plastic large deformation analysis of thin-walled structures. **Engineering Structures**, v. 12, n. 1, p. 28–36, 1990. DOI 10.1016/0141-0296(90)90035-Q.
- ALBINO, J. C. R.; ALMEIDA, C. A.; MENEZES, I. F. M.; e PAULINO, G. H. Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). **Engineering Structures**, v. 173, p. 283–299, 2018. ISSN 0141-0296.
- ALMEIDA, Andreia Cristina Barroso. **Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço**. 2006. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.
- ALSAFADIE, R.; HJIAJ, M.; SOMJA, H.; e BATTINI, J. M. A comparative study of displacement and mixed-based corotational finite element formulations for elasto-plastic three-dimensional beam analysis. **Engineering Computations (Swansea, Wales)**, v. 28, n. 7, p. 939–982, 2011.
- ALSAFADIE, R.; HJIAJ, Mohammed; e BATTINI, J. M. Three-dimensional formulation of a mixed corotational thin-walled beam element incorporating shear and warping deformation. **Thin-walled structures**, , v. 49, n. 4, p. 523–533, 2011. ISSN 0263-8231.
- AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. **Specification for structural steel buildings**. Chicago, IL, 2016.
- ARAUJO, Reinaldo Eustaquio. **Estudo da influência do encruamento do aço e das tensões residuais no comportamento inelástico de pórticos planos via análise avançada**. 2010. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.
- ARGYRIS, J. H. et al. Finite element method—the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17, p. 1–106, 1979. ISSN 0045-7825.

ARGYRIS, John. An excursion into large rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 32, n. 1–3, p. 85–155, 1982. ISSN 0045-7825.

BANIĆ, Damjan; TURKALJ, Goran; e LANC, Domagoj. Stability analysis of shear deformable cross-ply laminated composite beam-type structures. **Composite Structures**, v. 303, p. 116270, 2023. ISSN 0263-8223.

BATOZ, Jean-Louis; e DHATT, Gouri. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, , v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979. ISSN 0029-5981.

BENSCOTER, S. U. A theory of torsion bending for multicell beams. 1954. ISSN 0021-8936.

BORESI, Arthur P.; CHONG, Ken; e LEE, James D. **Elasticity in engineering mechanics**. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 0470880384.

CAI, Y.; PAIK, J. K.; e ATLURI, S. N. Large deformation analyses of space-frame structures, with members of arbitrary cross-section, using explicit tangent stiffness matrices, based on a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames. **CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 53, n. 2, p. 117–145, 2009a.

CAI, Y.; PAIK, J. K.; e ATLURI, S. N. Large deformation analyses of space-frame structures, using explicit tangent stiffness matrices, based on the reissner variational principle and a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames. **CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 54, n. 3, p. 335–368, 2009b.

CEN, E. N. 1-1-Eurocode 3: Design of steel structures-Part 1-1: General rules and rules for buildings. **European Committee for Standardization, Brussels**, 2005.

CHAN, Siu-Lai; e CHUI, Pui-Tak. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. Elsevier, 2000. ISBN 0080537715.

CHAN, S. L.; HUANG, H. Y.; e FANG, L. X. Advanced Analysis of Imperfect Portal Frames with Semirigid Base Connections. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 131, n. 6, p. 633–640, jun. 2005. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:6(633).

CHANDRA, Ram; KRISHNA, Prem; e TRIKHA, D. N. Elastic-Plastic Analysis of Steel Space Structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 116, n. 4, p. 939–955, abr. 1990. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:4(939).

CHEN, Liang; LIU, Si-Wei; BAI, Rui; e CHAN, Siu-Lai. Co-rotational formulations for geometrically nonlinear analysis of beam-columns including warping and Wagner effects. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 23, n. 05, p. 2350052, 2023. ISSN 0219-4554.

CHEN, Wai-Fah; GOTO, Yoshiaki; e LIEW, J. Y. Richard. **Stability design of semi-rigid frames**. John Wiley & Sons, 1996. v. 1. ISBN 0471076708.

CHEN, Wai-Fah; e KIM, Seung-Eock. **LRFD steel design using advanced analysis**. Boca Raton: CRC press, 1997. v. 13. ISBN 0849374324.

CHIOREAN, C. G. A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel–concrete frame structures. **Engineering Structures**, v. 57, p. 125–152, 2013. ISSN 0141-0296.

CHIOREAN, C. G.; e BARSAN, G. M. Large deflection distributed plasticity analysis of 3D steel frameworks. **Computers and Structures**, v. 83, n. 19–20, p. 1555–1571, 2005. DOI 10.1016/J.COMPSTRUC.2005.02.011.

CLARKE, M. J.; BRIDGE, R. Q.; HANCOCK, G. J.; e TRAHAIR, N. S. Advanced analysis of steel building frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 23, n. 1–3, p. 1–29, 1992. ISSN 0143-974X.

CONCI, A. **Análise de estruturas reticuladas de aço com consideração de empenamento e não-linearidades geométrica e material**. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1988.

COSGUN, Turgay; e SAYIN, Baris. Geometric and material nonlinear analysis of three-dimensional steel frames. **International Journal of Steel Structures**, v. 14, n. 1, p. 59–71, 2014. DOI 10.1007/S13296-014-1007-3.

COSTA, Rodrigo Sernizon. **Formulação para a análise avançada de sistemas estruturais formados por cabos e treliças espaciais visando à aplicação em torres estaiadas para linhas de transmissão**. 2014. Tese de Doutorado — Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.

COSTA, Rodrigo Sernizon; LAVALL, Armando Cesar Campos; SILVA, Renata Gomes Lanna DA; SANTOS, Altair Porcino DOS; e VIANA, Harley Francisco. Cable structures: An exact geometric analysis using catenary curve and considering the material nonlinearity and temperature effect. **Engineering Structures**, v. 253, p. 113738, 2022. ISSN 0141-0296.

CRISFIELD, Michael A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In: **Computational methods in nonlinear structural and solid mechanics**. Elsevier, 1981. p. 55–62.

CRISFIELD, MA1913032. An arc-length method including line searches and accelerations. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 19, n. 9, p. 1269–1289, 1983. ISSN 0029-5981.

CRISFIELD, Michael A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990. ISSN 0045-7825.

CRISFIELD, Michael A. Nonlinear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Essentials. 1991.

DIAS, Avelino Manuel da Silva. **Análise de Vigas de Seções Abertas de Paredes Finas Sujeitas a Torção Via Elementos Finitos**. 1997. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte., 1997.

DU, Zuo-Lei; DING, Zhi-Xia; LIU, Yao-Peng; e CHAN, Siu-Lai. Advanced flexibility-based beam-column element allowing for shear deformation and initial imperfection for

direct analysis. **Engineering Structures**, v. 199, p. 109586, 2019. ISSN 0141-0296. DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109586>.

EL-TAWIL, Sherif; e DEIERLEIN, Gregory G. Nonlinear analysis of mixed steel-concrete frames. I: Element formulation. **Journal of Structural engineering**, v. 127, n. 6, p. 647–655, 2001. ISSN 0733-9445.

ENSSLIN, Leonardo; ENSSLIN, Sandra R.; LACERDA, Rogério T. de O.; e TASCA, Jorge E. ProKnow-C, knowledge development process-constructivist. **Processo técnico com patente de registro pendente junto ao INPI. Brasil**, v. 10, n. 4, p. 2015, 2010.

FELIPPA, Carlos A.; e HAUGEN, Bjorn. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 21–24, p. 2285–2335, 2005. ISSN 0045-7825.

FERREIRA, R. P. **Uma Formulação Consistente para Análise Elastoplástica de Estruturas de Aço**. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.

FOLEY, Christopher M.; e VINNAKOTA, Sriramulu. Inelastic analysis of partially restrained unbraced steel frames. **Engineering structures**, v. 19, n. 11, p. 891–902, 1997. ISSN 0141-0296.

FUINA, Jamile S. **Métodos de controle de deformações para análise nao-linear de estruturas**. 2004. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

GERE, James M.; e TIMOSHENKO, Stephen P. **Theory of elastic stability**, 1961.

GONÇALVES, G. A.; SILVEIRA, R. A. D. M.; SILVA, A. R. D. DA; e SILVA, J. L. Inelastic second-order analysis of steel columns under minor-axis bending. **Revista Escola de Minas**, v. 72, n. 3, p. 405–414, 2019. DOI 10.1590/0370-44672018720046.

GRIGOLETTI, Gladimir de Campos. **Análise não-linear geométrica de estruturas espaciais reticuladas com a consideração do empenamento da seção transversal**. 1999. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.

GU, J. X.; e CHAN, S. L. A refined finite element formulation for flexural and torsional buckling of beam-columns with finite rotations. **Engineering Structures**, v. 27, n. 5, p. 749–759, 2005.

HAJJAR, Jerome F.; SCHILLER, Paul H.; e MOLODAN, Aleksandr. A distributed plasticity model for concrete-filled steel tube beam-columns with interlayer slip. **Engineering Structures**, v. 20, n. 8, p. 663–676, 1998. DOI 10.1016/S0141-0296(97)00107-7.

HANCOCK, Gregory J.; e RASMUSSEN, Kim J. R. Geometric and material nonlinear analysis of thin-walled members with arbitrary open cross-section. **Thin-Walled Structures**, v. 153, p. 106783, 2020. ISSN 0263-8231.

HSIAO, Kuo-Mo; HORNG, Horng-Jann; e CHEN, Yeh-Ren. A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. **Computers & Structures**, v. 27, n. 6, p. 769–781, 1987. ISSN 0045-7949.

HUANG, Z. F.; e TAN, K. H. Fe simulation of space steel frames in fire with warping effect. **Advanced Steel Construction**, v. 3, n. 3, p. 652–667, 2007.

IU, C. K.; e BRADFORD, M. A. Higher-order non-linear analysis of steel structures. Part II: refined plastic hinge formulation. **Advanced Steel Construction**, v. 8, n. 2, p. 183–198, 2012. ISSN 1816-112X.

IZZUDDIN, B. A.; e SMITH, D. Lloyd. Large-Displacement Analysis of Elastoplastic Thin-Walled Frames. II: verification and application. **Journal of Structural Engineering**, v. 122, n. 8, p. 915–925, 1996a.

IZZUDDIN, B. A.; e SMITH, D. Lloyd. Large-Displacement Analysis of Elastoplastic Thin-Walled Frames. I: Formulation and Implementation. **Journal of Structural Engineering**, v. 122, n. 8, p. 905–914, ago. 1996b. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(1996)122:8(905).

JAVARONI, Carlos Eduardo. **Perfis de aço formados a frio submetidos à flexão: análise teórico-experimental**. 1999. Tese de Doutorado — Universidade de São Paulo, 1999.

JIANG, Xiao-Mo; CHEN, Hong; e LIEW, J. Y. Richard. Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 58, n. 2, p. 193–212, 2002. ISSN 0143-974X.

JUNIOR, V. Souza; e CREUS, G. J. Simplified elastoplastic analysis of general frames on fire. **Engineering Structures**, v. 29, n. 4, p. 511–518, 2007. ISSN 0141-0296. DOI <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.05.013>.

KIM, M-Y; CHANG, S-P; e KIM, S-B. Spatial stability analysis of thin-walled space frames. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 39, n. 3, p. 499–525, 1996. ISSN 0029-5981.

KIM, Seung-Eock; e CHEN, Wai-Fah. Practical advanced analysis for braced steel frame design. **Journal of Structural Engineering**, v. 122, n. 11, p. 1266–1274, 1996. ISSN 0733-9445.

KIM, Seung Eock; e CHOI, Se Hyu. Practical second-order inelastic analysis for three-dimensional steel frames subjected to distributed load. **Thin-Walled Structures**, v. 43, n. 1, p. 135–160, jan. 2005. DOI 10.1016/J.TWS.2004.09.001.

KIM, Seung-Eock; e LEE, Dong-Ho. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. **Engineering Structures**, v. 24, n. 6, p. 735–744, 2002. ISSN 0141-0296. DOI [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00136-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00136-5).

KIM, Seung-Eock; NGO-HUU, Cuong; e LEE, Dong-Ho. Second-order inelastic dynamic analysis of 3-D steel frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 6, p. 1693–1709, 2006a. ISSN 0020-7683. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.018>.

KIM, Seung Eock; NGO-HUU, Cuong; e LEE, Dong Ho. Second-order inelastic dynamic analysis of 3-D steel frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 6, p. 1693–1709, mar. 2006b. DOI 10.1016/J.IJSOLSTR.2005.06.018.

KIM, Seung Eock; PARK, Moon Ho; e CHOI, Se Hyu. Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis. **Engineering Structures**, v. 23, n. 11, p. 1491–1502, nov. 2001a. DOI 10.1016/S0141-0296(01)00041-4.

KIM, Seung Eock; PARK, Moon Ho; e CHOI, Se Hyu. Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis. **Engineering Structures**, v. 23, n. 11, p. 1491–1502, nov. 2001b. DOI 10.1016/S0141-0296(01)00041-4.

KRENK, S.; VISSING-JØRGENSEN, C.; e THESBJERG, L. Efficient collapse analysis techniques for framed structures. **Computers & Structures**, v. 72, n. 4, p. 481–496, 1999. ISSN 0045-7949. DOI [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00325-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00325-3).

KRISHNAN, Swaminathan; e HALL, John F. Modeling Steel Frame Buildings in Three Dimensions. II: Elastofiber Beam Element and Examples. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 132, n. 4, p. 359–374, abr. 2006. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:4(359).

KUO, Shyh-Rong; YANG, Yeong-Bin; e CHOU, Jung-Huai. Nonlinear analysis of space frames with finite rotations. **Journal of Structural Engineering**, v. 119, n. 1, p. 1–15, 1993. ISSN 0733-9445.

LAVALL, A. C. C. **Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal**. 1996. Tese de Doutorado — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

LAVALL, Armando Cesar Campos; SILVA, R. G. L. da; COSTA, Rodrigo Sernizon; e FAKURY, Ricardo Hallal. Análise avançada de pórticos de aço conforme as prescrições da ABNT NBR 8800: 2008. **Revista da Estrutura de Aço**, v. 2, n. 3, p. 146–165, 2013.

LEMES, Ígor J. M.; SILVEIRA, Ricardo A. M.; TELES, Luiz O. M.; BARROS, Rafael C.; e SILVA, Andréa R. D. Numerical formulation for advanced non-linear static analysis of semi-rigid planar steel frames. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 45, n. 7, p. 358, 2023. ISSN 1678-5878.

LIEW, J. Y. Richar.; CHEN, H.; SHANMUGAM, N. E.; e CHEN, W. F. Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures. **Engineering Structures**, v. 22, n. 10, p. 1324–1338, 2000. ISSN 0141-0296. DOI [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00085-1](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00085-1).

LIEW, J. Y. Richard; WHITE, D. W.; e CHEN, Wai-Fah. Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design. Part I. **Journal of Structural Engineering**, v. 119, n. 11, p. 3196–3216, 1993. ISSN 0733-9445.

LIN, Wen Yi; e HSIAO, Kuo Mo. Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin-walled beams. **Computer Methods in Applied**

Mechanics and Engineering, v. 190, n. 45, p. 6023–6052, 2001. ISSN 0045-7825.

LIU, Si-Wei; BAI, Rui; CHAN, Siu-Lai; e LIU, Yao-Peng. Second-Order Direct Analysis of Domelike Structures Consisting of Tapered Members with I-Sections. **Journal of Structural Engineering**, v. 142, n. 5, p. 04016009, maio 2016. DOI 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001464.

LIU, Si-Wei; LIU, Yao-Peng; e CHAN, Siu-Lai. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames: Part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 70, p. 337–349, 2012. ISSN 0143-974X.

LIU, Si-Wei; LIU, Yao-Peng; e CHAN, Siu-Lai. Direct analysis by an arbitrarily-located-plastic-hinge element—part 2: spatial analysis. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 103, p. 316–326, 2014a. ISSN 0143-974X.

LIU, Si-Wei; LIU, Yao-Peng; e CHAN, Siu-Lai. Direct analysis by an arbitrarily-located-plastic-hinge element—part 1: planar analysis. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 103, p. 303–315, 2014b. ISSN 0143-974X.

LIU, M. L.; e TO, C. W. S. Hybrid strain based three node flat triangular shell elements—I. Nonlinear theory and incremental formulation. **Computers & structures**, v. 54, n. 6, p. 1031–1056, 1995. ISSN 0045-7949.

LOVE, Augustus Edward Hough. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. Cambridge university press, 2013. ISBN 1107618096.

LU, Yuung-Hwa. Study of preform and loading rate in the tube nosing process by spherical die. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 194, n. 25–26, p. 2839–2858, 2005. ISSN 0045-7825.

MA, K. Y.; e RICHARD LIEW, J. Y. Nonlinear Plastic Hinge Analysis of Three-Dimensional Steel Frames in Fire. **Journal of Structural Engineering**, v. 130, n. 7, p. 981–990, jul. 2004. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:7(981).

MACHADO, Isabella Caroline Vieira. **Estudo da influência das tensões e das deformações por cisalhamento em pórticos planos de aço via análise avançada**. 2022. 125 p. Dissertação de Mestrado — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2022.

MARZOUK, S. S.; GENDY, A. S.; MIKHAIEL, S. N.; e SALEEB, A. F. Modeling with Increased Efficiency and Versatility for Flexural-Torsional Buckling of Unsymmetrical Thin-Walled Structures. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 2, n. 04, p. 431–456, 2002. ISSN 0219-4554.

MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. **Construção Sustentável**. [S. l.: s. n.], [s. d.]. Disponível em: <https://antigo.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/planejamento-ambiental-e-territorial-urbano/urbanismo-sustentavel/construcao-sustentavel.html>. Acessado: 26 jul. 2021.

MONTEIRO, Francisco Alex Correia. **Uma formulação co-rotacional geral: aplicação a pórticos espaciais**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004.

NGO-HUU, C.; e KIM, S. E. Practical advanced analysis of space steel frames using fiber hinge method. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 4, p. 421–430, 2009. Cited By :20Export Date: 19 September 2021. DOI 10.1016/j.tws.2008.08.007.

NGO-HUU, Cuong; KIM, Seung Eock; e OH, Jung Ryul. Nonlinear analysis of space steel frames using fiber plastic hinge concept. **Engineering Structures**, v. 29, n. 4, p. 649–657, abr. 2007. DOI 10.1016/J.ENGSTRUCT.2006.06.008.

NGO-HUU, Cuong; NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames. **Thin-Walled Structures**, v. 60, p. 98–104, 2012a. ISSN 0263-8231.

NGO-HUU, Cuong; NGUYEN, Phu Cuong; e KIM, Seung Eock. Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames. **Thin-Walled Structures**, v. 60, p. 98–104, nov. 2012b. DOI 10.1016/J.TWS.2012.06.019.

NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. An advanced analysis method for three-dimensional steel frames with semi-rigid connections. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 80, n. Supplement C, p. 23–32, 2014a. ISSN 0168-874X. DOI <https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.11.004>.

NGUYEN, Phu Cuong; e KIM, Seung Eock. Nonlinear inelastic time-history analysis of three-dimensional semi-rigid steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 101, p. 192–206, 2014b. DOI 10.1016/J.JCSR.2014.05.009.

NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. Distributed plasticity approach for time-history analysis of steel frames including nonlinear connections. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 100, p. 36–49, set. 2014c. ISSN 0143-974X. DOI <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2014.04.012>.

NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. Second-order spread-of-plasticity approach for nonlinear time-history analysis of space semi-rigid steel frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 105, p. 1–15, 2015a. Geometric non-linearity;Nonlinear time history analysis;Semirigid connections;Stability function;Steel frame; ISSN 0168874X.

NGUYEN, Phu Cuong; e KIM, Seung Eock. Second-order spread-of-plasticity approach for nonlinear time-history analysis of space semi-rigid steel frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 105, p. 1–15, 4 jul. 2015b. DOI 10.1016/J.FINEL.2015.06.006.

NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. Advanced analysis for planar steel frames with semi-rigid connections using plastic-zone method. **Steel Compos. Struct**, v. 21, n. 5, p. 1121–1144, 2016.

NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. A new improved fiber plastic hinge method accounting for lateral-torsional buckling of 3D steel frames. **Thin-Walled Structures**, v. 127, p. 666–675, 2018a. ISSN 0263-8231.

NGUYEN, Phu Cuong; e KIM, Seung Eock. A new improved fiber plastic hinge method accounting for lateral-torsional buckling of 3D steel frames. **Thin-Walled Structures**, v. 127, p. 666–675, 1 jun. 2018b. DOI 10.1016/J.TWS.2017.12.031.

NUKALA, Phani Kumar V. V.; e WHITE, Donald W. A mixed finite element for three-dimensional nonlinear analysis of steel frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 23–26, p. 2507–2545, 18 jun. 2004. DOI 10.1016/J.CMA.2004.01.029.

ODEN, John Tinsley; RIPPERGER, Eugene A.; e SAUNDERS, H. **Mechanics of elastic structures**. 2. ed. McGraw-Hill Education, 1981. ISSN 0161-8458.

PERES, Nuno; GONÇALVES, Rodrigo; e CAMOTIM, Dinar. Generalised Beam Theory formulation for the buckling analysis of thin-walled members with circular axis. **Thin-Walled Structures**, v. 176, p. 109322, 2022. ISSN 0263-8231.

PRAKASH, P. Ravi; e SRIVASTAVA, Gaurav. Distributed plasticity model for analysis of steel structures subjected to fire using the direct stiffness method. **Fire Safety Journal**, v. 105, p. 169–187, 1 abr. 2019. DOI 10.1016/J.FIRESAF.2019.03.002.

RAMM, Ekkehard. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. *In*: 1981. **Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics: Proceedings of the Europe-US Workshop Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28–31, 1980**. Springer, 1981. p. 63–89. ISBN 364281591X.

RE, Paolo DI; e ADDESSI, Daniela. A mixed 3D corotational beam with cross-section warping for the analysis of damaging structures under large displacements. **Meccanica**, v. 53, n. 6, p. 1313–1332, 2018. ISSN 1572-9648.

RE, Paolo DI; ADDESSI, Daniela; e PAOLONE, Achille. Mixed beam formulation with cross-section warping for dynamic analysis of thin-walled structures. **Thin-Walled Structures**, v. 141, p. 554–575, 2019. ISSN 0263-8231.

RIBEIRO, Iara Souza. Análise não linear geométrica de pórticos planos e espaciais com elementos não prismáticos de seção qualquer, descritos segundo a formulação de Timoshenko. 2022.

RIKS, Eduard. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. 1972. ISSN 0021-8936.

RIKS, Eduard. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979. ISSN 0020-7683.

RODRIGUES, Olinde. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 5, p. 380–440, 1840. ISSN 0021-7824.

SAVARD, M.; BEAULIEU, D.; e FAFARD, M. Nonlinear finite element analysis of three-dimensional frames. **Canadian journal of civil engineering**, v. 21, n. 3, p. 461–470, 1994.

SHUGYO, Minoru. Elastoplastic Large Deflection Analysis of Three-Dimensional Steel Frames. **Journal of Structural Engineering**, v. 129, n. 9, p. 1259–1267, set. 2003.

DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:9(1259).

SILVA, Henrique Furia. **Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça**. Dissertação de Mestrado — Universidade de São Paulo, 2005.

SILVA, Renata Gomes Lanna. **Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas**. 2010. Tese de Doutorado — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

SILVA, Wellington Andrade da. **Análise dinâmica não-linear de pórticos espaciais utilizando a formulação corrotacional**. 2013. Tese de Doutorado — Universidade de Brasília, 2013.

SILVA, Renata Gomes Lanna da; LAVALL, Armando Cesar Campos; COSTA, Rodrigo Sernizon; e VIANA, Harley Francisco. Formulation for second-order inelastic analysis of steel frames including shear deformation effect. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 151, p. 216–227, 1 dez. 2018. ISSN 0143-974X. DOI 10.1016/J.JCSR.2018.09.011.

SILVA, Jéssica L.; DEUS, Lidiane R. R. M.; LEMES, Igor J. M.; e SILVEIRA, Ricardo A. M. Plastic analysis of steel arches and framed structures with various cross sections. **Steel and Composite Structures**, v. 38, n. 3, p. 257–270, 2021.

SILVA, Renata G. L.; e LAVALL, Armando C. C. Inelastic Behaviour of Partially Restrained Steel Frames. **International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures**, v. 2, n. Stability and ductility of steel structures, p. 673–680, 2010.

SOUZA, Remo Magalhães DE. **Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames**. University of California, Berkeley, 2000. ISBN 0493104666.

TANG, Yi-Qun; LIU, Yao-Peng; CHAN, Siu-Lai; e DU, Er-Feng. An innovative corotational pointwise equilibrating polynomial element based on Timoshenko beam theory for second-order analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 141, p. 15–27, 2019. ISSN 0263-8231.

TEH, Lip H. Beam element verification for 3D elastic steel frame analysis. **Computers & structures**, v. 82, n. 15–16, p. 1167–1179, 2004. ISSN 0045-7949.

TEH, Lip H.; e CLARKE, Murray J. Plastic-Zone Analysis of 3D Steel Frames Using Beam Elements. **Journal of Structural Engineering**, v. 125, n. 11, p. 1328–1337, nov. 1999. DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:11(1328).

THAI, Huu-Tai; e KIM, Seung-Eock. Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, n. 10–11, p. 1987–1994, 2009. ISSN 0143-974X.

THAI, Huu-Tai; e KIM, Seung-Eock. Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic dynamic analysis of steel structures. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 67, n. 3, p. 453–461, 2011. ISSN 0143-974X.

THAI, Huu-Tai; e KIM, Seung-Eock. Second-order distributed plasticity analysis of steel frames with semi-rigid connections. **Thin-Walled Structures**, v. 94, p. 120–128, 2015. ISSN 0263-8231.

TIMOSHENKO, S. P.; e GERE, J. E. Mecânica dos Sólidos. **Rio de Janeiro: LTC**, v. 1, 1994.

TIMOSHENKO, Stephen P.; e GERE, James M. **Theory of elastic stability**. Courier Corporation, 2012. ISBN 0486134806.

TITUS, Heera M.; e JAYACHANDRAN, S. Arul. Three-dimensional frame buckling benchmark problems for direct analysis method in ANSI/AISC 360-16. *In*: 2022. **Proceedings of the Annual Stability Conference Structural, Stability Research Council, Denver, Colorado**, 2022.

TOMA, S.; e CHEN, W. F. Calibration frames for second-order inelastic analysis in Japan. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 28, n. 1, p. 51–77, 1994. ISSN 0143-974X.

TRUONG, Viet-Hung; NGUYEN, Phu-Cuong; e KIM, Seung-Eock. An efficient method for optimizing space steel frames with semi-rigid joints using practical advanced analysis and the micro-genetic algorithm. **Journal of Constructional steel research**, v. 128, p. 416–427, 2017. ISSN 0143-974X.

TURKALJ, Goran; e BRNIĆ, Josip. Nonlinear Stability Analysis of Thin-Walled Frames Using UI–Esa Formulation. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 4, n. 01, p. 45–67, 2004. ISSN 0219-4554.

TURKALJ, Goran; BRNIC, Josip; e KRAVANJA, Stojan. A beam model for large displacement analysis of flexibly connected thin-walled beam-type structures. **Thin-walled structures**, v. 49, n. 8, p. 1007–1016, 2011. ISSN 0263-8231.

VIANA, Harley Francisco. **Análise avançada dinâmica de pórticos planos de aço**. 2019. 92 p. Dissertação de Mestrado — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

VIANA, Harley Francisco; SILVA, Renata Gomes Lanna DA; COSTA, Rodrigo Sernizon; e LAVALL, Armando Cesar Campos. Formulation for nonlinear dynamic analysis of steel frames considering the plastic zone method. **Engineering Structures**, v. 223, p. 111197, 15 nov. 2020. ISSN 01410296. DOI 10.1016/j.engstruct.2020.111197.

VLASOV, V. Z. **Thin-walled elastic beams**. 2. ed. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961.

VOGEL, U. Calibrating frames. **Stahlbau**, v. 10, n. Oct, p. 295–301, 1985. ISSN 0038-9145.

WHITE, Donald W. Plastic-hinge methods for advanced analysis of steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 24, n. 2, p. 121–152, 1993. ISSN 0143-974X.

YANG, Yeong-Bin; e MCGUIRE, William. Joint rotation and geometric nonlinear analysis. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 4, p. 879–905, 1986. ISSN 0733-9445.

YANG, Yeong-Bin; e SHIEH, Ming-Shan. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **AIAA journal**, v. 28, n. 12, p. 2110–2116, 1990. ISSN 0001-1452.

YANG, Qing Shan; e WANG, Xiao Feng. A geometrical and physical nonlinear finite element model for spatial thin-walled beams with arbitrary section. **Science China Technological Sciences**, v. 53, n. 3, p. 829–838, mar. 2010. DOI 10.1007/S11431-010-0065-9.

ZHANG, Xi; RASMUSSEN, Kim J. R.; e ZHANG, Hao. Formulation and implementation of three-dimensional doubly symmetric beam-column analyses with warping effects in OpenSees (No. R917). 2011. ISSN 1833-2781.

ZUBYDAN, Ahmed H. Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross sectional members. **Engineering Structures**, v. 48, p. 155–165, 2013. ISSN 0141-0296.

ZUBYDAN, Ahmed H.; ELSABBAGH, Ashraf I.; SHARAF, Tarek; e FARAG, Abbad-Elrahman. Inelastic large deflection analysis of space steel frames using an equivalent accumulated element. **Engineering Structures**, v. 162, p. 121–134, 2018. ISSN 0141-0296.

APÊNDICE A

A.1 Arquivo de saída: Viga engastada submetida a uma carga concentrada (Exemplo 8.2.1)

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	
Material n:	1
Coefficiente de Poisson:	0.3000000000
Tipo de Seção Transversal:	7
Número de Fatias da Seção Transversal:	24
Número de Propriedades(Incluindo Fatias):	50
Número da Última Fatia da Mesa Inferior:	10
Dados da Seção Transversal	Perfil I
	Flexão em torno dos Eixos Y e Z
Altura do Perfil:	52.80000
Largura da Mesa Inferior:	16.60000
Espessura da Mesa Inferior:	1.36000
Largura da Mesa Superior:	16.60000
Espessura da Mesa Superior:	1.36000
Espessura da Alma:	0.96500
Número de Fatias da Mesa Inferior:	10
Número de Fatias da Mesa Superior:	10
Número de Fatias da Alma:	4
Distância Y do C.G.:	-26.40000
Distância Z do C.G.:	-8.30000
Centro de Torção YD:	0.00000
Centro de Torção ZD:	0.00000

TENSOES RESIDUAIS NAS FATIAS	
Material n:	1
Numero de Fatias	Tensao Residual
1	0.00000
2	0.00000
3	0.00000
4	0.00000
5	0.00000
6	0.00000
7	0.00000
8	0.00000
9	0.00000
10	0.00000
11	0.00000
12	0.00000
13	0.00000
14	0.00000
15	0.00000
16	0.00000
17	0.00000
18	0.00000
19	0.00000
20	0.00000
21	0.00000
22	0.00000
23	0.00000
24	0.00000

DADOS DOS ELEMENTOS DA ESTRUTURA												
EL	NÓS		VINCULAÇÕES DOS NÓS		(0)-VÍNCULO ROTULADO / (1)-VÍNCULO RÍGIDO			TEMPERATURA		COORDENADAS DO PONTO P		
	j	k	INICIAL (j)	FINAL (k)	MATERIAL	TIPO DE ELEMENTO	DIVISÕES DOS EL.	VARIAÇÃO	COEF.DILATAÇÃO	COORD.X P	COORD.Y P	COORD.Z P
1	1	2	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	0.0000	5.0000	0.0000
2	2	3	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	108.0000	5.0000	0.0000
3	3	4	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	216.0000	5.0000	0.0000
4	4	5	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	324.0000	5.0000	0.0000
5	5	6	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	432.0000	5.0000	0.0000
6	6	7	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	540.0000	5.0000	0.0000
7	7	8	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	648.0000	5.0000	0.0000
8	8	9	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	756.0000	5.0000	0.0000
9	9	10	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	864.0000	5.0000	0.0000
10	10	11	1	1	1	PÓRTICO	1	0.00000	0.0000000	972.0000	5.0000	0.0000

COORDENADAS NODAIS			
NÓ	COORDENADA (X)	COORDENADA (Y)	COORDENADA (Z)
1	0.00000	0.00000	0.00000
2	108.00000	0.00000	0.00000
3	216.00000	0.00000	0.00000
4	324.00000	0.00000	0.00000
5	432.00000	0.00000	0.00000
6	540.00000	0.00000	0.00000
7	648.00000	0.00000	0.00000
8	756.00000	0.00000	0.00000
9	864.00000	0.00000	0.00000
10	972.00000	0.00000	0.00000
11	1080.00000	0.00000	0.00000

COMPRIMENTOS E COSSENOIS DIRETORES DE REFERÊNCIA DOS ELEMENTOS										
EL	COMP.REF. (LR)	COS.DIR.XR	COS.DIR.YR	COS.DIR.ZR	ANG.FI R2	ANG.FI RX	ANG.FI RY	ANG.TETA RX	ANG.TETA RY	ANG.TETA RZ
1	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
2	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
3	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
4	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
5	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
6	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
7	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
8	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
9	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
10	108.0000000	1.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	90.00000000	90.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000

DESLOCAMENTOS PRESCRITOS NOS APOIOS E/OU RECALQUES												
NÓ VINC.	TRAN.X	VALOR PRESC.X	TRAN.Y	VALOR PRESC.Y	TRAN.Z	VALOR PRESC.Z	ROT. X	VALOR PRESC.X	ROT. Y	VALOR PRESC.Y	ROT. Z	VALOR PRESC.Z
1	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000
2	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
3	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
4	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
5	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
6	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
7	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
8	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
9	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
10	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000
11	0	0.00000	0	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	1	0.00000	0	0.00000

COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DAS AÇÕES	
Ação Permanente (P) =	1.00
Ação Variável (V) =	1.00
Ação do Vento (W) =	1.00
Ação da Temperatura (T) =	0.00

FORÇAS APLICADAS NOS NÓS DA ESTRUTURA							
NÓ	AÇÕES	FORÇA (X)	FORÇA (Y)	FORÇA (Z)	MOMENTO (X)	MOMENTO (Y)	MOMENTO (Z)
1	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	P	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
11	P	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
11	V	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
11	W	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
11	T	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

PROCESSO INCREMENTAL/ITERATIVO	
Número Total de Incrementos:	1000
Número Total de Iterações:	99101
0 - Solução Convergada p/ cada Incremento Saída: 1 - Primeira Iter. p/cada Increm. + Sol.Conver. 2 - Todas Inter. p/cada Increm. + Sol.Conver. 3 - Solução Convergada p/ último Incremento	0
Parâmetro de carga (i-1):	0.000000E+00
Fator de Tolerância:	0.100000E-02 %

CONVERGÊNCIA DO PROCESSO INCREMENTAL/ITERATIVO	
Incremento n°:	1
Iteração n°:	3
Código de Convergência: 0 - Convergido. 1 - Convergindo.	0
Norma Resíduo Força:	0.100000E+03 %
Norma Resíduo Deslocamento:	0.458022E-08 %
Parâmetro de carga:	0.984035E-01

COORDENADAS NODAIS DA CONFIGURAÇÃO FINAL DA ESTRUTURA			
		Incremento n°:	Iteração n°:
		1	3
NÓ	COORDENADA (X)	COORDENADA (Y)	COORDENADA (Z)
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	108.0000000	-0.0007615	0.0000000
3	216.0000000	-0.0029411	0.0000000
4	323.9999999	-0.0063811	0.0000000
5	431.9999998	-0.0109240	0.0000000
6	539.9999997	-0.0164122	0.0000000
7	647.9999995	-0.0226883	0.0000000
8	755.9999993	-0.0295946	0.0000000
9	863.9999990	-0.0369735	0.0000000
10	971.9999988	-0.0446676	0.0000000
11	1079.9999985	-0.0525192	0.0000000

DESLOCAMENTOS E REAÇÕES NOS NÓS DOS ELEMENTOS												
Incremento n°:			1			Iteração n°:			3			
NÓ	DESL.X	REAC.X	DESL.Y	REAC.Y	DESL.Z	REAC.Z	ROTA.X	REAC.X	ROTA.Y	REAC.Y	ROTA.Z	REAC.Z
1	0.000000E+00	0.211552E-21	0.000000E+00	0.984035E-01	0.000000E+00	0.102798E-16	0.000000E+00	-0.469703E-20	0.000000E+00	-0.666134E-15	0.000000E+00	0.106276E+03
2	-0.350927E-08	0.000000E+00	-0.761528E-03	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.205597E-17	0.000000E+00	-0.313136E-20	0.000000E+00	-0.444089E-15	-0.138592E-04	0.000000E+00
3	-0.260794E-07	0.000000E+00	-0.294107E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.195317E-16	0.000000E+00	-0.242505E-21	0.000000E+00	-0.333067E-15	-0.262596E-04	0.000000E+00
4	-0.812226E-07	0.000000E+00	-0.638108E-02	0.000000E+00	0.000000E+00	0.616791E-17	0.000000E+00	0.258877E-19	0.000000E+00	0.777156E-15	-0.372011E-04	0.000000E+00
5	-0.176935E-06	0.000000E+00	-0.109240E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.308395E-17	0.000000E+00	0.186802E-19	0.000000E+00	0.444089E-15	-0.466837E-04	0.000000E+00
6	-0.316385E-06	0.000000E+00	-0.164122E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.565391E-17	0.000000E+00	0.483201E-20	0.000000E+00	0.111022E-15	-0.547075E-04	0.000000E+00
7	-0.498603E-06	0.000000E+00	-0.226883E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.102798E-17	0.000000E+00	-0.445273E-19	0.000000E+00	-0.721645E-15	-0.612724E-04	0.000000E+00
8	-0.719175E-06	0.000000E+00	-0.295946E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.175897E-17	0.000000E+00	-0.121070E-19	0.000000E+00	-0.166532E-15	-0.663784E-04	0.000000E+00
9	-0.970923E-06	0.000000E+00	-0.369735E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.385494E-18	0.000000E+00	0.520318E-20	0.000000E+00	0.832667E-16	-0.700256E-04	0.000000E+00
10	-0.124461E-05	0.000000E+00	-0.446672E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.256988E-18	0.000000E+00	-0.409641E-20	0.000000E+00	-0.555112E-16	-0.722139E-04	0.000000E+00
11	-0.152961E-05	0.000000E+00	-0.525192E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.899494E-18	0.000000E+00	-0.615794E-25	0.000000E+00	-0.847032E-21	-0.729432E-04	0.000000E+00

ESFORÇOS SOLICITANTES EM CADA ELEMENTO												
Incremento n°:			1		Iteração n°:		3					
EL	NÓ (j)						NÓ (k)					
	ESF.NORMAL	ESF.CORTANTEY	ESF.CORTANTEZ	MM.M. TORÇORX	MM.M. FLETORY	MM.M. FLETORZ	ESF.NORMAL	ESF.CORTANTEY	ESF.CORTANTEZ	MM.M. TORÇORX	MM.M. FLETORY	MM.M. FLETORZ
1	-0.693878E-06	0.984035E-01	-0.411194E-17	0.000000E+00	0.222045E-15	0.106276E+03	0.693878E-06	-0.984035E-01	0.411194E-17	0.000000E+00	0.222045E-15	-0.956482E+02
2	-0.198589E-05	0.984035E-01	0.822387E-17	0.000000E+00	-0.222045E-15	0.956482E+02	0.198589E-05	-0.984035E-01	-0.822387E-17	0.000000E+00	-0.666134E-15	-0.850206E+02
3	-0.313422E-05	0.984035E-01	0.308395E-17	0.000000E+00	-0.332067E-15	0.850206E+02	0.313422E-05	-0.984035E-01	-0.308395E-17	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.743930E+02
4	-0.413934E-05	0.984035E-01	0.411194E-17	0.000000E+00	-0.332067E-15	0.743930E+02	0.413934E-05	-0.984035E-01	-0.411194E-17	0.000000E+00	-0.111022E-15	-0.637654E+02
5	-0.500150E-05	0.984035E-01	-0.513992E-17	0.000000E+00	0.666134E-15	0.637654E+02	0.500150E-05	-0.984035E-01	0.513992E-17	0.000000E+00	-0.111022E-15	-0.521379E+02
6	-0.571751E-05	0.984035E-01	-0.462599E-17	0.000000E+00	0.444089E-15	0.531379E+02	0.571751E-05	-0.984035E-01	0.462599E-17	0.000000E+00	0.555112E-16	-0.425103E+02
7	-0.629303E-05	0.984035E-01	0.205597E-17	0.000000E+00	-0.222045E-15	0.425103E+02	0.629303E-05	-0.984035E-01	-0.205597E-17	0.000000E+00	0.000000E+00	-0.318827E+02
8	-0.672288E-05	0.984035E-01	-0.488299E-17	0.000000E+00	0.332067E-15	0.318827E+02	0.672288E-05	-0.984035E-01	0.488299E-17	0.000000E+00	0.194289E-15	-0.212551E+02
9	-0.700953E-05	0.984035E-01	0.385494E-18	0.000000E+00	-0.277556E-16	0.212551E+02	0.700953E-05	-0.984035E-01	-0.385494E-18	0.000000E+00	-0.138778E-16	-0.106276E+02
10	-0.715544E-05	0.984035E-01	0.514006E-18	0.000000E+00	-0.555112E-16	0.106276E+02	0.715544E-05	-0.984035E-01	-0.514006E-18	0.000000E+00	-0.148231E-20	-0.143124E-08

DEFORMAÇÕES E TENSÕES EM CADA ELEMENTO									
Elemento n°				1	Incremento n°:	1	Iteração n°:	3	Código de Convergência:
NÓ (j)					NÓ (k)				
FATIA	DEF. ELÁSTICA	DEF. PLÁSTICA	DEF. TOTAL	TENSÃO	DEF. ELÁSTICA	DEF. PLÁSTICA	DEF. TOTAL	TENSÃO	OBSERVAÇÃO
									NÓ: j - k
24	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
23	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
22	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
21	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
20	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
19	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
18	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
17	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
16	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
15	0.347426322E-05	0.000000000E+00	0.347426322E-05	0.06949	0.312683703E-05	0.000000000E+00	0.312683703E-05	0.06254	FATAMAR: 1 - 1
14	0.253680668E-05	0.000000000E+00	0.253680668E-05	0.05074	0.228312605E-05	0.000000000E+00	0.228312605E-05	0.04566	FATAMAR: 1 - 1
13	0.845602474E-06	0.000000000E+00	0.845602474E-06	0.01691	0.761042263E-06	0.000000000E+00	0.761042263E-06	0.01522	FATAMAR: 1 - 1
12	-0.845601731E-06	0.000000000E+00	-0.845601731E-06	-0.01691	-0.761041521E-06	0.000000000E+00	-0.761041521E-06	-0.01522	FATAMAR: 1 - 1
11	-0.253680594E-05	0.000000000E+00	-0.253680594E-05	-0.05074	-0.228312530E-05	0.000000000E+00	-0.228312530E-05	-0.04566	FATAMAR: 1 - 1
10	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
9	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
8	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
7	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
6	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
5	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
4	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
3	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
2	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1
1	-0.347426258E-05	0.000000000E+00	-0.347426258E-05	-0.06949	-0.312683628E-05	0.000000000E+00	-0.312683628E-05	-0.06254	FATAMAR: 1 - 1