



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Associação Ampla entre CEFET-MG e UFSJ

ANÁLISES DE PRECISÃO, ESTABILIDADE E DISPERSÃO NUMÉRICA NOS MÉTODOS IMPLÍCITOS DE DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Michelle Barbosa Guimarães

2017

Michelle Barbosa Guimarães

ANÁLISES DE PRECISÃO, ESTABILIDADE E DISPERSÃO NUMÉRICA NOS MÉTODOS IMPLÍCITOS DE DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, parceria ampla entre o CEFET-MG e UFSJ.

Área de Concentração: Sistemas Elétricos.

Linha de Pesquisa: Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Goncalves.



Belo Horizonte

2017

Guimarães, Michelle Barbosa

G963a Análise de precisão, estabilidade e dispersão numérica nos métodos implícitos de diferenças finitas no domínio do tempo. / Michelle Barbosa Guimarães. – – Belo Horizonte, 2017.
77 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica em associação ampla com a Universidade Federal de São João Del Rei, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves

Bibliografia

1.Diferenas Finitas. 2. Campos Eletromagnéticos. 3.Metodos dos Elementos Finitos. I. Gonçalves, Sandro Trindade Mordente. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título

CDD 621.34

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me ter erguido nos momentos difíceis e me dado condições para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu esposo Alan pela paciência, compreensão e amor em todos os momentos dessa trajetória, principalmente na finalização do trabalho.

Aos meus pais Silvania e Emir pela força, apoio incondicional, pelo amor e por ter me ajudado em toda minha carreira acadêmica. Ao meu irmão por sempre estar ao meu lado e me apoiar nas escolhas.

Aos meus sogros Silvia e Carlos e meus cunhados Amanda, Diogo e Adriano por estarem sempre torcendo pelas minhas conquistas.

A meu orientador Sandro Trindade, por toda ajuda e clareza em repassar os conhecimentos, pelas motivações em descobrir novos aprendizados e pelas conquistas realizadas diante de tantos desafios.

Aos amigos Sandro, Giseli, Joyce e Aninha por sempre motivarem a buscar o conhecimento e acreditarem na minha vitória.

Aos Amigos do Cefet: Tarcísio, Wagner, Rafaella, Ludmila, Aloisio, Bárbara e Lucas por compartilharem momentos de dificuldades e vitórias juntos.

A CAPES e ao CEFET-MG pelo suporte financeiro.

RESUMO

O método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) tem sido amplamente utilizado para análises de propagação de ondas e de dispositivos eletromagnéticos como antenas, guias de ondas e cavidades eletromagnéticas por ter como característica a simplicidade de implementação, robustez e eficiência em sistemas de banda larga. Contudo, o método FDTD apresenta como desvantagem a limitação da condição de estabilidade de Courant-Friedrich-Levy (CFL) que relaciona um valor máximo a ser utilizado no passo de tempo. Diante dessa limitação, esse trabalho apresenta um estudo dos métodos de diferenças finitas no domínio do tempo implícitos e que são incondicionalmente estáveis. É realizado um estudo em relação à precisão, estabilidade e custo computacional dos métodos implícitos FDTD-ADI (*Alternating Direction Implicit*) e FDTD-LOD (*Locally One Dimension*) envolvendo problemas tridimensionais. A análise dos métodos incondicionalmente estáveis envolve a solução de um sistema matricial e essa solução pode interferir na estabilidade e precisão dos valores dos campos elétricos. Nesse trabalho é realizado um comparativo de diversos métodos numéricos utilizados para solucionar o sistema matricial dos métodos incondicionalmente estáveis. Esse comparativo é realizado em aplicações envolvendo cavidades eletromagnéticas com paredes condutoras elétricas perfeitas (PEC). A aplicação da condição de contorno PEC é estudada e abordada de forma a manter a solução estável, eficiente e com maior precisão. O trabalho também apresenta a aplicação do método FDTD-ADI na análise dos campos elétricos em uma esfera dielétrica e metálica em que a condição absorvente Mur é utilizada na fronteira do domínio computacional e o problema simulado é investigado em três dimensões.

Palavra-chave: FDTD-ADI, FDTD-LOD, tridiagonais, solução matricial.

ABSTRACT

The finite difference time domain method (FDTD) has been widely used for propagation analysis of waves and electromagnetic devices such as antennas, waveguides and cavities because it has simplicity of implementation, robustness and efficiency in band systems large. However, the FDTD method has as a disadvantage the limitation of the Courant-Friedrich-Levy (CFL) stability condition which relates a maximum value to be used in the time step. Faced with this limitation, this work presents a study of implicit time finite difference methods that are unconditionally stable. A study was performed regarding the accuracy, stability and computational cost of the FDTD-ADI (Alternating Direction Implicit) and FDTD-LOD (Locally One Dimension) method. The analysis of the unconditionally stable methods involves the solution of a matrix system and this solution can interfere in the stability and precision of the values of the electric fields. In this work, a comparison of several numerical methods used to solve the matrix system of unconditionally stable methods is carried out. This comparative is realized in applications involving electromagnetic cavities with perfect electrical conducting walls (PEC). The application of the PEC contour condition is studied and approached in order to keep the solution stable, efficient and with greater accuracy. The work also presents to the application of the FDTD-ADI method in the analysis of electric fields in a dielectric and metallic sphere in which the absorbent condition Mur is used at the frontier of the computational domain and the simulated problem is investigated in three dimensions

Key words: FDTD-ADI, FDTD-LOD, tridiagonal, matrix solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Métodos de diferenças finitas no domínio do tempo.....	13
Figura 2.1 – Cubo de Yee.....	19
Figura 4.1 – Resultado comparativo utilizando métodos de Thomas e Cholesky.	54
Figura 4.2 – Método FDTD-ADI utilizando método W. Press.....	55
Figura 4.3 – Método de Gauss-Seidel com CFLN=8.	56
Figura 4.4 – Método Gauss-Seidel com CFLN=8 e CFLN=20.....	56
Figura 4.5- Método de Jacobi com CFLN=8.....	57
Figura 4.6 – Método de Jacobi com CFLN=20.	58
Figura 4.7 – Método 01 e método 03.....	60
Figura 4.8 – Método 02 e método 03.....	61
Figura 4.9 - Método 03 com 1000 iterações.	62
Figura 4.10 – Método 01 e método 03 aplicados no método FDTD-LOD.....	62
Figura 4.11 – Método 02 e método 03 aplicados no método FDTD-LOD.....	63
Figura 4.12 – Método 03 aplicados no método FDTD-LOD.....	63
Figura 4.13 – Análise de precisão do método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e $CFLN = 2$	64
Figura 4.14 – Análise de precisão do método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e $CFLN = 8$	64
Figura 4.15 – Análise de precisão do método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e $CFLN = 8$	65
Figura 4.16 – Análise de precisão do método FDTD-LOD com CFLN=1 e CFLN=2.	66
Figura 4.17 – Análise de precisão do método FDTD-LOD com CFLN=1 e CFLN=4	66
Figura 4.18 - Análise de precisão do método FDTD-LOD com CFLN=1 e CFLN=2.	67
Figura 4.19-Implementação de Mur em FDTD-ADI em (20,10,5).....	68
Figura 4.20– Implementação de Mur em FDTD-ADI e FDTD em (5, 10, 15).....	69
Figura 4.21– Implementação de Mur em FDTD-ADI com 2500 iterações.....	69
Figura 4.22– Comparativo entre os métodos FDTD-ADI/LOD na aplicação de Mur.....	70
Figura 4.23– Implementação de Mur em FDTD-ADI.....	71
Figura 4.24- Implementação de Mur em FDTD-ADI com fator.....	71
Figura 4.25 Implementação de Mur com condutividade elétrica.....	72
Figura 4.26- Implementação de Mur com condutividade elétrica e CFLN=2.....	72
Figura 4.27- Implementação de Mur em FDTD-ADI e CFLN=8.....	73
Figura 4.28- Implementação de Mur com método W.Press.....	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Métodos numéricos para solução do sistema tridiagonal do método FDTD-ADI.....	58
Tabela 4.2 - Métodos numéricos para solução do sistema tridiagonal do método FDTD-ADI.....	59
Tabela 4.3 – Algoritmo de Thomas com aumento do CFLN no método FDTD-ADI.....	65
Tabela 4.4 – Algoritmo de Thomas com aumento do CFLN no método FDTD-LOD.....	67
Tabela 4.5 - Comparativo do custo computacional entre os métodos FDTD, FDTD-ADI e FDTD-LOD.....	67
Tabela 4.6 - Métodos numéricos para solução do sistema tridiagonal do método FDTD-ADI.....	73
Tabela 4.7 – Frequência do campo elétrico no ponto.....	74
Tabela 4.8 – Frequência do campo elétrico no ponto.....	75
Tabela 4.9– Frequência do campo elétrico no ponto	75

LISTA DE ABREVIACÕES

ADI	<i>Alternating direction implicit</i>
CFL	<i>Courant-Friedrich-Levy</i>
CFLN	<i>Courant-Friedrich-Levy-Number</i>
FDTD	<i>Método de diferenças finitas no domínio do tempo</i>
LOD	<i>Locally One Dimension</i>
PEC	<i>Perfect Electric Conductor</i>
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i>

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1.1 Introdução.....	12
1.2 Modelagem dos métodos incondicionalmente estáveis.....	14
1.3 Objetivos.....	16
1.4 Organização do trabalho	17
MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO	18
2.1 Método FDTD	18
2.2 Métodos Incondicionalme estáveis	20
2.2.1 Método FDTD-ADI.....	20
2.2.2 Método FDTD-LOD	25
2.2.3 Implementação da fonte de excitação	27
2.2.3.1 Excitação da fonte Implícita	27
2.2.3.2 Excitação da fonte Explícita	28
2.3 IMPLEMENTAÇÃO DO CONDUTOR ELÉTRICO PERFEITO	29
2.3.1 Solução analítica	29
2.3.2 Solução computacional pelo método FDTD-ADI	31
2.4 Implementação de Mur	33
2.5 Espalhamento em esfera dielétrica e condutora	38
CAPÍTULO 3	40
ANÁLISES DE ESTABILIDADE E PRECISÃO	40
3.1 Soluções de sistemas matriciais tridiagonais em métodos implícitos.....	40
3.1.1 Métodos diretos.....	41
3.1.1.1 Método de Cholesky	41
3.1.1.2 Método de Thomas	43
3.1.1.3 Método de William Press	44

3.1.2 Métodos iterativos	44
3.1.2.1 Método de Gauss-Seidel	44
3.1.2.2 Método de Jacobi	45
3.2 Análise de estabilidade	46
3.3 Análise de dispersão numérica	50
RESULTADOS E DISCUSSÕES	53
4.1 Introdução	53
4.2 Análises dos métodos matriciais	53
4.3 Análises da implementação da cavidade eletromagnética	60
4.4 Análises da eficiência e precisão	64
4.5 Análises no espaço livre	68
CONCLUSÕES	76

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

Nas últimas décadas, o avanço dos métodos matemáticos e da computação impulsionaram as pesquisas na área de Engenharia Elétrica, principalmente no campo de eletromagnetismo. Devido à dificuldade de solucionar analiticamente alguns problemas eletromagnéticos, os métodos computacionais tornaram-se uma ferramenta viável devido ao enorme avanço tecnológico, visto que os métodos computacionais requerem grandes quantidades de processamento e memória para análise de estruturas complexas.

Com a utilização de métodos computacionais é possível analisar e simular a interação de campos eletromagnéticos com objetos físicos ou no espaço livre. Os métodos computacionais que envolvem problemas eletromagnéticos são desenvolvidos com a utilização das equações de Maxwell que podem ser exploradas no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Em casos em que essa análise seja realizada em um sistema de banda larga a utilização das equações de Maxwell no domínio da frequência torna-se onerosa devido ao aumento significativo do custo computacional pois tais métodos necessitam computar cada frequência separadamente. Essa limitação dos métodos no domínio da frequência conduziu à estudos de métodos no domínio do tempo que solucionam as equações de Maxwell para um problema de banda larga em apenas uma simulação.

O método de diferenças finitas do domínio do tempo (FDTD), inicialmente proposto por Kane S. Yee em 1966 [1] foi desenvolvido através da discretização espacial e temporal das equações de Maxwell. Em um esquema explícito e intercalado é obtida uma distribuição dos campos elétricos e magnéticos em cada passo de tempo e é possível mais facilmente compreender o comportamento físico desses campos graficamente. O método FDTD tem sido amplamente utilizado para análises de propagação de ondas e de dispositivos

eletromagnéticos como antenas, guias de ondas e cavidades eletromagnéticas por ter como característica a simplicidade de implementação, robustez e eficiência em sistemas de banda larga.

Os métodos FDTD podem ser classificados em métodos explícitos ou métodos implícitos conforme pode ser observado na Figura 1.1. Os métodos explícitos possuem simplicidade de implementação, pois a solução de um campo elétrico atual depende apenas da solução no instante de tempo anterior. O método FDTD explícito apresenta como desvantagem uma grande demanda computacional em análises tridimensionais para problemas eletricamente grandes e em problemas envolvendo cavidades eletromagnéticas pois essas demandam longos tempos de simulação para a resposta ser determinada com precisão. Essas desvantagens estão associadas ao limite de passo de tempo imposto pela condição de estabilidade de Courant-Friedrich-Levy (CFL). Essa condição de estabilidade estabelece uma relação entre os incrementos espaciais Δx , Δy , Δz e o incremento temporal Δt . Dessa forma, o método FDTD convencional inicialmente proposto por Yee [1], é um método explícito.

Os métodos implícitos possuem como grande vantagem a estabilidade incondicional devido a não dependência da dimensão física do espaço simulado em relação ao incremento temporal. Entretanto, os métodos implícitos tem maior complexidade de implementação pois a solução em um instante de tempo atual depende de outras soluções no mesmo instante de tempo de modo que o resultado só é possível solucionando um sistema matricial linear.

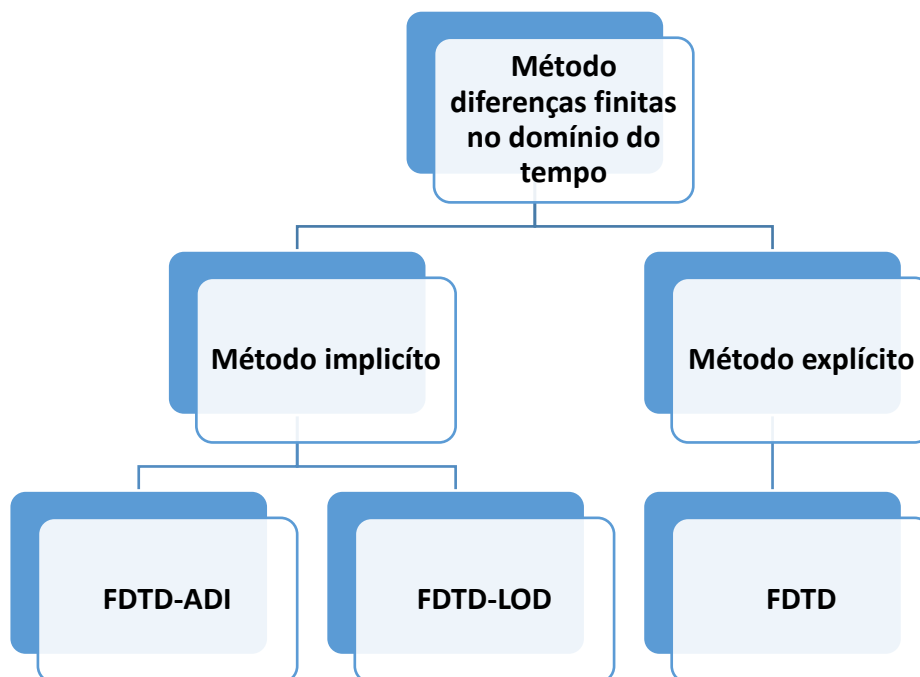


Figura 1.1 – Métodos de diferenças finitas no domínio do tempo.

Entre os métodos implícitos estão o método o FDTD-ADI (*Alternating Direction Implicit*) e o método FDTD-LOD (*Locally One Dimension*). O método FDTD-ADI foi introduzido por Namiki em [2] que demonstra uma análise bidimensional do método. A análise em problemas tridimensionais foi demonstrada por Zheng [3] em 2000. O método FDTD-LOD (*Locally One Dimension*) foi originalmente proposto por Yanenko [4]. A análise bidimensional do método FDTD-LOD foi proposta inicialmente por Shibayama [5] e sua análise tridimensional foi proposta posteriormente em 2007 por Tan [6]. O trabalho realizado por Namiki em [7] compara os métodos FDTD e FDTD-ADI em relação ao tempo de processamento gasto na simulação de uma antena *microstrip*. Como resultados são obtidos tempos de processamento muito menores quando aplicado o método FDTD-ADI. Esse resultado advém de ser possível utilizar um passo de tempo maior no método FDTD-ADI do que no método FDTD convencional que é condicionado ao CFL pois com esse aumento do passo de tempo é possível reduzir o número de iterações necessárias para uma solução precisa.

O aumento do passo de tempo nos métodos implícitos não interfere na estabilidade do problema, mas conduz a um valor maior de dispersão numérica. Os trabalhos de Wang [8] e Zhao [9] demonstram o aperfeiçoamento do método FDTD-ADI para diminuir a dispersão numérica e aumentar a precisão. Os trabalhos introduzem na discretização do método FDTD-ADI parâmetros anisotrópicos com valores ótimos para obter uma redução do erro de dispersão numérica devido à utilização de um valor alto para o passo de tempo. O método FDTD-LOD possui como uma desvantagem em relação ao método FDTD-ADI o fato de que sua precisão é de primeira ordem no tempo, diferentemente da precisão do método FDTD-ADI que é de segunda ordem no tempo o que torna o erro menor com o aumento do passo de tempo. Contudo, essa desvantagem pode ser contornada conforme o trabalho realizado por Tan em [10] que propõe um esquema com alta precisão de segunda ordem para o método FDTD-LOD diminuindo assim o valor do erro. Esta melhoria da precisão é obtida, no entanto, com aumento do custo computacional.

1.2 Modelagem dos métodos incondicionalmente estáveis.

Nos métodos incondicionalmente estáveis os cálculos das iterações dos campos elétricos e magnéticos são divididos em dois ou mais passos de tempo intermediários. Em cada passo

de tempo os campos elétricos nas direções cartesianas x , y e z são resolvidos de forma implícita através da solução de um sistema matricial. É de suma importância a escolha do método numérico utilizado para solucionar os sistemas matriciais no método FDTD-ADI e FDTD-LOD pois essa afeta diretamente a eficiência, precisão, estabilidade e custo computacional da solução. Nesse trabalho os métodos de Thomas, W.Press, Cholesky, Jacobi e Gauss-Seidel são investigados e aplicados na solução do método FDTD-ADI e FDTD-LOD. No trabalho de Guimarães em [11] é apresentado um estudo sobre a eficiência e precisão utilizando diversos métodos numéricos para solucionar o sistema matricial do método FDTD-ADI em uma cavidade eletromagnética retangular.

Nos métodos incondicionalmente estáveis é possível aplicar na solução dos sistemas matriciais duas classes de métodos numéricos: métodos diretos e métodos iterativos. Segundo Cunha em [12] os métodos diretos caracterizam-se por fornecer a solução exata dos sistemas de equações, exceto por erros de arredondamento introduzidos pela aritmética do computador, após um número finito de passos. Os métodos iterativos são mais utilizados em sistemas matriciais esparsos e de grande porte devido ao seu potencial de otimização de armazenamento e eficiência computacional. Os métodos iterativos encontram a solução após que um critério de parada previamente determinado seja alcançado. No trabalho realizado por Zhao em [13] o mesmo compara dois métodos diretos e demonstra que o resultado obtido por um deles conduz à instabilidade a solução do método FDTD-ADI. Dessa forma, a investigação dos resultados desses diversos métodos numéricos aplicados nos métodos incondicionalmente estáveis, FDTD-ADI e FDTD-LOD, deve ser conduzida a fim de obter uma maior eficiência e um resultado fidedigno.

A análise da eficiência, precisão e custo computacional dos métodos numéricos utilizados na solução do sistema matricial dos métodos implícitos pode ser realizada na aplicação de problemas que envolvem cavidades eletromagnéticas e para simular problemas mais complexos como objetos no espaço livre. Problemas de cavidades eletromagnéticas possuem um menor custo computacional ao utilizar os métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD em relação ao método FDTD devido à possibilidade de utilização de um valor de passo de tempo maior, porém a aplicação da condição de contorno PEC (*Perfect Electric Conductor*) deve ser feita com cautela para que a mesma não conduza o sistema a instabilidade devido a complexidade de implementação das equações implícitas e pelo fato dos valores das componentes dos campos elétricos não serem atualizadas diretamente. No trabalho de Chen e Wang em [14] os mesmos demonstram as formas possíveis de aplicação da PEC, as formas que levam o

resultado a instabilidade e a forma que mantém o resultado estável. O trabalho demonstra que ocorre instabilidade na solução do método FDTD-ADI e FDTD-LOD ao atualizar explicitamente os campos elétricos tangenciais na fronteira do domínio computacional que devem possuir valores nulos na aplicação da PEC.

Os métodos implícitos de diferenças finitas no domínio do tempo se tornam muito atrativos nas análises de cavidades eletromagnéticas e em problemas que requerem um maior valor de passo de tempo como problemas eletricamente grandes. Dessa forma, é de grande importância a investigação de um método numérico mais eficaz utilizado para solucionar os sistemas matriciais dos métodos implícitos.

Em problemas mais complexos é necessária a utilização de uma condição absorvente de fronteira. Uma alternativa é utilizar a condição de fronteira Mur e adicionar um tratamento especial à matriz modificando-a para que as condições de fronteira sejam aplicadas dentro do sistema matricial implicitamente. Say Cheoh em [15] apresenta três formas de aplicação da condição de fronteira Mur e um tratamento especial para manter a estabilidade. A primeira forma é implementar a condição de fronteira Mur dentro do sistema matricial. A segunda adiciona o fator f , onde $0 < f < 1$, nas equações de campo elétrico a fim de manter a estabilidade em problemas mais complexos. A terceira forma é incluída a condutividade elétrica do material a ser analisado. O estudo da forma mais eficiente e precisa da aplicação da condição de fronteira que possibilite a simulação de problemas mais complexos torna-se muito importante.

Os métodos implícitos, FDTD-ADI e FDTD-LOD, possuem configurações especiais quanto à atualização de suas fronteiras utilizando materiais condutores elétricos perfeitos e na atualização da condição de fronteira absorvente Mur. Essas configurações tornam as análises e o desenvolvimento desses métodos mais complexos o que justifica um estudo aprofundado para manter a eficiência e precisão requeridas.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um estudo teórico, numérico e computacional da estabilidade, dispersão, precisão e custo computacional dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD em cavidades eletromagnéticas e em uma esfera dielétrica e metálica em que será necessária a implementação de uma condição de fronteira absorvente.

Objetivos intermediários foram superados e enumerados abaixo e resumem a metodologia utilizada durante o desenvolvimento do projeto.

- Solucionar o sistema matricial da forma mais eficiente e aplicar o melhor método numérico matemático.
- Analisar a estabilidade, precisão, dispersão numérica e custo computacional dos métodos matemáticos utilizados para solução do sistema matricial dos métodos incondicionalmente estáveis em análises tridimensionais.
- Desenvolver e analisar a solução de condutor elétrico perfeito como condição de contorno para o problema proposto em análises tridimensionais.
- Desenvolver e analisar a condição absorvente de fronteira Mur para o método FDTD-ADI e FDTD-LOD em análises tridimensionais
- Simular problemas de cavidades eletromagnéticas e propagação no espaço livre e comparar os resultados entre os métodos FDTD, FDTD-ADI e FDTD-LOD, com a finalidade de demonstrar a eficiência dos métodos incondicionalmente estáveis.
- Analisar os campos elétricos em uma esfera dielétrica e metálica através do método FDTD-ADI e comparar os resultados com o método FDTD convencional e analítico.

1.4 Organização do trabalho

Os capítulos foram organizados de forma a facilitar a compreensão do presente trabalho seguindo a ordem cronológica do desenvolvimento do mesmo. Dessa forma o mesmo foi dividido em cinco capítulos, incluído esse primeiro capítulo de revisão sobre os métodos FDTD, FDTD-ADI e FDTD-LOD, além de evidenciar os objetivos gerais e específicos. No Capítulo 2 é apresentado o desenvolvimento matemático e numérico do método FDTD-ADI e FDTD-LOD, a formulação apropriada para a fonte de excitação, o desenvolvimento da condição de contorno PEC e o desenvolvimento da condição de fronteira absorvente Mur. No Capítulo 3 apresenta a formulação utilizada para análise sobre estabilidade, dispersão numérica e precisão dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD. No Capítulo 4 são apresentados os resultados das análises sobre estabilidade, precisão, dispersão numérica e custo computacional em aplicações para cavidade eletromagnética utilizando vários métodos matemáticos para solução matricial dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD e análises de campos elétricos em uma esfera dielétrica e metálica utilizando o método FDTD-ADI e o

algoritmo de Mur como condição absorvente de fronteira. No Capítulo 5 é apresentada a conclusão do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

2.1 Método FDTD

Em 1966 Kane. S Yee [1] demonstrou que as equações de Maxwell no domínio do tempo poderiam numericamente ser solucionadas através de aproximações por diferenças finitas. O método apresentou a discretização das equações de Maxwell de uma forma simples. Nesse método utiliza-se um modelo no qual o espaço é discretizado de forma que o campo elétrico possua um deslocamento espacial em relação ao campo magnético. O modelo utilizou o espaço tridimensional cartesiano em que cada componente do vetor E é contornado por quatro componentes do vetor H e vice-versa. Yee utilizou um cubo para posicionar cada uma das componentes de cada campo como pode ser visualizada pela Figura 2.1. Por esta razão a mesma é conhecida como cubo de Yee.

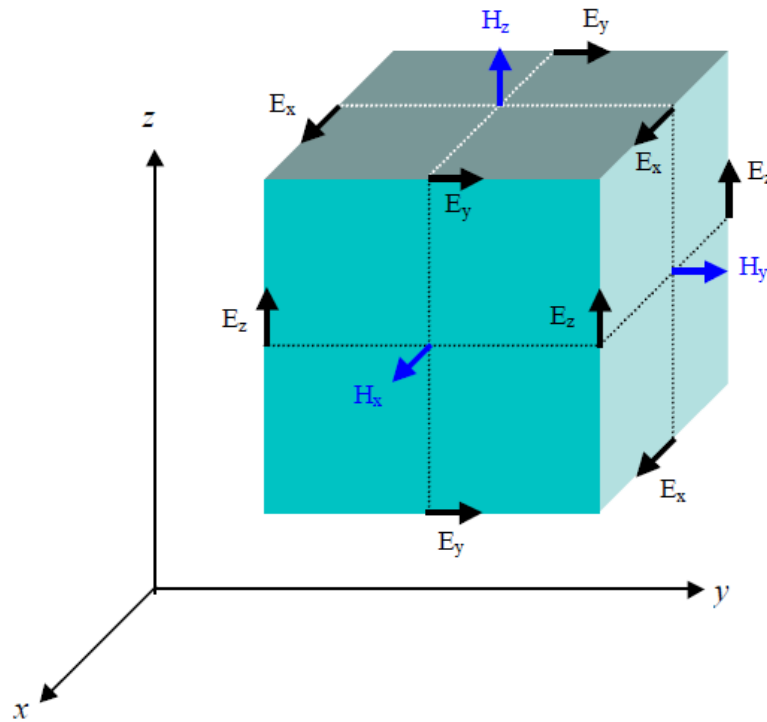


Figura 1.1 – Cubo de Yee.

O espaço tridimensional é preenchido com uma grande quantidade de cubos. Devido ao número de cubos que irão preencher o espaço ser grande, faz-se necessário especificar uma notação para determinar a posição de cada um deles. Essa notação utiliza os incrementos espaciais (Δx , Δy , Δz) de cada célula de modo que um ponto no espaço seja representado pela notação $(x, y, z) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) = (i, j, k)$.

As componentes do vetor campo elétrico E são calculadas em um determinado ponto através de valores armazenados do campo magnético em um instante de tempo anterior. Os valores das componentes do campo magnético são calculados através dos valores recentemente calculados dos campos elétricos. Esse processo é contínuo até que o tempo total de simulação seja alcançado.

A discretização realizada no algoritmo proposto por Yee pode causar uma dispersão numérica que está associada à variações do comprimento de onda de acordo com a direção da onda propagante. Dessa forma, o algoritmo de Yee pode apresentar um tipo de dispersão para ondas eletromagnéticas que independe das características do material analisado. Para obter menores valores de dispersão numérica o incremento espacial deve ser menor que 10% do comprimento de onda a ser analisado [1], assim evitando erros de magnitude e fase nos campos elétricos analisados.

Outro fator que é diretamente influenciado pela discretização é a estabilidade do sistema. Assim, é de extrema importância que exista uma relação entre os incrementos espaciais (Δx , Δy , Δz) e o incremento temporal (Δt). Essa relação é apresentada através da Equação (2.1) e representa a condição de estabilidade CFL.

$$\Delta t_{max}^{fdd} < \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (2.1)$$

em que Δt_{max}^{fdd} é o limite do passo de tempo imposto para o FDTD, c é a velocidade da luz e (Δx , Δy , Δz) são as dimensões físicas nas direções cartesianas (x , y , z) respectivamente.

2.2 Métodos Incondicionalmente estáveis

O método FDTD convencional é muito utilizado em simulações de problemas eletromagnéticos devido sua simplicidade de implementação. Entretanto, como o valor do passo de tempo é limitado pela condição de CFL o numero de iterações necessárias em algumas simulações pode ser muito grande tornando o tempo de simulação e o esforço computacional oneroso. Uma forma de contornar essa desvantagem é utilizar métodos incondicionalmente estáveis como os métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD que não possuem limitação do passo de tempo.

2.2.1 Método FDTD-ADI

No método FDTD-ADI proposto por Namiki [2] as restrições impostas para estabilidade do método FDTD convencional não são necessárias. Essa nova abordagem de Namiki resultou em um método implícito, diferentemente do FDTD que é um método puramente explícito. Com isso, no método FDTD-ADI é possível utilizar passos de tempo significativamente maiores pelo fato deste não ser mais restrito a condição de estabilidade CFL.

No método FDTD-ADI o valor do passo de tempo é arbitrário e o fator multiplicador no qual esse valor é maior que o passo de tempo imposto para o FDTD é expresso como Courant-Friedrich-Levy-Number (CFLN) que é apresentado na Equação (2.2),

$$CFLN = \frac{\Delta t}{\Delta t_{max}^{fdda}}. \quad (2.2)$$

Dessa forma, o passo de tempo do método FDTD-ADI não é limitado pela estabilidade, mas pela precisão necessária do problema analisado. Observa-se no trabalho de Guimaraes em [11] uma redução significativa da precisão da solução no método FDTD-ADI ao utilizar o $CFLN = 20$ em aplicações envolvendo cavidades eletromagnéticas.

O método FDTD-ADI é dividido em duas sub-iterações e em cada sub-iteração são calculados todas as componentes de campos elétricos e magnéticos. As componentes de campos elétricos são calculados de forma implícita através um sistema matricial e as componentes de campos magnéticos são calculados diretamente de forma explícita. A primeira sub-iteração do método FDTD-ADI em três dimensões apresentadas por Tan em [6] é de n a $n + 1/2$ e a segunda de $n + 1/2$ a $n + 1$. As equações das duas sub-iterações são apresentadas nas Equações (2.3) a (2.15).

1) Sub-iteração 1:

$$E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times \left[H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times \left[H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right) \right], \quad (2.3)$$

$$E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) = E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta z}\right) \times \left[H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - H_z^n\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) \right], \quad (2.4)$$

$$E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) = E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_x^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) \right], \quad (2.5)$$

$$H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) = H_x^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times \left[E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+1\right) - E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times \left[E_z^n\left(i, j+1, k+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) \right], \quad (2.6)$$

$$H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) = H_y^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times \left[E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+1, j, k+\frac{1}{2}\right) - E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times \left[E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \right], \quad (2.7)$$

$$H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) = H_z^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right) \times \left[E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times \left[E_y^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1\right) - E_y^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) \right], \quad (2.8)$$

em que Δt é o passo de tempo e n o número inteiro de passos de tempo, μ é a permeabilidade magnética, ε é a permissividade eletromagnética, Δy é dimensão da célula na direção y , Δx é a dimensão da célula na direção x e E_x , E_y , E_z são os campos elétricos nas direções x , y e z respectivamente e as coordenadas nas células FDTD nas direções x , y e z são i , j e k .

É possível observar na Equação (2.3) que o valor do campo elétrico E_x no instante de tempo atual não pode ser atualizado diretamente pois possui um valor de campo magnético futuro e desconhecido, dessa forma será necessário substituir os valores de campo magnético desconhecido dentro da equação do campo elétrico. É também importante ressaltar que o método lida com apenas uma direção implícita em cada sub-iteração, na primeira sub-iteração o campo elétrico $E_x^{n+1/2}$ possui a direção cartesiana y adotada como implícita, ou seja, a equação do campo elétrico $E_x^{n+1/2}$ será atualizada dentro da matriz para cada ponto no espaço tridimensional da direção cartesiana y e as outras direções serão calculadas diretamente.

Substituindo a equação de campo magnético $H_z^{n+1/2}$ dentro da equação de campo elétrico $E_x^{n+1/2}$ temos o sistema matricial tridiagonal da Equação (2.9) a ser resolvido:

$$-\left(\frac{\Delta t^2}{4\mu\Delta y^2}\right) E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) + \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\mu\Delta y^2}\right) E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - \left(\frac{\Delta t^2}{4\mu\Delta y^2}\right) E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j-1, k\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times \left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^n\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times \left[H_y^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -H_y^n\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)\Big] - \left(\frac{\Delta t^2}{4\mu\Delta y\Delta x}\right) \times \left[E_y^n\left(i+1,j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^n\left(i+1,j-\frac{1}{2},k\right) \right. \\
& \left. - E_y^n\left(i,j-\frac{1}{2},k\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

As equações da segunda sub-iteração são apresentadas nas Equações (2.10) a (2.15),

2) Sub-iteração 2:

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) &= E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times \left[H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)\right] - \\
& \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times \left[H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) &= E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta z}\right) \times \left[H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}\right)\right] - \\
& \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - H_z^{n+1}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) &= E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)\right] \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+1}\left(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
H_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) &= H_z^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times \left[E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right) - E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)\right] - \\
& \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times \left[E_y^{n+1}\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right) - E_y^{n+1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) &= H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times \left[E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+1,j,k+\frac{1}{2}\right) - E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)\right] - \\
& \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times \left[E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) - E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) = H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right) \times \left[E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right) - E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right] -$$

$$\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times \left[E_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)\right]. \quad (2.15)$$

Substituindo a equação de campo magnético H_y^{n+1} dentro da equação de campo elétrico E_x^{n+1} teremos o sistema matricial a ser resolvido para a segunda sub-iteração similarmente a Equação (2.9), contudo a direção implícita é a direção z .

É possível notar na Equação (2.9) que é necessário solucionar um sistema matricial tridiagonal para encontrar a solução do campo elétrico E_x . Logo, o sistema matricial pode ser organizado conforme as Equações (2.16) e (2.19),

$$-aE_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right) + bE_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right) - cE_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j-1,k\right) = r^n, \quad (2.16)$$

em que r^n é o vetor solução da Equação (2.9) e os valores de a, b e c são representados pelas Equações (2.17) e (2.18),

$$a = c = \left(\frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon\Delta y^2}\right), \quad (2.17)$$

$$b = \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon\Delta y^2}\right), \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ E_{x3} \\ E_{x4} \\ E_{x5} \\ \vdots \\ E_{xN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Os métodos utilizados para solucionar o sistema matricial são de grande importância e devem ser analisadas com cautela para obterem uma solução com menor custo computacional, eficiência e precisão.

2.2.2 Método FDTD-LOD

O método FDTD-LOD torna-se muito atrativo devido à sua grande eficiência computacional comparada à do método FDTD convencional e também ao método FDTD-ADI em problemas eletricamente grandes e cavidades eletromagnéticas. Isso ocorre devido ao fato de suas equações possuírem menos operações aritméticas do que as formulações do FDTD convencional e do FDTD-ADI.

Assim como o método FDTD-ADI, o passo de tempo utilizado no método FDTD-LOD é arbitrário e também pode ser expresso pela Equação (2.2). O método FDTD-LOD possui como desvantagem em relação ao método FDTD-ADI uma menor precisão numérica. No trabalho de Guimarães em [23] é realizado o comparativo entre os métodos FDTD, FDTD-ADI e FDTD-LOD aplicados em um cavidade retangular eletromagnética em três dimensões e é possível observar uma maior eficiência do método FDTD-LOD em relação aos métodos FDTD-ADI e FDTD convencional e também é possível observar uma menor precisão ao comparar o método FDTD-LOD a esses outros métodos de diferenças finitas no domínio do tempo.

O princípio do método FDTD-LOD se baseia no fato de que uma equação multidimensional pode ser quebrada em sucessivas sub-iterações e, dessa forma, em cada sub-iteração, apenas uma dimensão é considerada. Iftikhar Ahmed em 2008 [16] propõe em seu trabalho dividir em três sub-iterações as equações do método FDTD-LOD. As equações dessas três sub-iterações podem ser observadas nas Equações (2.20) a (2.31).

1) Sub-iteração 1:

$$E_y^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} H_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) + \frac{\partial}{\partial x} H_z^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) \right], \quad (2.20)$$

$$E_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = E_z^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} H_y^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) + \frac{\partial}{\partial x} H_y^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) \right], \quad (2.21)$$

$$H_y^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) = H_y^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) + \frac{\partial}{\partial x} E_z^n\left(i-\frac{1}{2}, j, k\right) \right], \quad (2.22)$$

$$H_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)} = H_z^n_{\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_y^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right)} + \frac{\partial}{\partial x} E_y^n_{\left(i-\frac{1}{2},j,k\right)} \right]. \quad (2.23)$$

2) Sub-iteração 2:

$$E_x^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} = E_x^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial y} H_z^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} + \frac{\partial}{\partial y} H_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} \right], \quad (2.24)$$

$$E_z^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} = E_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial y} H_x^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\partial}{\partial y} H_x^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)} \right], \quad (2.25)$$

$$H_x^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} = H_x^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} - \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} E_z^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right)} + \frac{\partial}{\partial y} E_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)} \right], \quad (2.26)$$

$$H_z^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} = H_z^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} - \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial y} E_x^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right)} + \frac{\partial}{\partial y} E_x^{n+\left(\frac{1}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)} \right]. \quad (2.27)$$

3) Sub-iteração 3:

$$E_x^{n+1}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} = E_x^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial z} H_y^{n+1}_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} + \frac{\partial}{\partial z} H_y^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} \right], \quad (2.28)$$

$$E_y^{n+1}_{\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)} = E_y^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial z} H_z^{n+1}_{\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} + \frac{\partial}{\partial z} H_z^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)} \right], \quad (2.29)$$

$$H_x^{n+1}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)} = H_x^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_y^{n+1}_{\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right)} + \frac{\partial}{\partial x} E_y^{n+\left(\frac{2}{3}\right)}_{\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)} \right], \quad (2.30)$$

$$H_y^{n+1}{}_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} = H_y^{n+(\frac{2}{3})}{}_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} - \frac{\Delta t}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_x^{n+1}{}_{(i+\frac{1}{2},j+1,k)} + \frac{\partial}{\partial x} E_x^{n+(\frac{2}{3})}{}_{(i+\frac{1}{2},j,k)} \right]. \quad (2.31)$$

As equações para o campo elétrico podem ser determinadas realizando a substituição das equações do campo magnético do instante atual. Dessa forma, para solucionar o valor do campo elétrico $E_y^{n+(1/3)}$ deve-se substituir a Equação (2.23) do campo elétrico $H_z^{n+(1/3)}$ dentro da equação do campo elétrico $E_y^{n+(1/3)}$.

É possível observar, nas formulações matemáticas das Equações (2.20) a (2.31), que em cada passo de tempo têm-se duas equações implícitas e duas equações explícitas, configurando um total de doze equações nos três passos de tempo a serem calculadas, assim como no método FDTD-ADI. Porém, nas equações do método FDTD-LOD, existem um número menor de termos aritméticos o que faz com que o cálculo da solução tenha menor custo computacional. Da mesma forma que, no método FDTD-ADI, os campos elétricos do método FDTD-LOD são resolvidos através de um sistema matricial tridiagonal.

2.2.3 Implementação da fonte de excitação

A aplicação correta da fonte de excitação afeta diretamente a precisão e eficácia dos métodos incondicionalmente estáveis [17]. É possível implementar a fonte de excitação de duas formas: implicitamente ou explicitamente.

O desenvolvimento da fonte de forma implícita implica em inserir a fonte dentro da matriz do sistema tridiagonal, o que pode dificultar sua implementação. A aplicação da fonte de forma explícita apresenta maior facilidade de implementação, porém sua precisão é menor quando comparada as aplicações utilizando fonte implícita.

Segundo Donderici [17] pode ocorrer uma assimetria no método FDTD-ADI, em que a propagação da onda em uma dada direção cartesiana pode ser diferente em outra direção caso o mecanismo de desenvolvimento da fonte não seja aplicado corretamente. Nessa Seção será demonstrado o desenvolvimento das duas formas de aplicação da fonte de excitação em métodos incondicionalmente estáveis.

2.2.3.1 Excitação da fonte Implícita

A solução de métodos incondicionalmente estáveis apresenta maior precisão se a fonte for incorporada dentro da matriz do sistema de equações do campo elétrico. Utilizando como exemplo a excitação no campo elétrico E_z , a forma mais precisa de excitação é descrita pelas Equações (2.32) e (2.33),

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) = E_z^n(i,j,k+\frac{1}{2}) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_x^n(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - H_x^n(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + J_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i,j,k+\frac{1}{2}) \right], \quad (2.32)$$

$$E_z^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) = E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times \left[H_x^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+1}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + J_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i,j,k+\frac{1}{2}) \right], \quad (2.33)$$

em que $J_z^{n+(1/2)}$ é a fonte de excitação.

É possível observar que, em ambos os passos de tempo, a fonte possui o mesmo valor e é avaliada em um mesmo intervalo de tempo ($n + 1/2$). Isso deve ser usado para manter a simetria no método FDTD-ADI devido ao campo elétrico ser avaliado em apenas uma direção implícita em cada sub-iteração.

No caso da excitação da fonte ser aplicada no campo elétrico conforme apresentado nas Equações (2.32) e (2.33), não haverá mudança nas equações do campo magnético. Caso as fontes fossem magnéticas seria necessário alterar a equação do campo magnético que continuaria explícita e seria necessário alterar também a equação do campo elétrico, já que os campos elétricos são avaliados pela substituição do campo magnético.

2.2.3.2 Excitação da fonte Explícita

O trabalho proposto em [5] por Shibayama demonstra que, para obter uma boa precisão na resposta dos campos elétricos, o esquema de fonte explícita deve ser empregado simultaneamente nas duas sub-iterações do método. Porém, essa forma demonstrada é correta somente para o valor de CFLN igual a unitário. No trabalho apresentado por Tan em [6] foi

demonstrado que no método FDTD-ADI a fonte de excitação está diretamente associada ao valor de CFLN e Valtemir em [18] estende essa análise para o método FDTD-LOD.

Dessa forma, na primeira e na segunda sub-iterações, a componente de campo deve ser excitada conforme as Equações (2.34) e (2.35):

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) = E_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) + \frac{CFLN}{2} \times J_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right), \quad (2.34)$$

$$E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) = E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) + \frac{CFLN}{2} \times J_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) \quad (2.35)$$

2.3 IMPLEMENTAÇÃO DO CONDUTOR ELÉTRICO PERFEITO

2.3.1 Solução analítica

As cavidades eletromagnéticas possuem diversas aplicações, como o uso em medidores de frequência e para medir propriedades elétricas dos materiais. A solução analítica abordada nessa seção será de uma cavidade retangular. Uma cavidade retangular é formada tomando uma seção de uma guia de onda e encerrando suas faces dianteiras e traseiras com placas condutoras conforme Figura 2.2.

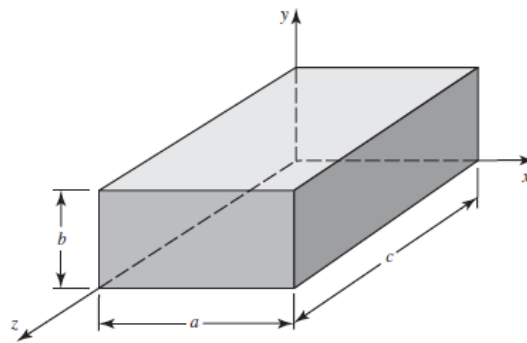


Figura 1.2 – Cavidade eletromagnética retangular

A presença das superfícies condutoras nas extremidades (em $z=0$ e $z=c$) origina múltiplas reflexões e leva ao aparecimento de uma onda estacionária. Essas múltiplas reflexões no interior da cavidade estão associadas à interferência construtiva da cavidade eletromagnética.

Isto significa que essas ondas irão adicionar-se, resultando num campo eletromagnético de elevada amplitude. Dessa forma, pode considerar-se que a cavidade eletromagnética retangular funciona como um dispositivo ressonante, em que só determinadas frequências são permitidas.

A determinação das frequências de ressonância da cavidade retangular pode ser realizada conforme a Equação (2.36):

$$f_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}, \quad (2.36)$$

em que m, n, p são números inteiros e utilizados para indicar os números de onda para designar um determinado modo de propagação que pode ser $TM_{m,n,p}$ ou $TE_{m,n,p}$. O modo com frequência de ressonância mais baixa é habitualmente designado por modo dominante. No modo TM dominante os valores mais baixos de m, n e p são, respectivamente, 1, 1 e 0, o que significa que o modo TM dominante de uma cavidade retangular é o modo $TM_{1,1,0}$, o qual tem uma frequência de ressonância dada pela Equação (2.37):

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (2.37)$$

em que a e b são a largura e altura da cavidade respectivamente como pode ser visualizado na Figura 2.2.

No modo TE dominante os valores mais baixos de m, n e p são, respectivamente, 1, 0 e 1, o que significa que o modo TE dominante de uma cavidade retangular é o modo $TE_{1,0,1}$, o qual tem uma frequência de ressonância dada pela Equação (2.38)

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}, \quad (2.38)$$

conforme exposto por Maria Ines em [22] o modo dominante depende da relação entre o comprimento c e altura b da cavidade eletromagnética. Dessa forma, o modo será conforme:

1. Modo $TM_{1,1,0}$, quando $b > c$
2. Modo $TE_{1,0,1}$, quando $c > b$

2.3.2 Solução computacional pelo método FDTD-ADI

Em aplicações que envolvem cavidades eletromagnéticas tem-se a necessidade de implementar uma PEC como condição de fronteira. O desenvolvimento computacional da PEC no método FDTD convencional é simples e de fácil implementação. Porém, a implementação nos métodos incondicionalmente estáveis necessita de uma abordagem especial.

Segundo Chen em [14] existem três algoritmos de implementação da PEC na fronteira do domínio computacional conforme pode ser observado nos fluxogramas da Figura (2.3) que demonstra os passos para cada algoritmo no cálculo das componentes de campo elétrico. A primeira forma define que após a atualização implícita do campo elétrico os valores dos campos tangenciais são zerados explicitamente. A segunda forma define que os valores dos campos elétricos tangenciais são zerados após a atualização das equações dos campos magnéticos. A terceira forma define que a PEC deve ser incorporada dentro do sistema tridiagonal que, por sua vez, modifica a equação implícita do cálculo do campo elétrico.

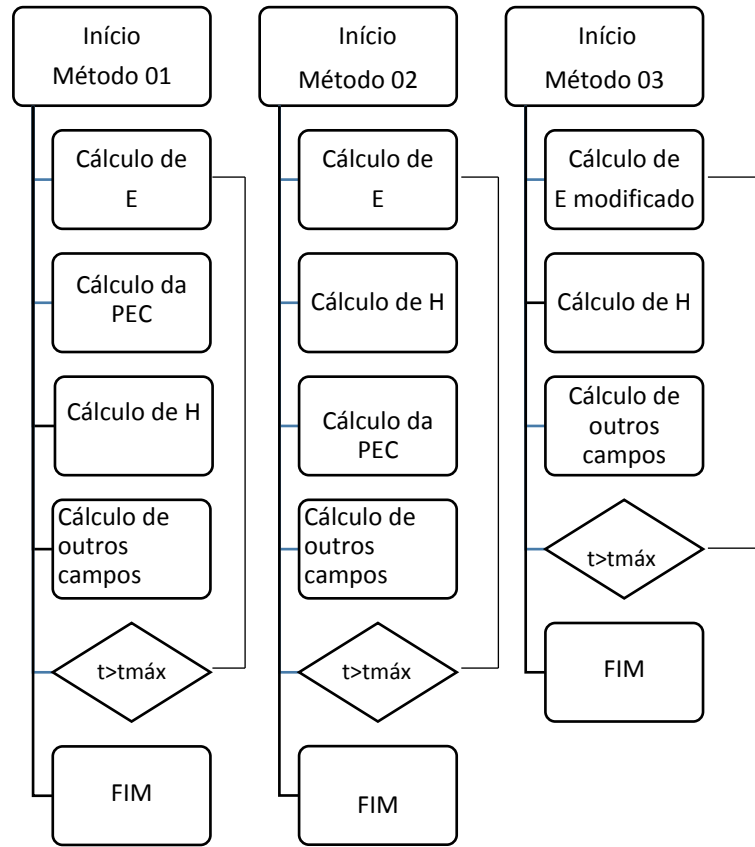


Figura 1.3 – Fluxograma das formas de implementação da PEC

Conforme concluído por Chen, ao aplicar o método 01 e o método 02 na implementação da PEC os algoritmos conduzem o sistema à instabilidade. Ao utilizar o método 03 o sistema se mantém estável e preciso para quaisquer valores de passo de tempo. Logo, o cálculo das componentes de campo elétrico das células da parede metálica condutora perfeita deve ser incorporada dentro do sistema matricial, modificando a forma de atualização dos mesmos.

Supondo o sistema matricial da Equação (2.39) para cálculo dos campos elétricos E_x :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ E_{x3} \\ E_{x4} \\ E_{x5} \\ \vdots \\ E_{xN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

na aplicação da PEC, se for necessário, por exemplo, que os campos elétricos E_{x3} a E_{x5} sejam nulos, o sistema matricial deve ser alterado para que não seja necessário calcular esses campos. O sistema matricial alterado fica de acordo com a Equação (2.40):

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ Ex_6 \\ Ex_7 \\ Ex_8 \\ \vdots \\ Ex_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - a_2 E_{x3} \\ r_6 - c_6 E_{x5} \\ r_7 \\ r_8 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Deste modo as componentes de campo elétrico E_x são atualizadas resolvendo a modificação do sistema matricial da Equação (2.40).

2.4 Implementação de Mur

As condições absorventes de fronteira são necessárias para simular uma propagação ao infinito evitando reflexões em problemas com espaço computacional aberto. O objetivo é tornar todas as paredes da malha computacional invisível para qualquer onda eletromagnética dentro da malha. A condição de fronteira Mur é de fácil implementação no método FDTD pois sua atualização pode ser implementada diretamente nas equações de campo elétrico.

A aplicação de Mur no método FDTD-ADI foi introduzida por Namiki em [19]. O mesmo realiza a aplicação de Mur dentro do sistema matricial para a direção implícita, conforme Equação (2.41) e (2.42) para a primeira sub-iteração:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}_{k=1} - E_x^n_{k=2} = s \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}_{k=2} - E_x^n_{k=1} \right], \quad (2.41)$$

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}_{k=kn} - E_x^n_{k=kn-1} = s \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}_{k=kn-1} - E_x^n_{k=kn} \right], \quad (2.42)$$

em que:

$$s = \frac{c \frac{\Delta t}{2} - \Delta z}{c \frac{\Delta t}{2} + \Delta z}, \quad (2.43)$$

sendo c a velocidade da luz. O sistema matricial deve ser alterado de acordo com a Equação (2.44) para a direção implícita de cada campo elétrico,

$$\begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ E_{x3} \\ E_{x4} \\ E_{x5} \\ \vdots \\ E_{xN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x_{k=2}}^n - E_{x_{k=1}}^n \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \vdots \\ E_{x_{k=kn-1}}^n - E_{x_{k=kn}}^n \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Nas direções explícitas de cada campo elétrico as equações de Mur devem ser implementadas igualmente as equações para o método FDTD convencional.

Conforme apresentado por Say Cheoh em [15], essa implementação no método FDTD-ADI pode conduzir à instabilidade em soluções mais complexas que envolvem diferentes valores de permissividade e permeabilidade magnética. A solução é utilizar a proposta da modificação realizada por Judah em [20] e introduzir o fator f . O valor desse fator deve estar entre o intervalo $0 < f < 1$. Com isso as equações de campo elétrico e campo magnético devem ser alteradas incluindo esse fator. As equações modificadas das duas sub-iterações são apresentadas nas Equações (2.45) a (2.56),

1) Sub-iteração 1:

$$\begin{aligned} E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i, j+\frac{1}{2}, k) &= E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times (2-f) \times \left[H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \right. \\ &\left. H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times (f) \times \left[H_y^n(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^n(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i, j+\frac{1}{2}, k) &= E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta z}\right) \times (2-f) \times \left[H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - \right. \\ &\left. H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times (f) \times \left[H_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i, j+\frac{1}{2}, k) = E_z^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times (2-f) \times \left[H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - \right. \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
& H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times (f) \times \left[H_x^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) \right], \\
& H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) = H_x^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times (2-f) \times \left[E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right) - \right. \\
& \left. E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times (f) \times \left[E_z^n\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) \right], \tag{2.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) = H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times (2-f) \times \left[E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+1,j,k+\frac{1}{2}\right) - \right. \\
& \left. E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times (f) \times \left[E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) \right], \tag{2.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) = H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right) \times (2-f) \times \left[E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right) - \right. \\
& \left. E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times (f) \times \left[E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^n\left(i,j-\frac{1}{2},k\right) \right]. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

1) Sub-iteração 2:

$$\begin{aligned}
& E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) = E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times (f) \times \left[H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - \right. \\
& \left. H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right) \times (2-f) \times \left[H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right) \right], \tag{2.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_z^{n+1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) = E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times (f) \times \left[H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - \right. \\
& \left. H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right) \times (2-f) \times \left[H_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+1}\left(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) \right], \tag{2.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) = H_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times (f) \times \left[E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right) - \right. \\
& \left. E_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) \right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times (2-f) \times \left[E_z^{n+1}\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right) - E_z^{n+1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right) \right], \tag{2.53}
\end{aligned}$$

$$H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) = H_y^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times (f) \times \left[E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+1,j,k+\frac{1}{2}\right) - E_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)\right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta z}\right) \times (2-f) \times \left[E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k+1\right) - E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right], \quad (2.54)$$

$$H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) = H_z^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right) \times (f) \times \left[E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right) - E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right] - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right) \times (2-f) \times \left[E_y^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^{n+1}\left(i,j-\frac{1}{2},k\right)\right]. \quad (2.55)$$

Substituindo a equação de campo magnético $H_z^{n+1/2}$ dentro da equação de campo elétrico $E_x^{n+1/2}$ tem-se o sistema matricial tridiagonal similarmente ao da Equação (2.9) a ser solucionado na primeira sub-iteração. O mesmo deve ser realizado com as outras componentes de campo elétrico nas demais sub-iterações.

A implementação do fator f torna o sistema estável em aplicações mais complexas envolvendo objetos com permissividades diferentes da do espaço livre. Contudo, apesar de mantida a estabilidade o fato f faz com que as amplitudes sejam atenuadas e aumenta a dispersão numérica do método FDTD-ADI.

A alternativa para manter o sistema estável e manter a precisão é alterar as equações do FDTD-ADI incluindo a condutividade elétrica do material simulado. No trabalho de Guimarães em [23] é possível observar a estabilidade e precisão ao incluir a condutividade elétrica do material na simulação computacional e verificar a eficiência da análise dos campos eletromagnéticos em uma esfera metálica e dielétrica.

A equação (2.56) demonstra a atualização para a equação no campo elétrico $E_x^{n+1/2}$, as equações para os campos elétricos em outras direções e na iteração $n+1$ podem ser desenvolvidas analogamente.

$$-(\alpha)E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right) + (\beta)E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) - (\gamma)E_x^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}\left(i+\frac{1}{2},j-1,k\right) = dE_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) + \left(\frac{1}{\Delta y}\right) \times \left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)\right] - \left(\frac{1}{\Delta y}\right) \times \left[H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^n\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)\right] - (q) \times \left[E_y^n\left(i+1,j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right) - E_y^n\left(i+1,j-\frac{1}{2},k\right) - E_y^n\left(i,j-\frac{1}{2},k\right)\right]. \quad (2.56)$$

em que as Equações (2.57) a (2.59) são as variáveis auxiliares e as Equações (2.60) a (2.64) são as variáveis da Equação (2.56),

$$C_a(i, j, k) = \left(\frac{2\varepsilon(i, j, k) - \sigma(i, j, k)dt}{2\varepsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)dt} \right), \quad (2.57)$$

$$C_b(i, j, k) = \left(\frac{2\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k) + \sigma(i, j, k)dt} \right), \quad (2.58)$$

$$D_b(i, j, k) = \left(\frac{2\Delta t}{\mu} \right), \quad (2.59)$$

$$\alpha = \frac{Db(i, j, k - 1)}{\Delta z^2}, \quad (2.60)$$

$$\beta = \frac{1}{C_b(i, j, k)} + \alpha + \gamma, \quad (2.61)$$

$$\gamma = \frac{Db(i, j, k)}{\Delta z^2}, \quad (2.62)$$

$$p = \frac{Ca(i, j, k)}{Cb(i, j, k)}, \quad (2.63)$$

$$q = Db(i, j, k). \quad (2.64)$$

Essa seção apresenta a complexidade de modelar as condições de fronteira nos métodos incondicionalmente estáveis. A modelagem matemática deve ser realizada com cautela devido à complexidade do algoritmo e da incorporação da condição de fronteira no sistema matricial a ser solucionado. Os métodos implícitos possuem estabilidade incondicional desde que a modelagem seja realizada com os devidos parâmetros abordados nessa seção.

2.5 Espalhamento em esfera dielétrica e condutora

Nesse trabalho será investigado o comportamento da propagação de ondas em uma estrutura esférica com propriedades condutoras e dispersivas devido à possibilidade de solucionar analiticamente esse problema sendo possível assim realizar comparativos com os algoritmos desenvolvidos nesse trabalho.

Assumindo que o campo elétrico de uma onda plana uniforme está polarizado na direção cartesiana x e está viajando na direção cartesiana ao longo do eixo z, o campo elétrico incidente em uma esfera pode ser expresso conforme a Equação (2.65) segundo Balanis em [25]:

$$E^i = \hat{a}_x E_x^i = \hat{a}_x E_0 e^{-j\beta z} = \hat{a}_x E_0 e^{-j\beta r \cos \theta}, \quad (2.65)$$

a componente x pode ser transformada em componentes esféricas conforme a Equação (2.66),

$$E^i = \hat{a}_r E_r^i + \hat{a}_\theta E_\theta^i + \hat{a}_\phi E_\phi^i, \quad (2.66)$$

em que :

$$E_r^i = E_x^i \sin \theta \cos \phi = E_0 \sin \theta \cos \phi e^{-j\beta r \cos \theta} \quad (2.67)$$

$$E_\theta^i = E_x^i \cos \theta \cos \phi = E_0 \cos \theta \cos \phi e^{-j\beta r \cos \theta} \quad (2.67)$$

$$E_\phi^i = -E_x^i \sin \phi = -E_0 \sin \phi e^{-j\beta r \cos \theta} \quad (2.68)$$

O campo total na esfera que é o somatório do campo incidente e do campo espalhado pode ser encontrado analiticamente conforme a Equação (2.69-71)

$$E_r^t = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) A_r^t \quad (2.69)$$

$$E_\theta^t = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} A_r^t - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r^t}{\partial \phi} \quad (2.70)$$

$$E_\phi^t = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} A_r^t + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial F_r^t}{\partial \theta} \quad (2.71)$$

$$H_r^t = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \beta^2 \right) F_r^t \quad (2.72)$$

$$H_\theta^t = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r^t}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_r^t}{\partial r \partial \theta} \quad (2.73)$$

$$H_\phi^t = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial A_r^t}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r^t}{\partial r \partial \phi} \quad (2.74)$$

Em que F_r^t e A_r^t são vetores potenciais.

Capítulo 3

ANÁLISES DE ESTABILIDADE E PRECISÃO

3.1 Soluções de sistemas matriciais tridiagonais em métodos implícitos

Um dos desafios de utilizar os métodos implícitos é devido à sua complexidade de implementação. A complexidade advém do fato de ser necessário solucionar um sistema matricial como representado pela Equação (3.1) que é do tipo tridiagonal e precisa ser resolvido em cada sub-iteração dos métodos implícitos. É possível utilizar duas classes de métodos matemáticos para solucionar os sistemas matriciais: os métodos diretos e os métodos iterativos. Esta Seção aborda essas duas classes de métodos numéricos matemáticos que podem ser utilizados para solucionar o sistema matricial de equações do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ conforme a Equação (3.1).

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ E_{x3} \\ E_{x4} \\ E_{x5} \\ \vdots \\ E_{xN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Os métodos diretos possuem como característica um resultado exato da solução do sistema matricial após utilizar um número limitado de passos. Nesses métodos podem ocorrer erros de arredondamento devido à aritmética de ponto flutuante introduzido pelo computador.

Os métodos iterativos são baseados em sucessivas aproximações para obter uma solução. Esses calculam a solução até que um determinado critério de parada definido previamente seja alcançado. Os métodos iterativos podem ser divididos em estacionários e não-estacionários.

Os métodos iterativos estacionários são mais simples de implementar e não utilizam informações das iterações anteriores. Os métodos iterativos não-estacionários utilizam informações das iterações anteriores e são mais sofisticados para sistemas de equações de grande porte.

3.1.1 Métodos diretos

Entre os vários tipos de métodos diretos, nesse trabalho, são estudados e aplicados o método de Cholesky, o método de Thomas e o método apresentado por William Press em [21].

3.1.1.1 Método de Cholesky

O método de Cholesky pode ser aplicado em matrizes simétricas e positivas como é o caso do sistema matricial dos métodos incondicionalmente estáveis a serem resolvidos. Sendo A uma matriz tridiagonal que pode ser decomposta em outras duas matrizes: L é uma matriz triangular inferior e sua transposta L^t é uma matriz triangular superior conforme Equação (3.2) e Equação (3.3),

$$LL^t = A, \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{31} & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{31} & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{31} & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

em que os elementos da diagonal principal podem ser obtidos pela Equação (3.4),

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

e os elementos abaixo da diagonal são obtidos pela Equação (3.5),

$$l_{ij} = \frac{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}} \quad (3.5)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1. \text{ e } i = j+1, j+2, \dots, n.$$

A solução do sistema matricial pode ser obtida pela Equação (3.6) e (3.7),

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^t x, \quad (3.6)$$

$$L^t x = y \text{ então } Ly = b. \quad (3.7)$$

Por substituições sucessivas é possível resolver o sistema triangular inferior pela Equação (3.8),

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j}{l_{ii}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

A solução final pelo método de Cholesky do sistema matricial é obtida pelas substituições retroativas representadas pela Equação (3.9),

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=1+i}^n l_{ij} x_j}{l_{ii}}, \text{ para } i = n, n-1, \dots, 1. \quad (3.9)$$

No método de Cholesky é possível verificar a exatidão da solução através do cálculo do vetor resíduo. A resposta possui valor exato com o valor do vetor resíduo igual a zero e o mesmo pode ser calculado de acordo com a Equação (3.10).

$$R = b - Ax, \quad (3.10)$$

em que R é o valor do vetor resíduo.

3.1.1.2 Método de Thomas

O modelamento matemático do algoritmo de Thomas é utilizado especificamente em sistemas matriciais tridiagonais. O método armazena somente os valores das diagonais principais do sistema matricial a ser solucionado reduzindo o esforço computacional. Dessa forma, se torna um método muito atrativo na solução das matrizes tridiagonais dos métodos implícitos. Nas Equações (3.12a) a (3.12d) é detalhado o algoritmo de Thomas genérico e a Equação (3.11) é a representação de sistemas matriciais dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD. Sendo Ex_N o valor dos campos elétricos atuais calculados em cada sub-iteração.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & c_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ex_1 \\ Ex_2 \\ Ex_3 \\ Ex_4 \\ Ex_5 \\ \vdots \\ Ex_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$i = 1; \quad x_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad g_1 = \frac{r_1}{b_1}, \quad (3.12a)$$

$$x_i = \frac{c_i}{b_i - a_i x_{i-1}}; \quad g_i = \frac{r_i - a_i g_{i-1}}{b_i - a_i x_{i-1}}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (3.12b)$$

$$x_i = \frac{r_i - a_i g_{i-1}}{(b_i - a_i x_{i-1})}, \quad \text{para } i = N; \quad (3.12c)$$

$$x_i = g_i - x_i x_{i+1}, \quad \text{para } i = N-1, N-2, \dots, 1, \quad (3.12d)$$

em que g_i é uma variável auxiliar do algoritmo, $a_n, b_N, e c_N$ são os valores das diagonais principais do sistema matricial e x_i o vetor solução do método representado por Ex_N na Equação(3.11).

3.1.1.3 Método de William Press

O método proposto em [21] por William Press é um algoritmo utilizado para sistemas matriciais tridiagonais assim como o método de Thomas. O algoritmo implementado é conforme as Equações (3.13a) a (3.13d) que armazena apenas as variáveis localizadas nas diagonais principais do sistema matricial calculado,

$$bet = b_1, \quad x_1 = \frac{r_1}{bet}, \text{ para } i = 1, \quad (3.13a)$$

$$g_i = \frac{c_{i-1}}{bet}, \quad bet = b_i - a_i g_i, \text{ para } i = 2, 3, \dots, N, \quad (3.13b)$$

$$x_i = \frac{r_i - a_i x_{i-1}}{bet}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, N, \quad (3.13c)$$

$$x_i = x_i - x_{i+1} g_{i+1}, \text{ para } i = N - 1, N - 2, \dots, 1, \quad (3.13d)$$

em que bet e g_i são variáveis auxiliares e o valor final da solução é encontrado pela Equação (3.13d) e representado pelo vetor x_i que representa o valor calculado de cada campo elétrico. Segundo An Zhao em [13] esse método pode conduzir a instabilidade após um número grande de iterações. Essa análise é realizada no trabalho com cautela a fim de verificar a estabilidade do método proposto.

3.1.2 Métodos iterativos

3.1.2.1 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é um método iterativo que gera a partir de um vetor, uma sequência de valores que deve convergir para a solução do sistema. A condição de convergência desse método é que a matriz seja estritamente diagonal dominante, ou seja, no problema proposto a diagonal principal deve ser sempre maior que a soma dos outros elementos da mesma linha. Tendo como referência à Equação (2.9) o valor da diagonal principal é conforme a Equação (3.14) e é representado por dp e o valor da diagonal

secundária é representado por ds conforme a Equação (3.15) em que é possível observar que o valor de dp é sempre maior que o valor da soma das diagonais secundárias.

$$dp = \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon\Delta y^2}\right), \quad (3.14)$$

$$ds = -\left(\frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon\Delta y^2}\right), \quad (3.15)$$

No método de Gauss-Seidel as iterações são repetidas muitas vezes e por isso esse método possui o maior esforço computacional entre os métodos aqui descritos. Nesse método a matriz tridiagonal $\mathbf{A}$ é decomposta em outras três matrizes $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, e $\mathbf{F}$ que são triangulares inferiores, superior e diagonal respectivamente, como representado na Equação (3.16),

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}. \quad (3.16)$$

As equações podem ser rearranjadas conforme a Equação (3.17) e obtido pela recorrência da Equação (3.18). Sendo x o valor da solução encontrada para os valores dos campos elétricos,

$$(\mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F})x = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{D} + \mathbf{F})x = \mathbf{F}x + \mathbf{b}, \quad (3.17)$$

$$x^{k+1} = -(\mathbf{D} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}x^k + (\mathbf{D} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow x^{k+1} = \mathbf{S}x^k + \mathbf{d}. \quad (3.18)$$

3.1.2.2 Método de Jacobi

O método de Jacobi propõe decompor a matriz $\mathbf{A}$ de um sistema linear do tipo $\mathbf{A}x = \mathbf{B}$ em outras três matrizes $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ conforme apresentado pela Equação (3.19),

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}, \quad (3.19)$$

em que $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal, $\mathbf{E}$ é uma matriz triangular inferior e $\mathbf{F}$ é uma matriz triangular superior. O sistema linear pode ser representado conforme a Equação (3.20),

$$(\mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{D})\mathbf{x} = -(\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (3.20)$$

A Equação (3.20) é então convertida em um processo iterativo conforme representado na Equação (3.21),

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x}^k + (\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{J}\mathbf{x}^k + \mathbf{c}, \quad (3.21)$$

em que $\mathbf{J}$ é a matriz de iteração do método de Jacobi representada pela Equação (3.22),

$$\mathbf{J} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}). \quad (3.22)$$

3.2 Análise de estabilidade

Nessa seção é abordada a análise matemática da estabilidade do método FDTD-ADI. Entretanto, para aplicar essa análise é necessário realizar a transformada de Fourier dos campos elétricos e magnéticos que são aplicadas conforme as Equações (3.23a) a (3.23f).

$$E_x^n_{(i+\frac{1}{2},j,k)} = E_x^n e^{-j[k_x(i+\frac{1}{2})\Delta x + k_y j\Delta y + k_z k\Delta z]}, \quad (3.23a)$$

$$E_y^n_{(i,j+\frac{1}{2},k)} = E_y^n e^{-j[k_x i\Delta x + k_y(j+\frac{1}{2})\Delta y + k_z k\Delta z]}, \quad (3.23b)$$

$$E_z^n_{(i,j,k+\frac{1}{2})} = E_z^n e^{-j[k_x i\Delta x + k_y j\Delta y + k_z(k+\frac{1}{2})\Delta z]}, \quad (3.23c)$$

$$H_x^n_{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} = H_x^n e^{-j[k_x i\Delta x + k_y(j+\frac{1}{2})\Delta y + k_z(k+\frac{1}{2})\Delta z]}, \quad (3.23d)$$

$$H_y^n_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})} = H_y^n e^{-j[k_x(i+\frac{1}{2})\Delta x + k_y j\Delta y + k_z(k+\frac{1}{2})\Delta z]}, \quad (3.23e)$$

$$H_z^n_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)} = H_z^n e^{-j[k_x(i+\frac{1}{2})\Delta x + k_y(j+\frac{1}{2})\Delta y + k_z k\Delta z]}. \quad (3.23f)$$

Os valores dos campos elétricos e magnéticos após a transformada de Fourier são utilizados no desenvolvimento do sistema matricial do método FDTD-ADI.

A análise da estabilidade é realizada através dos autovalores da matriz resultante do método FDTD-ADI. Se o valor dos autovalores for menor ou igual à unidade, o sistema é dito incondicionalmente estável. Contudo, se algum autovalor for maior que uma unidade o sistema é instável.

No caso do método FDTD-ADI o mesmo é dividido em dois passos de tempo. O sistema matricial da Equação (3.24) demonstra o primeiro passo de tempo e a Equação (3.25) demonstra o sistema matricial para o segundo passo de tempo,

$$\mathbf{M}_1 X^{n+\left(\frac{1}{2}\right)} = \mathbf{P}_1 X^n, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{M}_2 X^{n+1} = \mathbf{P}_2 X^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (3.25)$$

em que $\mathbf{M}_{1,2}$ e $\mathbf{P}_{1,2}$ são as matrizes de atualização com os coeficientes dos campos elétricos e magnéticos e X é vetor com os valores da solução dos campos elétricos e magnéticos como pode ser observado na Equação (3.26),

$$X^n = \begin{bmatrix} E_X^n \\ E_Y^n \\ E_Z^n \\ H_X^n \\ H_Y^n \\ H_Z^n \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

em que E_X^n, E_Y^n, E_Z^n são os valores dos campos elétricos nas direções cartesianas x, y e z respectivamente. Os vetores H_X^n, H_Y^n, H_Z^n são os valores dos campos magnéticos também nas direções x, y e z respectivamente.

A solução do sistema matricial do primeiro passo de tempo pode ser resolvida realizando os passos descritos nas Equações (3.27a) a (3.27c),

$$X^{n+\left(\frac{1}{2}\right)} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{P}_1 X^n, \quad (3.27a)$$

$$\Lambda_1 = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{P}_1, \quad (3.27b)$$

$$X^{n+(\frac{1}{2})} = \Lambda_1 X^n, \quad (3.27c)$$

sendo $\mathbf{M}_1^{-1}$ a matriz inversa de $\mathbf{M}_1$ e Λ_1 representado na Equação (3.28). A Equação (3.27b) representa a matriz resultante do método FDTD-ADI e seus autovalores representam a estabilidade do sistema. Na Equação (3.28) é possível observar os valores em cada linha e coluna da matriz resultante derivada da Equação (3.27b),

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q_y} & \frac{W_x W_y}{\mu \varepsilon Q_y} & 0 & 0 & \frac{jW_z}{\varepsilon Q_y} & -\frac{jW_z}{\varepsilon Q_y} \\ 0 & \frac{1}{Q_z} & \frac{W_z W_y}{\mu \varepsilon Q_z} & -\frac{jW_z}{\varepsilon Q_z} & 0 & \frac{jW_x}{\varepsilon Q_z} \\ \frac{W_x W_z}{\mu \varepsilon Q_x} & 0 & \frac{1}{Q_x} & \frac{jW_y}{\varepsilon Q_x} & -\frac{jW_y}{\varepsilon Q_x} & 0 \\ 0 & -\frac{jW_z}{\varepsilon Q_z} & \frac{jW_z}{\varepsilon Q_z} & \frac{1}{Q_z} & \frac{W_x W_z}{\mu \varepsilon Q_z} & 0 \\ \frac{jW_z}{\varepsilon Q_x} & 0 & \varepsilon Q_z & \frac{1}{Q_z} & \frac{1}{\mu \varepsilon Q_z} & 0 \\ -\frac{jW_y}{\varepsilon Q_y} & \frac{jW_x}{\varepsilon Q_y} & -\frac{jW_z}{\varepsilon Q_x} & \frac{W_x W_y}{\mu \varepsilon Q_x} & \frac{Q_x}{W_z W_y} & \frac{1}{Q_y} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

em que as variáveis utilizadas em Λ_1 são representadas pelas Equações (3.29) e (3.20),

$$W_a = \frac{\Delta t}{\Delta a} \text{sen} \left(\frac{k_a \Delta a}{2} \right), \quad a = x, y, z, \quad (3.29)$$

$$Q_a = 1 + \frac{W_a^2}{\mu \varepsilon}, \quad a = x, y, z, \quad (3.30)$$

em que μ é a permeabilidade magnética, ε é a permissividade eletromagnética, Δt é o valor do passo de tempo e Δa é a dimensão das células nas direções cartesianas x, y e z.

A solução do sistema matricial do segundo passo de tempo pode ser resolvida realizando os passos descritos nas Equações (3.31a-c),

$$X^{n+1} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{P}_2 X^{n+1/2}, \quad (3.31a)$$

$$\Lambda_2 = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{P}_2, \quad (3.31b)$$

$$X^{n+1} = \Lambda_2 X^{n+1/2}, \quad (3.31c)$$

em que M_2^{-1} é a matriz inversa de $\mathbf{M}_2$ e Λ_2 representado na Equação (3.32),

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q_z} & 0 & \frac{W_z W_x}{\mu \epsilon Q_z} & 0 & \frac{j W_z}{\epsilon Q_z} & -\frac{j W_y}{\epsilon Q_z} \\ \frac{W_y W_x}{\mu \epsilon Q_x} & \frac{1}{Q_x} & 0 & -\frac{j W_z}{\epsilon Q_x} & 0 & \frac{j W_x}{\epsilon Q_x} \\ 0 & \frac{W_y W_z}{\mu \epsilon Q_y} & \frac{1}{Q_y} & \frac{j W_y}{\epsilon Q_y} & -\frac{j W_x}{\epsilon Q_y} & 0 \\ 0 & -\frac{j W_z}{\epsilon Q_y} & \frac{j W_y}{\epsilon Q_y} & \frac{1}{Q_y} & \frac{W_z W_y}{\mu \epsilon Q_y} & 0 \\ \frac{j W_z}{\epsilon Q_z} & -\frac{j W_y}{\epsilon Q_y} & \frac{j W_y}{\epsilon Q_y} & \frac{1}{Q_y} & \frac{1}{\mu \epsilon Q_y} & \frac{W_z W_y}{\mu \epsilon Q_z} \\ -\frac{j W_y}{\epsilon Q_x} & 0 & -\frac{j W_x}{\epsilon Q_z} & 0 & \frac{Q_z}{Q_z} & \frac{1}{Q_x} \\ \frac{j W_x}{\epsilon Q_x} & \frac{j W_x}{\epsilon Q_x} & 0 & 0 & \frac{W_x W_z}{\mu \epsilon Q_x} & \frac{1}{Q_x} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

em que Λ_2 é a matriz resultante do método FDTD-ADI no segundo passo de tempo e os termos na matriz Λ_2 são conforme as Equações (3.29) e (3.30).

As Equações podem ser combinadas em uma única Equação (3.33), substituindo a Equação(3.27c) na Equação (3.30c),

$$X^{n+1} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{P}_1 X^n = \Lambda X^n. \quad (3.33)$$

Dessa forma calculam-se os autovalores da matriz Λ resultante dos dois passos de tempo do método FDTD-ADI e analisam-se os valores dos mesmos. As Equações (3.34a) a (3.34c) representam os autovalores após a solução da matriz resultante Λ ,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad (3.34a)$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = \frac{jS + \sqrt{R^2 - S^2}}{R}, \quad (3.34b)$$

$$\lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_3^* \frac{jS - \sqrt{R^2 - S^2}}{R}, \quad (3.34c)$$

em que a variável R é representada pela Equação (3.35) e a variável S é representada pela Equação (3.36),

$$R = (\mu\varepsilon + W_x^2)(\mu\varepsilon + W_y^2)(\mu\varepsilon + W_z^2), \quad (3.35)$$

$$S = \sqrt{4\mu\varepsilon(\mu\varepsilon W_x^2 + \mu\varepsilon W_y^2 + \mu\varepsilon W_z^2 + W_x^2 W_y^2 + W_y^2 W_z^2 + W_x^2 W_z^2)(\mu^3 \varepsilon^3 W_y^2 W_y^2 W_y^2)}. \quad (3.36)$$

Conforme a Equação (3.34a) os dois primeiros autovalores tem magnitude unitária. Os autovalores $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ e λ_6 também possuem magnitude unitária, pois $R \geq S$. Assim, o numerador das Equações (3.34b) e (3.34c) são números reais. Dessa forma, é possível observar a incondicionalidade da estabilidade do método FDTD-ADI em relação ao passo de tempo Δt .

A análise de estabilidade do método FDTD-LOD é semelhante à adotada para o método FDTD-ADI em que também podem ser investigados os autovalores da matriz resultante do método FDTD-LOD que é dividido três sub-passos de tempo.

3.3 Análise de dispersão numérica

A estabilidade incondicional dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD não implica que os mesmos sejam precisos para qualquer valor de CFLN. Dessa forma, é importante demonstrar as características da dispersão numérica que afetam esses métodos. Essa dispersão numérica ocorre devido à velocidade de fase ser diferente da velocidade da luz no vácuo [1].

Zheng em [3] analisou o efeito do aumento de CFLN e da direção de propagação na dispersão numérica no método FDTD-ADI em 3D. O resultado analítico da dispersão numérica é apresentado na Equação (3.37) e é demonstrada por Zheng através do cálculo do determinante da matriz resultante representada pela Equação (3.33) do método FDTD-ADI,

$$\sin^2(w\Delta t) = 4\mu\varepsilon(\mu\varepsilon W_x^2 + \mu\varepsilon W_y^2 + \mu\varepsilon W_z^2 + W_x^2 W_y^2 + W_y^2 W_z^2 + W_z^2 W_x^2) \times$$

$$\frac{(\mu^3 \varepsilon^3 + W_x^2 W_y^2 W_z^2)}{(\mu \varepsilon + W_x^2)(\mu \varepsilon + W_y^2)(\mu \varepsilon + W_z^2)}, \quad (3.37)$$

em que w é a velocidade angular, μ é a permeabilidade magnética, ε é a permissividade eletromagnética, Δt é o valor do passo de tempo e Δa é a dimensão das células nas direções cartesianas x , y e z . As variáveis $W_{x,y,z}$ são representadas pela Equação (3.29),

Ao aplicar a Equação (3.37) para o passo de tempo menor que CFL, a dispersão numérica possui a mesma resposta que a dispersão numérica do método FDTD. Contudo, para CFLN maiores a precisão diminui quanto maior é o CFLN usado.

Em 2010 Iftikhar Ahmed [16] analisou a dispersão numérica no método FDTD-LOD em 3D para diferentes valores de CFLN e para diferentes dimensões de célula por comprimento de onda. A solução analítica da dispersão numérica do método FDTD-LOD considerando diferentes valores de CFLN é observada na Equação (3.38),

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(w\Delta t) = & [Q_x Q_y Q_z + Q_x + Q_y + Q_z - Q_x Q_y - Q_x Q_z - Q_y Q_z] \times \\ & 4 \left[\frac{Q_x Q_y + Q_x Q_z - Q_x - Q_y - Q_z - 4}{Q_x^2 Q_y^2 Q_z^2} \right] + \frac{16}{Q_x^2 Q_y^2 Q_z^2} \\ & - \frac{8\sqrt{F_x F_y F_z} [2(Q_x Q_y + Q_x Q_z + Q_y Q_z - Q_x - Q_y - Q_z) - Q_x Q_y Q_z]}{Q_x^2 Q_y^2 Q_z^2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que as variáveis $Q_{x,y,z}$ e $F_{x,y,z}$ são representadas pelas Equações (3.39) e (3.40),

$$Q_a = 1 + \frac{\left[\frac{\Delta t}{\Delta a} \text{sen} \left(\frac{k_a \Delta a}{2} \right) \right]}{\mu \varepsilon}, \quad a = x, y, z, \quad (3.39)$$

$$F_a = 1 + \frac{\left[\frac{\Delta t}{\Delta a} \text{sen} \left(\frac{k_a \Delta a}{2} \right)^2 \right]}{\mu \varepsilon}, \quad a = x, y, z. \quad (3.40)$$

Nessa seção é apresentado o modelamento matemático da análise da estabilidade, dispersão numérica e dos métodos numéricos utilizados na solução do sistema tridiagonal dos métodos incondicionalmente estáveis. No trabalho de Guimarães [24] é demonstrado o

resultado computacional da estabilidade e dispersão numérica dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD em que é possível observar a incondicionalidade de estabilidade dos mesmos.

No capítulo 4 são realizadas simulações diversas utilizando esses métodos e analisando os resultados quanto à precisão, estabilidade e custo computacional dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD.

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Introdução

Neste capítulo é analisada a precisão, eficiência e custo computacional dos métodos implícitos de diferenças finitas no domínio do tempo, FDTD-ADI e FDTD-LOD, em algumas aplicações. São apresentados os resultados obtidos com diferentes formas de aplicar a condição de contorno PEC para cavidades eletromagnéticas, os resultados de diferentes métodos numéricos para solucionar o sistema matricial no método FDTD-ADI e FDTD-LOD e é realizada a análise da precisão do valor do campo elétrico computado pelo método FDTD-ADI em uma esfera metálica e dielétrica com a condição absorvente Mur implementada para o domínio computacional simulado. Para tanto, foi implementado um programa computacional tendo como plataforma o Matlab® desenvolvido pela Mathwork em um computador com 6GB de RAM e processador i5. Os resultados obtidos são comparados com as soluções das simulações realizadas utilizando o método FDTD convencional e a solução analítica correspondente ao problema.

4.2 Análises dos métodos matriciais

Os métodos numéricos utilizados para solucionar o sistema matricial são aplicados em uma cavidade retangular eletromagnética ressonante com condição de contorno PEC. A aplicação foi escolhida por ser possível a validação através da análise computacional do método FDTD convencional e da validação analítica conforme apresentado pela Equação (2.36).

As dimensões da malha são de $50 \times 30 \times 9$ células, as dimensões físicas das células são de $dx=dy=dz=1 \text{ mm}$ e a fonte utilizada é um pulso Gaussiano inserida no meio da cavidade eletromagnética ao longo de E_z representada pela Equação (4.1),

$$J_{(25,15,k)} = \frac{e^{-((t-t_0))}}{(\tau)^2}, \quad (4.1)$$

em que $\tau = 150 \text{ } \rho s$ and $t_0 = 3 \tau$ são as constantes do pulso Gaussiano e arbitradas para melhor visualização da propagação do pulso na malha escolhida e os pontos de excitação da fonte é conforme demonstrados na Equação (4.1).

Os métodos numéricos apresentados e comparados nessa seção são os métodos de Thomas, Cholesky, W.Press, Gauss-Seidel e Jacobi. Primeiramente a análise da precisão é demonstrada nos métodos diretos e pode ser observada na Figura 4.1 no ponto $E_z(15, 15, 5)$ que apresenta um comparativo entre os métodos FDTD convencional e o método FDTD-ADI utilizando o método de Cholesky e o método de Thomas na solução do sistema matricial. Na simulação o $CFLN = 8$ é utilizado no método FDTD-ADI a fim de analisar a precisão do mesmo com valores maiores de passo de tempo.

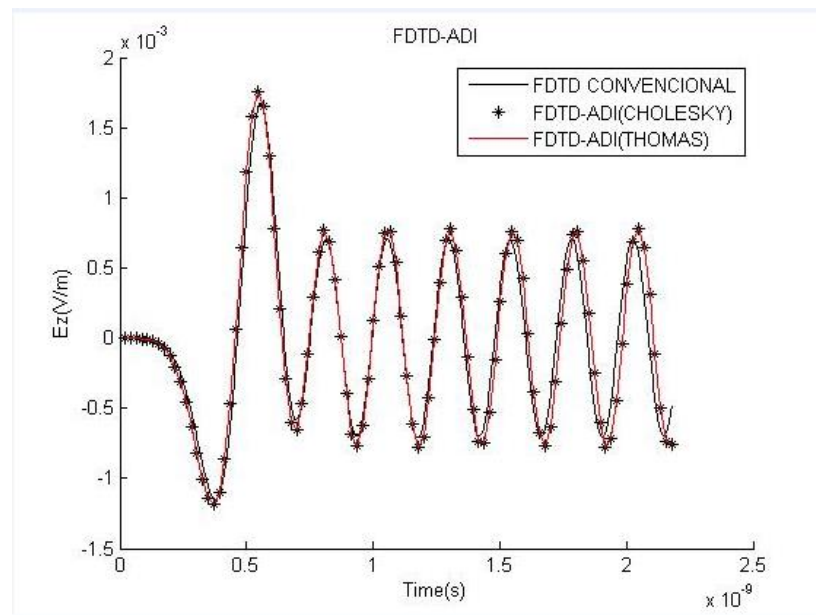


Figura 4.1 – Resultado comparativo do método FDTD-ADI utilizando métodos de Thomas e Cholesky.

Na Figura 4.1 é possível observar que os métodos numéricos diretos utilizados na solução do sistema matricial do método FDTD-ADI são muito precisos ainda que aplicado um valor de passo de tempo muito maior do que o limitado para o FDTD convencional.

Na Figura 4.2 no ponto $E_z(15, 15, 5)$ é demonstrado o resultado da simulação computacional do método numérico proposto por W.Press com a utilização do $CFLN = 8$ para o método FDTD-ADI e simulado com um total de 800 iterações. O mesmo foi

analisado com maior cautela pois, de acordo com Zhao em [13], o mesmo pode conduzir a solução a instabilidade.

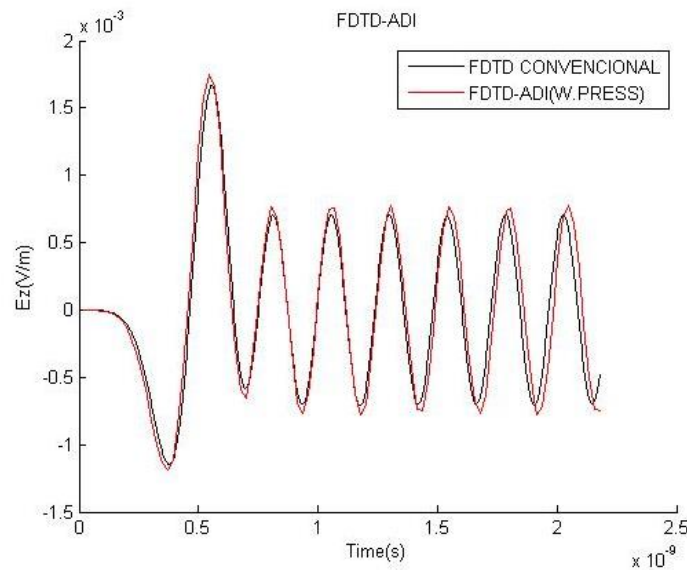


Figura 4.2 – Método FDTD-ADI utilizando método W. Press.

Conforme pode ser observado na Figura 4.2, o método de W.Press apresentou estabilidade assim como os métodos de Thomas e Cholesky para o mesmo problema analisado. Nessa Simulação foi aplicada fonte implícita e explícita e não houve divergência do resultado quanto à estabilidade. Esse método também foi simulado para 20.000 iterações com $CFLN = 8$ a fim de verificar a estabilidade do método após decorrer um número maior de iterações e observou-se que a estabilidade foi mantida.

Os métodos iterativos também foram simulados para as configurações do mesmo problema simulado pelos métodos diretos e o ponto de observação utilizado foi o mesmo. Na Figura 4.3 é demonstrado o resultado do método Gauss-Seidel com $CFLN = 8$ e os resultados são comparados com o método FDTD convencional.

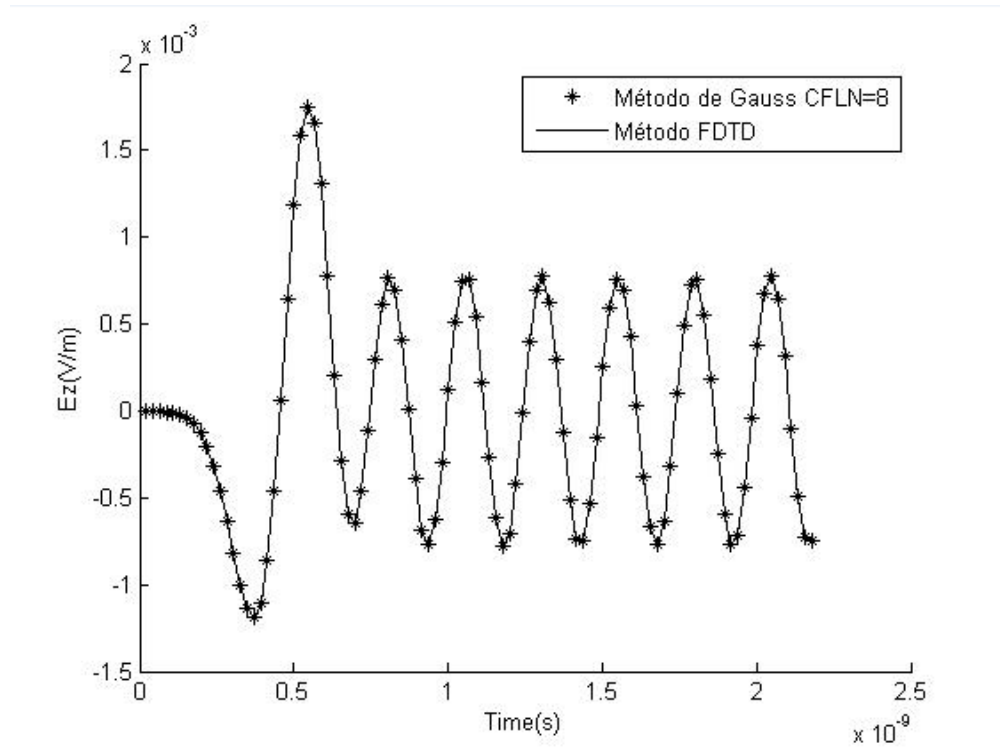


Figura 4.3 – Método de Gauss-Seidel com CFLN =8.

Na Figura 4.4 é demonstrado o resultado do método Gauss-Seidel com $CFLN = 8$ e $CFLN = 20$ a fim de analisar a precisão desse método numérico ao aumentar o valor do passo de tempo.

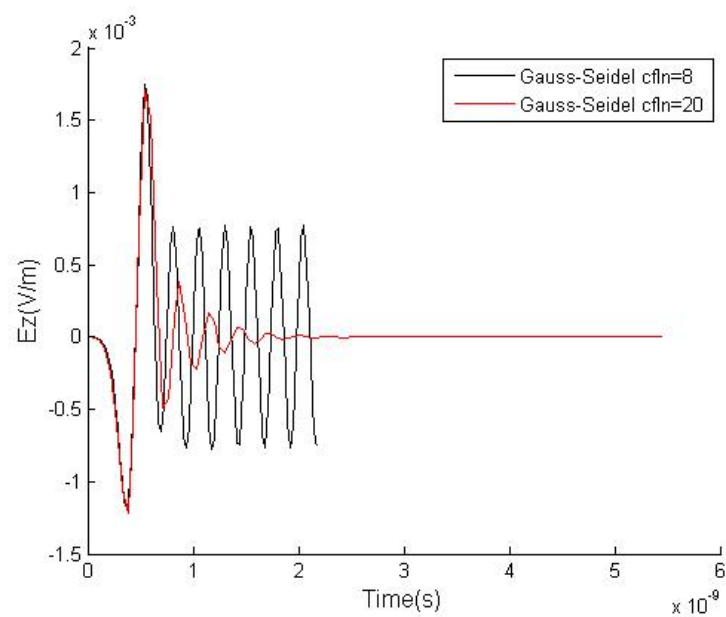


Figura 4.4 – Método Gauss-Seidel com CFLN=8 e CFLN=20..

É possível observar na Figura 4.4 que através do método de Gauss-seidel ao utilizar valores de $CFLN$ mais altos o sistema é conduzido ao erro.

O resultado do método iterativo de Jacobi é demonstrado na Figura 4.5 e é realizado o comparativo com o método FDTD convencional. Na Figura 4.6 é demonstrado o resultado do método de Jacobi com $CFLN = 20$ a fim de analisar a precisão e estabilidade com valores maiores de passo de tempo.

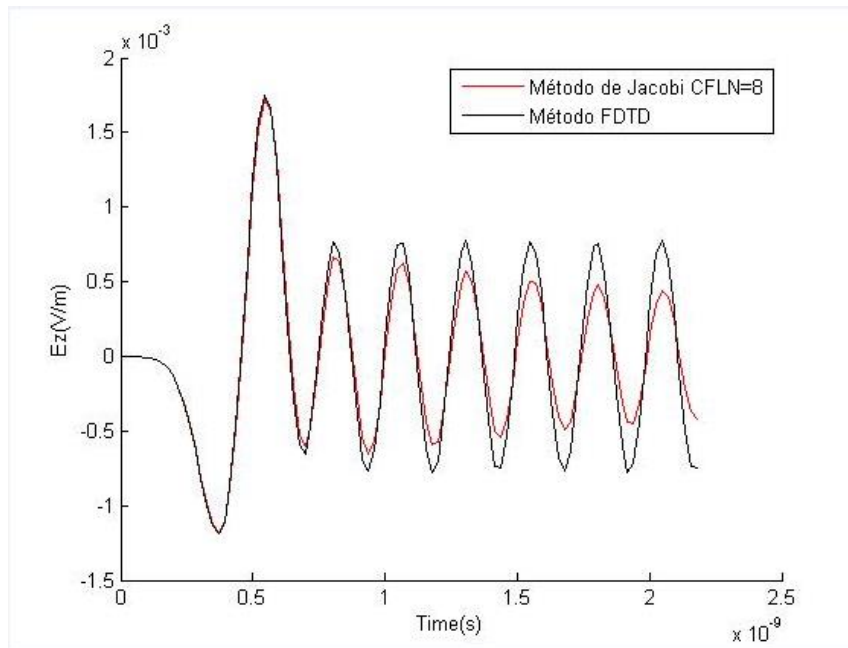


Figura 4.5- Método de Jacobi com $CFLN=8$.

É possível observar na Figura 4.5 que o método de Jacobi aplicado na solução do método FDTD-ADI com $CFLN = 8$ apresenta estabilidade. Entretanto, entre os métodos apresentados nesse trabalho esse método apresenta a menor precisão.

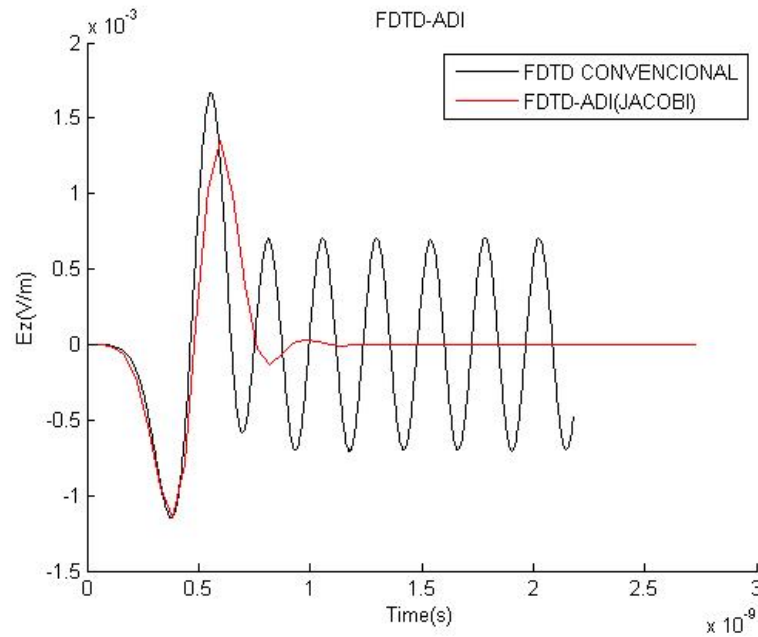


Figura 4.6 – Método de Jacobi com CFLN=20.

É possível observar na Figura 4.6 que assim como o método de Gauss-Seidel o método de Jacobi apresenta erros e imprecisão para valores mais altos de $CFLN$.

A fim de analisar o método numérico mais eficiente para solução matricial do método FDTD-ADI é apresentado na Tabela 4.1 o custo computacional dos métodos diretos e iterativos nas simulações apresentadas. Na Tabela 1 são apresentados os valores de tempo total de simulação em segundos para cada método e com diversos valores de $CFLN$.

Tabela 4.1 - Métodos numéricos para solução do sistema tridiagonal do método FDTD-ADI

CFLN	1	2	4	8	12
FDTD	17,2	NA	NA	NA	NA
ADI-Thomas	91	46	23	10,4	8,2
ADI-W.Press	110	60	30	19	10
ADI-Cholesky	190	92	39	19	16
ADI-G.Seidel	700	350	190	80	40
ADI-Jacobi	1300	420	240	90	70

*NA= não aplicável

É possível observar na Tabela 4.1 que o método de Thomas é o mais eficiente entre os métodos apresentados. Essa eficiência está relacionada com a simplicidade do seu algoritmo que armazena apenas os valores das diagonais principais e não os dados de toda a matriz como é realizado nos outros métodos apresentados.

A validação do resultado do método FDTD-ADI pode também ser realizada através do cálculo analítico da frequência de ressonância da cavidade analisada. Em uma cavidade ressonante é possível encontrar analiticamente o valor da frequência de ressonância conforme apresentado na Equação (2.36), como no problema proposto o valor do comprimento da cavidade eletromagnética é maior que o da altura da cavidade o modo dominante é o $TE_{1,0,1}$ e a equação para cálculo da frequência de ressonância se reduz a Equação (4.2).

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}, \quad (4.2)$$

em que μ é a permeabilidade magnética, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ em que ε_0 é a permissividade eletromagnética do ar e $\varepsilon_r = 2$ e é a permissividade relativa, $m = 1, p = 1, a = 0.03$ e $c = 0.05$.

Na Tabela 4.2 é demonstrado o valor da frequência de ressonância encontrada em cada método numérico com valor de $CFLN = 1$, os resultados são comparados ao valor analítico conforme a Equação 4.2, o erro numérico relativo é calculado de forma a demonstrar o método mais preciso.

Tabela 4.2 - Métodos numéricos para solução do sistema tridiagonal do método FDTD-ADI

CFLN	<i>Freq(Ghz)</i>	<i>Erro relativo</i>
ANALÍTICO	4,12	-
FDTD	4,25	3,1%
ADI-Thomas	4,31	4,6%
ADI-W.Press	4,33	5,09%
ADI-Cholesky	4,35	5,58%
ADI-G.Seidel	4,32	4,8%
ADI-Jacobi	4,33	5,09%

É possível observar na tabela 4.2 que o método de Thomas apresenta o menor erro relativo entre os métodos investigados em comparação ao valor da frequência de ressonância calculado analiticamente. Dessa forma, é possível observar que o método de Thomas apresenta além da maior eficiência uma maior precisão em relação aos métodos simulados.

4.3 Análises da implementação da cavidade eletromagnética

Como nas simulações envolvendo cavidades eletromagnéticas é necessário à implementação de uma PEC na fronteira do domínio computacional, foram realizadas diversas simulações utilizando os três métodos de aplicação da PEC descritos no capítulo 2. Essas simulações foram feitas em uma cavidade eletromagnética com dimensões da malha de $50 \times 30 \times 9$, dimensões físicas das células de $dx=dy=dz=1 \text{ mm}$ e $\varepsilon = 2$. O método de Thomas foi utilizado para solucionar o sistema tridiagonal dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD devido à sua precisão e ao seu menor custo computacional e os resultados são comparados ao método FDTD convencional. A fonte utilizada é um pulso Gaussiano excitado ao longo da direção E_z que passa no centro da cavidade como apresentada na Equação (4.1).

No método 01 as componentes dos campos elétricos tangenciais na fronteira do domínio computacional são zerados após o cálculo do sistema matricial das componentes de campo elétrico em cada direção cartesiana. No método 02 as componentes dos campos elétricos tangenciais são zeradas após a atualização das componentes de campo magnético em cada direção cartesiana. No método 03 as componentes dos campos elétricos tangenciais da fronteira do domínio computacional são zeradas implicitamente dentro das equações do sistema matricial de cada direção cartesiana

Na Figura 4.7 é apresentado o comparativo entre o método 01 e o método 03 e na Figura 4.8 é apresentado o comparativo entre os métodos 02 e 03 ambos aplicados no método FDTD-ADI e verificados no ponto de observação $E_z(25, 10, 5)$.

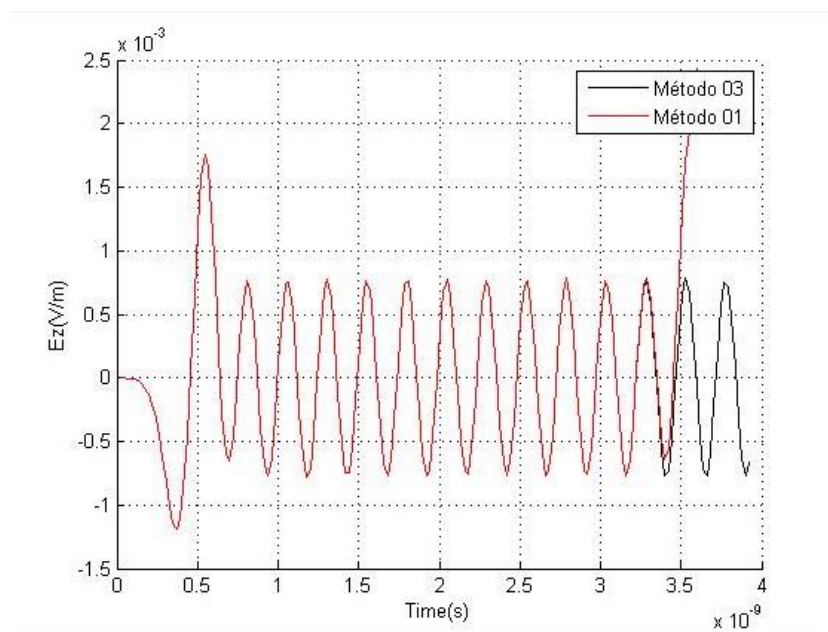


Figura 4.7 – Método 01 e método 03.

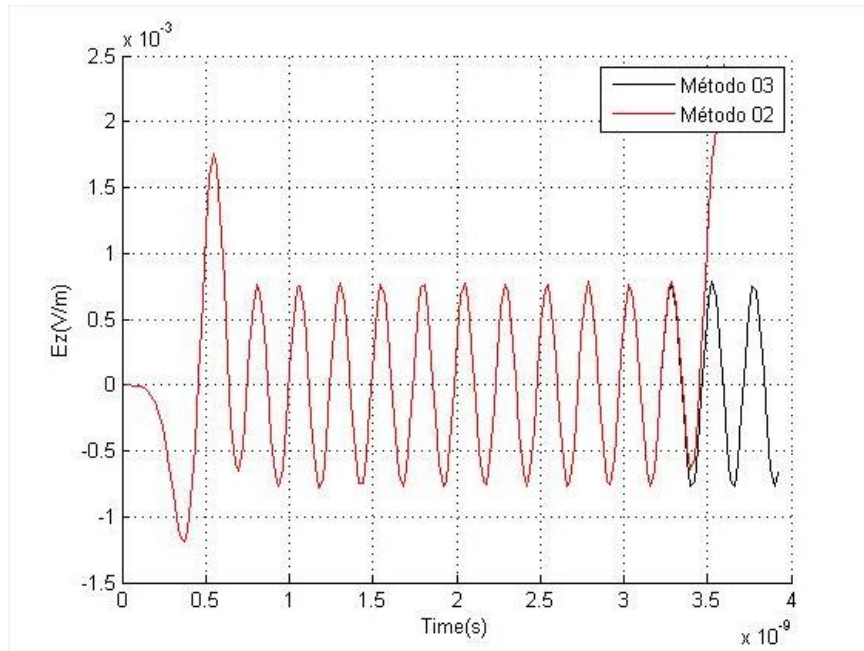


Figura 4.8 – Método 02 e método 03.

Nas simulações apresentadas na Figura 4.7 e Figura 4.8 é possível observar que os métodos 01 e 02 que atualizam o campo elétrico tangencial explicitamente conduzem o sistema a uma solução instável após decorrer um número maior de iterações e que o método 03 apresenta estabilidade incondicional ao número de iterações. Na Figura 4.9 é demonstrado o resultado do método 03 decorrido 1000 iterações e é possível observar que a solução apresenta estabilidade incondicional. É possível observar o valor da frequência de ressonância inerente ao modelo da cavidade eletromagnética do problema proposto. As outras frequências do pulso Gaussiano são atenuadas pois a cavidade só ressona na frequência característica da mesma.

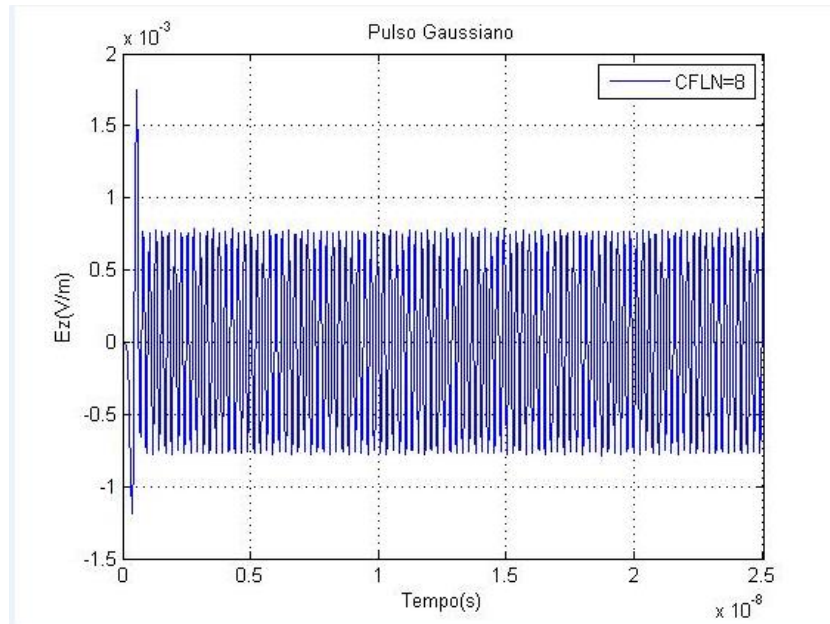


Figura 4.9 - Método 03 com 1000 iterações.

Foram realizadas também simulações para as mesmas dimensões do problema aplicados no método FDTD-LOD com $CFLN = 8$ demonstradas na Figura 4.10 e Figura 4.11,

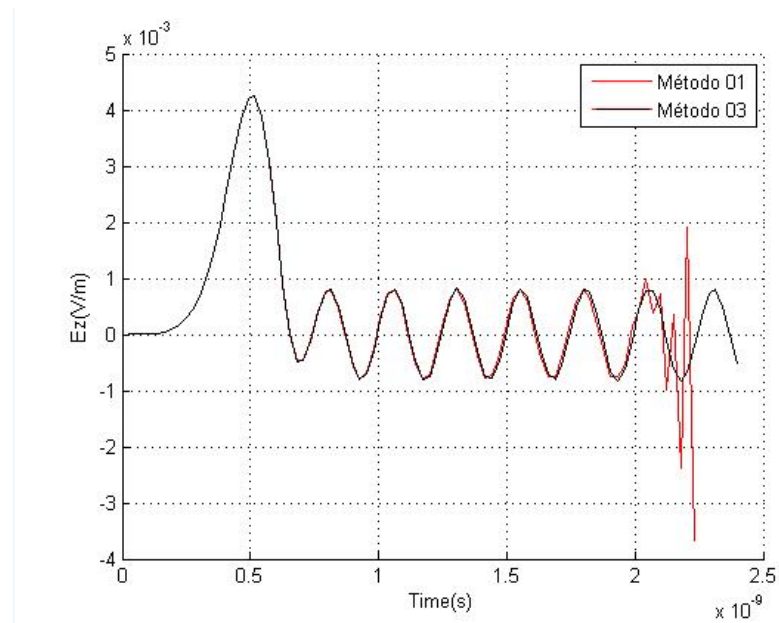


Figura 4.10 – Método 01 e método 03 aplicados no método FDTD-LOD.

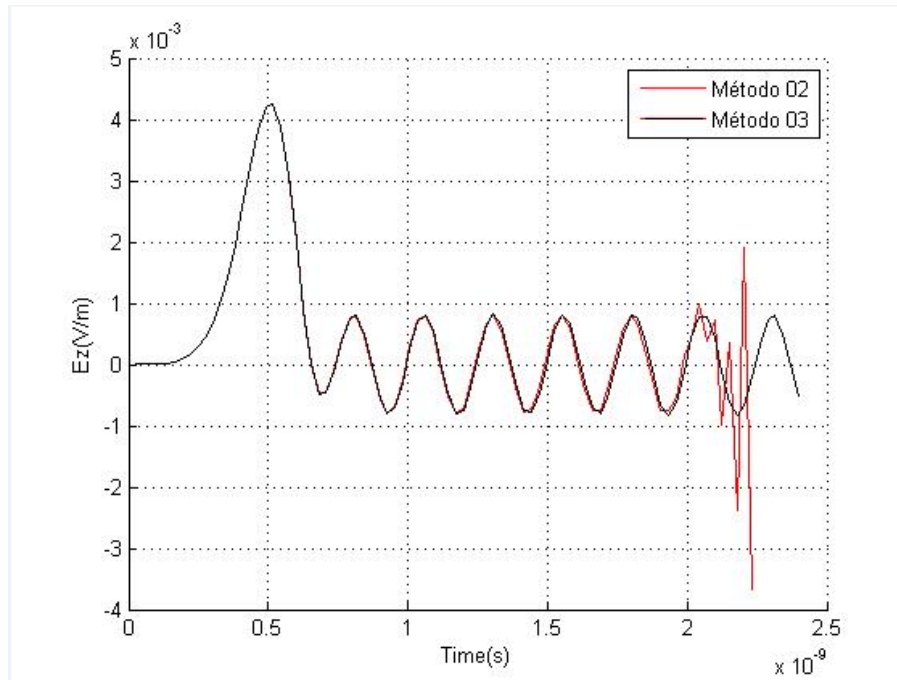


Figura 4.11 – Método 02 e método 03 aplicados no método FDTD-LOD.

Nas simulações apresentadas nas Figuras 4.10 e 4.11 no método FDTD-LOD é possível observar que os métodos 01 e 02 também conduzem o sistema a uma solução instável após decorrer um número maior de iterações e que o método 03 apresenta estabilidade incondicional ao número de iterações. Na Figura 4.12 é demonstrado o resultado do método 03 decorrido 1000 iterações e é possível observar que a solução apresenta estabilidade incondicional.

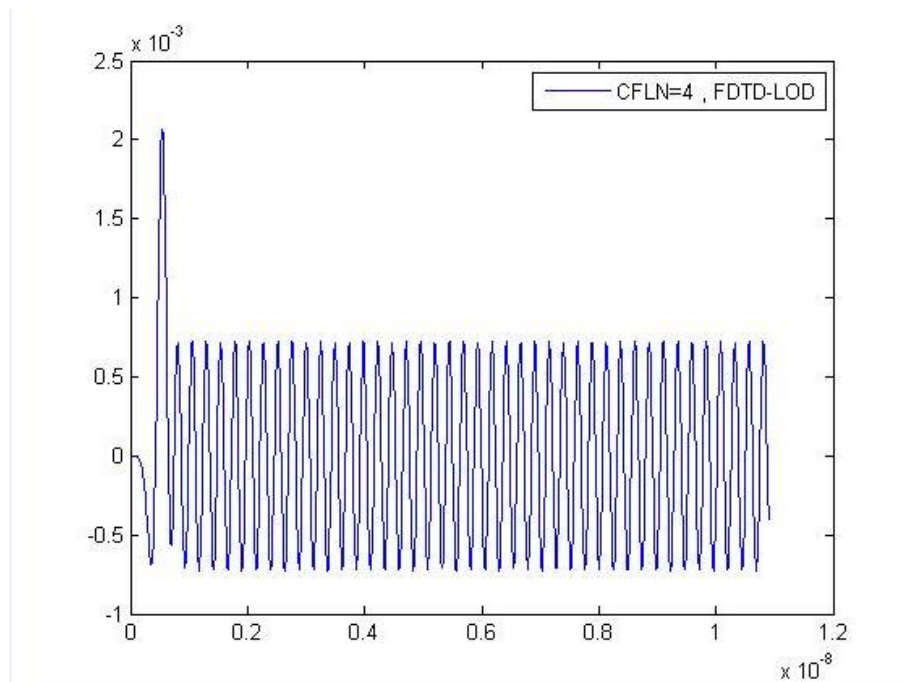


Figura 4.12 – Método 03 aplicados no método FDTD-LOD.

4.4 Análises da eficiência e precisão

Nessa seção é demonstrada a relação da precisão e custo computacional com o passo de tempo nos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD. Nas Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 são demonstradas as soluções do método FDTD-ADI com diversos valores de CFLN.

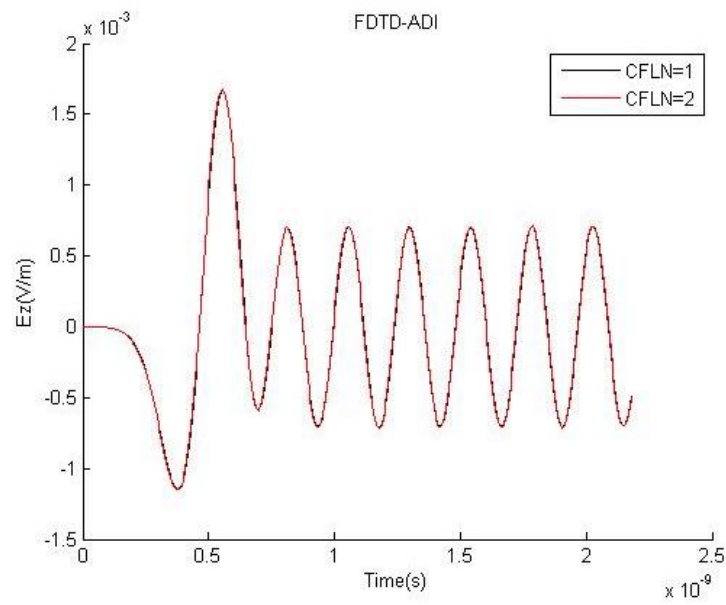


Figura 4.13 – Análise de precisão do método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e $CFLN = 2$.

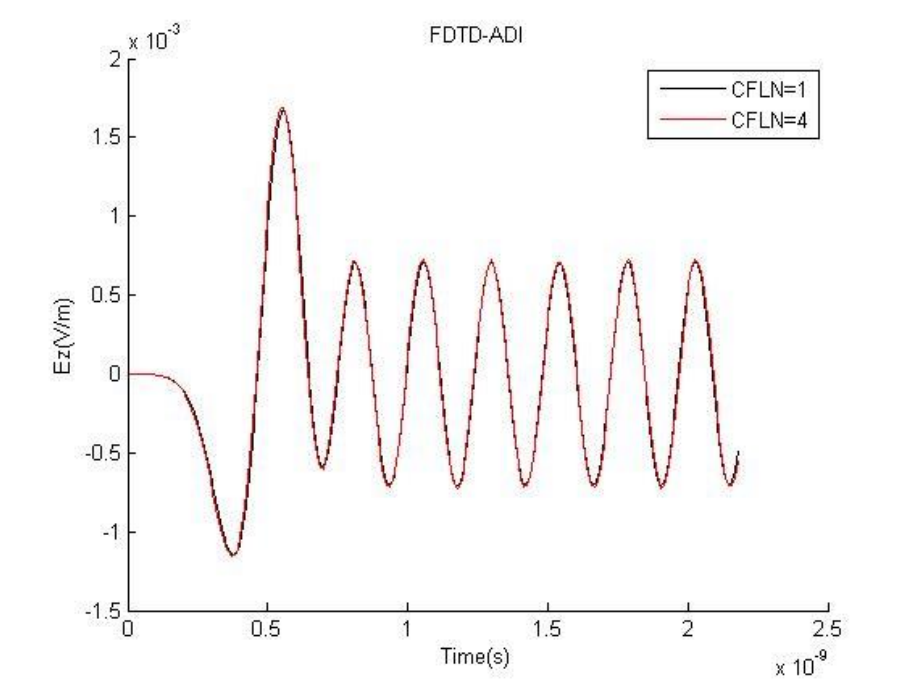


Figura 4.14 – Análise de precisão do método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e $CFLN = 8$.

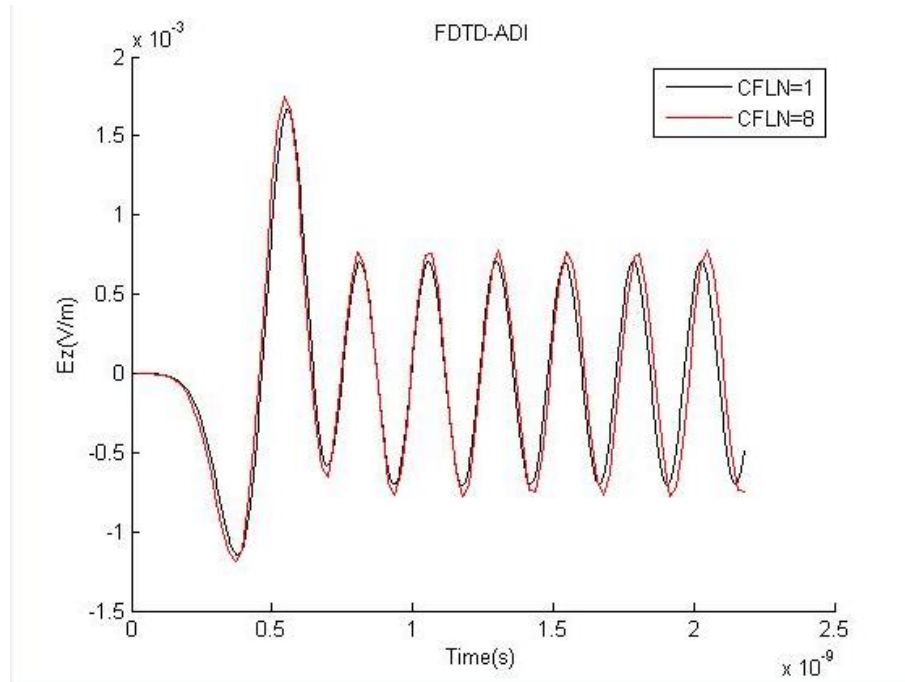


Figura 4.15 – Análise de precisão do método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e $CFLN = 8$.

Na tabela 4.3 é possível observar o erro relativo do valor da frequência de ressonância em relação ao aumento do CFLN no método FDTD-ADI em comparação ao valor analítico.

Tabela 4.3 – Algoritmo de Thomas com aumento do CFLN no método FDTD-ADI

Método	Freq(Ghz)	Erro relativo
ANALÍTICO	4,12	-
FDTD-ADI $CFLN = 1$	4,31	4,6%
FDTD-ADI $CFLN = 2$	4,33	5,09%
FDTD-ADI $CFLN = 4$	4,35	5,58%
FDTD-ADI $CFLN = 8$	4,41	7,03%

É possível observar que o aumento do passo de tempo acarreta uma resposta da solução com menor precisão. Dessa forma, quanto maior o passo de tempo utilizado menor é a precisão adquirida.

Nas Figuras 4.16, 4.17 e 4.18 são demonstrados os resultados do aumento do passo de tempo no método FDTD-LOD.

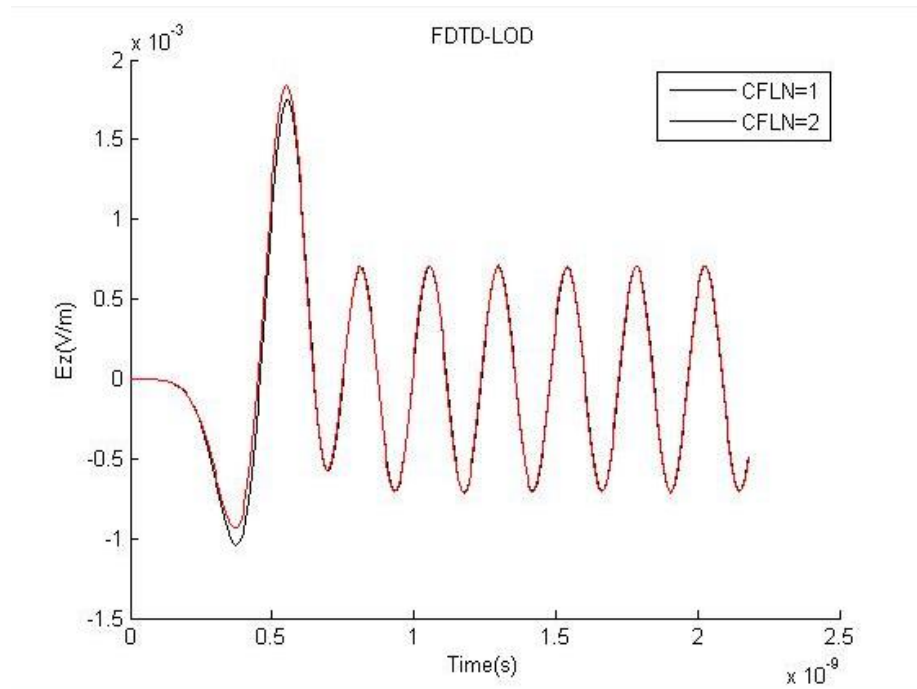


Figura 4.16 – Análise de precisão do método FDTD-LOD com CFLN=1 e CFLN=2.

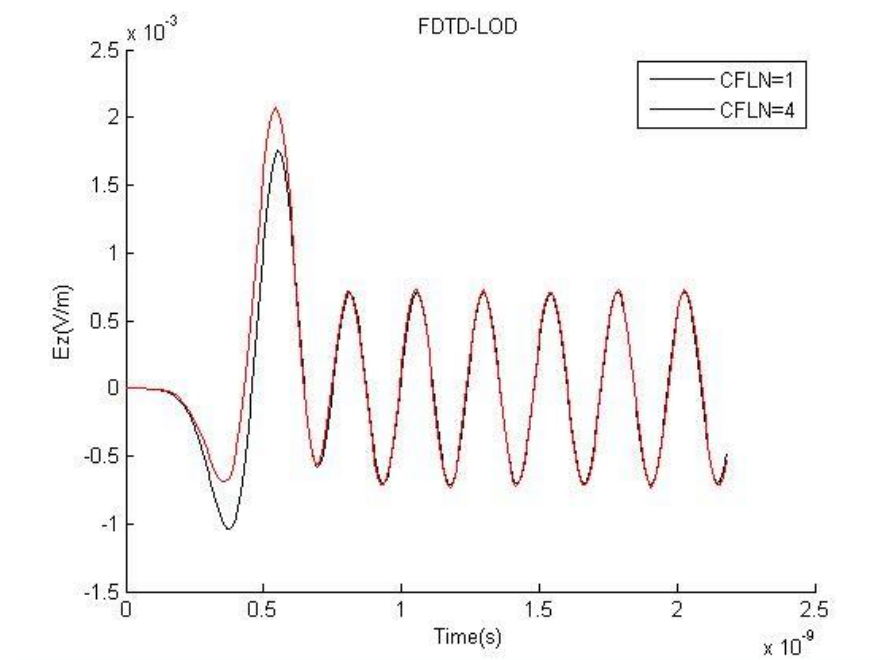


Figura 4.17 – Análise de precisão do método FDTD-LOD com CFLN=1 e CFLN=4

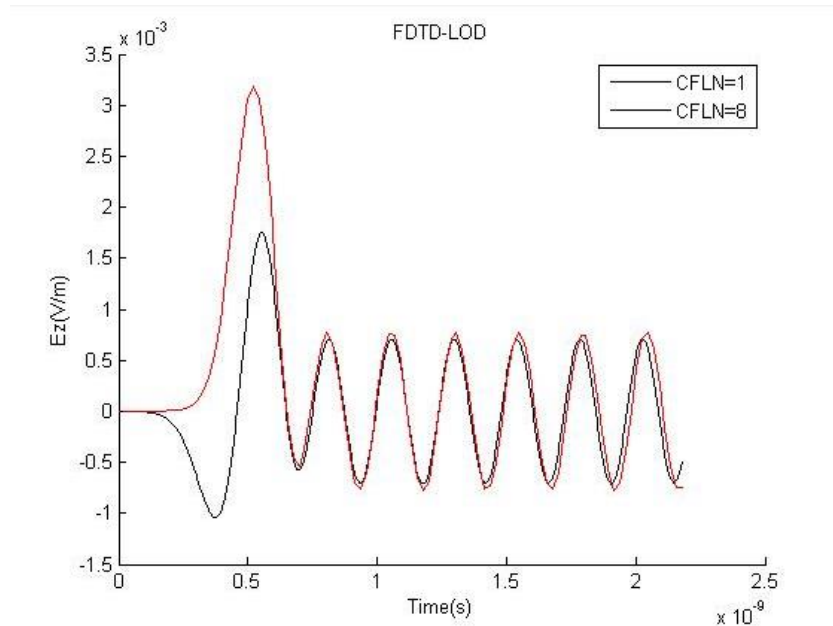


Figura 4.18 - Análise de precisão do método FDTD-LOD com CFLN=1 e CFLN=2.

Na tabela 4.4 é possível observar o erro relativo do valor da frequência de ressonância em relação ao aumento do CFLN no método FDTD-LOD em comparação ao valor analítico.

Tabela 4.4 – Algoritmo de Thomas com aumento do CFLN no método FDTD-LOD

Método	Freq(Ghz)	Erro relativo
ANALÍTICO	4,12	-
FDTD-LOD CFLN = 1	4,31	4,6%
FDTD-LOD CFLN = 2	4,37	6,06%
FDTD-LOD CFLN = 4	4,42	7,28%
FDTD-LOD CFLN = 8	4,52	9,7%

É possível observar que no método FDTD-LOD o aumento do passo de tempo também ocasiona uma menor precisão e ao comparar o resultado entre os dois métodos com CFLN=8 é possível observar que o método FDTD-ADI possui maior precisão que o método FDTD-LOD.

O custo computacional entre os métodos é de grande relevância e os valores de tempo em segundo adquiridos em cada simulação são apresentados na Tabela 4.5 e é apresentado o comparativo dos métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD com diversos valores de CFLN.

Tabela 4.5 - Comparativo do custo computacional entre os métodos FDTD, FDTD-ADI e FDTD-LOD.

CFLN	1	2	4	8	12
FDTD	17,2	NA	NA	NA	NA
FDTD-ADI	91	46	23	10,4	8,2
FDTD-LOD	73	34	18	8,5	7,3

*NA= não aplicável

Verifica-se que o método FDTD-LOD tem o menor custo computacional com uma redução de 49% do tempo total comparado com o FDTD convencional usando $CFLN = 8$. O custo computacional do método FDTD-LOD também apresentou uma redução em média de 20% em relação ao método FDTD-ADI.

4.5 Análises no espaço livre

Nesta seção é investigada a estabilidade e precisão do método FDTD-ADI e FDTD-LOD na aplicação da condição de fronteira Mur. Primeiramente, as simulações são realizadas em espaço livre em que a fronteira Mur é implementada implicitamente nas equações do sistema matricial para permissividade e condutividade igual a zero e o fator $f=1$.

Na simulação a resposta do método FDTD-ADI e FDTD-LOD com $CFLN = 1$ é validada por um algoritmo do FDTD convencional também implementado com a condição de fronteira Mur. A dimensão da malha é de $30 \times 30 \times 30$, as dimensões físicas das células são de $dx=dy=dz=58 \text{ mm}$ e a fonte utilizada é um pulso Gaussiano ao longo de E_z no ponto $i = 10$ e $j = 5$, conforme a Equação (4.1), em que $\tau = 10 \text{ ns}$ and $t_0 = 3 \tau$.

Na Figura 4.19 é possível observar o comparativo entre o método FDTD convencional e o método FDTD-ADI no ponto $E_z(20,10,5)$ e na Figura 4.30 é possível observar o comparativo no ponto $E_z(5,10,15)$,

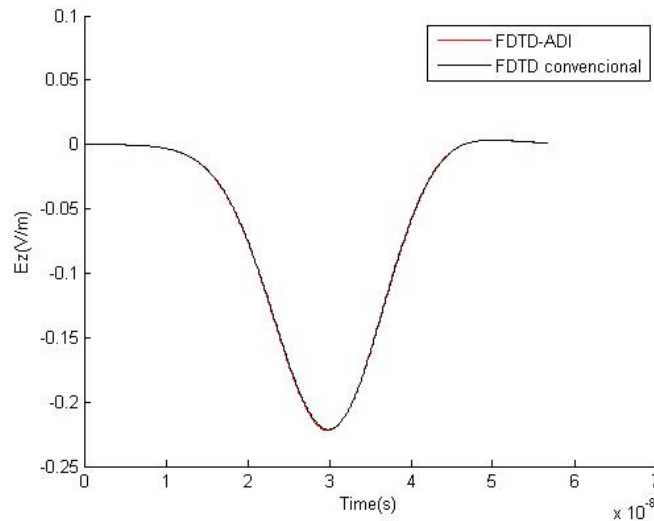


Figura 4.19 - Implementação de Mur em FDTD-ADI e FDTD em $E_z(20, 10, 5)$.

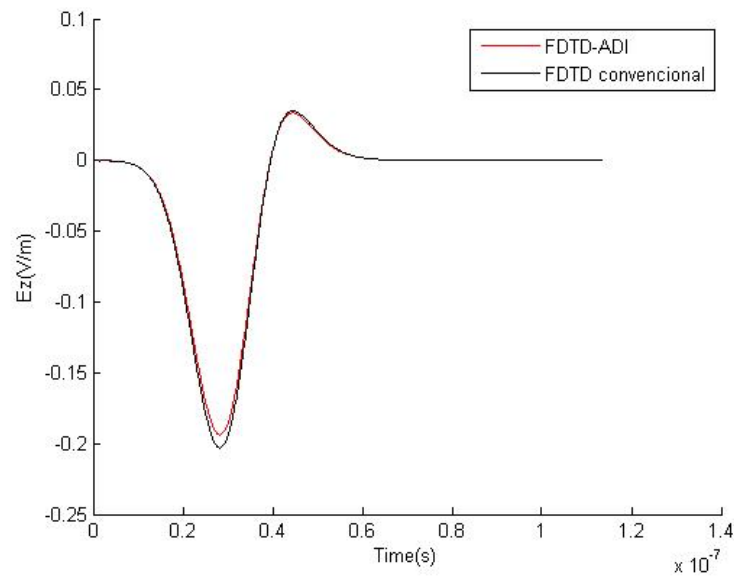


Figura 4.20 – Implementação de Mur em FDTD-ADI e FDTD em E_z (5, 10, 15).

É possível observar nas Figuras 4.19 e 4.20 que o método FDTD-ADI apresenta boa precisão na aplicação de Mur no espaço livre. Na Figura 4.21 apresenta o comparativo entre os métodos com $CFLN = 4$ para 2500 iterações.

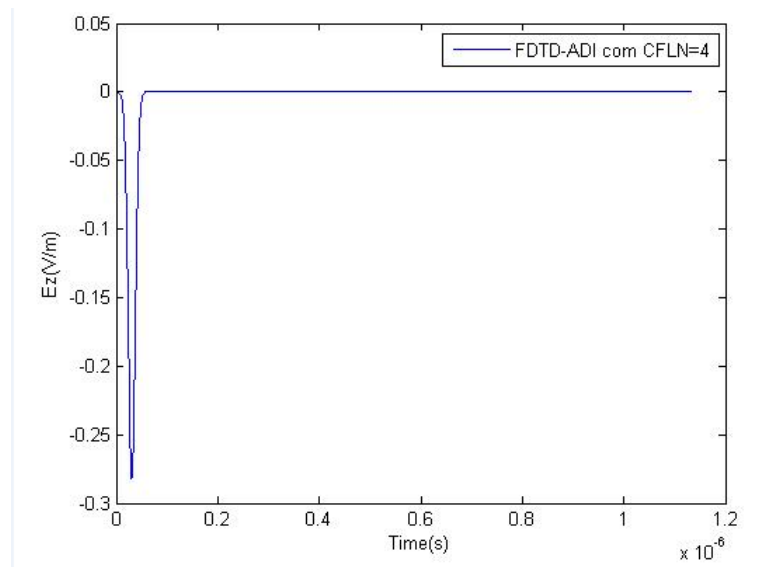


Figura 4.21 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com 2500 iterações

É possível observar na Figura 4.21 que o método FDTD-ADI permanece estável após um número maior de iterações e com um número maior de $CFLN$ em simulações no espaço livre e não foi necessário arbitrar um valor para o fator f para manter essa estabilidade.

Na Figura 4.22 é possível observar a precisão do método FDTD-LOD em relação ao método FDTD-ADI, o mesmo permaneceu estável após um número maior de iterações assim como o método FDTD-ADI, porém como já esperado com uma menor precisão.

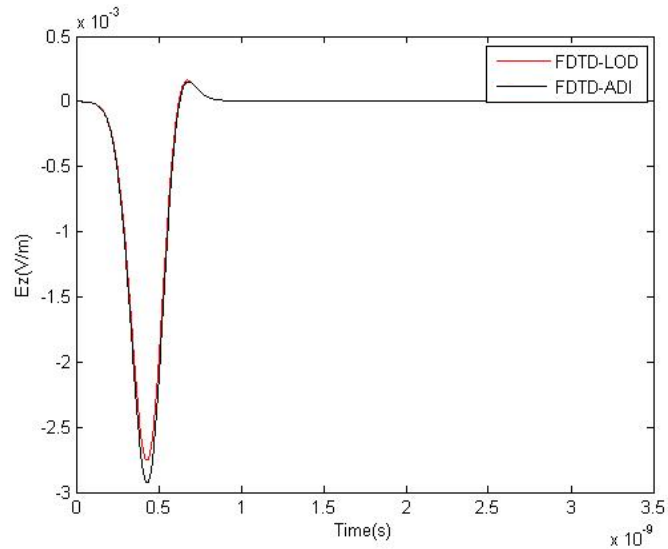


Figura 4.22 – Comparativo entre os métodos FDTD-ADI/LOD na aplicação de Mur

Nessa seção foi demonstrada a aplicação da condição absorvente de fronteira Mur nos métodos incondicionalmente estáveis FDTD-ADI e FDTD-LOD e foi possível observar a estabilidade e precisão dos mesmos ao comparar ao FDTD convencional.

4.6 Análises em uma esfera dielétrica

Na simulação demonstrada na Figura 4.23 é implementado uma esfera dielétrica com $\epsilon = 4$ e raio igual a 6 células no centro do espaço computacional de dimensão $30 \times 30 \times 30$ e a fonte sendo um pulso Gaussiano no mesmo ponto e com as mesmas configurações da Equação (4.5).

É possível observar na Figura 4.23 que o método FDTD-ADI nas simulações que envolvem um valor de permissividade do material diferente da permissividade do espaço livre o sistema é conduzido a instabilidade

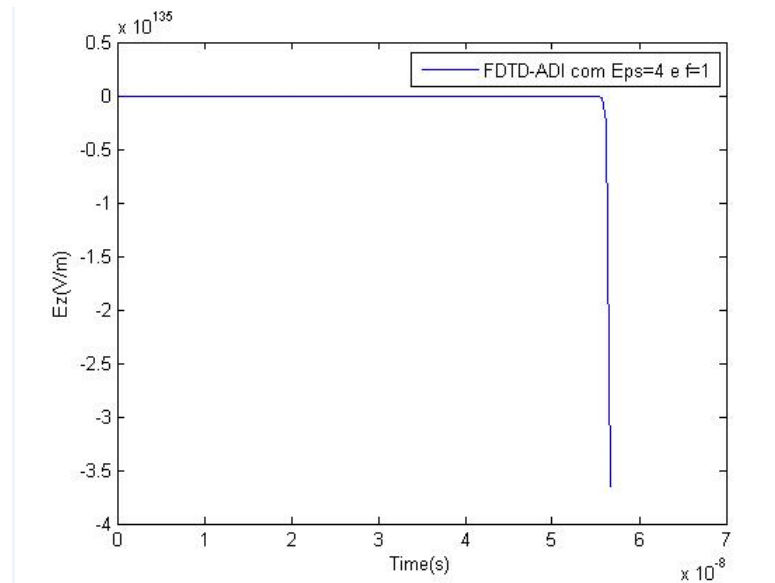


Figura 4.23 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com $\epsilon_{ps} = 4$

Esse problema pode ser contornado arbitrando um valor para o fator $0 < f < 1$ e na Figura 4.24 essa implementação é investigada para vários valores de f com valor do passo de tempo de $CFLN = 1$.

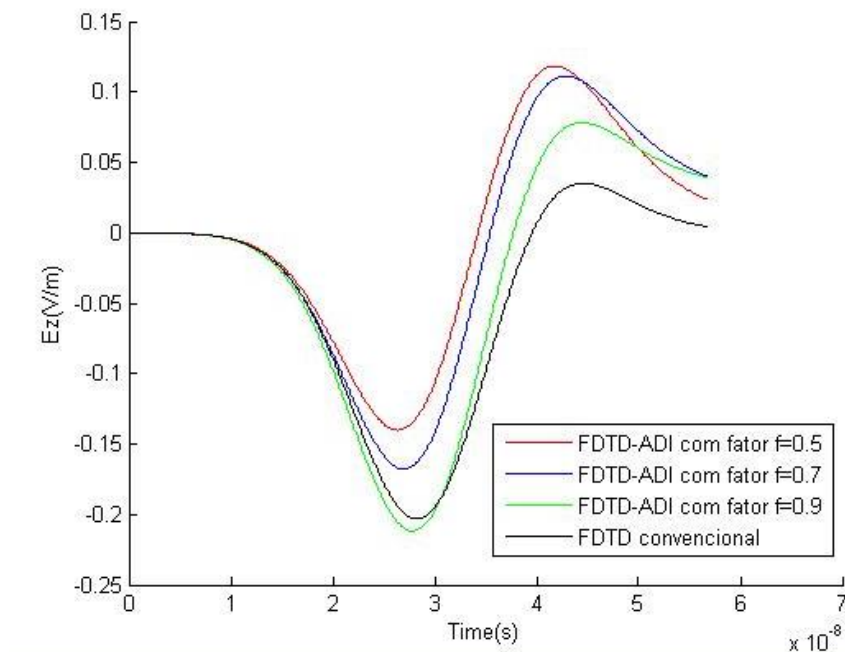


Figura 4.24 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com fator f

É possível observar na Figura 4.24 que o fator f torna o sistema estável, porém ocorrem atenuações das amplitudes e uma maior dispersão numérica como pode ser observado.

A fim de obter uma solução estável e com maior precisão a condutividade elétrica é incluída na esfera do problema proposto e na Figura 4.25 é demonstrada a solução da esfera dielétrica e metálica utilizando o método FDTD-ADI com $CFLN = 1$ e o resultado é comparado ao método FDTD convencional. O ponto de observação do gráfico é em $E_z(5,10,15)$.

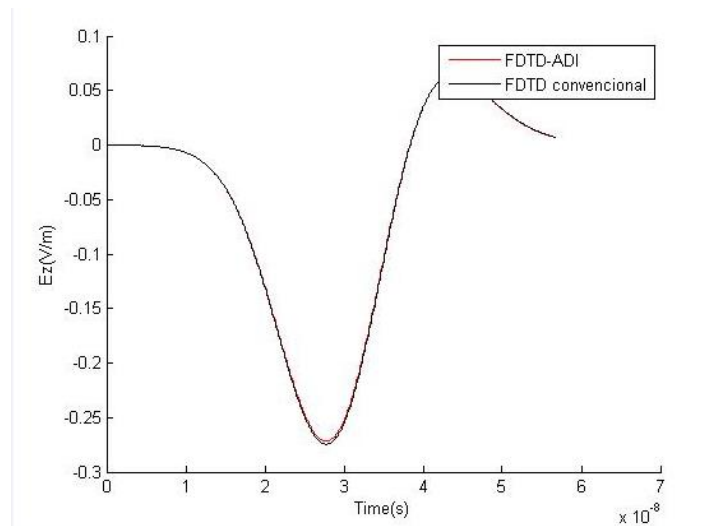


Figura 4.25 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com condutividade elétrica

É possível observar a ótima precisão do método FDTD-ADI comparado ao método FDTD convencional e que o fator f não é necessário em simulações mais complexas em que os objetos simulados possuam um valor de condutividade elétrica definido. Nas Figuras 4.26 e 4.27 são demonstrados os comparativos para $CFLN = 2$ e $CFLN = 8$ no ponto $E_z(20, 10, 5)$,

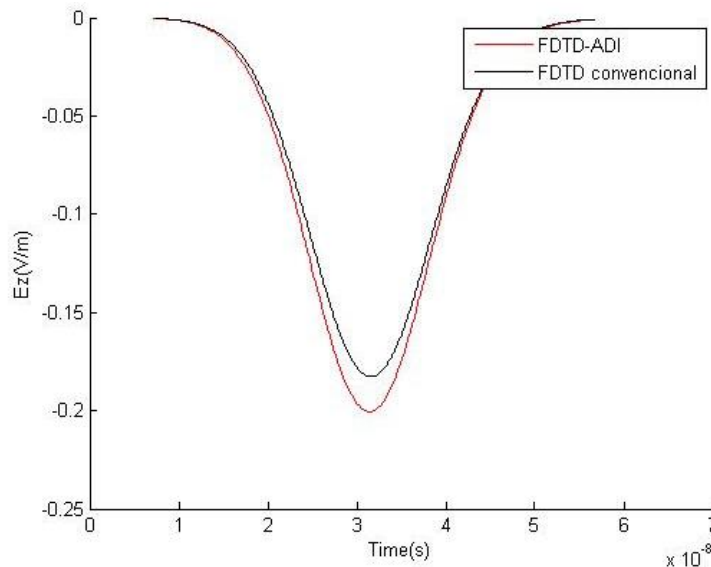


Figura 4.26 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com condutividade elétrica e $CFLN = 2$.

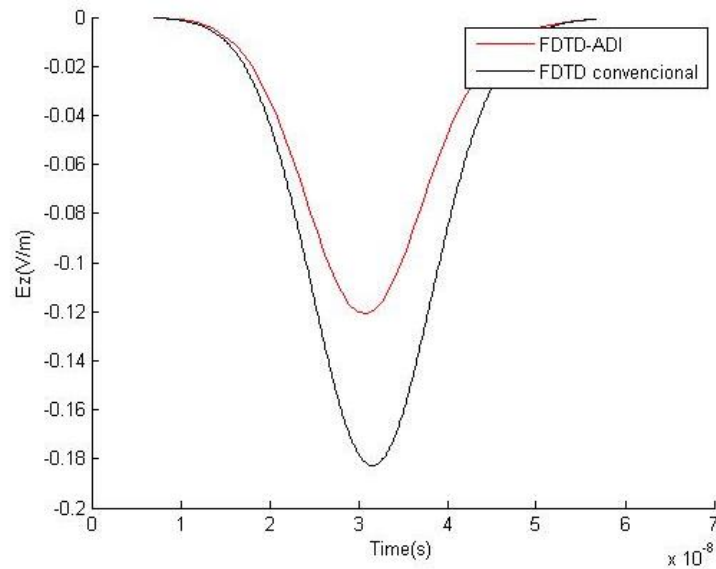


Figura 4.27 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com condutividade elétrica e $CFLN = 8$.

É possível observar nas Figuras 4.26 e 4.27 que o aumento do $CFLN$ conduz a uma maior dispersão numérica no método FDTD-ADI como esperado.

Os métodos matemáticos para solucionar o sistema matricial também são comparados e investigados na aplicação da condição de fronteira Mur aplicados na esfera dielétrica e metálica. A tabela 4.6 demonstra o comparativo do custo computacional entre os métodos de Thomas, W. press, Gauss-Seidel e Jacobi. O método de Cholesky não foi implementado pois o mesmo pode ser usado somente em matrizes simétrica e com a implementação de Mur a matriz não mantém a simetria. As validações foram aplicadas em uma dimensão da malha de $30 \times 30 \times 30$, as dimensões físicas das células são de $dx=dy=dz=58 \text{ mm}$ e a fonte utilizada é um pulso Gaussiano ao longo de E_z conforme a Equação (4.1) e dimensão da esfera sendo de raio igual a 6 células localizada no centro do domínio computacional.

Tabela 4.6 - Métodos numéricos para solução do sistema tridiagonal do método FDTD-ADI

CFLN	1	2	4	8	12
FDTD	50s	NA	NA	NA	NA
ADI-Thomas	262s	130s	75s	32s	21s
ADI-W.Press	280s	142s	87s	46s	27s
ADI-Cholesky	NA	NA	NA	NA	NA
ADI-Jacobi	1180s	589s	280s	140s	70s
ADI-G.Seidel	1201s	604s	305s	156s	86s

*NA= não aplicável

Como pode ser observado pela Tabela 4.6 em aplicações mais complexas o método de Thomas também apresentou uma maior eficiência que os outros métodos.

Na Figura 4.28 é demonstrado o resultado do método numérico de W. Press no ponto $E_z(20,10,5)$ e é possível observar que esse método conduz o sistema à instabilidade em problemas mais complexos.

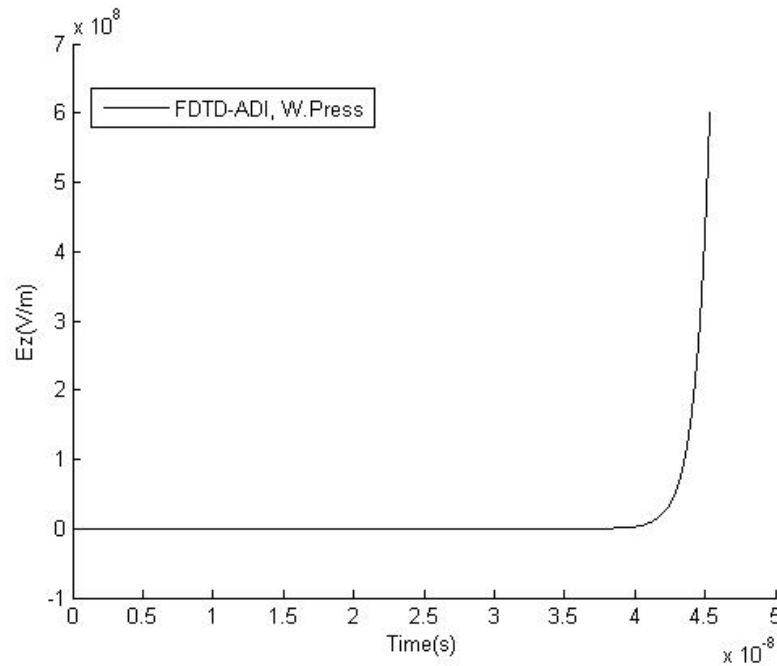


Figura 4.28 – Implementação de Mur em FDTD-ADI com método W.Press

A fim de analisar mais detalhadamente os resultados encontrados pelo método FDTD-ADI os resultados dos campos elétricos encontrados para direção cartesiana x são comparados a valores calculados analiticamente através das Equações (2.69-71). Contudo, para viabilizar essa comparação é realizado primeiramente a “*fast Fourier transform*” (FFT) dos campos elétricos calculados pelo método FDTD-ADI e então as frequências com maiores amplitudes são comparadas ao resultado analítico.

Nas tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 são demonstrados os resultados de algumas frequências do campo elétrico na direção cartesiana x no ponto $E_x(5,5,5)$. No problema simulado a fonte é um pulso gaussiano e, portanto o campo elétrico é composto de várias frequências e pelas equações analíticas foi possível calcular algumas dessas frequências separadamente.

Tabela 4.7 – Frequência do campo elétrico no ponto $E_x(5,5,5)$

Método	Freq(Mhz)	Erro relativo
ANALÍTICO	50,2	-
FDTD-ADI $CFLN = 1$	47,2	5,97%
FDTD-ADI $CFLN = 2$	46,6	7,17%
FDTD-ADI $CFLN = 4$	45,8	8,76%
FDTD-ADI $CFLN = 8$	45,2	9,96%

Tabela 4.8 – Frequência do campo elétrico no ponto $E_x(5,5,5)$

Método	<i>Freq(Mhz)</i>	<i>Erro relativo</i>
ANALÍTICO	37,5	-
FDTD-ADI $CFLN = 1$	35,3	5,86%
FDTD- ADI $CFLN = 2$	34,6	7,77%
FDTD- ADI $CFLN = 4$	33,8	9,86%
FDTD- ADI $CFLN = 8$	33,1	11,73%

Tabela 4.9– Frequência do campo elétrico no ponto $E_x(5,5,5)$

Método	<i>Freq(Mhz)</i>	<i>Erro relativo</i>
ANALÍTICO	8,2	-
FDTD-ADI $CFLN = 1$	7,6	7,31%
FDTD- ADI $CFLN = 2$	7,4	9,75%
FDTD- ADI $CFLN = 4$	7,1	13,41%
FDTD- ADI $CFLN = 8$	6,7	18,29%

É possível verificar nas tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 que o erro relativo aumenta com o aumento do valor do passo de tempo.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se um estudo e análise da precisão, dispersão e eficiência dos métodos implícitos em aplicações na simulação de uma cavidade eletromagnética e de uma esfera no espaço livre utilizando a condição de fronteira Mur. Através da simulação de um pulso Gaussiano em uma cavidade eletromagnética foram demonstrados a precisão e o custo computacional entre os métodos FDTD-ADI, FDTD-LOD, FDTD convencional e os resultados foram comparados e validados através do cálculo analítico da frequência de ressonância da cavidade eletromagnética. O trabalho realiza também a análise do método numérico mais eficiente para o cálculo da solução matricial dos métodos implícitos.

O método de Thomas apresentou maior eficiência em relação aos métodos apresentados com eficiência média de 30% em relação ao método de W.Press e 50% em relação ao método de Cholesky. Os métodos iterativos aqui demonstrados apresentaram boa precisão com valores baixos de $CFLN$. Contudo, para $CFLN$ maiores o sistema é conduzido a erros ou a instabilidade.

Em relação ao passo de tempo os métodos FDTD-ADI e FDTD-LOD apresentaram boa precisão até $CFLN = 8$. Pois, o aumento do passo de tempo conduz a maiores dispersões numéricas.

Através dos resultados obtidos verificou-se que o método FDTD-ADI apresentou ser 60% mais rápido que o método FDTD convencional na aplicação de uma cavidade eletromagnética e o método FDTD-LOD apresentou uma eficiência de tempo médio de 20% em relação ao método FDTD-ADI.

A utilização dos métodos implícitos FDTD-ADI e FDTD-LOD é vantajosa em simulações envolvendo cavidades eletromagnéticas e problemas eletricamente grande devido a grande precisão com valores de passo de tempo maiores do que o limitado no método FDTD convencional.

A condição absorvente de fronteira Mur utilizada no método FDTD-ADI apresentou boa eficiência na simulação de uma esfera dielétrica e metálica utilizando o método de Thomas e os resultados comparados ao cálculo analítico apresentaram valores pequenos de erro para as

frequências simuladas. O método de W.Press apresenta instabilidade em problemas mais complexos.

Como sugestões de temas para trabalhos futuros, tem-se a investigação de outras condições absorventes de fronteira como a PML, UPML e CPML em problemas mais complexos como simulações de antenas de microfita.

REFERÊNCIAS

- [1] YEE, K. S. "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equation in isotropic media". IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-14, p. 302–307, May 1966.
- [2] T.Namiki, "A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method," IEEE *trans.Microwave Theory Technol.*, vol 47, nº 10,pp 2003-2007, outubro de 1999.
- [3] F.Zheng, Z. Chen e J. Zhang, "Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time domain method" IEEE trans. Microwave Theory Tech., vol 48, nº. 9, Setembro de 2000.
- [4] N.N. Yanenko, "On the difference method for the calculation of multidimensional heat conduction equations(Russian)", Dokl. Akad. Match. Soc., vol 82, pp.1207-1210, 1959.
- [5] J. Shibayama. M. Muraki, J. Yamauchi, and H. Nakano, "Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme," *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 19, pp. 1046–1047, 2005.
- [6] E. L. Tan, "Unconditionally stable LOD-FDTD method for 3-D Maxwell's equations," *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.*, vol. 17,no. 2, pp. 85–87, Feb. 2007.
- [7] T.Namiki, "Numerical formulations and aplications of the ADI-FDTD method".
- [8] M. Wang, Z. Wang, e J. Chen, "A parameter optimized ADI-FDTD method," IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Vol. 2, pp. 118-121, 2003.
- [9] A. P. Zhao, "Improvement on the numerical dispersion of 2-D ADI-FDTD with artificial anisotropy," IEEE Microwave and Wireless Components Letters, Vol. 14, No. 6, pp. 292-294, June 2004.
- [10] E.L.Tan, "Unconditionally Stable Fundamental LOD-FDTD Method With Second Order Temporal Accuracy and Complying Divergence", IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Vol. 61, pp. 5, 2013.
- [11] Michelle. B. Guimarães e Sandro. T. M. Goncalves, "Análise da Estabilidade e Eficiência na Solução de Sistemas Tridiagonais em Problemas de Cavidades Eletromagnéticas Utilizando o Método ADI-FDTD".
- [12] Cunha, M.C.C. Métodos numéricos. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2000.
- [13] An. Zhao , " Two special notes on the implementation of the unconditionally stable ADI-FDTD", Microwave Opt Techno Lett 33: 273–277, 2002.
- [14] Chen Juan, "Pec condition implementation for the adi-fdtd method". Xi'an China, 2006.
- [15] Say. Cheoh, "An investigation of alternating-direction implicit finite difference tima domain (ADI-FDTD) method in numerical electromagnetics", 2003.

- [16] A. Iftikhar, “ Numerical Dispersion Analysis of the Unconditionally Stable Three Dimensional LOD-FDTD Method”, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 58, no. 12–December 2010.
- [17] D. Burkay e Teixeira L. Fernando, “Symmetric Source Implementation for the ADI-FDTD Method”, IEEE Trans. On antennas and propagation, Vol. 53, nº 4, April 2005.
- [18] V. E. Nascimento, “Aplicação de técnica LOD em métodos no domínio do tempo e frequência para modelagem de meios convencionais e metamateriais”, 2007.
- [19] T. Namiki, “ Numerical formulations an applications of the ADI-FDTD method”.
- [20] M. J. Chang, L. C. Chow, and W. S. Chang, "Improved alternating-direction implicit method for solving transient three dimensional heat diffusion problems", Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 19, pp. 69-84, 1991.
- [21] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, Numerical recipes in C – the art of scientific computing, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 1992, pp. 50–51.
- [22] Ines, Maria, “Guias de onda”, outubro de 2005,
<https://paginas.fe.up.pt/~mines/OE/Guias.pdf>, acesso em: 23 outubro de 2017
- [23] Michelle. B. Guimarães e Sandro. T. M. Goncalves, “Analysis of Stability, Efficiency and Accuracy in the Solution of Matrix Systems in Electromagnetic Cavity Using the FDDADI/LOD Method”.