Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Célio da Silva Cardoso

Aplicações de Gamificação em Sala de Aula para Alunos do 1º Ano do Ensino Médio no Ensino de Funções

Belo Horizonte
2026

Célio da Silva Cardoso

APLICAÇÕES DE GAMIFICAÇÃO EM SALA DE AULA PARA ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Éden Santana Campos Amorim

Coorientador
Jônathas Douglas Santos de Oliveira

Banca Examinadora
Luis Alberto D'Afonseca
Danielle Franco Nicolau

Belo Horizonte
2026

Cardoso, Célio da Silva
C268a Aplicações de gamificação em sala de aula para alunos do 1º ano do ensino médio no ensino de funções / Célio da Silva Cardoso. – 2026.
90 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Éden Santana Campos Amorim.
Coorientador: Jônathas Douglas Santos de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática (Ensino médio) – Teses. 2. Jogos no ensino de matemática – Teses. 3. Software educacional – Jogos para computador – Teses. 4. Funções algébricas – Teses. I. Amorim, Éden Santana Campos. II. Oliveira, Jônathas Douglas Santos de. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519.3

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

CÉLIO DA SILVA CARDOSO.

APLICAÇÕES DE GAMIFICAÇÃO EM SALA DE AULA PARA ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO NO ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado Profissional em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Data da defesa: 10/07/2026
Data de aprovação: 10/07/2026

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
EDEN SANTANA CAMPOS AMORIM
Data: 09/09/2026 09:22:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Éden Santana Campos Amorim
Presidente da banca examinadora - CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
JONATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA
Data: 09/09/2026 09:17:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jônathas Douglas Santos Oliveira
Vice-presidente da banca examinadora - CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
DANIELLE FRANCO NICOLAU
Data: 08/09/2026 10:07:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Danielle Franco Nicolau
Membro da banca examinadora - UFV – Campus Florestal

gov.br Documento assinado digitalmente
LUIS ALBERTO D AFONSECA
Data: 08/09/2026 22:00:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Luis Alberto D'Afonseca
Membro da banca examinadora - CEFET-MG

Dedico este trabalho, primeiramente, à minha querida família. À minha esposa, Viviane, por sua paciência infinita e por partilhar comigo cada etapa deste percurso, ouvindo de forma quase incessante as ideias e reflexões que deram vida a este artigo. Aos meus filhos, Felipe e Gabriela, que foram pilares essenciais no apoio emocional e técnico, dedicando-se diretamente à implementação do código em Python e ao aprimoramento da jogabilidade e dinâmica da gamificação desenvolvida.

À memória de meus pais, Maria Cardoso e Manoel Eduardo, que me ensinaram, pelo exemplo, que o trabalho digno é um valor imensurável.

Agradecimentos

Agradeço a Fundação de Ensino de Contagem unidade Ressaca e à Escola Estadual Carlos Drummond de Andrade, instituições onde exerço a docência, pela compreensão, flexibilidade e apoio na organização dos meus horários, permitindo conciliar as salas de aula com as exigências deste mestrado.

Aos professores do CEFET-MG, cujos ensinamentos foram fundamentais, com especial agradecimento aos professores Éden, Jônhatas e Luis, pela valiosa orientação acadêmica e pelo suporte técnico no desenvolvimento do código em Python.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho propõe o uso da gamificação para o ensino de funções afins, quadráticas e cúbicas para alunos do 1o ano do Ensino Médio. O objetivo é criar um ambiente lúdico que facilite a assimilação de conceitos abstratos, tornando o aprendizado mais atraente e significativo. Baseado em autores como Busarello e Burke, este estudo define os fundamentos para criar um sistema de gamificação didaticamente eficaz que vá além do entretenimento. O resultado é o produto educacional "A Batalha dos Eixos', apresentado em duas versões: jogo de tabuleiro físico e jogo digital. Numa narrativa inspirada em clássicos da ficção científica espacial, utilizando a jornada do herói para engajar e motivar, a mecânica do jogo faz uso da interpolação de pontos por meio de funções polinomiais, onde gráficos de funções do primeiro, segundo e terceiro graus são interpretadas como trajetórias: o jogador deve determinar a função matemática que represente a trajetória que atinja as naves inimigas, representadas por pontos no plano cartesiano. Como base teórica, o trabalho aborda definições de funções polinomiais e conceitos avançados como a interpolação de Lagrange, utilizando obras clássicas, como Lima, Iezzi e Leithold. Para a versão digital, produzida em linguagem Python, são implementadas também mecânicas de jogo e pontuação, oferecendo *feedback* imediato, funcionando como uma ferramenta de fixação de conteúdo tanto em sala de aula quanto em casa.

Palavras-chave: Ensino da Matemática; Gamificação; Funções polinomiais.

Abstract

This work proposes the application of gamification to the instruction of affine, quadratic, and cubic functions for first-year high school students. The objective is to establish a ludic environment that facilitates the assimilation of abstract concepts, rendering the learning process more engaging and meaningful. Drawing upon authors such as Busarello and Burke, the study defines the theoretical foundations for developing a didactically effective gamification system that transcends mere entertainment. The resulting educational product is titled "A Batalha dos Eixos" (The Battle of the Axes), which is presented in two formats: a physical board game and a digital application. Set within a narrative inspired by classic space science fiction and utilizing the "hero's journey" framework to foster engagement and motivation, the game mechanics employ point interpolation through polynomial functions. Within this framework, the graphs of first, second, and third-degree functions are interpreted as trajectories; the player must determine the specific mathematical function representing a path that intersects enemy vessels, which are represented as points on the Cartesian plane. Regarding its theoretical framework, this work addresses definitions of polynomial functions and advanced concepts such as Lagrange interpolation, referencing foundational literature by Lima, Iezzi, and Leithold. For the digital version, developed using the Python programming language, game and scoring mechanics were implemented to provide immediate feedback, serving as a pedagogical tool for content reinforcement both in the classroom and for independent study.

Keywords: Mathematics Education; Gamification; Polynomial functions.

Sumário

1 Introdução **11**

2 Gamificação **14**
2.1 Gamificação como prática de ensino . . . 14
2.1.1 Cultura de jogos . . . 16
2.1.2 Tecnologia . . . 17
2.2 Elementos da gamificação . . . 18
2.3 Construção de uma atividade gamificada . . . 20
2.3.1 Componentes essenciais da variável "Pensar como em Jogos" . . . 24
2.4 Ludificação e gamificação . . . 27
2.5 Análise de atividades gamificadas em dissertações do PROFMAT . . . 29
2.5.1 Análise crítica do Trabalho 1: uso de gamificação com Scratch . . . 30
2.5.2 Análise crítica do Trabalho 2: uso de gamificação com Construct 3 . 30
2.5.3 Análise crítica do Trabalho 3: utilização de atividades gamificadas do repositório de plataformas de jogos . . . 32
2.5.4 Considerações finais sobre gamificação . . . 33

3 Funções polinomiais **35**
3.1 Funções polinomiais nas atividades gamificadas . . . 35
3.1.1 Continuidade e conexidade . . . 36
3.2 Funções reais: definições gerais . . . 37
3.3 Função afim e a reta . . . 39
3.4 Função quadrática e parábola . . . 43
3.5 Funções polinomiais . . . 50
3.5.1 Unicidade da função polinomial . . . 51
3.5.2 Zeros de uma função polinomial . . . 58
3.5.3 Gráfico de uma função polinomial de grau n . . . 59
3.6 Função cúbica . . . 60

4 Proposta de atividades gamificadas: "Batalha dos eixos" **64**
4.1 "Batalha dos Eixos" – jogo físico . . . 65
4.1.1 Objetivos . . . 65
4.1.2 Protótipo . . . 66
4.1.3 Produto final . . . 70
4.2 "Batalha dos Eixos" – versão digital . . . 73
4.2.1 Protótipo: "Guerra dos Eixos" . . . 73
4.2.2 Produto final: "Batalha dos Eixos – Sistema de Defesa Cartesiano" 74
4.2.3 Construção da narrativa . . . 75

4.2.4 Sistema de pontuação . . . 76
4.2.5 Progressão de níveis e conteúdo matemático . . . 76
4.2.6 Considerações metodológicas . . . 78
4.2.7 Considerações metodológicas . . . 80

5 Conclusão **81**

Referências **82**

Apêndices

A Acesso ao jogo "Batalha dos Eixos" – versão digital **84**
A.1 Instruções passo a passo . . . 84
A.1.1 Acesso ao Google Drive e download . . . 84
A.1.2 Descompactação dos a arquivos . . . 84
A.1.3 Funcionalidades da linguagem Python . . . 85
A.1.4 Execução do jogo . . . 85

B Guia do jogo "Batalha dos eixos" – versão digital **86**
B.1 Menu Principal . . . 86
B.1.1 "A Saga" – História e narrativa) . . . 86
B.1.2 Cadastro e *login* . . . 87
B.1.3 "Hall da Fama" – Sistema de *ranking* . . . 87
B.1.4 Progressão de níveis . . . 87
B.1.5 Instruções da missão . . . 88
B.1.6 Área de combate gráfico . . . 88
B.1.7 Sucesso e falha . . . 88
B.1.8 Revisão gráfica . . . 88
B.1.9 Vitória final . . . 89

Lista de Figuras

2.1 Cinco variáveis que definem o conceito de Gamificação (Busarello, 2016). . 22
2.2 Jogo Elden Ring (Ambiente fantasioso). 25
2.3 Personagens do desenho animado Scooby-Doo. 26
2.4 Tela de entrada do jogo "Roleta de funções" 31
2.5 Jogo da Joaninha 32
2.6 Jogo do Labirinto 33

3.1 Tela do jogo "Batalha dos eixos" – versão digital 36
3.2 Gráficos de $f(x) = 3x + 5$ e $f(x) = -5x - 3$ 40
3.3 Função constante $f(x) = 2$ 41
3.4 Função linear $f(x) = x$ 41
3.5 Gráfico da função $y = 5x - 3$ 42
3.6 Gráfico da função $y = x^2 + 4x + 3$ 47
3.7 Jogo de tabuleiro "Guerra espacial" 49
3.8 Função que passa por (1,16), (−7,16) e (7,0) 50
3.9 Gráfico de $f(x) = 4x^4 - 40x^3 + 80x^2 + 160x - 384$. 61
3.10 Gráfico da função cúbica. 63

4.1 Tabuleiro de gamificação em folha quadriculada - protótipo Fonte: Próprio autor. 67
4.2 Tabuleiro de gamificação impresso – versão final Fonte: Próprio autor. . . . 71
4.3 Peças físicas de gamificação – versão final Fonte: Próprio autor. 71
4.4 Tela principal do 1º jogo digital Fonte: Próprio autor. 74
4.5 Tela Missão 1 – Batalha dos Eixos (Python) Fonte: Próprio autor. 77
4.6 Tela Missão 2 – Batalha dos Eixos (Python) Fonte: Próprio autor. 77
4.7 Tela Missão 3 – Batalha dos Eixos (Python) Fonte: Próprio autor. 78
4.8 Tela Missão 4 – Batalha dos Eixos (Python) Fonte: Próprio autor. 78
4.9 Tela Missão V – Protocolo Fantasma Fonte: Próprio autor. 79

Lista de Tabelas

3.1 Tabela de valores para $y = 5x - 3$ 38
3.2 Tabela de valores para $y = x^2 + 4x + 3$ 38
3.3 Tabela de valores para $y = 5x - 3$ 42
3.4 Tabela de valores para $y = x^2 + 4x + 3$ 46
3.5 Tabela de Valores para $f(x)$ com pontos selecionados 60
3.6 Valores de $f(x)$ para pontos selecionados e ponto de inflexão 62

1 Introdução

Ao longo da prática docente, observei uma barreira persistente na aprendizagem matemática: a tendência dos discentes de focar quase exclusivamente nos aspectos visuais de um gráfico, ou na marcação mecânica de pontos no plano cartesiano. Isso impede que eles apreendam o conceito de função em si, sua estrutura e seu comportamento. Tal percepção é frequentemente corroborada pelo comportamento em sala de aula, em que muitos estudantes relatam obstáculos com o tema, associando-os a uma relação conturbada com a matemática como um todo. Muitas vezes, o conteúdo ministrado não corresponde às expectativas de aprendizagem dos alunos, gerando desmotivação pelos estudos e incertezas em relação ao futuro acadêmico. Torna-se imperativo, portanto, compreender essas dificuldades e desenvolver um olhar mais crítico para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de forma efetiva. A realidade socioeconômica de muitos estudantes da escola pública brasileira impõe desafios adicionais. Muitos discentes precisam dividir o tempo de estudo com jornadas de trabalho exaustivas, buscando modificar suas realidades através da educação, muitas vezes inspirados pelas lutas de suas próprias famílias. Essa dupla jornada evidencia que, em meio às intempéries sociais, a escola precisa oferecer metodologias que realmente engajem o aluno e o façam perceber o conhecimento como uma chave para a transformação social e pessoal. A presente dissertação emerge da necessidade de tornar o ensino de funções matemáticas mais atraente e eficaz para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Frequentemente, observamos que a abordagem desse tópico revela que a assimilação do conceito de função não ocorre de forma plena. O aprendizado tradicional muitas vezes não condiz com o que os jovens buscam, e a falta de interesse os mantém estagnados. É necessário entender essas barreiras e adotar uma postura crítica para intervir pedagogicamente. Reconhece-se que cada discente possui seu ritmo e particularidades. No entanto, há um patamar mínimo de conhecimento que todos deveriam atingir. A realidade apresenta-se distinta: muitos ingressam no Ensino Médio com aversão à matemática, enxergando-a como um obstáculo intransponível. A matemática exige raciocínio lógico, base sólida de conceitos prévios e disposição para enfrentar desafios, obrigando o aluno a tomar

decisões para as quais nem sempre foi preparado. A cada ano, a defasagem acumula-se, gerando um ciclo desmotivador de estagnação. Estudos recentes do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), conduzidos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) [1], apontam uma estagnação crítica na educação brasileira, com os estudantes de 15 anos atingindo uma proficiência média de apenas 379 pontos em matemática, um desempenho inferior ao patamar esperado de 1000 pontos. O dado alarmante, da edição de 2023, revela que 73% dos alunos estão abaixo do nível 2 de proficiência [2], considerado o patamar mínimo para a vida cidadã, enquanto apenas 1% alcança os níveis de excelência. Além disso, nota-se que o investimento na educação básica no Brasil ainda é proporcionalmente inferior ao de países desenvolvidos. Diante desse cenário imobilizador, busca-se investigar alternativas para transformá-lo, especialmente no ensino de funções. O objetivo é propor métodos que facilitem o aprendizado e reacendam o interesse dos alunos.

Na busca por estratégias que aproximem os estudantes da matemática, destaca-se a *gamificação*, uma metodologia ativa que utiliza elementos de jogos em contextos educacionais, conforme conceitua Busarello [3]. Observando que os estudantes demonstram familiaridade e engajamento em ambientes lúdicos, assume-se que a aplicação desses princípios pode facilitar a interação com conceitos matemáticos e melhorar a aprendizagem. Esta dissertação propõe o desenvolvimento de um jogo, aplicado com estratégias de atividade gamificada, como ferramenta pedagógica. O objetivo é tornar o conteúdo mais acessível e motivador, incentivando a participação ativa. O trabalho está organizado em cinco partes fundamentais descritas a seguir.

O segundo capítulo dedica-se ao referencial teórico sobre gamificação, fundamentado em obras e artigos essenciais, tais como:

- *Gamification: princípios e estratégias*, de Busarello (2016) [3].
- *Gamificar: Como a gamificação motiva as pessoas a fazerem coisas extraordinárias*, de Burke (2015) [4].
- *Gamificación versus Ludictadura*, de Escribano (2013) [5].
- *Gamificação da Cultura: O jogo é uma mediação e não uma mídia*, de Tavares e Gomes (2024) [6].

Esta fundamentação é necessária para o desenvolvimento de um recurso gamificado consistente e didaticamente eficaz. Ainda no segundo capítulo, realiza-se uma análise das dissertações do PROFMAT que adotaram a gamificação em produtos educacionais voltados ao ensino e o uso de plataformas digitais. Foram selecionados três trabalhos representativos, de Camargo Júnior [7], Pimentel [8] e Pacheco [9]. O objetivo da análise é investigar o

processo de construção dos produtos para extrair lições relevantes para implementação, otimizando o engajamento, conforme destacado por Burke [4].

No terceiro capítulo, apresenta-se o referencial teórico matemático sobre funções e interpolação, abordando os conceitos essenciais de função afim, quadrática e cúbica. Este capítulo contempla também desenvolvimentos teóricos mais avançados, como o estudo das funções polinomiais de grau geral e a interpolação de Lagrange, fundamentando-se nas obras de Simmons [10], Lima [11], Leithold [12], Wagner [13] e Iezzi [14].

O quarto capítulo apresenta os produtos educacionais: o jogo "A Batalha dos Eixos", em suas versões física e digital. A partir dos referenciais teóricos, elaborou-se uma atividade contendo as cinco variáveis indispensáveis para uma gamificação, segundo Busarello [3]: narrativa, aprendizagem, pensar como um jogo, mecânicas de jogos, engajamento e motivação. O objetivo é ensinar o aluno a determinar a expressão algébrica da função polinomial a partir de pontos pertencentes ao seu gráfico. Apresentam-se os protótipos em formato físico e a versão digital em Python, utilizando uma narrativa inspirada em clássicos da ficção científica espacial, como *Star Wars*, para incentivar a interação. Em particular, o jogo computacional divide-se em níveis de complexidade crescente:

- **Nível 1:** O aluno estabelece a trajetória linear (função do 1^{o} grau) para interceptar um alvo no plano 2D.
- **Nível 2:** Exige-se o cálculo de uma rota parabólica (função quadrática) para neutralizar duas ameaças simultâneas.
- **Nível 3:** Com apenas uma nave inimiga visível, o jogador deve escolher estrategicamente uma coordenada adicional para definir a parábola exata do ataque.
- **Nível 4 e 5:** Apresentam-se desafios envolvendo trajetórias representadas por funções cúbicas, exigindo a determinação de múltiplos pontos.

Por fim, a conclusão destaca os resultados alcançados e a aplicabilidade do projeto. Espera-se que os resultados incentivem a utilização de recursos lúdicos no Ensino Médio, com flexibilidade para adaptação em disciplinas de pré-cálculo no Ensino Superior. Nos apêndices, são incluídos o endereços de acesso para os produtos, código-fonte e orientações para aplicação em sala de aula.

2 Gamificação

Mais do que apenas aplicar elementos de jogos, a gamificação contemporânea está intrinsecamente relacionada às interações humanas mediadas por metodologias e plataformas digitais. A aprendizagem, em um contexto de sociedade cada vez mais tecnológica, pode e deve apropriar-se ativamente dessa nova ferramenta, a fim de garantir resultados mais eficientes, engajadores e condizentes com o mundo contemporâneo. Tais elementos são amplamente utilizados em ambientes empresariais para cultivar um clima organizacional mais saudável para os funcionários e fortalecer o relacionamento com os clientes. O contentamento e a motivação dos colaboradores tendem a aprimorar as relações interpessoais, gerando um senso de importância que se reflete positivamente na relação entre a empresa e seus clientes. Pode-se questionar se aplicar essa lógica no ambiente escolar, com foco no protagonismo estudantil e devidas adequações, culminaria em uma melhor eficiência educacional.

Em qualquer processo de aprendizagem, a motivação e o engajamento são elementos essenciais e importantes na obtenção de resultados significativos. Neste capítulo, apresenta-se uma revisão de como os jogos influenciam a existência cotidiana das comunidades humanas ao longo da história, a fim de elucidar a *gamificação* como uma técnica de aprendizagem e uma metodologia ativa. Entende-se assim a gamificação não como um conceito estritamente novo, mas uma prática intrinsecamente relacionada aos recursos tecnológicos de cada época. Sob este ponto de vista, as características e princípios da gamificação aqui abordadas estão fundamentados, principalmente, nas obras de autores como Raul Busarello, "Gamification: princípios e estratégias" [3], e Brian Burke, "Gamificar: Como a gamificação motiva as pessoas a fazerem coisas extraordinárias" [4], que exploram a práxis da gamificação.

2.1 Gamificação como prática de ensino

A gamificação, enquanto tema central nas metodologias de aprendizagem, é reconhecida como uma ferramenta fundamental para estimular a participação dos indivíduos na comunidade escolar, conforme argumentam Burke [4], Busarello [3] e Escribano [5].

Mais do que apenas aplicar elementos de jogos, a gamificação contemporânea está relacionada às interações humanas mediadas por plataformas digitais. Segundo Burke [4], a gamificação está associada fundamentalmente à motivação e ao engajamento, possuindo forte origem e aplicabilidade no ramo empresarial. No contexto corporativo, tais elementos lúdicos e mecânicas de recompensas são amplamente utilizados para cultivar um clima organizacional mais saudável, aumentar a produtividade dos funcionários e fortalecer o relacionamento direto com os clientes. Observa-se que o contentamento e a motivação extrínseca dos colaboradores tendem a aprimorar as relações interpessoais, gerando um senso de pertencimento e importância que se reflete positivamente nos lucros e na relação entre a empresa e seu público-alvo. Já para Busarello [3], a gamificação transcende o viés corporativo e liga-se diretamente à aprendizagem, caracterizando-se como uma metodologia ativa que foca na relação do aluno perante suas próprias descobertas.

De acordo com Moran [15] as metodologias ativas configuram-se como práticas pedagógicas que rompem com o modelo tradicional de ensino puramente transmissivo. Nelas, o aluno deixa de ser um mero receptor passivo de informações e assume o centro do processo de ensino-aprendizagem. O estudante torna-se, assim, o protagonista na construção do seu próprio conhecimento, sendo estimulado a investigar, refletir e criar soluções para os problemas propostos. Nesse cenário de metodologia ativa, o papel do professor também sofre uma profunda e necessária transformação. Em contraposição ao modelo da pedagogia tradicional, no qual o professor figura como autoridade e transmissor exclusivo do conhecimento [16], o docente abandona essa postura centralizadora. Passa, assim, a atuar como um mediador, desenhando cenários desafiadores que instiguem a curiosidade e a autonomia discente. A gamificação, inserida nesse contexto, utiliza o apelo lúdico para mobilizar tanto capacidades cognitivas quanto socio-emocionais, exigindo que o estudante tome decisões, elabore estratégias matemáticas e resolva problemas concretos de forma dinâmica. Consequentemente, a adoção dessa postura ativa propicia uma aprendizagem muito mais significativa e duradoura. Ao interagir com um sistema gamificado, o erro deixa de ser um elemento punitivo e estigmatizante, passando a ser compreendido como uma etapa natural e iterativa do processo de descoberta (a lógica de tentativa e erro própria dos jogos). Isso fortalece a resiliência do aluno e fomenta um ambiente educacional onde a teoria matemática abstrata ganha uma aplicação prática imediata e estimulante.

2.1.1 Cultura de jogos

O expressivo crescimento da cultura de jogos já ultrapassou as fronteiras do entretenimento recreativo. Atualmente, os jogos servem como estratégia motivacional em diversos setores, incluindo o comércio, a indústria, as forças armadas e, de forma muito contundente, a educação. Em seu artigo, Escribano [5] salienta que a gamificação se manifesta como jogos que imitam a realidade temporal e tem como objetivos melhorar as relações sociais, encorajar a comunidade para seus afazeres e promover atividades pertinentes de forma lúdica e participativa. O autor ainda realiza uma breve revisão de como os jogos influenciam a existência cotidiana das comunidades humanas ao longo da história, argumentando que os princípios lúdicos sempre fizeram parte da cultura e da organização social. Ao fazer isso, Escribano elucida que a gamificação, em sua essência de aplicar elementos de jogo em contextos não-jogo, não é um conceito novo, mas sim uma roupagem moderna de uma prática milenar humana. Ainda de acordo com Escribano [5], o conceito de *ludificação* está intimamente ligado ao ato de brincar, o qual engloba elementos essenciais para a aprendizagem e, por isso, atua como uma importante ferramenta educacional. Aproveitando-se dessa ludicidade inerente, a *gamificação* a expande para contextos além dos jogos, enriquecendo sobretudo as experiências de aprendizado e as interações sociais no atual cenário digital. A gamificação nasce da compreensão de novas práticas de ensino, inserindo o participante em uma narrativa criativa e colaborativa. Nesse enredo, que envolve o próprio indivíduo e seus pares, o objetivo é ensinar por meio de dinâmicas de jogo integradas às novas tecnologias. Assim, conforme aponta Busarello [3], o jogo atua como uma mídia motivadora e uma alternativa eficaz para a geração de conhecimento. Nesse sentido, a experiência narrativa ocorre de duas maneiras principais: pela tradicional contação de histórias, com interação direta entre narrador e ouvinte, ou pela vivência de narrativas interativas, construídas a partir da participação ativa em jogos, de modo que "essa experiência narrativa leva a uma experiência cognitiva que se traduz em um produto emocional e sensorial, uma vez que o indivíduo se envolve em uma vida estruturada e articulada, fora do mundo comum" (Busarello, [3]).

Nas narrativas passivas ou tradicionais como livros, cinema e teatro, o indivíduo atua apenas como espectador, sem participar ou alterar o final da obra. Ele age como um "fantasma" diante do desfecho a que a narrativa se propõe, tendo uma experiência bastante diferente daquela vivenciada pelos autores da obra. Já em uma narrativa de jogos, ou em uma narrativa de hipermídia [3], o sujeito torna-se protagonista, dotado de poder para agir, interagir e até modificar o rumo da história. É sob essa ótica que os jogos

oferecem uma narrativa de hipermídia na qual as ações do personagem são interpretadas como fatores determinantes no processo. Tais ações são fundamentais para construir a memória, a comunicação e o conhecimento do próprio indivíduo. Portanto, "os jogos são capazes de promover contextos lúdicos e ficcionais na forma de narrativas que favorece o processo de geração e relação com o conhecimento" (Busarello, [3, p. 10]).

2.1.2 Tecnologia

A necessidade de adaptar o ensino e a aprendizagem às rápidas inovações tecnológicas tem sido amplamente documentada por estudos de prospecção, com destaque para o seminal Projeto NMC Horizon (*New Media Consortium Horizon Project*) [17]. Lançado com o intuito de mapear tecnologias emergentes com forte impacto educacional a curto e longo prazo, o Projeto NMC estabeleceu uma base sólida de reflexão sobre a integração digital no ensino básico e superior. Alinhados às tendências do Projeto NMC e impulsionados pela Quarta Revolução Industrial que mescla os universos físico, digital e biológico, emergiram os novos paradigmas da Educação 4.0 e 5.0 [18]. Tais abordagens, junto à perspectiva do Projeto NMC Horizon, propõem o uso estratégico de mídias e ferramentas digitais para fomentar a autossuficiência na aprendizagem. A meta central é construir uma educação global e inclusiva, gerando impactos positivos para a comunidade ao utilizar a tecnologia de forma consciente, a fim de promover um futuro mais eficiente e integrado para a humanidade. Nessa evolução, a transição da Educação 4.0 para a 5.0 reflete a busca por um modelo que equilibre a eficiência da tecnologia com a formação integral humana. A Educação 4.0 foca na aquisição de competências técnicas e digitais (chamadas *hard skills*) para preparar o aluno para o mercado de automação e dados da Indústria 4.0. Por sua vez, a Educação 5.0 vai além: ela prioriza o bem-estar social, o desenvolvimento integral e as competências socioemocionais (*soft skills*), aplicando a tecnologia na humanização e na resolução de desafios complexos da sociedad [19]. Assim,

> Educação 4.0 e 5.0 compartilham a integração de tecnologias avançadas, mas têm focos diferentes. A Educação 4.0 prioriza eficiência tecnológica e habilidades digitais, enquanto a Educação 5.0 enfatiza o desenvolvimento integral dos alunos, equilibrando tecnologia e aspectos humanísticos. As teorias do Conectivismo sustentam ambas as abordagens, facilitando o uso de tecnologias digitais e promovendo ambientes que valorizam inovação, conexões e adaptabilidade, refletindo mudanças históricas e enriquecendo a cultura educacional. (Ferreira, [19, p. 6])

Consequentemente, a tecnologia transcende a mera otimização de processos (Educação 4.0) e assume o papel de ferramenta formadora de empatia, colaboração e responsa-

bilidade ética (Educação 5.0), preparando cidadãos aptos a moldar um futuro sustentável.

2.2 Elementos da gamificação

Nesse cenário de integração entre jogos e tecnologia para o aprendizado, compreende-se que a gamificação absorve elementos dos jogos para aplicá-los no ambiente educacional, visando à resolução de problemas, à motivação e ao engajamento. Como definição:

> *Gamification* é um sistema utilizado para a resolução de problemas através da elevação e manutenção dos níveis de engajamento por meio de estímulos à motivação intrínseca do indivíduo. Utiliza cenários lúdicos para simulação e exploração de fenômenos com objetivos extrínsecos, apoiados em elementos utilizados e criados em jogos. (Busarello, [3, p. 18])

Os termos apresentados nessa citação merecem uma análise mais cuidadosa. Com base nos estudos de Busarello [3], um **sistema** é um conjunto articulado de regras, práticas e ferramentas. A **resolução de problemas** abrange os métodos utilizados para solucionar questões específicas ou gerais. Os **estímulos** são os agentes que desencadeiam reações num ambiente cíclico, tornando o indivíduo um participante ativo; movido por uma **motivação intrínseca** (interna e particular), ele sofre impactos que podem alterar sua forma de pensar e agir frente à atividade elaborada. Os **cenários lúdicos** representam o espaço onde o agente interage com o objeto gamificado, como um jogo de RPG, um tabuleiro de equações ou uma imagem associada a um problema matemático. Já os fenômenos citados englobam tudo aquilo que pode ser descrito e estudado cientificamente, seja uma ideia, um objeto, um sentimento ou uma relação. Por sua vez, os **objetivos extrínsecos** ligam-se a recompensas externas como pontuações, dinheiro ou promoções, que funcionam como dispositivos para atrair o indivíduo para a atividade. Contudo, é preciso cautela: ao alcançar essa recompensa externa, o participante pode perder o interesse em continuar contribuindo de forma significativa, o que gera desestímulo em relação ao propósito central da gamificação. Todos esses conceitos serão detalhados nas seções seguintes.

Ao basear-se nos conceitos de jogos, a gamificação coloca o protagonista no controle do seu próprio desenvolvimento, embora ele possa ser auxiliado ou incentivado por terceiros ao longo do projeto. O fato é que a atividade gamificada não deve ocorrer de forma isolada; ela precisa ser compartilhada, permitindo que todos acompanhem os resultados e colaborem na construção coletiva da solução. Desse modo, propõem-se atividades gamificadas que se alinhem às características descritas por Busarello, integrando agentes que facilitam a interação para solucionar problemas matemáticos e podendo, inclusive, se conectar a

outras mídias sociais. Assim, a resolução do problema não depende exclusivamente desses agentes diretos, mas envolve o apoio de uma rede maior de participantes, como familiares e amigos, que podem contribuir ativamente e de maneira significativa para o processo, como observa Burke [4].

Deve-se entender que, na sociedade moderna, os avanços de novos produtos são basicamente tecnológicos, sendo assim os jogos fazem parte desse conjunto de avanços e são peças importantes a ser exploradas como um todo. Diante disso, cada agente ou personagem envolvido com o jogo está intrinsecamente ligado às estruturas de recompensas, *feedbacks*, tempo e reforço. Fora o prazer associado às atividades de jogos, temos também as habilidades cognitivas, ligadas à memória e à atenção, que fazem parte e são também peças essenciais do jogo. Além disso, temos que os jogos são imersivos, associados ao próprio enredo que promovem contextos lúdicos e fictícios, envolvendo narrativas, sons e imagens. Numa narrativa de jogo, o agente pode viver e experimentar experiências únicas e controladas, as quais apenas o jogo é capaz de fazer, e podemos perceber isso em jogos de cartas, futebol, pular corda (Busarello, [3]). Ambientes de jogo podem favorecer a mobilização da atenção e do engajamento. Conforme discute [20], determinados estímulos e desafios presentes nessas experiências podem relacionar-se a mecanismos de recompensa e motivação, desde que consideradas as condições e os limites apontados pela literatura. Isso desencadeia um ciclo contínuo, no qual, cada vez mais, o indivíduo será inserido nesse ambiente. Outro fato que deve ser colocado em questão é que o ato de jogar leva o indivíduo a ganhar ou perder. Ao ganhar num jogo, o personagem é colocado como o melhor, atribuindo uma destreza ao que ele dominou e foi concretizado pelas horas ali investidas. Ao perder, o jogo permite ao usuário refazer os passos, utilizando tempo e reforço com o objetivo de melhorar a performance e atingir o êxito. Todos os indivíduos podem apresentar desenvolvimentos distintos, mas é importante destacar que as regras e os objetivos do jogo valem para um, então são válidas para todos, sem distinção. Assim, o processo é controlado com resultados mensurados. Os jogos são, sem dúvida nenhuma, atividades divertidas e prazerosas, nas quais o agente está disposto a participar com uso de suas capacidades e recursos. Diante disso, promover atividades educacionais com o objetivo de resolver problemas, apropriando-se da condição na qual o indivíduo está disposto a relacionar, gastando um tempo e esforço para tal, é uma das propriedades que a gamificação propõe. Gamificação não é um jogo, mas possui as mesmas estruturas que o compõem. Assim,

> *Gamification* se apropria de elementos dos jogos para aplicação em contextos, produtos e serviços necessariamente não focados em jogos, mas

> com a intenção de promover a motivação e estimular o comportamento do indivíduo. (Busarello, [3, p. 25])

Ao filtrar as condições de um jogo, temos, então, que a gamificação se apropria desses elementos como um objetivo claro aplicado fora do jogo, o qual apresenta quatro princípios identificados em Busarello [3] que são utilizados nos jogos: embasamento, mecânicas, estética e pensamento. O **embasamento** em jogos engloba a criação e simulação de um ambiente fictício ou sistema em que o indivíduo quer participar, investindo esforços pessoais como tempo, cognição e energia. As **mecânicas** constituem as normas e regras às quais todos os participantes estão vinculados, enquanto que a **estética** consiste na percepção do agente perante a atividade gamificada, representando a sensação do indivíduo. E o **pensamento** em um jogo, peça importante que traz para a gamificação a realidade de transformação de substituir uma tarefa repetitiva e enfadonha em uma atividade motivadora, percebendo-se o uso de elementos como competição, cooperação, exploração e narrativa. É aqui que os *insights* aparecem conduzidos por fatos virtuais.

2.3 Construção de uma atividade gamificada

Todos os dias, ao levantar, somos atraídos pela curiosidade como um todo, e a nossa percepção é aguçada e atenta para o "novo", aquilo que é chamativo. Esse processo é involuntário, a curiosidade faz parte do ser humano. É fácil fixar os olhos em uma determinada direção que foi percebida pela audição de um barulho ensurdecedor. Ou olhar para uma pessoa e fixar a visão quando está apresentando aspectos extravagantes. As nossas atitudes sociais são vinculadas a estímulos externos. Você decora os horários do seu ônibus para poder otimizar seu tempo de deslocamento. No seu trabalho, cria rotinas e aprende habilidades que são capazes de melhorar e facilitar seu ofício. Com isso, percebemos o mundo pelos nossos sentidos e usamos a nossa capacidade processual para aprender. Quando saboreamos um bolo delicioso e, logo em seguida, nos deparamos com sua receita, nossa capacidade de memorização foca automaticamente em seu modo de preparo. De maneira semelhante, em uma roda de conversa, somos capazes de descrever com riqueza de detalhes um filme ou livro de que gostamos. Contudo, a vivência dessa mesma obra pode provocar reações distintas em outras pessoas, gerando interpretações que muitas vezes contradizem as nossas percepções. Somos seres pensantes e, em todos os dias e em todos os lugares, o aprendizado ocorre (Burke, [4]). Entretanto, aprendemos habilidades de que não gostamos ou com as quais não compactuamos, como, quando criança, o ato de seus pais fazerem você guardar seus brinquedos toda vez que estivessem espalhados por

toda a casa ou ao final de cada dia. Lavar o carro todo final de semana, mesmo sendo seu carro, é entediante. Estudar conteúdos nos quais você não tem interesse é uma tortura e seu esforço aplicado para tais tarefas é mínimo e pouco interessante. Aprendemos coisas o tempo todo, sendo que para umas usamos um esforço maior do que para outras. Todo esse aprendizado, essas habilidades ocultas ou não, podem facilitar a aprender outros conhecimentos com os quais nos importamos. Assim, aprender algo hoje pode facilitar a aprender algo no futuro, para o qual você está disposto a gastar energia, tempo e cognitivo. Ter uma carreira de sucesso no futuro é, geralmente, tudo que gostaríamos de almejar, mas não dispomos de meios para prever esse acontecimento. Contudo, estamos cientes de que tudo que você aprende impacta de forma direta no seu desempenho futuro, que pode ser positivo ou negativo. Na escola, os conteúdos são apresentados em uma dinâmica pouco interessante e desestimulante. O esforço pessoal é impactado pelas suas perspectivas futuras ou por influências externas (pais, comunidade, amigos, colegas). Em todo o caso, quando for apresentado algo novo, que chame a sua atenção, você estará disposto a gastar energia e tempo para conseguir aprender. Em qualquer atividade de aprendizagem com a qual você esteja relacionado com disposição, interesse e foco, mesmo sendo difícil, o processo da aquisição dessa aprendizagem fica mais fácil. Os exemplos e descrições acima apresentados evidenciam duas das cinco variáveis consideradas por Busarello [3] para compor uma atividade gamificada. A primeira e central é a **aprendizagem**, entendida como processo de aquisição de novos conhecimentos e habilidades, natural da curiosidade humana. A segunda e inerente ao próprio processo de aprendizagem diz respeito à **motivação e engajamento**, sejam eles intrínsecos ou extrínsecos, que podem conduzir e manter o indivíduo nesse processo. As cinco variáveis estão apresentadas na Figura 2.1.

Com isso, a gamificação, de acordo com Burke [4], pode oferecer um caminho para adicionar motivação e engajamento às atividades de aprendizagem. Em todas as atividades gamificadas, os elementos dos jogos são parte importante de como a metodologia ativa gamificada funciona; entender os jogos é um passo inicial para implementar de forma significativa a gamificação. Mas, o que há nos jogos que nos chama a atenção? Utilizar elementos dos jogos para aprender algo ou aumentar seu conhecimento em relação a alguma coisa é o nosso propósito aqui. Primeiramente, observa-se que, em qualquer jogo, o indivíduo cria um personagem com o qual é capaz de interagir no jogo, e todas as atividades atribuídas ao personagem são permitidas de acordo com as regras pré-estabelecidas que são coerentes ao personagem que escolheu. A escolha do indivíduo ou agente de fazer o papel de um autor imposta pelo sistema é explorada nos *games* e também na gamificação. No mundo real, um indivíduo pode exercer diferentes habilidades em diferentes papéis (pai,



Figura 2.1: Cinco variáveis que definem o conceito de Gamificação (Busarello, 2016).

aluno, professor, escritor, companheiro, chato, amoroso), com isso, aprimorando atividades mecânicas e rotineiras, habilidades necessárias para cada situação. No mundo dos jogos, o personagem pode vivenciar essas atividades semelhantes em diferentes papéis, sem que o indivíduo nunca exerça essas atividades no mundo real. Alguns jogos são criados copiando o mundo real e habilidades aprendidas nos jogos podem ser utilizadas também no mundo real, e com a vantagem do poder da repetição. Quanto melhor a simulação do jogo em relação ao real, mais são reduzidas as características gerais próprias dos próprios jogos. *"Nesse sentido, os sistemas baseados em jogos devem ser constituídos por objetos claros, divididos em metas de curto prazo. Isso sugere uma sensação de progressão contínua e com certa frequência de recompensas"* (Busarello, [3, p. 54]).

Assim, ainda conforme ilustrado na Figura 2.1, a **narrativa** e a **mecânica de jogos**

compõem outras duas das cinco variáveis da gamificação, que visam a imersão do indivíduo, de acordo com Busarello [3]. Ao "viver a história" e ter "domínio' sobre seus elementos interativos, o participante se conecta emocionalmente ao seu papel na trama, fazendo com que as ações simples do sistema ganhem um significado maior. Essa construção de mundo atribui relevância às atividades propostas e colabora para que o engajamento ocorra de maneira progressiva. Assim, o indivíduo é conduzido a cumprir os desafios e atingir o objetivo final por meio de sua participação ativa e voluntária, impulsionada pela motivação intrínseca.

Finalmente, para que um sistema gamificado funcione de acordo com Busarello [3], o conceito de **pensar como em jogos** é essencial. Este conceito é estruturado em quatro elementos-chave que colaboram em seu desenvolvimento: metas, regras, sistema de *feedback* e participação voluntária.

As **metas** são o objetivo da atividade gamificada da qual o indivíduo ou agente participa. Aprender inglês, por exemplo, organizar uma casa ou adquirir habilidade na construção de um gráfico de uma função qualquer. "Resume-se no propósito designado para tal atividade, o qual o sujeito persegue constantemente. A meta sempre orienta para a atividade e não se limita a um fim específico" (Busarello, [3, p. 73]).

Todo jogo necessita de **regras** que são usadas para controlar os personagens e deixar mais equilibrada a jogabilidade. Em gamificação, as regras têm o papel de garantir a forma como o personagem evolui; são diretrizes controladas pelo sistema, às quais todos estão cientes, e os personagens agem de acordo com as regras para cumprir os desafios propostos. O **sistema de *feedback*** define as respostas do sistema ao indivíduo. São as ferramentas usadas que sustentam a motivação e o envolvimento do indivíduo. Quanto mais motivado, mais participativo será e melhor será a sua performance na atividade e, assim, estará mais engajado. Consequentemente, mais contribuições e retribuições o indivíduo fará para um avanço nas mudanças necessárias à aprendizagem. No jogo, o indivíduo escolhe o horário para se divertir. Caso o jogo seja interessante, mais horas do seu tempo serão usadas. Caso contrário, ele não joga mais. Na gamificação, o agente é convidado a **participar** sem ultimato, devendo-se aguçar a curiosidade pelo novo. Assim, a atividade gamificada cria um poderoso ciclo de engajamento: à medida que os participantes são inspirados, tornam-se mais envolvidos. Esse aumento no número de pessoas ativamente envolvidas e inspiradas eleva exponencialmente a contribuição de todos para um propósito maior. Deve-se estar ciente de que gamificação não é um jogo, mas estão relacionados. O jogo serve para diversão na maioria das vezes, os desenvolvedores de jogos devem ser criativos com o objetivo da venda do produto. O sucesso é obtido pelo número de pessoas

que consomem seu produto. Gamificação tem tudo a ver com engajamento, onde os participantes são convidados a participar dos objetivos claros em atingir uma meta que pode ser uma habilidade de aprendizagem. Assim, "só há uma real interação entre o indivíduo e o sistema quando o primeiro está disposto a se relacionar com os elementos do segundo". (Busarello, [3, p. 76]).

2.3.1 Componentes essenciais da variável "Pensar como em Jogos"

Existem alguns elementos que estão presentes em todos os jogos de sucesso, os quais incluem objetivos, regras e interatividade, seja ele físico ou digital. Além disso, as experiências são construídas com outros elementos, como estética associada ao som e gráficos, a narrativa, os personagens, a mecânica, o sistema de retorno (*feedback*) e as recompensas que motivam os jogadores. Mas, para uma aprendizagem significativa associada a sistemas gamificados, destacamos seis elementos importantes que devem ser inseridos: a fantasia, regras e metas, estímulos, controle, desafios e mistérios.

Fantasia

Envolver os agentes em uma fantasia permite que eles se expressem, incentivando situações cognitivas, físicas e ou sociais que são efetivas apenas na fantasia. Sem vínculos reais, o indivíduo é capaz de uma melhor interação e participação sem medo ou culpa (Figura 2.2). Facilita a relação entre as partes envolvidas quando imersos neste tipo de atividade. Assim,

> Em um ambiente de ensino, esta categoria estimula o interesse dos alunos, fazendo inclusive com que a aprendizagem ocorra de forma mais rápida. A utilização de realidades fantasiosas contribui para a retenção e relação com o conhecimento, pois: minimiza a complexidade, auxiliando o indivíduo a gerenciar o espaço conceitual que será experienciado, identifica funções de causa e efeito, remove fatores de estranhamento, uma vez que muitos eventos do *day a day* não são tão interessantes como os fantasiosos, contribui para a redução de tempo de entendimento de conceitos. (Busarello, [3, p. 79])

Existem dois tipos de fantasias que podem ser **endógenas** e **exógenas**. As fantasias endógenas estão relacionadas com o conteúdo propriamente dito. Um exemplo é a atividade gamificada de tabuleiro de operações matemáticas, na qual o jogador, usando operações básicas da matemática, completa os dados que faltam com o objetivo de finalizar todo o tabuleiro. Ou um jogo baseado em "Batalha naval", com o objetivo de ensinar funções no Ensino Médio, de modo que o torpedo que atinge o adversário descreve uma trajetória por meio de curvas ou gráficos de funções. As fantasias exógenas são separadas e externas ao



Figura 2.2: Jogo Elden Ring (Ambiente fantasioso).
Fonte: https://www.playstation.com/pt-br

conteúdo de aprendizagem. Um exemplo é aprender porcentagem e lucro no mundo do *Minecraft* [21], jogo mundialmente conhecido, tendo que construir castelos usando materiais que devem ser colhidos proporcionalmente ao tamanho do castelo. Assim, o conteúdo porcentagem e lucro não está ligado diretamente à ação da construção dos castelos.

Regras e metas

As metas do jogo são obtidas respeitando as regras dele. Sendo assim, metas claras e específicas são estímulos aos quais os desempenhos dos indivíduos estão atrelados, permitindo uma melhor absorção e o envolvimento do agente, podendo resultar em diferentes aprendizagens cognitivas. Em alguns casos, pode acontecer a adição de novas regras ou o afrouxamento das regras antigas com o objetivo de aprender novos conteúdos. Essas ações devem ser permitidas, pois farão parte do *feedback* do jogo. Um exemplo disso seria o tabuleiro de funções, no qual, no primeiro momento, usam-se funções do primeiro grau. Mas, para participantes que já dominaram isso, pode ser permitido o uso combinado de várias funções, levando-os a outro nível do jogo.

Estímulos sensoriais

Em ambientes virtuais de fantasia, regidos por dinâmicas lógicas divergentes da realidade material, a percepção do usuário é substancialmente intensificada. A conjugação de estímulos visuais e auditivos desencadeia uma alta carga sensorial, promovendo respostas perceptivas complexas e aprofundando a imersão.

Desafios

Toda atividade gamificada deve dar ao personagem um desafio para conquistar. Uma atividade gamificada fácil faz com que o agente se desmotive pela proposta, levando ao fracasso da experiência. Os desafios devem ser superados e colocados no nível do

indivíduo. Uma atividade gamificada usando operações simples de matemática não deve provocar atenção a um universitário, mas deve proporcionar uma proposta de ambiente diferente para pessoas em fase de aprendizagem. Assim, projetar níveis de dificuldade para a uma atividade gamificada, desde que de forma adequada ao conhecimento prévio dos participantes e almejando os novos conhecimentos esperados para serem adquiridos, pode estimular a curiosidade e promover a motivação para superar desafios.

Mistério

A curiosidade faz parte do ser humano e é responsável pelo desenvolvimento da humanidade. A curiosidade nos faz pensar, aprender e, assim, agir com o objetivo de moldar o ambiente de acordo com nossos critérios ou reformular nossa cognição para algo novo que, no próximo nível, torna-se mais claro mentalmente. A curiosidade apresenta duas situações: pode ser **cognitiva**, relacionada ao conhecimento, enquanto a curiosidade **sensorial** está relacionada aos sentidos. Quando nos deparamos com conhecimentos incompreensíveis, estes podem ser chamados de mistério. O mistério é ativado pela curiosidade do indivíduo; na medida em que ele evolui por falta de informações ou incompreensão cognitiva, ativamos o segundo passo, que é a busca por soluções. O desenho animado *Scooby-Doo* 2.3 é um nostálgico exemplo disso. Consiste em uma agência de investigação fundada por adolescentes associados a casos complicados envolvendo monstros e fantasmas, casos que a polícia local não conseguiu resolver. Os personagens desempenham papéis arquetípicos na narrativa, trazendo várias formas de encarar e resolver os mistérios: Velma (lógica), *Scooby-Doo* e Salsicha (aliados), Daphne (sensibilidade) e Fred (liderança).



Figura 2.3: Personagens do desenho animado Scooby-Doo.
Fonte: https://www.dropsdejogos.uai.com.br

O desenho é envolvido em uma teia de mistérios que, no decorrer da trama, são desvendados pouco a pouco, mantendo um clima de suspense. Isso motiva as pessoas a assistirem para saber quem é o responsável pela armação. O mistério proposto aqui é um dos elementos que aguçam a nossa curiosidade e questionam nossa capacidade de pensar. Em geral, envolver o mistério em uma atividade gamificada permite a exploração do desconhecido e leva a uma ação do indivíduo atrelada às regras impostas.

2.4 Ludificação e gamificação

Os princípios da gamificação não se restringem aos ambientes digitais. Historicamente, diversas atividades práticas e laborais em culturas ancestrais funcionavam como uma forma de "jogos concretos" que visavam estimular o trabalho em comunidade e o aprimoramento de habilidades essenciais.

Escribano [5] cita como exemplo a competição dos "Jogos Olímpicos Bascos", na Europa, que se baseia em registros históricos do período neolítico, onde os vencedores são aqueles que demonstram maior eficiência em tarefas como o corte rápido de troncos e o levantamento de pedras pesadas. Tais práticas remetem ao uso de pedras na estruturação de antigas casas europeias e da madeira na confecção de móveis, ilustrando como o desafio físico estava ligado à sobrevivência. Nesse contexto, atividades como caçar, erguer pesos, subir em árvores ou o treinamento de habilidades, como a confecção de flechas pelas comunidades indígenas, atuavam como um treinamento gamificado natural. Conforme ainda apontado por Escribano [5], os jogos concretos são estimuladores naturais para o trabalho e a eficiência em um objetivo comum para o bem da comunidade, combinando esforço físico e mental. Desse modo, ao serem executadas em um ambiente de desafio e competição social, essas tarefas resultavam na melhoria da realização de tarefas coletivas, evidenciando como a competição e a colaboração eram intrinsecamente ligadas ao aprimoramento das habilidades necessárias à sobrevivência. O conceito de lúdico está intimamente relacionado a brincadeiras (Souza [22]), remetendo à nossa própria infância. Atividades prazerosas e mistas, como subir em árvores, pular corda, jogar xadrez ou baralho, são experiências que nos moldam, auxiliando na socialização e na aquisição de habilidades que, futuramente, farão parte de nossa interação no emprego e na vida. A gamificação atribui grande importância a esses aspectos lúdicos, que são cruciais para o engajamento. Entretanto, um contraponto emerge na forma como a gamificação é aplicada atualmente em diversos setores: muitas atividades gamificadas são impostas de forma verticalizada (*top-down*), favorecendo apenas o lado organizacional. Tais práticas são frequentemente focadas apenas

no aumento de produção e resultados, em detrimento da melhoria das relações interpessoais ou da resolução de problemas reais no ambiente de trabalho. A gamificação, portanto, é intrínseca à sociedade humana, manifestando-se em atividades que refletem situações que levam ao conhecimento e ao desenvolvimento da capacidade de interagir com o ambiente e com o outro, sempre com propósitos claros. Estes propósitos são de diversas naturezas, podendo envolver a melhoria das capacidades laborais ou cognitivas de um indivíduo, a preparação para conflitos, ou a simples interação humana. Em todos esses aspectos, o sistema gamificado se manifesta de formas variadas, sendo inevitavelmente influenciado pelas mudanças sociais e tecnológicas de seu tempo. "Parece que o tempo todo não éramos *homo sapiens*, mas *homo ludens*. Observe que o jogo tem um papel em todas as facetas de nossa vida e o próprio conceito de jogabilidade está integrado em nossa existência" (Escribano, [5, p. 11]).

Esta visão é complementada pela análise do citado autor sobre o papel da tecnologia no processo:

> Não existe gamificação tecnológica propriamente dita – a tecnologia é inerente e inseparável de qualquer processo humano, incluindo simulação e jogo, e sempre que o jogo se torna um procedimento versátil para o gerenciamento do aprendizado, a tecnologia tende a participar desse procedimento (Escribano, [5, p. 10]).

A gamificação, enquanto aplicação de elementos e mecânicas de jogos em contextos não lúdicos, revela-se uma estratégia robusta para o desenvolvimento humano, a aprendizagem e o engajamento, tanto no ambiente corporativo quanto no educacional. Autores como Busarello e Brian Burke destacam a importância de propor atividades que promovam o engajamento e a socialização, fatores altamente favoráveis ao aprendizado e ao aprimoramento do relacionamento interpessoal. Ao associar essas ideias à perspectiva de autores como Escribano, percebe-se uma relação intrínseca que conecta a gamificação a elementos fundamentais do desenvolvimento humano, reconhecendo que o lúdico faz parte da natureza humana e tem sido, historicamente, um meio essencial para a transmissão de conhecimento entre gerações. As atividades gamificadas, que carregam as características de motivação e interação mencionadas, ganham uma dimensão ainda maior ao serem integradas com as mídias sociais e digitais. Essa integração permite que a busca pela solução de um desafio, como um problema de resolução matemática, não se restrinja apenas aos agentes diretamente envolvidos, mas possa ter o suporte de outros, sejam eles familiares, amigos ou conhecidos. Conforme aponta Burke [4, p. 62], essa abordagem amplia a participação, envolvendo uma gama maior de pessoas que podem contribuir

significativamente para a solução ou, ao menos, participar ativamente do processo de resolução. Para que essa abordagem seja eficaz, todas as cinco variáveis que compõem a gamificação – narrativa, aprendizagem, mecânicas de jogos, motivação e o pensar como em jogos – devem ser estudadas e planejadas minuciosamente a fim de garantir que o objetivo pedagógico ou empresarial da atividade seja alcançado de forma clara e intencional. Nesse sentido, é crucial frisar que a internet e as mídias digitais são ferramentas poderosas para a aprendizagem quando usadas de forma correta; embora sejam inerentemente dispersivas, o desafio reside em usar essa tecnologia a nosso favor. Estamos imersos em um mundo cada vez mais conectado e, se a educação não se apropriar dessas ferramentas digitais para promover uma experiência de qualidade, inclusiva e social, com objetivos bem definidos de valorização, desempenho e engajamento, é provável que, em um futuro próximo, a formação dos nossos jovens se torne desassociada da realidade digital em que vivem.

Embora o lúdico e a gamificação possam se aproximar em determinadas propostas educacionais, os conceitos não são equivalentes. Atividades lúdicas podem envolver jogos, brincadeiras ou experiências de caráter recreativo. A gamificação, por sua vez, refere-se ao uso intencional de elementos e estruturas de jogos em contextos que não são, necessariamente, jogos completos, com vistas a objetivos específicos. Assim, a classificação de uma proposta como gamificada depende da forma como esses elementos são organizados e articulados aos objetivos pedagógicos.

2.5 Análise de atividades gamificadas em dissertações do PROFMAT

Como propostas de produtos deste trabalho, serão apresentados no Capítulo 4 duas atividades gamificadas para aprendizado de funções polinomiais (afins, quadráticas e cúbicas) direcionadas para alunos do Ensino Médio. Tais atividades são construídos com base nos princípios da gamificação, presentados no presente capítulo. Para explorar como tais conceitos e princípios têm sido aplicados em atividades gamificadas, nesta seção analisamos criticamente três propostas de gamificação no ensino de funções apresentadas em dissertações do PROFMAT. O objetivo não é invalidar tais atividades gamificadas, mas identificar a presença e falta de elementos estruturantes de acordo com a teoria aqui apresentada. Essas análises também permitem definir parâmetros e critérios que sustentam as atividades gamificadas propostas no Capítulo 4. Os trabalhos analisados foram selecionados a partir do repositório online de dissertações do PROFMAT [23]. Mediante busca por palavras-chave como “gamificação”, “funções”. Na pesquisa por dissertações que

citavam explicitamente o uso de gamificação, encontramos 33 trabalhos, dentre os quais 4 referiam-se explicitamente a funções ou equações de 1º grau. Destacaram-se três pesquisas com maior alinhamento aos objetivos deste estudo: a aplicação da gamificação no ensino de funções de 1º e 2º graus. São elas:

- Trabalho 1: "Funções no Ensino Médio: uma abordagem conceitual e o uso de gamificação", de Itamar de Camargo Júnior [7]
- Trabalho 2: "Gamificação na Educação Matemática: Desenvolvimento de Jogos 2D no Construct 3 para Engajar Nativos Digitais", de Pedro Paulo Cavalcante Pimentel [8]
- Trabalho 3: "Gamificação no ensino de Matemática: potencializando a aprendizagem com jogos e aplicativos interativos", MATEUS LUAN DE CARVALHO MENDES [24]

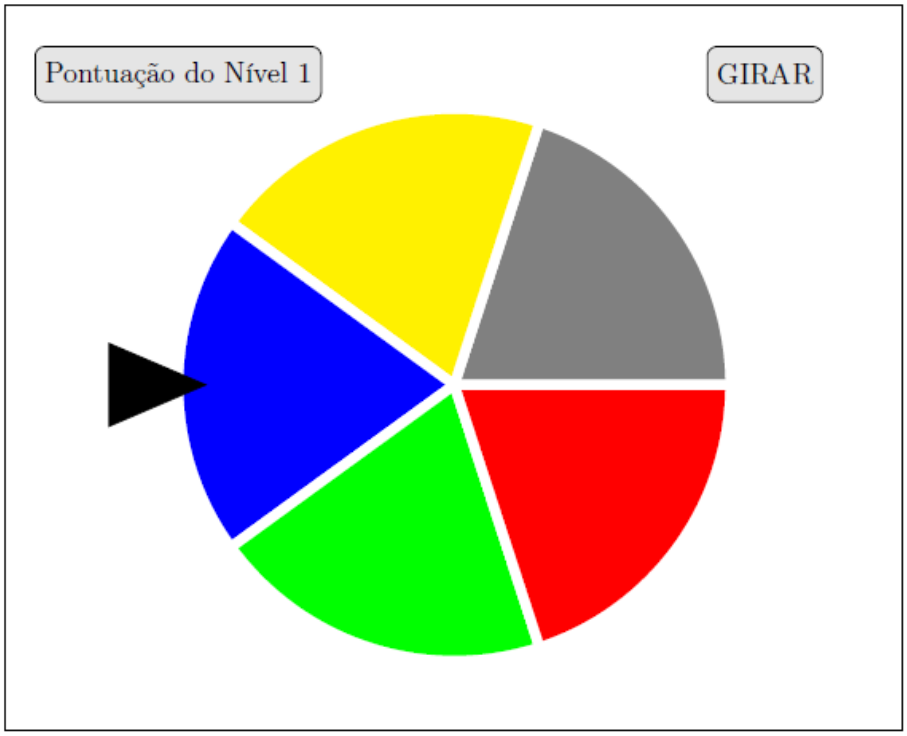
2.5.1 Análise crítica do Trabalho 1: uso de gamificação com Scratch

A dissertação de Camargo Júnior [7] propõe uma sequência didática gamificada para o ensino de funções no Ensino Médio, utilizando a plataforma Scratch [25]. O estudo visa estruturar atividades conectadas para o sucesso do ensino-aprendizagem, iniciando com uma avaliação diagnóstica e aulas expositivas alinhadas às habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O ponto central da proposta é uma tarefa gamificada estruturada como um *quiz* com níveis de dificuldade progressiva, pontuação e *feedback* imediato, culminando em aulas de aprofundamento com problemas de fixação e uma avaliação final para verificar as habilidades adquiridas pelos estudantes.

Apesar dos pontos positivos, como a progressão de dificuldade e o alinhamento claro às habilidades da BNCC para o aproveitamento do tema de funções, a análise da aplicação revela algumas limitações, com base em Busarello [3]. Embora a plataforma Scratch ofereça vastos recursos, a proposta carece de exploração narrativa e de elementos lúdicos avançados, como a criação de personagens ou ambientações temáticas, elementos que, segundo Sousa [22], reduzem substancialmente seu potencial imersivo. Além disso, o caráter estritamente individual do jogo restringe a interação social. Como defendido por teóricos como Busarello [3] e Burke [4], a gamificação efetiva deve fomentar o engajamento por meio de histórias contextualizadas e promover a interação em grupos, potencializando a construção coletiva do conhecimento. Também há menos foco em elementos de narrativa e sistema de *feedbacks*.

2.5.2 Análise crítica do Trabalho 2: uso de gamificação com Construct 3

O trabalho de Pimentel [8] apresenta o desenvolvimento de jogos 2D na plataforma Construct 3 como ferramenta pedagógica voltada para estudantes da Educação 4.0 e 5.0,



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.4: Tela de entrada do jogo "Roleta de funções"
Fonte: Camargo Júnior [7]

denominados "nativos digitais". A pesquisa fundamenta-se nas metodologias ativas e na base construtivista de Jean Piaget e Seymour Papert, além de contemplar o Pensamento Computacional exigido pela BNCC. O estudo defende que o uso de jogos atende à demanda desses alunos por ambientes de aprendizagem interativos, personalizados e dinâmicos, permitindo a aplicação de conceitos matemáticos em um contexto simulado. A escolha do Construct 3 demonstra ser um acerto metodológico ao combinar recursos avançados de desenvolvimento com uma curva de aprendizado acessível por meio de blocos. O produto educacional gerado, denominado "Jogo da Joaninha", exige que o aluno manipule coordenadas no plano cartesiano e aplique conceitos de funções de primeiro grau, tanto lineares quanto afins (fase 1: $y = ax$, fase 2: $y = ax + b$). O jogo apresenta um visual atraente e configura-se como um ponto de partida promissor e prático para o ensino desses conteúdos matemáticos.

Contudo, para que o produto de gamificação transcenda a mera apresentação visual e atue como uma ferramenta de motivação duradoura, voltamos a analisar seus elementos estruturais sob a perspectiva de teóricos como Busarello [3] e Burke [4]. A análise revela que o jogo carece de uma arquitetura que mantenha o indivíduo engajado a longo prazo.



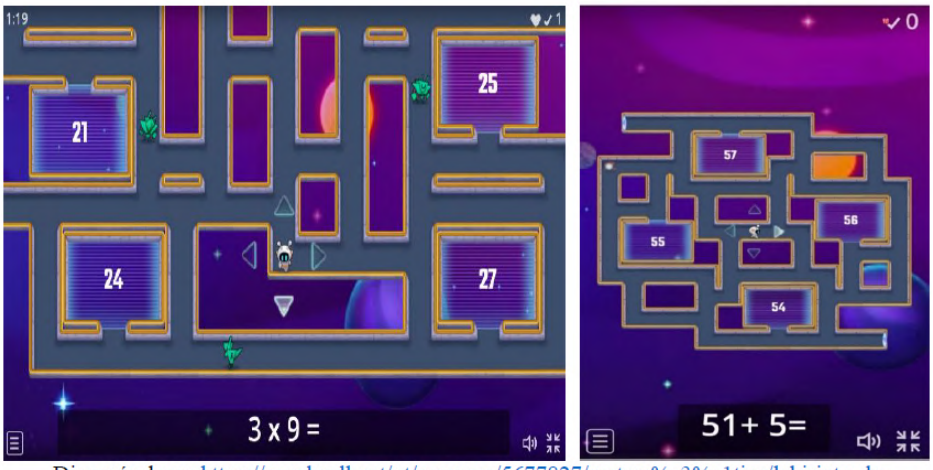
Figura 2.5: Jogo da Joaninha
Fonte: Pimentel [8]

Observa-se a falta de exploração narrativa, com a subutilização da personagem principal e a ausência de um enredo atraente que fomente a imersão. Adicionalmente, a inexistência de um sistema de *feedbacks* que permita ao jogador salvar seu desempenho, gerar pontuações ou estabelecer *rankings* representa um obstáculo para que o estudante revise seu ciclo de aprendizagem e sinta-se estimulado a persistir.

2.5.3 Análise crítica do Trabalho 3: utilização de atividades gamificadas do repositório de plataformas de jogos

A dissertação de Mendes [24] aborda a importância dos jogos digitais gamificados aplicados em sala de aula. O estudo visa principalmente demonstrar como essa metodologia pode promover o engajamento e a motivação dos alunos em relação ao conteúdo matemático, superando a aversão frequentemente causada pela educação tradicional. No trabalho, o autor fundamenta sua pesquisa em diversos autores que tratam da aplicação da gamificação na educação. O texto contextualiza os conceitos de gamificação e sua evolução no cenário educacional. A segunda parte da dissertação resume e explica o uso das plataformas de jogos amplamente utilizadas para gamificação, como *Kahoot*. São detalhadas as funcionalidades, vantagens e limitações dessas ferramentas no que se refere à criação e execução de jogos educativos, sempre enfatizando o papel da gamificação como uma metodologia ativa de aprendizagem. Relaciona o uso dessas ferramentas para aprendizagem e aponta quais as habilidades da BNCC que reconhece os jogos educativos como uma metodologia com potencial para promover a aprendizagem, utilizando a tecnologia digital como um meio para estimular o pensamento crítico, a resolução de problemas e o desenvolvimento de

habilidades práticas computacionais. A execução dos jogos gamificados exige que o aluno utilize o raciocínio lógico para desenvolver estratégias e superar obstáculos, visando o êxito ou a mudança de nível.



Disponível em: https://wordwall.net/pt/resource/5677827/matem%c3%a1tica/labirinto-da-multiplica%c3%a7%c3%a3o. Acesso em: 19 fev. 2024.

Figura 2.6: Jogo do Labirinto
Fonte: Mendes [24]

Apesar dos resultados positivos em engajamento e motivação, a análise da aplicação dos jogos em sala de aula revela uma limitação no aprofundamento de conceitos matemáticos, sugerindo que tal atividade tem ainda potencial de exploração de outras operações e níveis de dificuldade.

2.5.4 Considerações finais sobre gamificação

A gamificação, quando bem estruturada, pode potencializar a motivação e a aprendizagem. No entanto, a mera inserção de elementos lúdicos, como pontuação e níveis, não garante o engajamento dos estudantes. É fundamental que uma atividade gamificada contenha em seu processo níveis progressivos de dificuldade de aprendizagem. A ausência desse aprofundamento pode resultar em uma aprendizagem rasa, que não solidifica o conteúdo e não desenvolve o potencial completo dos alunos, transformando a gamificação em um mero instrumento de entretenimento, e não em uma ferramenta efetiva para a construção de conhecimento complexo. Tomando como base os elementos de gamificação apresentados neste capítulo, acreditamos que limitações e lacunas identificadas nessas análises podem ser superadas, criando atividades com maior engajamento e melhor resultados no aprendizado. Essas preocupações são colocadas desde a concepção das atividades gamificadas apresentadas no Capítulo 4, passando por protótipos até culminar em produtos

que sejam suficientemente acessíveis e flexíveis para professores e estudantes, com nível dificuldade escalonável.

3 Funções polinomiais

Este capítulo apresenta o embasamento matemático das funções polinomiais que sustenta a proposta pedagógica desenvolvida neste trabalho. Serão apresentadas algumas propriedades dessas funções e seus gráficos que compõem as mecânicas das atividades gamificadas. Como aprofundamento, será apresentada a interpolação de Lagrange, um método para obtenção de funções polinomiais a partir de um conjunto de pontos dados, que pode ser usado nas fases mais avançadas das atividades gamificadas.

3.1 Funções polinomiais nas atividades gamificadas

A dissertação inclui, como produto educacional, sequências didáticas gamificadas, detalhadas no Capítulo 4. Entre os eixos centrais da proposta encontra-se o jogo "A Batalha dos Eixos", cuja elaboração mobiliza conceitos e representações matemáticas discutidos a seguir

Nos jogos "A Batalha dos Eixos" (versões física e digital), as atividades gamificadas apresentadas no Capítulo 4 deste trabalho, o objetivo matemático é obter funções afins, quadráticas e até cúbicas cujos gráficos contenham pontos dados no plano cartesiano. Sendo assim, essas atividades fazem uso do conceito de interpolação polinomial. A narrativa da atividade gamificada é inserida em um contexto de aventura espacial e ficção científica, com mecânicas inspiradas no jogo tradicional de "Batalha Naval". Nessas atividades, o plano cartesiano corresponde ao "espaço sideral" e os pontos dados correspondem a posição de "naves espaciais". O objetivo do jogador é, a partir da posição de sua nave, atingir uma nave adversária em posição conhecida, através de um "míssil teleguiado" que pode inclusive fazer curvas. A trajetória desse míssil é dada matematicamente pelo gráfico da função que interpola os pontos dados: a posição da nave do jogador e as posições das naves adversárias. Na Figura 3.1, extraída de "Batalha dos Eixos", a nave na posição $(-3, -12)$ atingiu as naves inimigas por um míssil em curva quadrática representado por $f(x) = -x^2 + x$ nas posições $(3, -6)$ e $(5, -20)$.

A abordagem dos gráficos de funções como trajetórias físicas tem como uma de suas motivações apresentar tais curvas como objetos contínuos e não meramente uma coleção

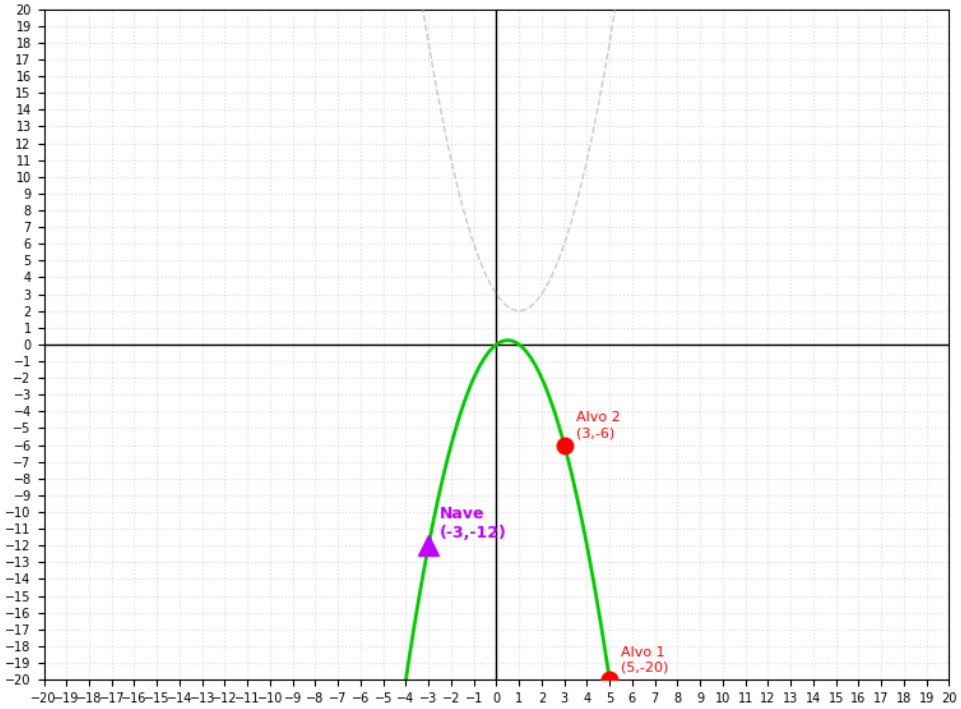


Figura 3.1: Tela do jogo "Batalha dos eixos" – versão digital
Fonte: Próprio autor.

de pontos dispersos, ou valores em uma tabela.

3.1.1 Continuidade e conexidade

Por ser um conteúdo introdutório e geral, no Ensino Médio as funções reais são tradicionalmente abordadas a partir de conjuntos de dados em tabelas ou gráficos *discretos*, ou seja, como um conjunto de pontos isolados no plano, ignorando aspectos *contínuos* dessas funções. Mesmo com a apresentação das retas e parábolas como gráficos de funções polinomiais de primeiro e segundo graus, essas curvas também são comumente apresentadas de maneira meramente formal, relacionando curva e equação sem um processo que permita explorar sua conexidade.

As funções polinomiais fazem parte de um conjunto de funções amplamente estudadas por suas aplicações, chamadas de funções elementares. As trigonométricas, exponenciais e suas inversas também são exemplos de funções elementares. Essas funções, que já são apresentadas no Ensino Médio e melhor estudadas no Ensino Superior, apresentam a continuidade como uma de suas propriedades fundamentais, justificando seu uso e aplicação em diversas áreas. Assim, uma abordagem que introduza, mesmo que intuitivamente, o conceito de continuidade dos números e funções reais já no Ensino Médio pode ser vantajosa para uma compreensão mais elaborada das funções elementares. A partir dessa percepção, os jogos "A Batalha dos Eixos" fornecem uma abordagem que faz uso da

continuidade de funções polinomiais a partir da interpretação do gráfico de uma função real como trajetória de um objeto em movimento. No contexto do jogo, a continuidade indica que os "mísseis teleguiados" não podem se "teletransportar" de um ponto a outro qualquer do plano cartesiano, tendo que obrigatoriamente seguir por caminhos conexos do plano para atingir as naves adversárias, ou mesmo desviar de obstáculos. Sendo assim, mesmo que a continuidade não seja apresentada com formalismo em sala de aula, tais atividades colaboram com uma proposta de aprendizagem das funções reais polinomiais considerando intrinsecamente sua continuidade, realizando a transição dos valores discretos de uma função para a representação contínua de seu gráfico por interpolação. Apesar do tópico de funções reais ser conteúdo padrão e bem conhecido em bibliografias do Ensino Médio, como em Iezzi [14], iremos fazer neste capítulo também uma abordagem mais analítica, para tratar a continuidade dessas funções, ou mais algébrica, para o estudo da interpolação polinomial. Tais abordagens são baseadas principalmente na obra de Lima [11]. Ressaltamos que mesmo que o conceito de continuidade de uma função real norteie a construção da abordagem por trás das atividades gamificadas, não apresentaremos formalmente o conceito de limites e continuidade de uma função real, nem será necessário utilizar explicitamente suas propriedades. Para o estudo da continuidade de uma função, no sentido discutido nesta seção, livros introdutórios de Cálculo diferencial e integral são suficientes, como Leithold [12] e Simmons [10].

3.2 Funções reais: definições gerais

Introduzimos aqui alguns conceitos e termos comuns no estudo das funções reais que serão necessários nas próximas seções e importantes na construção das atividades.

Uma função real em uma variável real, ou simplesmente **função real**, é uma função cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, ou seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se x representa um número real no domínio de f e y é a imagem de x por f, escrevemos a expressão $y = f(x)$. Como usual no estudo das funções reais, apresentamos a função f a partir de sua regra de formação, para a qual $f(x)$ será uma expressão explícita na variável x. O **gráfico** de uma função real f é uma curva no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ dada como conjunto de pontos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$.

O **zero** de uma função real f é um valor real x tal que $f(x) = 0$. Analisando o gráfico de uma função f, seus zeros correspondem às abscissas dos pontos do gráfico que interceptam o eixo das abscissas.

Dizemos que uma função real é **monótona** se ocorrem um dos seguintes casos:

f é **estritamente crescente** se dados $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$; f é **estritamente decrescente** se dados $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 3.2.1: Considere a função $f(x) = 5x - 3$ e a tabela

Tabela 3.1: Tabela de valores para $y = 5x - 3$

x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
y	-23	-18	-13	-3	2	7	12	17

Para cada valor de x, substituindo e determinando os valores da variável y, os dados da tabela sugerem que quando o valor de x aumenta, o valor de y também aumenta. Vamos verificar posteriormente que esse comportamento é válido para todo x do domínio desta função, sendo portanto um exemplo de função crescente.

Exemplo 3.2.2: Considere a função $y = x^2 + 4x + 3$. Vamos atribuir valores para x numa tabela e determinar suas respectivas imagens, obtendo

Tabela 3.2: Tabela de valores para $y = x^2 + 4x + 3$

x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	3	8	15	24	35

Os dados apresentados sugerem uma mudança de comportamento ao aumentar os valores da variável x dentre os valores testados: até o valor -2, as suas correspondentes imagens diminuem; para valores de x maiores que -2, os valores da imagem aumentam sequencialmente. Vamos verificar posteriormente que esse comportamento é intrínseco às propriedades de uma função quadrática, associado ao conceito de concavidade.

A partir desses dois exemplos destacamos a importância de distinguir o tratamento das funções reais a partir de duas caracterizações: a abordagem discreta ou "pontual", feita por um conjunto de valores amostrais e representação gráfica por pontos; e uma abordagem contínua ou "global", que representa e identifica suas propriedades gerais por um gráfico contínuo. A abordagem discreta, ainda que incompleta, pode ser capaz de fornecer uma intuição inicial sobre conceitos como crescimento e decrescimento de uma função, desde que explorada com essa ciência.

3.3 Função afim e a reta

Nesta seção vamos nos restringir ao conceito de função afim (ou função polinomial do 1º grau) e algumas de suas características e propriedades que serão relevantes nas atividades gamificadas deste trabalho.

Definição 3.1 (Função afim): A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ chama-se **função afim** ou **função polinomial do 1º grau** se existem a e b números reais e $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo x pertencente a $\mathbb{R}$. Os números a e b são chamados coeficientes da função afim.

Alguns exemplos de funções afins são dadas pelas seguintes expressões:

- $f(x) = 3x + 5$, com $a = 3$ e $b = 5$;
- $f(x) = x$, com $a = 1$ e $b = 0$;
- $f(x) = -5x - 3$, com $a = -5$ e $b = -3$.

Seguem proposições que permitem identificar e obter funções polinomiais pela relação entre seus coeficientes e valores.

Proposição 3.2: Uma função afim f é unicamente determinada por seus coeficientes.

Demonstração. Considere funções afins $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, tais que $f(x) = g(x)$ para todo x real. Em particular, temos $f(0) = g(0)$, o que nos garante que $b = d$. Tomando a diferença das funções, temos $f(x) - g(x) = (a - c)x$. Por hipótese, os valores dessas funções coincidem em todos pontos do domínio. Temos assim que $(a - c)x = 0$ para todo x, o que nos permite concluir que $a = c$. □

Proposição 3.3: Dados $x_1 \neq x_2$, uma função afim f fica unicamente determinada pelos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Demonstração. Se $f(x) = ax+b$, sejam $y_1 = f(x_1) = ax_1+b$ e $y_2 = f(x_2) = ax_2+b$. Subtraindo a primeira da segunda equação, obtemos o coeficiente a pela expressão

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

que está bem definida uma vez que $x_2 \neq x_1$. A partir de qualquer das duas equações, conseguimos obter uma expressão para o coeficiente b, a saber

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_2.$$

□

Como bem conhecido da geometria plana euclidiana, sabemos que uma reta é unicamente determinada por dois pontos distintos. Mostramos acima que uma função afim é unicamente determinada a partir de dois pares coordenados $(x_1,f(x_1))$ e $(x_2,f(x_2))$, com $x_1 \neq x_2$. A relação entre esses dois fatos se dá pelo gráfico de f:

Proposição 3.4: O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical.

A demonstração, que será omitida aqui, pode ser realizada a partir da colinearidade de 3 pontos da forma (x_1,ax_1+b), (x_2,ax_2+b) e (x_3,ax_3+b), com $x_1 < x_2 < x_3$, como apresentado em Lima [11]. Em particular, podemos mostrar que o gráfico da função afim é uma reta não perpendicular ao eixo das abscissas, como exemplificado na Figura 3.2.

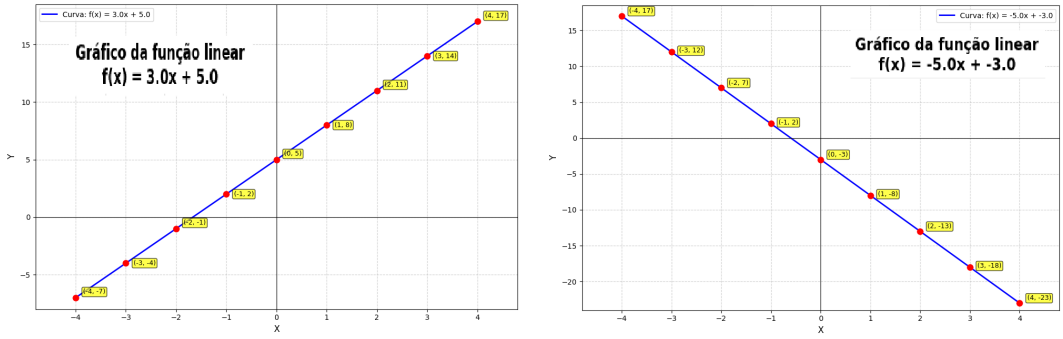


Figura 3.2: Gráficos de $f(x) = 3x + 5$ e $f(x) = -5x - 3$
Fonte: Próprio autor.

Os coeficientes a e b da função $f(x) = ax + b$ são denominados, respectivamente, como **coeficiente angular** e **coeficiente linear** da função. Os nomes dos coeficientes vêm das caracterizações a seguir.

Interseções com eixos

Graficamente, o coeficiente linear representa o único ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas, pois, para $x = 0$, temos que $y = a \cdot 0 + b = b$, ou seja, $b = f(0)$. O zero da função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é determinada por $f(x) = ax + b = 0$, que nos leva a $x = -\frac{b}{a}$. Analisando pelo seu gráfico, esse é o único ponto de interseção das retas $y = ax + b$ e $y = 0$, ou seja, o ponto $(-b/a,0)$.

Exemplo 3.3.1: Os pontos em que a função $f(x) = -4x + 3$ intercepta os eixos são

- Eixo das abscissas $(f(x) = 0)$:

$$-4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4}$$

- Eixo das ordenadas ($x = 0$):

$$y = -4(0) + 3 = 3$$

Assim, o gráfico da função $f(x) = -4x + 3$ intercepta os eixos nos pontos $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ e $(0, 3)$. Em particular, pela proposição 3.3, esse gráfico fica determinado por esses dois pontos.

Inclinação

Já o coeficiente angular corresponde à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas: dados dois pontos distintos do gráfico da função afim, (x_1,y_2) e (x_2,y_2), a inclinação é determinada pela razão $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que coincide com a fórmula do coeficiente a apresentada na proposição 3.3. Em particular, coincide também com a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas.

Alguns casos particulares merecem destaque e estão ilustrados nos exemplos da Figura 3.3:

- Se $a = 0$, a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada como **função constante** e seu gráfico será uma reta paralela ao eixo das abscissas;
- Se $a \neq 0$ e $b = 0$, a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função linear** e seu gráfico é caracterizado por uma reta não paralela aos eixos e que passa pela origem.

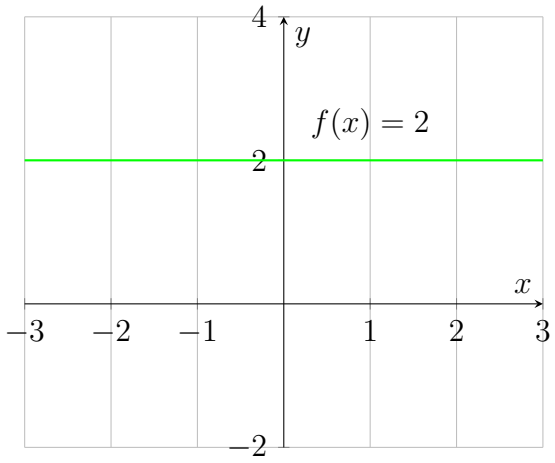


Figura 3.3: Função constante $f(x) = 2$
Fonte: Próprio autor.

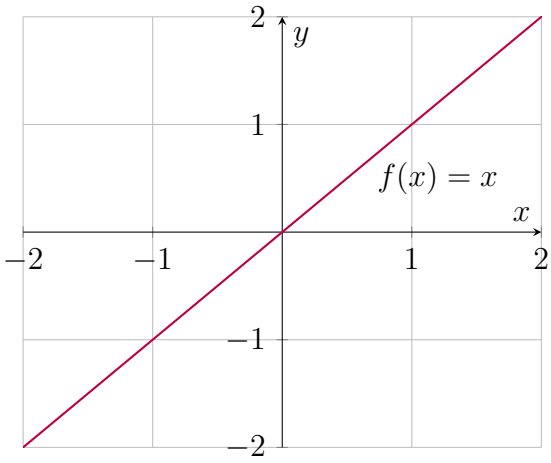


Figura 3.4: Função linear $f(x) = x$
Fonte: Próprio autor.

Para analisar o crescimento e decrescimento de uma função afim em todo seu domínio, basta analisar seu coeficiente angular.

Proposição 3.5: A função afim $f(x) = ax + b$ é **crescente** quando o coeficiente angular é

positivo ($a > 0$) e é **decrescente** quando o coeficiente angular é negativo ($a < 0$).

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela relação $f(x) = ax + b$, com a, b reais e $a \neq 0$. Dados $x_1 < x_2$ no domínio de f, temos:

- Se $a > 0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Se $a < 0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow (ax_1+b)-(ax_2+b) = a(x_1-x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ □

Exemplo 3.3.2: Retomando o exemplo 3.2.1, verificamos se tratar de uma função afim. Seu gráfico e dados amostrais da tabela são apresentados simultaneamente na Figura 3.5

Tabela 3.3: Tabela de valores para $y = 5x - 3$

x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
y	-23	-18	-13	-3	2	7	12	17

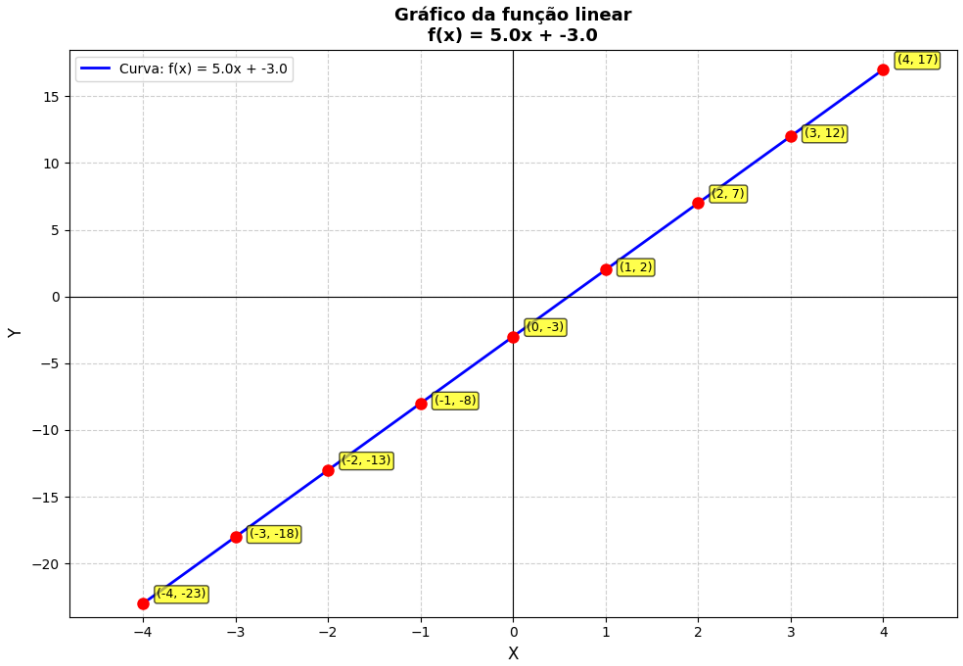


Figura 3.5: Gráfico da função $y = 5x - 3$
Fonte: Próprio autor.

Pela proposição acima, podemos identificar facilmente que se trata de uma função crescente, corroborando com os valores testados na amostra.

Vale aqui relembrar que um dos objetivos da atividade gamificada é pensar a função polinomial também por sua continuidade, a partir de seu gráfico como uma trajetória física. Evita-se assim a imprecisão e equívocos que podem se manifestar ao tratar uma

função real apenas partir de valores amostrais, sem considerar suas propriedades gerais, mais intrínsecas.

3.4 Função quadrática e parábola

Funções quadráticas figuram no Ensino Médio geralmente em problemas que envolvem cálculo de áreas e distâncias, além do problema de otimização. Além de estudar a expressão algébrica desta função, é igualmente importante conhecer as simetrias de seu gráfico, uma parábola, correlacionando suas propriedades. Destacamos aqui essas propriedades e relações que serão exploradas nas atividades gamificadas deste trabalho.

Definição 3.6 (Função quadrática): Dados a, b e c números reais com $a \neq 0$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ é denominada **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau**. Os números reais a, b e c são chamados de coeficientes da função quadrática.

Alguns exemplos de funções quadráticas são dadas pelas seguintes expressões:

- $f(x) = x^2 + 4x + 3$, com $a = 1$, $b = 4$ e $c = 3$
- $f(x) = -2x^2 + 4x$, com $a = -2$, $b = 4$ e $c = 0$
- $f(x) = -x^2 - 12$, com $a = -1$, $b = 0$ e $c = -12$

Assim como no caso da função afim, a função quadrática fica determinada pelos coeficientes reais a, b e c e é única.

Proposição 3.7: Uma função quadrática f é unicamente determinada por seus coeficientes.

Demonstração. Considere funções quadráticas $f(x) = g(x)$ para todo x, ou seja, existem a_1,b_1,c_1 e a_2,b_2,c_2 tais que $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Primeiramente, tomando $x = 0$, concluímos que $c_1 = c_2$. Podemos reescrever então $(a_1x + b_1)x = (a_2x - b_2)x$ e, para $x \neq 0$, temos ainda $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. Tomando $x = 1$, obtemos $a_1 + b_1 = a_1 + b_2$, enquanto que tomando $x = -1$, temos $-a_1 + b_1 = -a_2 + b_2$. Somando essas duas equações membro a membro, obtemos $b_1 = b_2$. Pela subtração entre essas mesmas equações, obtemos $a_1 = a_2$. □

Também temos que uma função quadrática fica estabelecida a partir dos valores da função em 3 números distintos.

Proposição 3.8: Dados x_1, x_2 e x_3 números reais distintos, uma função quadrática f fica unicamente determinada pelos seus valores $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$.

Demonstração. Considere dadas as funções $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, tal que $g(x_1) = f(x_1)$, $g(x_2) = f(x_2)$ e $g(x_3) = f(x_3)$, com x_1, x_2 e x_3 números reais distintos. Temos assim

$$g(x_1) - f(x_1) = (a_2 - a_1)(x_1)^2 + (b_2 - b_1)(x_1) + (c_2 - c_1) = 0,$$
$$g(x_2) - f(x_2) = (a_2 - a_1)(x_2)^2 + (b_2 - b_1)(x_2) + (c_2 - c_1) = 0,$$
$$g(x_3) - f(x_3) = (a_2 - a_1)(x_3)^2 + (b_2 - b_1)(x_3) + (c_2 - c_1) = 0.$$

Subtraindo a primeira equação da segunda e da terceira, teremos:

$$(a_2 - a_1)(x_2^2 - x_1^2) + (b_2 - b_1)(x_2 - x_1) = 0,$$
$$(a_2 - a_1)(x_3^2 - x_1^2) + (b_2 - b_1)(x_3 - x_1) = 0.$$

Como x_1, x_2 e x_3 são números reais e distintos, podemos dividir a primeira equação por $(x_2 - x_1)$ e a segunda por $(x_3 - x_1)$, obtendo:

$$(a_2 - a_1)(x_2 + x_1) + (b_2 - b_1) = 0,$$

$$(a_2 - a_1)(x_3 + x_1) + (b_2 - b_1) = 0.$$

Subtraindo essas equações, temos:

$$(a_2 - a_1)(x_3 - x_2) = 0.$$

Como $x_3 \neq x_2$, a única solução possível é $(a_2 - a_1) = 0$, o que implica $a_2 = a_1$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos $b_2 = b_1$ e $c_2 = c_1$. □

A demonstração da proposição anterior faz uso de resolução de um sistema linear, cujos coeficientes definem a chamada matriz de Vandermonde, que será explorada na próxima seção. A determinação de uma função quadrática a partir de um conjunto de valores dados está relacionada ao método de interpolação de Lagrange. Em geral, esse método permite determinar a função polinomial de grau n com $(n + 1)$ pontos distintos do plano, o que será discutido posteriormente e está relacionado com as atividades gamificadas deste trabalho. Por enquanto, devemos explorar as funções quadráticas e suas particularidades.

Podemos verificar que a função polinomial do 2^{o} grau é contínua em todos os pontos do domínio. Assim, a representação gráfica da função quadrática é uma curva conexa. Podemos mostrar que esta curva é uma **parábola**.

Proposição 3.9: O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria vertical.

Novamente, vamos omitir a demonstração da construção da parábola, cujos detalhes podem ser conferidos em Lima [11]. Porém, é conveniente explorar o paralelo entre a equação da função quadrática e a parábola através da forma canônica de uma função quadrática.

Proposição 3.10 (Forma canônica): Dada função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos escrever

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

chamada de forma canônica da função quadrática f.

Demonstração. Seja a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$). Utilizando as propriedades de produtos notáveis e completando o quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

□

Vértice e concavidade da parábola

Ao escrever a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \tag{3.1}$$

observa-se que o termo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ atinge seu valor mínimo (igual a 0) quando:

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}. \tag{3.2}$$

A imagem nesse ponto é:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{3.3}$$

Assim, o ponto do plano

$$(x_V, y_V) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right). \tag{3.4}$$

representa um ponto importante do gráfico que é denominado como **vértice** da parábola.

Considere agora pontos $x_1 < x_2$ equidistantes a x_V, ou seja $|x_1 - x_V| = |x_2 - x_V|$. Assim existe $k > 0$ tal que $x_1 = x_V - k$ e $x_2 = x_v - k$. Calculando $f(x_V - k)$ e $f(x_V + k)$ pela forma canônica, concluímos que $f(x_1) = f(x_2)$. Dessa forma, temos que a reta vertical $x = x_V$ é o **eixo de simetria** da parábola.

A abscissa x_V do vértice da parábola é o ponto onde a função muda seu comportamento quando a crescimento e decrescimento:

- de decrescente para crescente, se $a > 0$. Neste caso, x_V é o ponto de mínimo da função e dizemos que a parábola tem concavidade para cima;
- de crescente para decrescente, se $a < 0$. Neste caso, x_V é o ponto de máximo da função e dizemos que a parábola tem concavidade para baixo.

Dessa forma, o coeficiente a da quadrática determina a **concavidade** da parábola.

Exemplo 3.4.1: Retomando o exemplo, podemos comparar os valores da amostra em tabela com a parábola de equação $y = x^2 + 4x + 3$.

Tabela 3.4: Tabela de valores para $y = x^2 + 4x + 3$

x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	3	8	15	24	35

Percebe-se que a parábola tem concavidade para cima, dado que temos $a = 1 > 0$. Também, é simétrica em relação à reta vertical $x = -2$. Como esperado, os dados amostrais manifestam as propriedades gerais de uma função quadrática.

Interseções com os eixos

Como no caso afim, o coeficiente independente c na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ corresponde ao ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas, pois $f(0) = c$. Sendo assim, (0,c) é um ponto da parábola que é gráfico de f. Os zeros de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, correspondendo aos pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas, são obtidos pela equação polinomial do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

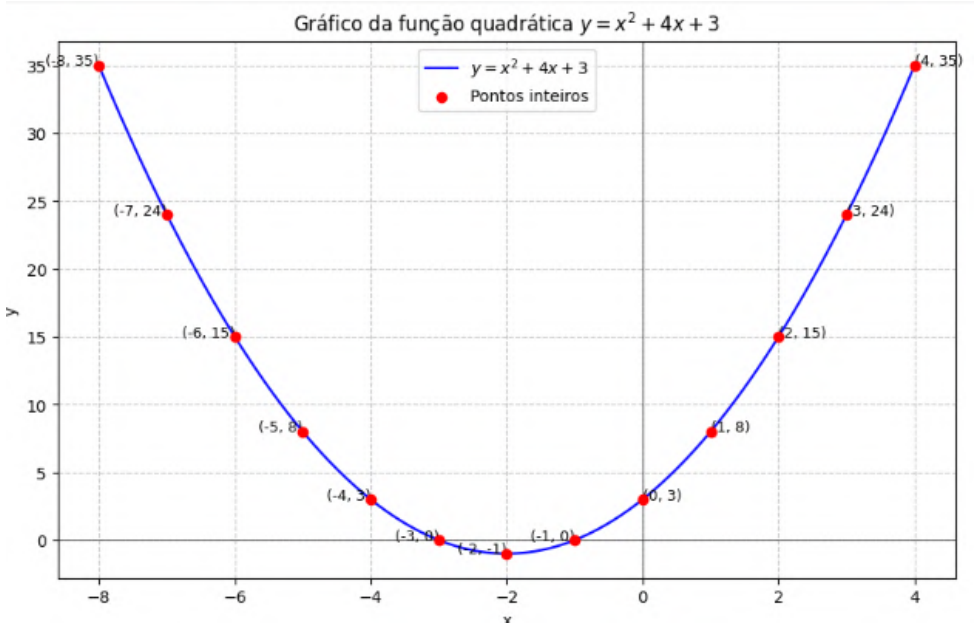


Figura 3.6: Gráfico da função $y = x^2 + 4x + 3$
Fonte: Próprio autor.

cuja solução pode ser encontrada usando a fórmula conhecida como "fórmula de Bhaskara". Para demonstrar a fórmula de Bhaskara, basta tomar escrever a função quadrática em sua forma canônica e isolar a variável x, obtendo a expressão apresentada na proposição a saber.

Proposição 3.11: Os zeros (reais) de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, são obtidos por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

desde que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Definimos por **discriminante** da função quadrática Δ a expressão $\Delta = b^2 - 4ac$. Os exemplos a seguir ilustram as três situações quanto a quantidade de raízes distintas de uma função quadrática.

Exemplo 3.4.2: Os zeros da função $f(x) = x^2 + 4x + 3$, com $a = 1, b = 4$ e $c = 3$, são determinados por

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -3.$$

Já os zeros da função $f(x) = -2x^2 + 4x$, com $a = -2, b = 4$ e $c = 0$, são

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 0}}{-4} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Para a função $f(x) = -x^2 - 12$, com $a = -1, b = 0$ e $c = -12$, temos

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 48}}{-2}$$

que não resulta em raízes reais, uma vez que $-48 < 0$.

É fácil verificar que o discriminante Δ determina a quantidade das raízes:

- $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas, $x_1 \neq x_2$;
- $\Delta = 0$: duas raízes reais iguais, $x_1 = x_2$;
- $\Delta < 0$: não possui raízes reais

Portanto, a interseção da parábola $y = f(x)$ com o eixo das abscissas fica determinada por Δ:

- $\Delta > 0$: interseções em $(x_1,0)$, $(x_2,0)$, com $x_V = (x_1 + x_2)/2$, por simetria;
- $\Delta = 0$: interseção em $(x_V,0)$, no qual há tangência;
- $\Delta < 0$: não há interseção, com a parábola acima do eixo das abscissas, se $a > 0$, ou abaixo, se $a < 0$.

Imagem

Embora a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ esteja definida para todos os números reais, seu conjunto imagem não corresponde a todo o conjunto dos números reais. Podemos determinar o conjunto imagem da função quadrática através da ordenada $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ do vértice da parábola da seguinte forma:

- Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e o conjunto imagem é dado por $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$.
- Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e o conjunto imagem é dado por: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$.

Retomando o exemplo da função quadrática e a Figura 3.6, temos que sua imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$.

A seguir, um exemplo que ilustra o uso dos conceitos da função quadrática e parábola em um jogo simplificado de interpolações, "Guerra espacial", que serviu como protótipo para as atividades gamificadas deste trabalho.

Exemplo 3.4.3: Um jogo de tabuleiro foi proposto pelos jogadores Felipe e Gabriela. Neste

jogo, você está em uma nave localizada em uma posição (x,y) do plano e deve descobrir em qual nave inimiga seu adversário está posicionado. A partir da sua posição inicial, você pode acertar uma ou duas naves ao mesmo tempo, usando um míssil teleguiado cuja trajetória curva passa por esses pontos. As naves encontram-se com posições determinadas no tabuleiro, em coordenadas cartesianas, como apresentado na Figura 3.7. Gabriela, localizada no ponto $A(7,0)$, deseja atingir as naves adversárias posicionadas em $B(1,16)$ e em $C(-7,16)$. Como A, B, C são três pontos distintos, Gabriela tentará determinar uma função quadrática cujo gráfico descreva a trajetória de um míssil teleguiado passando pelos três pontos.



Figura 3.7: Jogo de tabuleiro "Guerra espacial"
Fonte: Próprio autor.

Seja a função polinomial quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $f(1) = 16$, $f(-7) = 16$ e $f(7) = 0$. Substituindo esses pontos na função, obtemos três equações:

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = 16 \tag{3.5}$$

$$f(-7) = a(-7)^2 + b(-7) + c = 16 \tag{3.6}$$

$$f(7) = a(7)^2 + b(7) + c = 0 \tag{3.7}$$

Resolvendo o sistema de equações e determinando os valores dos coeficientes a, b e c, encontramos a solução obtida por Gabriela, dada pela função polinomial do 2º grau:

$$f(x) = -\frac{4}{21}x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{52}{3}, \tag{3.8}$$

indicada na Figura 3.8. Dessa forma, Gabriela atinge simultaneamente duas naves adversárias.

No exemplo acima, observe que, sabendo que o gráfico de uma função quadrática

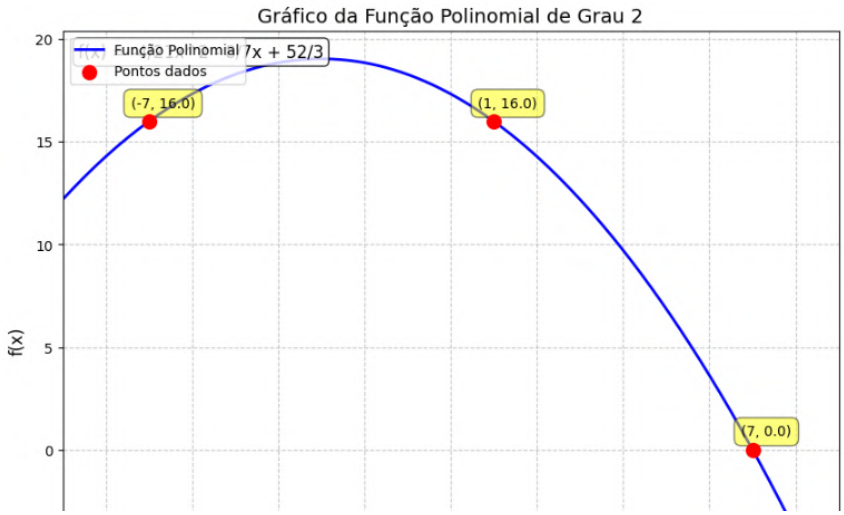


Figura 3.8: Função que passa por (1,16), (−7,16) e (7,0)
Fonte: Próprio autor.

é uma parábola e conhecendo suas simetrias, outras soluções podem ser propostas. Por exemplo, a partir de B e C, que representam pontos da parábola com mesma imagem pela função quadrática associada, pode-se determinar que a abscissa do vértice como $x_V = (-7+1)/2 = -3$. Como A está sobre o eixo das abscissas, temos que uma das raízes da função é $x_2 = 7$. Pelo eixo de simetria $x = -3$, pode-se obter que $x_1 = -13$. Assim, por unicidade, pode-se calcular a mesma função quadrática utilizando os pontos (7,0), (−13,0) junto com B ou C, levando a um sistema linear um pouco mais simples. Se Gabriela ainda conhecer a relação das raízes e coeficientes de uma função quadrática, é capaz de simplificar a busca da equação quadrática: temos $f(x) = a(x^2-((-13)+7)x+((-13)\cdot 7)) = a(x^2+6x-91)$. Para obter o coeficiente a, basta então utilizar as coordenadas do ponto B, por exemplo, obtendo $f(1) = -84a = 16$ e portanto $a = -4/21$. No contexto de uma atividade gamificada, onde o jogador é desafiado a resolver os problemas em um tempo limitado, de forma eficiente e correta, esse exemplo indica como o conhecimento matemático e habilidades computacionais do jogador podem ser explorados intrinsecamente pela mecânica de um jogo e premiar o jogador com sucesso.

3.5 Funções polinomiais

Funções polinomiais são expressões algébricas formadas por somas e produtos de constantes com a variável independente elevada a potências inteiras não negativas. Essa descrição inclui as funções afins e quadráticas apresentadas anteriormente. Em geral, funções polinomiais são utilizadas para aproximar comportamentos entre duas variáveis, especialmente quando a regra de formação exata é muito complexa ou desconhecida. Além

disso, em métodos de interpolação como os polinômios de Lagrange, que apresentaremos mais adiante, expressões polinomiais são usadas para encontrar funções que passam por um conjunto específico de pontos. As funções polinomiais se destacam por sua versatilidade na análise matemática, pois possuem propriedades analíticas importantes, como continuidade, derivabilidade e integrabilidade em todo o domínio real, o que facilita diversos tipos de análises e aplicações. Como já mencionado, as atividades gamificadas deste trabalho fazem uso dos gráficos de funções afins, quadráticas e cúbicas como curvas de interpolação. Elas permitem também, como abordagem mais avançada e opcional, a exploração de funções polinomiais de grau superior, sempre vinculado à representação gráfica dessas funções. Com isso, justificamos o estudo das funções polinomiais de grau n como generalização do foi apresentado nas seções anteriores, que será feito com base em Lima [11].

Definição 3.12 (Função polinomial de grau n): Dados os números reais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $a_n \neq 0$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada **função polinomial** de grau n definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$. Os números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são chamados de coeficientes da função polinomial de grau n e $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_1 x, a_0$ são os termos da função polinomial.

Em particular, quando $f(x) = a_n x^n$, com $a_n \neq 0$, temos uma função denominada função monomial. Se além disso temos $a_n = 1$, dizemos ser uma função potência. Caso todos os coeficientes de uma função polinomial sejam nulos, dizemos que se trata da função polinomial nula, cujo grau não é definido.

Exemplo 3.5.1: $f(x) = 4x^4 + 2x^3 + 3x$ é uma função polinomial de grau 4 com $a_4 = 4$, $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 3$, $a_0 = 0$.

Observação: Ressaltamos que uma função polinomial $f(x)$ na variável real x está associada a um polinômio $p(X)$ em uma indeterminada X, que, rigorosamente, são objetos diferentes. Porém, vamos permitir explorar a correlação entre esses dois objetos quando conveniente, atentando-se às suas diferenças, como apresentado na discussão em Lima [11]. Em particular, por vezes iremos usar o termo "zero" da função polinomial f como sinônimo de "raiz" do polinômio p.

3.5.1 Unicidade da função polinomial

Uma função polinomial de grau n é determinada de forma única por seus coeficientes reais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Uma demonstração elementar desta proposição também pode ser encontrada já em algumas referências de Ensino Médio, como em Iezzi [14].

Proposição 3.13 (Unicidade da função polinomial): Uma função polinomial de grau n é unicamente determinada por seus coeficientes. Mais precisamente, se $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ são duas funções polinomiais de grau n, temos que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Dadas $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ funções polinomiais de grau n, defina

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) \quad (3.9)$$

que tem grau menor ou igual a n. Faremos uso de que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é equivalente a $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha primeiramente que $a_i = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Da Equação 3.9, temos que todos os coeficientes da diferença são nulos, do qual concluímos que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Para a recíproca, argumentamos por contradição e utilizamos o fato de que um polinômio de grau n pode ter no máximo n raízes reais, conforme discutido em Lima [11].

Suponha que $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que pelo menos um dos seus coeficientes na Equação 3.9 seja diferente de zero. Teríamos assim uma expressão polinomial de grau $m \leq n$. No entanto, como por hipótese $h(x) = 0$ para todos os $x \in \mathbb{R}$, teríamos que ele tem infinitas raízes, contrariando que um polinômio de grau m tem no máximo m raízes. Assim, a única maneira dessa expressão polinomial ter infinitas raízes é se ela for identicamente nula, ou seja, se todos os seus coeficientes forem iguais a zero. Portanto, $a_i - b_i = 0$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, o que implica $a_i = b_i$. □

Outra demonstração da recíproca faz uso das derivadas de uma função polinomial por indução matemática. Iremos apresentar como forma alternativa de demonstração.

Demonstração. Recíproca da proposição 3.13. Queremos mostrar que se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então os coeficientes devem ser iguais, ou seja, $a_i = b_i$ para todo i. Considere a função polinomial $h(x) = f(x) - g(x)$, como em 3.9, de grau menor ou igual n. Vamos provar por indução sobre n que se $h(x)$ é o polinômio nulo, todos os seus coeficientes devem ser zero. Ou seja, $a_i - b_i = 0$, o que implica $a_i = b_i$ para todo i. Como caso base da indução, considere $n = 0$, ou seja, $h(x) = a_0 - b_0$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $h(x) = 0$ para todo x e assim $a_0 = b_0$. Suponha agora que para funções polinomiais de grau $n - 1$, se $f(x) = g(x)$ para todo x, então todos os seus n coeficientes devem ser iguais. Considere $h(x) = f(x) - g(x)$

de grau n. Se $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular,

$$h(0) = (a_0 - b_0) = 0 \Rightarrow a_0 = b_0.$$

Agora, calculando a derivada de $h(x)$, usando que $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, temos

$$h'(x) = n(a_n - b_n)x^{n-1} + (n-1)(a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-2} + \cdots + 2(a_2 - b_2)x + (a_1 - b_1).$$

Como $f'(x)$ e $g'(x)$ são polinômios de grau $n-1$ os coeficientes de $h'(x)$ são da forma $i(a_i - b_i)$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $h(x) = 0$, sua derivada $h'(x)$ também deve ser nula para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, aplicando a hipótese de indução temos que

$$i(a_i - b_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = b_i,$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, por indução, temos $a_i = b_i$ para $i \in \{0,1, \ldots, n\}$, como queríamos demonstrar. □

Também podemos generalizar as proposições 3.3 e 3.8: se conhecemos $n+1$ pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, com $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos, então podemos determinar unicamente os coeficientes da função polinomial de grau n que passa por esses pontos. Grosso modo, isso ocorre porque a função polinomial de grau n possui exatamente $n+1$ coeficientes. Para demonstrar esta proposição geral, utilizamos, como nas proposições anteriores, sistemas lineares e precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.14 (Determinante de Vandermonde): Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reais, considere a matriz de Vandermonde $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ definida por

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Seu determinante é dado pela expressão

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre n. Para $n = 1$, temos a

matriz:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $\det V = x_1 - x_0 = \prod_{0 \le i < j \le 1}(x_j - x_i)$. Portanto, a propriedade é válida para $n = 1$.

Suponha que a propriedade seja válida para matrizes de ordem n, ou seja, para uma matriz

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i).$$

Considere agora a matriz de Vandermonde de ordem $n+1$, $V = V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Seja L_k a linha de ordem k desta matriz. Realizamos as seguintes operações elementares que não alteram o determinante:
Para cada linha L_k de, k variando de n até 1 (de baixo para cima), substitua a linha L_k por $L_k - x_0 \cdot L_{k-1}$.
Após essas operações, a primeira coluna se torna $[1, 0, 0, \ldots, 0]^T$, e o determinante se torna:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \ldots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \ldots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \ldots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Expandindo o determinante pela primeira coluna, obtemos:

$$\det V = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \dots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}.$$

Fatorando $(x_1 - x_0)$ da primeira linha, $(x_2 - x_0)$ da segunda, e assim por diante, obtemos:

$$\det V = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

A matriz restante é exatamente uma matriz de Vandermonde de ordem n para os elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$. Portanto, pela hipótese de indução:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Assim, temos:

$$\det V = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Isso completa a demonstração por indução. □

Com isso, garantimos o resultado geral:

Teorema 3.15: Dados $n+1$ números reais e distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, e fixados arbitrariamente $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, existe uma e somente uma função polinomial $f(x)$ de grau menor ou igual a n tal que $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Dados os pares ordenados $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)$ e substituindo na expressão geral de $f(x)$, obtemos um sistema de $n+1$ equações lineares:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \tag{3.10}$$

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \tag{3.11}$$

$$\vdots \tag{3.12}$$

$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n$$

Observe que como f tem grau menor ou igual a n, podemos ter $a_n = 0$. A matriz dos coeficientes desse sistema é uma matriz de Vandermonde. O determinante de Vandermonde para as abscissas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é dado por:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Como, por hipótese, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são distintos, tem-se que $\det V \neq 0$. Logo o sistema de $n+1$ equações lineares admite solução única nos coeficientes de f. □

Portanto, uma função polinomial de grau n está completamente determinada quando seus $n+1$ coeficientes são conhecidos, ou quando conhecemos $n+1$ pontos distintos pelos quais seu gráfico passa.

Embora a forma de obter os coeficientes seja evidente para funções de primeiro e segundo grau, e foi obtida via sistemas lineares, a obtenção dos coeficientes da função polinomial de grau n pode ser determinada por um algoritmo mais eficiente: a interpolação de Lagrange.

Polinômios de Lagrange

Dados os pontos (x_i,y_i), com $i = 0,1,2,\ldots,n$, vamos apresentar uma fórmula que permite determinar a função polinomial f de grau n que atende $y_i = f(x_i)$, para todo i, de forma explícita.

Definição 3.16: O polinômio interpolador de Lagrange é dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{3.13}$$

onde $L_i(x)$ são os polinômios base de Lagrange, definidos como:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

Da definição, é fácil observar que $P(x_i) = y_i$, para todo i. De fato, $L_i(x_i) = 1$ para todo i e $L_j(x_i) = 0$ para todo $j \neq i$.

Dessa forma, pelo teorema 3.15, garantimos que $P(x)$ é a única função de grau menor ou igual a n que satisfaz as $n+1$ condições $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$. A construção do polinômio de Lagrange para determinar a função polinomial de grau n a partir de $n+1$ valores conhecidos é chamada de interpolação de Lagrange. Esse é um eficiente método numérico alternativo à resolução do sistema linear que permite obter os coeficientes da função polinomial. Vamos aplicar esse método para polinômios lineares e quadráticos, já discutidos.

Exemplo 3.5.2: Considere os pares $x_0 = 1, y_0 = 3$ e $x_1 = 7, y_1 = 10$. Para construir o polinômio de Lagrange de grau 1, primeiro calculamos os polinômios base de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-7}{-6} = -\frac{1}{6}(x-7)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-1}{7-1} = \frac{1}{6}(x-1)$$

Agora, aplicamos a fórmula de Lagrange

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

e obtemos

$$P(x) = 3\left(-\frac{1}{6}(x-7)\right) + 10\left(\frac{1}{6}(x-1)\right) = \frac{7}{6}x + \frac{11}{6}.$$

Esta é a equação da reta que passa pelos pontos (1,3) e (7,10).

Exemplo 3.5.3: Vamos obter o polinômio de Lagrange que interpola os pares $x_0 = 1, y_0 = 3$, $x_1 = 7, y_1 = 10$ e $x_2 = 4, y_2 = -2$. Primeiro, calculamos os polinômios base de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-7)(x-4)}{(1-7)(1-4)} = \frac{(x-7)(x-4)}{18}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(7-1)(7-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{18}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-7)}{(4-1)(4-7)} = \frac{(x-1)(x-7)}{-9}$$

Agora, aplicamos a fórmula de Lagrange:

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$P(x) = 3\left(\frac{(x-7)(x-4)}{18}\right) + 10\left(\frac{(x-1)(x-4)}{18}\right) + (-2)\left(\frac{(x-1)(x-7)}{-9}\right).$$

Aplicando as multiplicações e realizando simplificações, obtemos

$$P(x) = \frac{17}{18}x^2 - \frac{115}{18}x + \frac{76}{9}.$$

Este é o polinômio de grau 2 cujo gráfico passa pelos pontos (1,3), (7,10) e $(4, -2)$.

3.5.2 Zeros de uma função polinomial

Para grau $n \geq 3$, encontrar os zeros de uma função polinomial, ou raízes do polinômio associado, pode ser bastante difícil. Em geral, utilizam-se métodos numéricos para esse fim, os quais não serão abordados neste texto. Ainda assim cabe descrever a relação entre zeros da função polinomial e a forma fatorada do polinômio associado.

Exemplo 3.5.4: Considere $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 52x + 60$. Verifiquemos os valores:

$$\begin{aligned} f(1) &= 4(1)^3 - 12(1)^2 - 52(1) + 60 = 0 \\ f(5) &= 4(5)^3 - 12(5)^2 - 52(5) + 60 = 0 \\ f(-3) &= 4(-3)^3 - 12(-3)^2 - 52(-3) + 60 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, os números 1, 5 e -3 são zeros reais distintos de $f(x)$. Observe que podemos escrever f em forma fatorada:

$$f(x) = 4(x-1)(x-5)(x+3).$$

Exemplo 3.5.5: Podemos facilmente verificar que a fatoração da função polinomial $V(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$ é dada por $V(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$. Diferente do caso anterior, observe que temos dois fatores interessantes: a potência $(x-1)^2$, indicando um zero real com multiplicidade; o fator quadrático $x^2 + x + 1$ que é irredutível, ou seja, sem raízes reais.

A importância da determinação dos zeros da função polinomial manifesta-se pelo chamado Teorema Fundamental da Álgebra, que diz que um polinômio de grau n em coeficientes complexos possui ao menos uma raiz complexa, apresentado em textos básicos como Iezzi [14]. Aliado ao Teorema da Fatoração Única de polinômios, podemos expressar a função polinomial em sua forma fatorada, que auxilia a destacar características importantes da função, assim também como dados sobre sua representação gráfica.

Mais explicitamente, considere a função polinomial $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau n com coeficientes reais. Se f possui n raízes reais $x_1, \ldots, x_n$, então pode ser

representada na forma fatorada:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \tag{3.14}$$

onde $a_n \neq 0$.

Observe que essa expressão não exclui a possibilidade de que algumas raízes reais sejam repetidas, ou seja, que haja raízes com multiplicidade, como citado no exemplo 3.5.5. Caso o polinômio tenha raízes complexas, haverá fatores quadráticos irredutíveis, ou seja, fatores da forma $ax^2 + bx + c$ com discriminante $\Delta < 0$, como também aparece no exemplo 3.5.5.

Comparando a forma expandida com a forma fatorada Equação 3.14 para f, estabelecemos relações entre zeros e coeficientes, conhecidas como relações de Girard. Em particular, para grau n qualquer, temos que $a_0 = (-1)^n a_n x_1 x_2 \dots x_n$.

3.5.3 Gráfico de uma função polinomial de grau n

Uma função polinomial de grau n é representada graficamente por uma curva contínua e suave, cuja complexidade aumenta conforme o grau do polinômio. Conforme discutido em Lima [11] e Iezzi et al. [14], as características dessas curvas variam significativamente. Nesta seção, vamos abordar essas características de forma mais intuitiva, sem apresentar definições mais rigorosas do Cálculo Diferencial.

Para entender e compreender melhor de forma intuitiva a representação gráfica de uma função polinomial de grau n, vamos pensar na relação entre o grau do polinômio e as características do gráfico. A primeira característica a ser considerada é o *crescimento e decrescimento*. Uma função polinomial f de grau n pode ter, no máximo, $n-1$ "pontos de virada" que são os pontos onde a função muda seu crescimento, ou seja, onde ela passa de crescente para decrescente ou vice-versa. Por exemplo, a função polinomial de grau 1 não tem pontos de virada, então ela é sempre crescente ou sempre decrescente. Já uma função polinomial de grau 2, uma parábola, tem um único ponto de virada, que é justamente o vértice da função quadrática. Uma função polinomial de grau 3 pode ter até dois pontos de virada. Assim, em geral, o número máximo de intervalos de crescimento e decrescimento alternados é n.

A segunda característica é a **concavidade**. A chamada "curvatura" do gráfico é determinada pela concavidade. Essa mudança de concavidade acontece nos chamados pontos de inflexão da função polinomial. De acordo com Leithold [12] e Simmons [10], uma função polinomial de grau n pode ter, no máximo, $n-2$ pontos de inflexão. Ou seja, ela pode mudar a direção de sua curvatura no máximo $n-2$ vezes. Por exemplo, a

função afim não tem concavidade, pois é uma reta; já a função de grau 2 tem concavidade constante, então não tem pontos de inflexão. A função de grau 3 pode ter um ponto de inflexão, onde a concavidade muda.

Uma analogia concreta e didática considera o gráfico de uma função polinomial de grau n como sendo um fio de arame maleável. O fio pode ser dobrado para cima e para baixo no máximo $n-1$ vezes, criando até $n-1$ picos e vales. Isso nos dá até n intervalos de crescimento e decrescimento. O fio pode mudar a direção da "curvatura" no máximo $n-2$ vezes. Isso nos dá até $n-1$ intervalos de concavidade alternada. Em essência, quanto maior o grau do polinômio, mais "complexo" o seu gráfico, com mais mudanças de direção e de curvatura. O grau n define o limite máximo de quantas vezes o gráfico pode mudar sua trajetória.

Exemplo 3.5.6: Considere a função polinomial de grau 4

$$f(x) = 4x^4 - 40x^3 + 80x^2 + 160x - 384.$$

Tabela 3.5: Tabela de Valores para $f(x)$ com pontos selecionados

x	-3	-2	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	-384	-384	-180	0	300	0	-684	0	3120

O gráfico (Figura 3.9) ilustra características típicas de polinômios de grau par:

- Comportamento assintótico: $f(x) \to +\infty$ quando $x \to \pm\infty$.
- Presença de múltiplos pontos de inflexão (mudanças de concavidade).
- Simetria não obrigatória, mas com alternância entre máximos e mínimos locais.

3.6 Função cúbica

Também chamadas de funções cúbicas, as funções polinomiais do 3º grau são fundamentais em matemática avançada. Embora menos exploradas no ensino médio, restrigindo-se a fórmulas de volume, elas são amplamente utilizadas em problemas de otimização, análise de curvas e modelagem de fenômenos não-lineares. Definimos:

Definição 3.17: Dados os números reais a, b, c, d, definimos como função polinomial real do 3º grau a função do tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{com} \quad a \neq 0$. Os números a, b, c e d são considerados os coeficientes da função polinomial do 3º grau.

Desta vez, vamos analisar as propriedades das funções cúbicas sob ciência das

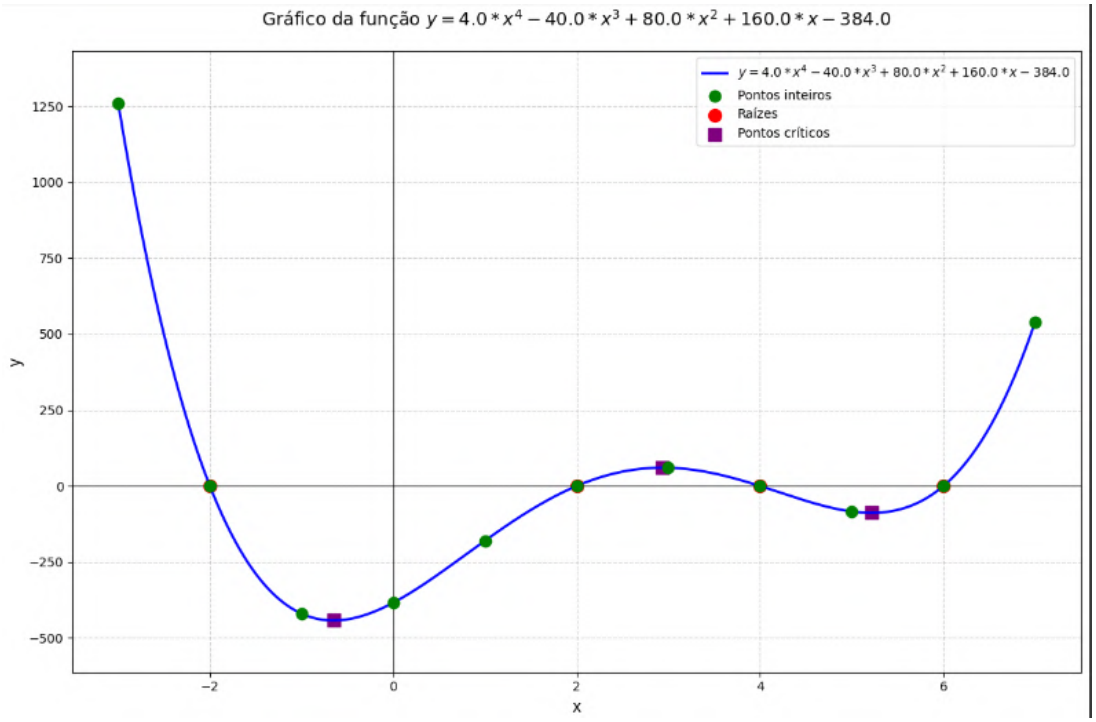


Figura 3.9: Gráfico de $f(x) = 4x^4 - 40x^3 + 80x^2 + 160x - 384$.
Fonte: Próprio autor.

propriedades das funções polinomiais de grau n geral apresentadas na seção anterior. Em particular, conhecendo os coeficientes da função cúbica, temos que existe apenas uma única função que possui tais coeficientes. Também, a partir de quatro pontos distintos, uma função cúbica fica unicamente determinada. Outra característica importante diz respeito a seus zeros: a função cúbica sempre possui ao menos um zero real, consequência de sua continuidade e comportamento assintótico (vide Lima, [11]).

Lembramos que o objetivo principal das atividades gamificadas é determinar como podemos encontrar os coeficientes de uma função polinomial a partir de informações de pontos do seu gráfico. Para as funções cúbicas, necessitamos de quatro pontos do gráfico para determinar a função. Uma das formas de obter os coeficientes é substituir as coordenadas dos pontos do plano na função cúbica e resolver o sistema linear de Vandermonde que envolve 4 equações com 4 variáveis. Alternativamente, pode-se aplicar o método de interpolação de Lagrange.

Exemplo 3.6.1: Queremos determinar a função cúbica $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que passa pelos pontos (1,0), (4,0), (3,2) e (2,1). Substituindo as coordenadas de cada ponto na

equação cúbica:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 64a+16b+4c+d=0 \\ 27a+9b+3c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, encontramos os coeficientes: $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$, $c=-\frac{9}{2}$ e $d=2$. Portanto:

$$h(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{9}{2}x+2$$

Percebe-se, pelo último exemplo, que foi necessário um esforço maior para determinar os coeficientes da função polinomial de 3º grau. Para funções de grau superior, essa complexidade tende a aumentar ainda mais. Diante disso, apresentamos outro exemplo utilizando o método de Lagrange.

Exemplo 3.6.2: Queremos determinar a função cúbica $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ que passa pelos pontos (−2,0), (0,2), (1,0) e (3,0) agora usando interpolação de Lagrange. Os polinômios base de Lagrange para os pontos $x_0=-2$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$ são calculados e, aplicando a fórmula principal, obtemos a função:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2$$

Exemplo 3.6.3: Com base nos dados da tabela, a função cúbica encontrada utilizando o polinômio interpolador de Lagrange é dada por:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2$$

Tabela 3.6: Valores de $f(x)$ para pontos selecionados e ponto de inflexão

x	-2	-1	0	2/3	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	8/3	2	16/81	0	-4/3	0	6	56/3

O gráfico (Figura 3.10) ilustra as características desta função polinomial de grau 3:

- **Comportamento nos extremos:** Dado que o coeficiente do termo de maior grau é positivo, temos $f(x)\to+\infty$ quando $x\to+\infty$ e $f(x)\to-\infty$ quando $x\to-\infty$.

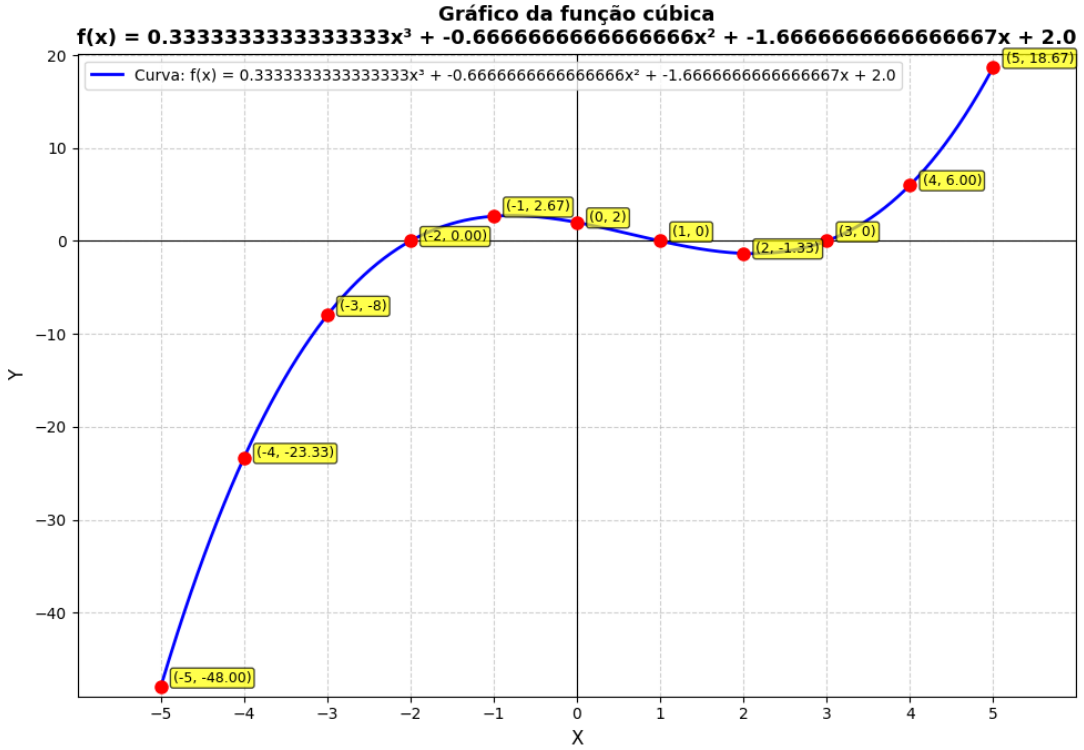


Figura 3.10: Gráfico da função cúbica.
Fonte: Próprio autor.

- **Pontos críticos:** A função possui um máximo local em $x \approx -0{,}79$ e um mínimo local em $x \approx 2{,}12$.
- **Ponto de inflexão:** Ocorre exatamente em $x = 2/3$, onde a concavidade muda de negativa para positiva.
- **Raízes:** A função possui três raízes reais e racionais: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 3$.

Pode-se mostrar que a interpolação de Lagrange tem um custo computacional menor que a resolução do sistema linear da matriz de Vandermonde, conforme apontam Simmons [10] e Leithold [12].

4 Proposta de atividades gamificadas: “Batalha dos eixos”

A introdução de metodologias ativas no ambiente escolar surge como uma resposta à necessidade de adequar o ensino às novas gerações, promovendo um ambiente de aprendizagem mais dinâmico [15]. A gamificação, nesse contexto, destaca-se como uma estratégia pedagógica contemporânea e inovadora. De acordo com Busarello [3], a gamificação não se limita à criação de um jogo pelo mero entretenimento, mas consiste na aplicação sistemática de elementos de jogos em contextos de não-jogo para resolver problemas e encorajar a aprendizagem. Neste contexto, para que o processo de aprendizagem atinja os objetivos esperados e gere um impacto positivo, reiteramos que a estruturação da atividade deve se apoiar em cinco pilares fundamentais:

- **Narrativa:** O uso de histórias para contextualizar o conhecimento e engajar os participantes.
- **Engajamento e motivação:** A combinação de estímulos intrínsecos e extrínsecos para manter a atenção e o interesse do aluno.
- **Aprendizagem:** A adaptação de domínios de conhecimento a desafios superáveis.
- **Mecânica de jogo:** A utilização de regras, metas, *feedbacks* e recompensas.
- **Pensar como jogo:** A conversão de tarefas monótonas em atividades interativas e estratégicas.

Esses e outros princípios apresentados no Capítulo 2 deste trabalho, baseado nas obras de Busarello [3] e Burke [4], servem como delineadores da construção de duas atividades gamificadas, os produtos deste trabalho: “Batalha dos Eixos – versão física” e “Batalha dos Eixos – versão digital”. Essas atividades gamificadas - que, por simplificação, por vezes serão referenciadas neste texto como “jogos” - foram construídas seguindo rigorosamente esses princípios, atuando como um produto educacional voltado para a superação de obstáculos cognitivos na disciplina de Matemática. Apresentamos a seguir o processo de criação desses produtos, de seu protótipo até sua versão final, passando por experimentação e adequações ao seu formato.

4.1 "Batalha dos Eixos" – jogo físico

A concepção do jogo surgiu a partir da observação de um problema educacional recorrente: a incapacidade e a dificuldade dos alunos em compreender o conceito abstrato de funções e a sua respectiva representação gráfica no plano cartesiano. O ensino tradicional, muitas vezes, mostrava-se enrijecido, dificultando a visualização da relação entre a álgebra e a geometria. A ideia do jogo nasceu da necessidade de oferecer, por meio da gamificação, uma alternativa de ensino mais flexível e envolvente para os estudantes. A inspiração direta foi o clássico jogo de tabuleiro "Batalha Naval". A decisão pedagógica central foi substituir a malha de coordenadas simples (letras e números) pelo rigoroso plano cartesiano matemático. Em vez de simplesmente indicar um ponto isolado para "atacar" uma embarcação, os estudantes precisariam formular a trajetória matemática (a função) que interceptasse as coordenadas do alvo, unindo o lúdico à exigência analítica.

4.1.1 Objetivos

Para garantir o alinhamento entre a diversão e a educação, a atividade possui diretrizes claras divididas em duas vertentes:

Objetivo pedagógico

Ensinar e consolidar os conceitos de:

- Função polinomial do 1º grau (função afim), com possibilidade de extensão para funções do 2º grau (curvas parabólicas).
- Interpretação e localização de pontos no plano cartesiano.
- Construção e análise de gráficos a partir de leis de formação algébricas.

A atividade contempla diretamente as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [26], especificamente a habilidade (EM13MAT501), que propõe investigar relações entre números para representá-los no plano cartesiano, generalizando e reconhecendo funções polinomiais do 1º grau, e a (EM13MAT502), que estende essa investigação para funções do 1º grau do tipo $y = ax^2$. Além disso, busca-se a construção de modelos práticos por meio da habilidade (EM13MAT302), empregando funções de 1º e 2º graus para resolver problemas em contextos diversos. No que tange à representação, o trabalho promove a conversão entre as linguagens algébrica e geométrica, conforme preconizam as habilidades (EM13MAT401) e (EM13MAT402), permitindo ainda uma análise profunda de domínios, imagens e crescimentos por meio da habilidade (EM13MAT404). Em termos de conteúdo matemático, essa atividade faz uso do conhecimento de funções afins e da interpolação por dois pontos. Para isso, requer a resolução de sistemas lineares de 2

variáveis, ou o cálculo das fórmulas dos coeficientes de uma função afim. Alinhado com o apresentado no Capítulo 3, além da fixação desses conteúdos, essa abordagem contribui informal e intuitivamente para a formação do conceito de continuidade das funções afins, ou da conexidade dos gráfico dessas funções, através de sua representação como trajetórias e não apenas como conjunto disperso de pontos. Caso seja adequado, a extensão dessa atividade gamificada para aplicação de funções quadráticas e parábolas adiciona ainda outras habilidades da BNCC envolvendo essas funções.

Objetivo do jogo

Eliminar as naves espaciais da equipe adversária determinando funções matemáticas cuja representação gráfica é uma trajetória linear que passe exatamente pelas coordenadas onde os alvos estão posicionados no tabuleiro.

4.1.2 Protótipo

Uma primeira versão do jogo físico foi composta pelos seguintes componentes essenciais:

- **Tabuleiro:** Representa o espaço sideral estruturado sobre um plano cartesiano com eixos OX e OY, impresso em uma folha quadriculada. Veja a Figura 4.1
- **Naves (alvos):** Polígonos formados por conjuntos de pontos (coordenadas) posicionados estrategicamente no plano. Possuem temática espacial, inspirada no universo *Star Wars* (ex: *Falcon*, *Destruidor*, *Calamari*, *Ônibus Imperial*, *Estrela da Morte*). Veja a Figura 4.1.
- **Equipes:** Alunos organizados em duplas ou trios (Cadetes espaciais).
- **Mestre do tabuleiro:** O professor, responsável pela mediação, cronometragem e verificação matemática da precisão das funções disparadas.
- **Materiais utilizados:** Tabuleiro impresso, caderno para cálculos de rascunho e calculadora simples.

A dinâmica da gamificação segue uma sequência de regras estritas para garantir o fluxo da atividade:

1. **Definição das equipes:** A turma é dividida em equipes adversárias (por exemplo, Equipe A representando o "Lado da Luz" utilizando as naves Falcon e Calamari e Equipe B representando o "Lado Sombrio", sendo as naves Estrela da Morte, Ônibus Espacial e Destruidor como parte da sua frota).
2. **Posicionamento das naves:** As equipes recebem o papel quadriculado. Cada equipe escolhe as coordenadas de suas naves base e, em segredo, a posição da nave-mãe. No

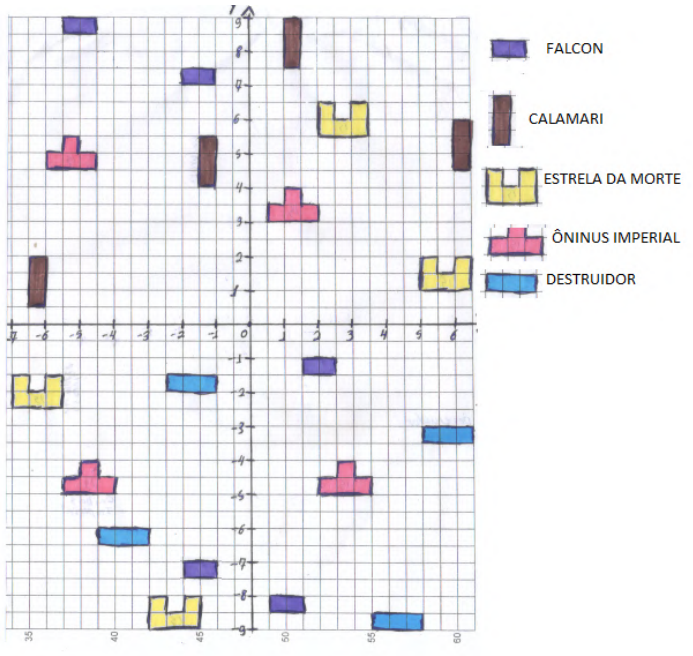


Figura 4.1: Tabuleiro de gamificação em folha quadriculada - protótipo
Fonte: Próprio autor.

protótipo os alunos coloriram as naves no plano cartesiano (veja Figura 4.1).

3. **Tempo de Preparo:** Após a entrega dos tabuleiros, as equipes têm **5 minutos** de preparação para organizar suas defesas e realizar os cálculos primários de suas próprias posições.
4. **Escolha do alvo e construção da função:** A partir da posição na nave-mãe (ainda mantida em segredo para a equipe adversária), a equipe atacante deve mirar em uma coordenada adversária. Para isso, deve calcular a função do 1º grau ($y = ax + b$) que ligue sua nave ao alvo. Cada jogada (ataque) tem um **tempo limite de 1 minuto**.
5. **Penalidade de Tempo:** Se a equipe extrapolar o tempo em mais de **10 segundos**, perde o direito de fazer o lance, transferindo a vez para a equipe inimiga.
6. **Verificação pelo Mestre:** O professor recebe a função calculada pela equipe e verifica matematicamente se a reta (ou parábola, em fases avançadas) intercepta o alvo.
7. **Consequência:** Se a equação estiver correta, a nave inimiga é marcada como destruída (acerto). Se estiver incorreta, a equipe adversária ganha o direito de reposicionar ou adicionar uma defesa (erro).
8. **Condição de vitória:** Vence a equipe que eliminar todas as naves adversárias primeiro ou atingir a nave-mãe (alvo principal).

Como ilustração, a seguir é apresentado um exemplo de movimentos do jogo.

1º turno:

- **Posicionamento da Equipe A (Lado da Luz):** Escolhe posição para a nave-mãe (em segredo): Falcon, coordenada $(-1,7)$.
- **Posicionamento da Equipe B (Lado Sombrio):** Escolhe posição para a nave-mãe (em segredo): Ônibus Espacial, coordenada (5,1).
- **Ataque da Equipe A:** Ataca a nave inimiga Estrela da Morte na posição $(3, 6)$ a partir da nave-mãe na posição $(-1,7)$. Função afim apresentada: $y = -(1/4)x + 27/4$.
- **Ataque da Equipe B:** Ataca a nave inimiga Falcon na posição $(2, -1)$ a partir da nave-mãe na posição (5,1). Função afim apresentada: $f(x) = (2/3)x - 7/3$.
- **Resultado:** Após a verificação do mestre de tabuleiro:
  - As duas equipes conseguiram atingir o alvo, assim as posições das naves atingidas são marcadas com um "X" vermelho.
  - Como nenhuma das naves atingidas foi a nave-mãe da equipe, o jogo prossegue.

2º turno:

- **Reposicionamento da Equipe B (Lado Sombrio):** Posição escolhida em segredo para a nave-mãe: Ônibus Espacial, coordenada $(-6, -2)$.
- **Reposicionamento da Equipe A (Lado da Luz):** Posição escolhida em segredo para a nave-mãe: Falcon, coordenada $(1, -8)$.
- **Ataque da Equipe B:** Destruir a nave Calamari na posição $(-1,4)$ a partir da nave-mãe em posição $(-6, -2)$. Função afim apresentada $y = (3/2)x - 23/4$.
- **Ataque da Equipe A:** Destruir a nave Destruidor na posição $(6, -3)$ a partir da nave-mãe em posição $(1, -8)$. Função afim apresentada $y = x - 9$.
- **Resultado:** Após a verificação do mestre de tabuleiro:
  - A equipe B errou o alvo, enquanto a equipe A acertou. Como penalidade pelo erro da equipe B, a equipe A acrescenta uma nova nave da sua frota em posição a escolha.
  - Como a nave atingida pela equipe A não foi a nave-mãe da equipe B, o jogo prossegue.

3º turno:

- **Reposicionamento da Equipe A (Lado da Luz):** A equipe escolheu manter a posição da nave-mãe em $(1, -8)$.
- **Reposicionamento da Equipe B (Lado Sombrio):** A equipe escolheu manter a posição da nave-mãe em $(-6, -2)$.
- **Ataque da Equipe A:** Destruir a nave Estrela da morte na posição $(-6, -2)$ a partir da nave-mãe na posição $(1, -8)$. Função afim apresentada $y = -(6/7)x - 50/7$.
- **Ataque da Equipe B:** Destruir a nave Calamari na posição $(-1,4)$ a partir da

nave-mãe na posição $(-6, -2)$. Função afim apresentada $y = (6/5)x + 26/5$.

- **Resultado:** Após a verificação do mestre de tabuleiro:
  - As duas equipes conseguiram atingir o alvo, assim as posições das naves atingidas são marcadas com um "X" vermelho.
  - A equipe A atingiu a nave-mãe da equipe B, assim terminando o jogo com a vitória.

Experimentação com o protótipo: testes e retornos

A aplicação inicial ocorreu em turmas do 1º ano do Ensino Médio. A situação da aula foi aproveitada durante um período de eventos esportivos na escola, englobando os alunos que permaneceram em sala. Foram planejadas quatro aulas para a execução completa, efetivando-se cerca de três horas de atividade contínua. Os estudantes foram divididos em equipes (duplas e trios), assumindo a identidade de frotas rivais dentro da narrativa proposta. Os tabuleiros foram entregues em folhas quadriculadas de forma idêntica para as duas equipes, com os eixos cartesianos já demarcados. O professor assumiu o papel central de Mestre do Jogo, coordenando o cronômetro e validando matematicamente cada ataque no quadro branco. Durante a etapa de preparação de 5 minutos, as equipes discutiram avidamente suas estratégias. Ao iniciar a fase de ataques (1 minuto por turno), a interação entre os alunos foi notável. Os discentes consultaram cadernos com anotações de aulas anteriores para relembrar sistemas de equações e o cálculo da taxa de variação. O uso de calculadoras foi intenso para otimizar o tempo no manuseio de frações. O papel do professor limitou-se à validação técnica, enquanto o protagonismo investigativo pertenceu inteiramente aos alunos. Em todas as equipes, observou-se que a mecânica de tempo impôs um ritmo dinâmico que evitou a dispersão. Estudantes que tradicionalmente apresentavam apatia em aulas expositivas demonstraram liderança ao coordenar os cálculos da equipe. A narrativa espacial serviu como excelente mediadora, fazendo com que o jargão matemático fosse substituído naturalmente por termos do jogo (ex: "precisamos ajustar o coeficiente angular para desviar do quadrante negativo e atingir a nave inimiga").

A aplicação prática revelou dados importantes sobre a viabilidade do produto educacional. Inicialmente, observou-se que algumas equipes obtiveram vantagem estratégica devido a uma alocação de naves em eixos que facilitavam o cálculo do coeficiente linear. Além disso, as equipes perceberam rapidamente que a chance de ganhar era maior para quem escolhesse o Lado Sombrio, simplesmente por possuir um número maior de naves. Houve, em certos momentos, a sensação de tempo insuficiente na etapa de 1 minuto, o que gerou penalidades. Contudo, essa pressão forçou as equipes a dividirem tarefas: enquanto

um membro encontrava o coeficiente angular (a), o outro utilizava a calculadora para isolar o coeficiente linear (b). Várias equipes conseguiram obter sucesso pleno, encontrando com precisão as equações das retas e interceptando as naves inimigas. O engajamento superou as expectativas, com debates acalorados sobre matemática ocorrendo voluntariamente entre os turnos. Contudo, cada nave ocupava uma coordenada do plano cartesiano, mas pela Figura 4.1, eles usavam coordenadas de polígonos formados por conjuntos de pontos posicionados estrategicamente no plano. Podemos perceber que a nave ocupava um espaço maior do plano cartesiano, a qual representava uma região poligonal e não especificamente um ponto. Na jogabilidade, algumas equipes de alunos, percebendo essa situação, usavam-na com o intuito de favoritismo. Usavam um conjunto de pontos que representava a nave e, com isso, apareciam soluções distintas para o mesmo ataque da sua nave. Isso permitiu um debate (questionamento) em sala de aula se a jogada era válida ou não. Pelo traço da trajetória era válida, mas pela escolha da coordenada era inválida. Isso gerou um impasse na sala. Que foi contornado utilizando a impressão das naves e tabuleiro no produto educacional.

4.1.3 Produto final

A primeira versão da atividade, embora bem-sucedida do ponto de vista do engajamento estudantil, apresentou gargalos que evidenciaram a necessidade de evolução do produto. Inicialmente, a dinâmica foi baseada em uma confecção manual em que os alunos desenharam os polígonos para representar as naves em uma folha quadriculada comum (Figura 4.1). A partir dessa aplicação, foram identificados desafios como:

- **Tempo de resolução prolongado:** A verificação manual feita pelo professor gerou filas de espera, quebrando parcialmente o estado de fluxo (*flow*) das equipes.
- **Dinâmica de vantagem:** A quantidade assimétrica de naves (o Lado Sombrio tinha mais embarcações que o Lado da Luz) criava um desequilíbrio na partida.
- **Uso da posição da nave como trapaça:** Identificado nos resultados iniciais, a forma poligonal dos desenhos permitia que equipes usassem a região ocupada pela nave (posições de coordenadas (x,y) que compõem a estrutura da nave) para ganhar o jogo indevidamente.
- **Expansão de conteúdo:** Para manter o desafio em longo prazo, notou-se a oportunidade de estender as regras para permitir ataques curvos utilizando funções do 2º grau (parábolas), elevando o nível cognitivo da atividade gamificada.

Buscando resolver a dinâmica de vantagem e promover um embelezamento da atividade (tornando-a mais prazerosa, atrativa e funcional), foi desenvolvida uma versão

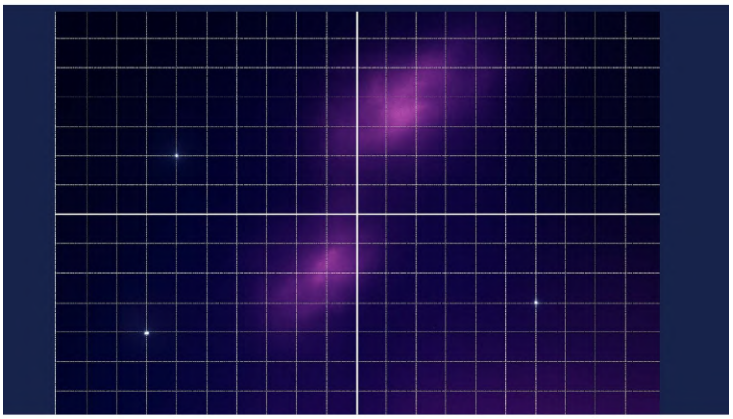


Figura 4.2: Tabuleiro de gamificação impresso – versão final
Fonte: Próprio autor.

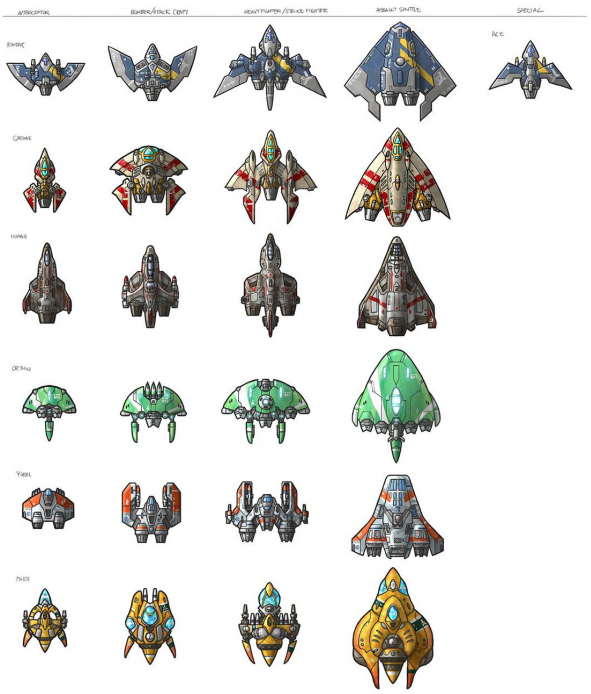


Figura 4.3: Peças físicas de gamificação – versão final
Fonte: Próprio autor.

melhorada da gamificação física, constituindo a versão final deste jogo como produto educacional. Nesta evolução estética e mecânica, o tabuleiro passou a ser impresso com alta qualidade em papel fotográfico (conforme a Figura 4.2), conferindo um aspecto mais profissional ao jogo. As naves, antes apenas desenhadas a lápis, foram transformadas em peças físicas reais, também impressas em papel fotográfico e recortadas (Figura 4.3). Com essa nova formatação, a imersão aumentou significativamente: os alunos posicionavam fisicamente suas naves sobre o tabuleiro refinado e anotavam suas coordenadas de defesa.

Cada ataque das equipes é representado unicamente por uma trajetória linear no plano cartesiano representado por uma função do 1º grau do tipo $f(x) = ax + b$. A regra fundamental foi mantida: se a trajetória passar pela coordenada exata, o alvo é atingido. E caso uma equipe formulasse a trajetória correta e acertasse a nave-mãe adversária, o jogo terminaria imediatamente, garantindo uma vitória dramática e estratégica. Essa reestruturação física serviu como o estágio definitivo de aprimoramento. A estrutura do jogo físico, desde seu protótipo, conecta-se diretamente à teoria de Busarello [3] da seguinte forma:

- **Narrativa:** A ambientação em uma batalha espacial de ficção científica cria uma fantasia que minimiza a complexidade da matemática, transformando os alunos em cadetes espaciais defendendo suas frotas.
- **Engajamento e motivação:** A competição em equipes, somada à pressão do relógio (1 minuto por jogada), estimula o senso de urgência, a colaboração interpessoal e a motivação extrínseca para a vitória.
- **Aprendizagem:** O uso constante da modelagem algébrica e da construção gráfica torna-se uma ferramenta obrigatória para progredir no desafio.
- **Mecânica de jogo:** O sistema de turnos, penalidades de tempo e a mecânica de ataque baseada em funções lineares orientam a ação dos jogadores.
- **Pensar como jogo:** O uso de estratégia para localizar naves oponentes utilizando as propriedades dos coeficientes linear e angular das retas gera um ambiente imersivo para tomada de decisão.

Observe que a aplicação da atividade gamificada restringiu-se, inicialmente, aos conceitos de funções polinomiais do 1º grau. Contudo, durante o desenvolvimento das etapas, e com a familiaridade dos alunos, observou-se um aprimoramento espontâneo da dinâmica quando determinadas equipes propuseram o uso de trajetórias parabólicas, representadas por funções do 2º grau, para efetuar ataques às naves adversárias. Essa demanda surgiu da impossibilidade estratégica de atingir alvos específicos por meio de trajetórias lineares, dada a obstrução por outras naves no plano. Diante desse cenário, as regras foram flexibilizadas para garantir a continuidade e a fluidez do jogo. Instituiu-se a permissão de um único disparo por partida com trajetória parabólica, regido pela lei de formação $y = ax^2 + bx + c$, partindo obrigatoriamente da posição da "nave-mãe" em direção a qualquer coordenada ocupada pela frota opositora. Este passe permitiu um melhor aproveitamento dos alunos a seus estudos em outras funções. Em particular, esse exemplo indica a versatilidade desta atividade gamificada, que pode ser explorada de forma mais dinâmica a partir do fluxo do jogo e retorno dos jogadores em sala de aula. Expansões

e novas regras podem ser empregadas, desde que sempre orientadas pelo professor com intuito pedagógico.

A próxima evolução será a mudança no ambiente da atividade: adaptar o jogo físico em uma atividade gamificada digital, podendo estender a atividade para o mundo virtual e configurando um novo produto, descrito na próxima seção.

4.2 "Batalha dos Eixos" – versão digital

Seguindo os princípios de gamificação estudados, conforme apresentados no Capítulo 2, há a necessidade de a atividade extrapolar o ambiente escolar tradicional, de forma que não esteja condicionada apenas ao espaço da sala de aula e sob tutela direta e exclusiva do professor. De acordo com Burke [4] e Busarello [3], boas atividades gamificadas englobam uma comunidade maior e a internet apresenta o ecossistema ideal para esse público. Os jogos digitais são importantes, pois fazem parte da evolução humana e, quando usados de forma correta, aumentam o engajamento e permitem atingir um público significativamente maior. Entendemos que a forma adequada de implementar essa dinâmica avançada é utilizando recursos computacionais. Em particular, optou-se por construir versões digitais da atividade gamificada em linguagem Python. A digitalização permite ao aluno experimentar essa atividade em outros ambientes e com outras pessoas além dos colegas de sala, gerando motivação autônoma para o aprendizado matemático. Neste contexto, como uma evolução natural do jogo físico, a concepção de uma versão digital para a "Batalha dos eixos" segue os mesmos objetivos pedagógicos e explora melhor os conceitos e habilidades matemáticas em relação ao jogo físico. Matematicamente, esta versão digital propõe o uso não apenas de funções afins, mas também quadráticas e cúbicas, dependendo do nível de engajamento e grau de complexidade que o jogador consegue atingir. Explora assim propriedades das funções polinomiais a partir de seus coeficientes e gráficos, resolução de sistemas lineares mais complexos ou o uso de fórmulas de interpolação polinomial, como a interpolação de Lagrange, como apresentados no Capítulo 3.

4.2.1 Protótipo: "Guerra dos Eixos"

Nesta primeira implementação da atividade gamificada utilizando a linguagem Python, foram mantidas as mesmas características estéticas do jogo físico inicial. Os objetos foram substituídos por imagens complexas de naves no estilo *Star Wars*, com o mesmo enredo anterior, conforme ilustra a Figura 4.4. As posições de cada nave eram obtidas ao passar o mouse sobre elas. Nesta versão, introduzimos as trajetórias curvas para os ataques, permitindo atingir várias naves simultaneamente. Implementou-se também a

função de "teletransporte", permitindo que as equipes se movessem pelo plano para desviar de obstáculos (permitido mudar a posição da nave-mãe por uma nave do mesmo estilo por meio de uma trajetória linear representada por uma função afim). A aprendizagem foi focada nas propriedades do plano cartesiano e na interpolação linear.



Figura 4.4: Tela principal do 1º jogo digital
Fonte: Próprio autor.

Entretanto, durante testes iniciais para verificar funcionamento e desempenho do programa, realizados pelo próprio autor, identificou-se um gargalo técnico: o jogo demorava a carregar, ficava lento e apresentava travamentos constantes devido às implementações audiovisuais excessivas (muitas naves na tela inicial) e ao código-fonte demasiadamente extenso e não otimizado. Sendo assim, esta primeira versão digital tornou-se inviável para aplicação dinâmica em sala de aula ou em computadores escolares padrão. Foi necessário refazer o programa do zero, focando na funcionalidade e em melhor desempenho computacional.

4.2.2 Produto final: "Batalha dos Eixos – Sistema de Defesa Cartesiano"

Para solucionar os problemas de desempenho, o *software* foi inteiramente reescrito. A nova versão abandonou as imagens de naves em arquivos grandes, passando a utilizar representações gráficas mais simples e limpas por meio da biblioteca gráfica, mas com um aprofundamento mecânico considerável: o foco nas trajetórias lineares, parabólicas e cúbicas. Foram implementadas telas de entrada, cadastro e login, com o intuito de permitir que os alunos salvassem seu progresso e comparassem seus dados com os de outros estudantes em um *Hall da Fama* (ranking).

O guia para acessar o arquivo do jogo digital, incluindo seu endereço para *download*, está no Apêndice A.1.4. O guia de regras e sugestão de utilização do jogo digital pode ser conferido no Apêndice B.1.9.

Esta atividade gamificada final foi desenvolvida para abordar um vasto leque de competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), incluindo:

- Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas e utilizar uma reta para descrever a relação observada (associado a habilidade EM13MAT510);
- Investigar relações entre números no plano cartesiano, identificando padrões e reconhecendo a representation de função polinomial de 1º grau (EM13MAT501);
- Reconhecer representação de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ (EM13MAT502);
- Construir modelos empregando as funções polinomiais de 2º ou 2º graus (EM13MAT302);
- Investigar e registrar um algoritmo que resolve um problema (EM13MAT315);
- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º e 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano (EM13MAT401 e EM13MAT402);
- Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação (EM13MAT405).

Além disso, as fases "Missão IV" e "Missão V" da atividade exploram conceitos que, apesar de relacionados, vão além dessas habilidades, como resolução de sistemas lineares por escalonamento e polinômios de Lagrange. Essas fases podem ser utilizadas como exploração adicional do conteúdo, em forma de desafios opcionais ou sequências avançadas, conforme interesse do professor.

4.2.3 Construção da narrativa

Baseado em conceitos físicos de buracos de minhoca e fendas do espaço-tempo, foi elaborada uma narrativa que ultrapassa os conteúdos estritos de sala de aula, aguçando a curiosidade do aluno sobre o universo. O texto abaixo é apresentando quando o jogador ativa o botão "A Saga: História".

Enredo: A Saga (História)

Num futuro distante, o avanço tecnológico permitiu a exploração intergaláctica, mas a humanidade encontrou formas de vida hostis. No ano de 2437, foi estabelecida a Federação Intergaláctica dos Eixos (FIE), que mantém a ordem através da rede de energia conhecida como ***Sistema de Coordenadas da Singularidade****.*

A Ameaça: *Uma força caótica conhecida como* ***DESORDEM (ou VAZIOS)*** *está corrompendo o Sistema, manifestando-se como nós de extrema instabilidade no espaço. Eles atacam os vitais* ***Pilares de Estabilidade da FIE****.*

O Recrutamento e Equipamento: *Você é um cadete da Academia dos Eixos. Sua nave estelar está equipada com o Canhão de Singularidade, capaz de projetar* ***Curvas de Restauração****. Sua missão será traçar a curva correta (função polinomial linear, quadrática e cúbica) que intercepte as naves inimigas. No seu visor, os inimigos aparecem como coordenadas flutuantes. Seu console exige que você insira os coeficientes de uma reta, os termos de uma parábola ou os componentes de uma curva cúbica. Cada acerto desfaz a Desordem; cada erro aproxima o colapso. Seja cauteloso pois a Desordem se adapta a cada avanço, forçando-o a empregar ferramentas matemáticas cada vez mais complexas.*

4.2.4 Sistema de pontuação

A estrutura de recompensas foi desenhada para valorizar tanto a precisão matemática quanto a persistência. O sistema de pontuação opera com uma lógica decrescente baseada no número de tentativas:

- 1ª tentativa (acerto crítico): 1000 pontos e a insígnia de *Sniper Matemático*.
- 2ª tentativa (acerto rápido): 500 pontos.
- 3ª tentativa em diante (persistência): 250 pontos e, após cinco erros, a medalha *Persistente*.

Esta mecânica visa reduzir a frustração, premiando o esforço e transformando o erro em etapa do processo de aprendizagem.

4.2.5 Progressão de níveis e conteúdo matemático

O jogo consiste em um sistema de desafios em cinco níveis diferentes que abordam:

- Fase I: funções do 1º grau;
- Fase II: funções do 2º grau, interpolando três coordenadas distintas;
- Fase III: funções do 2º grau, interpolando duas coordenadas distintas (simetria);
- Fase IV: funções do 3º grau, interpolando quatro coordenadas distintas;
- Fase V: funções do 3º grau, interpolando três coordenadas distintas (graus de liberdade).

A seguir, disponibilizamos os desafios e dinâmicas em cada fase.

Missão I: O Despertar do Feixe (Função Afim)

Nesta fase inicial de acordo com a Figura 4.5, o jogador visualiza sua nave e um alvo inimigo no plano cartesiano. O desafio consiste em determinar os coeficientes angular (a) e linear (b) da função $f(x) = ax + b$ cuja reta intercepte as coordenadas (x_0, y_0) da nave e (x_1, y_1) do alvo. E alternativamente, resolve um sistema linear de duas equações e

duas incógnitas:

$$\begin{cases} ax_0 + b &= y_0 \\ ax_1 + b &= y_1 \end{cases}$$

Nesta fase inicial (Figura 4.5), o jogador visualiza sua nave e um alvo inimigo. O desafio consiste em determinar os coeficientes (a) e (b) da função $f(x) = ax + b$ cuja reta intercepte as coordenadas (x_0, y_0) da nave e (x_1, y_1) do alvo, exercitando conceitos de taxa de variação.

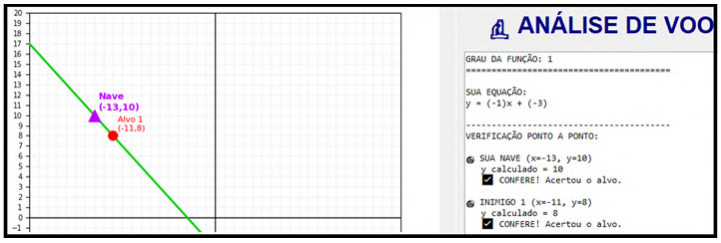


Figura 4.5: Tela Missão 1 – Batalha dos Eixos (Python)
Fonte: Próprio autor.

Missão II: A Curva de Interceptação (Função Quadrática)

A dificuldade é elevada com dois inimigos simultâneos (Figura 4.6). O jogador deve modelar uma trajetória parabólica $f(x) = ax^2 + bx + c$ que passe pela sua nave e pelos dois alvos. Isso exige a resolução de um sistema linear 3×3 ou aplicação das propriedades da parábola. O sucesso nesta fase confere o título de **Senhor da Parábola**.

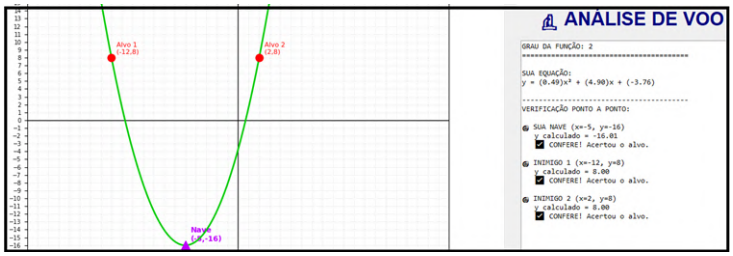


Figura 4.6: Tela Missão 2 – Batalha dos Eixos (Python)
Fonte: Próprio autor.

Missão III: O Espelho da Singularidade (Simetria)

Neste nível (Figura 4.7), a intuição geométrica é vital. O jogador recebe apenas duas coordenadas para formar uma parábola sua coordenada (x_0,y_0) e a do seu inimigo (x_1,y_1). Para realiza o tiro em curva parabólica deve aplicar conceitos de eixo de simetria e vértice da parábola para localizar naves ocultas. É importante destacar que, neste contexto, a solução não será única, devido ao grau de liberdade adicionado que permite alguma escolha do jogador.

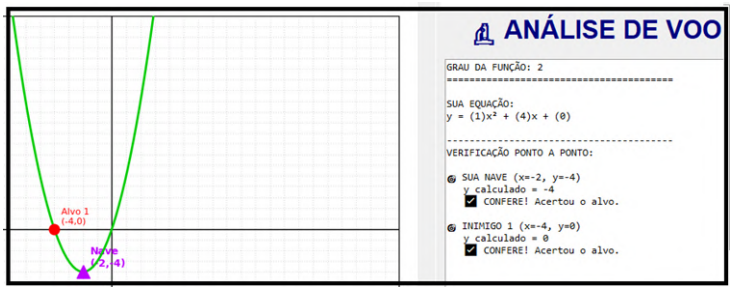


Figura 4.7: Tela Missão 3 – Batalha dos Eixos (Python)
Fonte: Próprio autor.

Missão IV: A Tormenta Cúbica (Função Polinomial de Grau 3)

No radar da nave aparecem quatro coordenadas do plano sideral (Figura 4.8), o aluno deve determinar uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que passe por quatro pontos distintos. A complexidade algébrica exige trabalho colaborativo e métodos como escalonamento ou resolução pelo método de Lagrange.

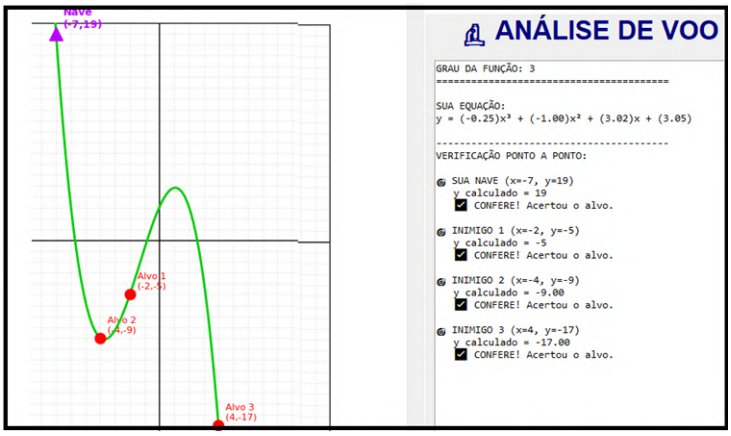


Figura 4.8: Tela Missão 4 – Batalha dos Eixos (Python)
Fonte: Próprio autor.

Missão V: O Protocolo Fantasma (Graus de Liberdade – nível difícil)

O aluno enfrenta "falsos dados" para uma função cúbica recebendo apenas três coordenadas (Figura 4.9). O desafio cognitivo é compreender os graus de liberdade e arbitrar uma quarta coordenada do tipo (x,y), transformando um sistema indeterminado em determinado. A escolha da coordenada (x,y) pode facilitar o algebrismo matemático ou dificultar. O uso do método de Lagrange é opcional e pode extrapolar os conceitos do alunos sobre funções polinomiais.

4.2.6 Considerações metodológicas

"A Batalha dos Eixos" estabelece-se como uma ferramenta metodológica gamificada projetada para transformar o plano cartesiano em um campo de batalha estratégico.

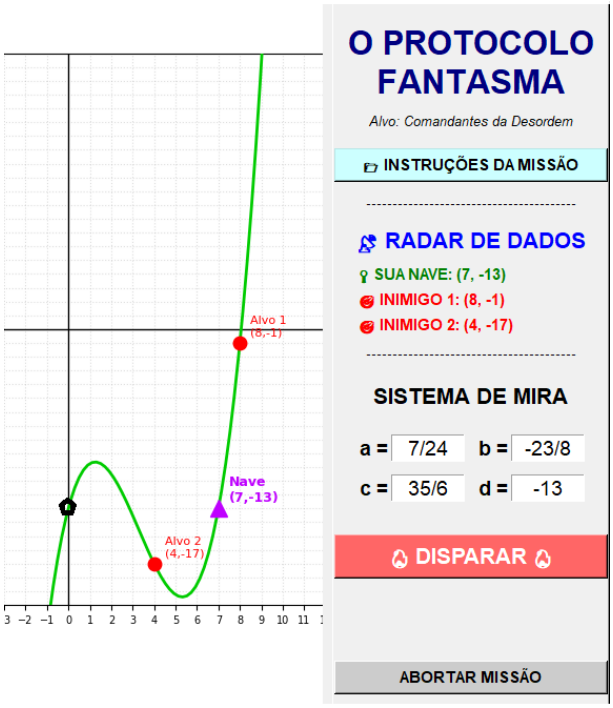


Figura 4.9: Tela Missão V – Protocolo Fantasma
Fonte: Próprio autor.

A função primordial da evolução deste jogo para o ambiente Python foi concretizar conceitos abstratos, permitindo que o aluno visualize imediatamente a relação direta entre a manipulação dos coeficientes numéricos da função polinomial e suas formas geométricas resultantes na tela de visualização. Ao longo do desenvolvimento deste produto educacional, ficou evidente a necessidade de iterar sobre o próprio design da gamificação. A transição do jogo físico (limitado pelo tempo de verificação manual do professor) para a primeira versão digital evidenciou que o excesso de elementos visuais pode comprometer a performance e desviar o foco da matemática. A conclusão natural foi a concepção do software final, que abriu mão da sobrecarga de imagens na interface em favor de representações limpas, focando o verdadeiro aumento de dificuldade na *imersão matemática* exigindo dos alunos a transição do cálculo linear para trajetórias mais complexas como as parabólicas e as cúbicas. Além da automação, a implementação de um sistema de cadastro e ranqueamento cumpriu o propósito de expandir a comunidade de jogadores, fomentando o engajamento social. A atividade pode ser segmentada em múltiplas aulas para atender a diferentes níveis: no 1º ano, abordando o conceito de funções e suas representações gráficas; no 2º ano, utilizando sistemas lineares em aplicações práticas; e no 3º ano do Ensino Médio, explorando a geometria analítica, especificamente o estudo de retas e parábolas. Ademais, o projeto alcança o nível de pré-cálculo, ao introduzir aplicações de interpolação de Lagrange. Em suma, o desenvolvimento e a digitalização do "Batalha dos Eixos" demonstram que a

gamificação quando amparada por uma mecânica sólida e evolução tecnológica iterativa transforma o aluno de mero espectador do quadro negro em protagonista analítico na resolução de problemas geométricos e algébricos.

4.2.7 Considerações metodológicas

"A Batalha dos Eixos" estabelece-se como uma ferramenta metodológica gamificada projetada para transformar o plano cartesiano em um campo de batalha estratégico. A função primordial da evolução deste jogo para o ambiente Python foi concretizar conceitos abstratos, permitindo que o aluno visualize imediatamente a relação direta entre a manipulação dos coeficientes numéricos da função polinomial e suas formas geométricas resultantes na tela de visualização. Ao longo do desenvolvimento deste produto educacional, ficou evidente a necessidade de iterar sobre o próprio design da gamificação. A transição do jogo físico (limitado pelo tempo de verificação manual do professor) para a primeira versão digital evidenciou que o excesso de elementos visuais pode comprometer a performance e desviar o foco da matemática. A conclusão natural foi a concepção do software final, que abriu mão da sobrecarga de imagens na interface em favor de representações limpas, focando o verdadeiro aumento de dificuldade na *imersão matemática* exigindo dos alunos a transição do cálculo linear para trajetórias mais complexas como as parabólicas e as cúbicas. Cabe ressaltar que a presente pesquisa delimita como público-alvo estudantes do 1º ano do Ensino Médio, abordando fundamentalmente o conceito de funções e suas representações gráficas. Nesse contexto, faz-se oportuno justificar a presença das Missões IV e V no jogo, as quais mobilizam escalonamento, sistemas lineares e a Interpolação de Lagrange, referentes a funções cúbicas. Como esses conteúdos ultrapassam o percurso curricular previsto para a etapa escolar indicada, eles são apresentados como módulos de extensão, desafios opcionais ou sequências avançadas gamificadas que estão de acordo com as propostas de Bussarelo. A atividade pode, assim, ser segmentada e adaptada conforme as condições de uso: oferecendo aprofundamento para alunos do 1º ano que buscam maiores desafios, ou sendo aplicada no 2º ano (utilizando sistemas lineares em aplicações práticas), no 3º ano (explorando a geometria analítica) e até mesmo alcançando o nível de pré-cálculo. Em suma, o desenvolvimento e a digitalização do "Batalha dos Eixos" demonstram que a gamificação quando amparada por uma mecânica sólida e evolução tecnológica iterativa transforma o aluno de mero espectador do quadro negro em protagonista analítico na resolução de problemas geométricos e algébricos.

5 Conclusão

Este artigo apresenta o desenvolvimento da atividade gamificada “Batalha dos Eixos Coordenados”, um produto educacional gamificado voltado para o ensino de funções do primeiro, segundo e terceiro graus. Neste trabalho, foi detalhada a construção dessa atividade, fundamentada nos referenciais teóricos de gamificação de Busarello e Burke. Ressalta-se que, embora a gamificação seja um termo recente no contexto das metodologias ativas, a prática lúdica é intrínseca à natureza humana, atuando na construção de relações interpessoais e na preparação do indivíduo para a vida.

Como principais resultados, destaca-se a estruturação de um artefato educacional coeso, capaz de transpor o rigor matemático para uma mecânica de jogo funcional. Em sua confecção, foi considerada a viabilidade técnica ao integrar, em um único ambiente lúdico, a visualização dinâmica de comportamentos gráficos e expressões algébricas das funções, superando a fragmentação habitual entre o ensino de funções afins, quadráticas e polinomiais.

Ainda que o produto final não tenha sido submetido a um experimento prático em sala de aula nesta etapa, sua elaboração utilizou o ambiente escolar como modelo lógico. Contudo, para uma aplicação global e mais efetiva, identifica-se a necessidade de refinamentos futuros na narrativa e nos elementos audiovisuais.

Por fim, a estrutura da atividade demonstra flexibilidade, permitindo sua extensão para o estudo de funções polinomiais de graus superiores e sua aplicação em disciplinas de Pré-Cálculo no Ensino Superior.

Referências

1 OCDE. *Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)*. 2026. Acessado em: 13 mai. 2026. Disponível em: https://www.oecd.org/en/about/programmes/pisa.html.

2 TENENTE, L. *7 de cada 10 alunos brasileiros de 15 anos não sabem resolver problemas matemáticos simples, mostra Pisa*. dezembro 2023. Acessado em: 13 mai. 2026. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2023/12/05/7-de-cada-10-alunos-brasileiros-de-15-anos-nao-sabem-resolver-problemas-matematicos-simples-mostra-pisa.ghtml.

3 BUSARELLO, R. I. *Gamification: princípios e estratégias*. São Paulo: Pimenta Cultural, 2016. ISBN 978-85-66832-37-3.

4 BURKE, B. *Gamificar: Como a gamificação motiva as pessoas a fazerem coisas extraordinárias*. São Paulo: Editora DVS, 2015.

5 ESCRIBANO, F. Gamificación versus Ludictadura. *Obra Digital*, GECON.es, v. 5, p. 22, out. 2013. Licença: CC BY-NC-ND 4.0. DOI: 10.25029/od.2013.22.5. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/319970274.

6 OLIVEIRA TAVARES, D. DE; GOMES, M. B. Gamificação da Cultura: O jogo é uma mediação e não uma mídia. *In:* ANAIS do 24º Congresso de Ciências da Comunicação na Região Nordeste. Natal, RN, Brasil: Intercom – Sociedade Brasileira de Estudos Interdisciplinares da Comunicação, maio 2024. p. 1–xx. Evento realizado de 08 a 10 de maio de 2024.

7 CAMARGO JÚNIOR, I. DE. *Funções no ensino médio: uma abordagem conceitual e o uso de gamificação*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia. Disponível em: http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/13816.

8 PIMENTEL, P. P. C. *Gamificação na Educação Matemática: Desenvolvimento de Jogos 2D no Construct 3 para Engajar Nativos Digitais*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa.

9 PACHECO, T. L. *Como a modelagem matemática com o ensino de funções do 1º grau podem auxiliar no aprendizado nas turmas da EJA: uma proposta interdisciplinar*. 2025. Dissertação de Mestrado – Instituto de Ciências Exatas, Seropédica, RJ, Brasil. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.

10 SIMMONS, G. F. *Calculus with Analytic Geometry*. 2nd. New York: McGraw-Hill, 1987. ISBN 0070576424.

11 LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed.: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. (Coleção Profmat). Coleção do Professor de Matemática. ISBN 9788585818652.

12 LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo, Brasil: Editora Harbra, 1994. v. 1. ISBN 9788529402061.

13 WAGNER, E. *et al. A Matemática do Ensino Médio – Volume 1*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. p. 410. ISBN 9788583370932.

14 IEZZI, G. *et al. Matemática: Volume Único*. 5ª. São Paulo: Editora Atual, 2002. ISBN 9788535704556.

15 MORAN, J. M. *Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda*. 2013. Acesso em: 15 abr. 2026. Disponível em: https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2013/12/metodologias_moran1.pdf.

16 LIBÂNEO, J. C. *Didática*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

17 BECKER, S. A. *et al. NMC Horizon Report: 2017 Higher Education Edition*. Austin, Texas, 2017. Acesso em: 15 mai. 2026. Disponível em: https://library.educause.edu/resources/2017/2/2017-horizon-report.

18 SCHWAB, K. *A Quarta Revolução Industrial*. Tradução: Daniel Moreira Miranda. 1. ed. São Paulo: Edipro, 2016. ISBN 978-8572839785.

19 FERREIRA, A. P. EDUCAÇÃO 4.0 E 5.0: FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS, HISTÓRICOS, SOCIAIS E CULTURAIS E A INFLUÊNCIA DO CONECTIVISMO. *In:* ANAIS do I Congresso Nacional de Educação e Produção Científica (CONAPEC). 2024. p. 1–15. ISBN 9786588884539. DOI: 10.51189/conapec2024/43201. Disponível em: https://ime.events/conapec/pdf/43201.

20 WILLINGHAM, D. T. *Por que os alunos não gostam da escola?* Respostas da ciência cognitiva para tornar a sala de aula atrativa e efetiva. Porto Alegre: Artmed, 2011.

21 MICROSOFT. *Minecraft*. https://www.minecraft.net/pt-br. Acessado em: 20 jul. 2026.

22 BONFIM SOARES DE SOUSA, M. DO; SILVA, J. N. DA. O LÚDICO COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA MATEMÁTICA. *Avanços & Olhares*, Barra do Garças - MT, v. 1, n. 6, p. 45–58, 2023. ISSN 2595-2579.

23 PROFMAT. *Dissertações*. 2025. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em: 04 dez. 2025.

24 CARVALHO MENDES, M. L. DE. *Gamificação no ensino de Matemática: potencializando a aprendizagem com jogos e aplicativos interativos*. 2024. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Piauí (UFPI), PROFMAT. Acesso em: 29 dez. 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7686&id2=171058266.

25 MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY (MIT). *Scratch: Imagine, Program, Share*. 2024. Disponível em: https://scratch.mit.edu/blank. Acesso em: 12 mar. 2026. Disponível em: https://scratch.mit.edu/.

26 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Ministério da Educação. Acesso em: 10 out. 2023. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

Apêndice A
Acesso ao jogo “Batalha dos Eixos” – versão digital

O jogo **Batalha dos Eixos** – versão digital é uma ferramenta pedagógica gamificada desenvolvida para auxiliar na visualização, compreensão e fixação de conceitos de funções e coordenadas no plano cartesiano. Este guia orienta, passo a passo, como realizar o download, a extração e a correta execução do software em seu computador.

A.1 Instruções passo a passo

A.1.1 Acesso ao Google Drive e download

O arquivo compactado do jogo está hospedado de forma segura no Google Drive. Para iniciar:

- Acesse o diretório através do link oficial: https://drive.google.com/drive/folders/1LulF5AdX1hrhvB1ZDEFelh_BUdaBgDwF?usp=drive_link
- Localize o arquivo do jogo (em formato `.zip` ou `.rar`), clique com o botão direito e selecione a opção **Fazer download**.

A.1.2 Descompactação dos a arquivos

Após a conclusão do download, o arquivo estará na sua pasta de “Downloads”.

- Vá até o arquivo baixado, clique com o botão direito sobre ele e selecione **Extrair Aqui** ou **Extrair para [Nome da Pasta]** (utilizando programas como WinRAR, 7-Zip ou o extrator nativo do Windows).
- Uma nova pasta com os arquivos do jogo será criada no local escolhido.

A.1.3 Funcionalidades da linguagem Python

Como o jogo foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação **Python**, o seu funcionamento depende de bibliotecas estruturais e interpretadores da linguagem mapeados no sistema operacional.

- Caso o jogo apresente alguma inconformidade ou falha de inicialização, certifique-se de baixar e instalar a versão mais recente do Python diretamente do site oficial (https://www.python.org), certificando-se de marcar a opção **"Add Python to PATH"** durante o assistente de instalação para que o sistema reconheça os comandos do jogo.

A.1.4 Execução do jogo

Para abrir a interface do jogo, siga o caminho dos diretórios extraídos:

1. Abra a pasta principal que você descompactou.
2. Navegue até a subpasta chamada `dist`.
3. Dentro da pasta `dist`, localize o arquivo executável principal: `BatalhaDosEixos.exe`.
4. Dê um duplo clique sobre o arquivo `BatalhaDosEixos.exe`.

Nota Importante: O jogo será inicializado e executado diretamente no terminal de comando do computador (*Prompt de Comando / DOS*). Não feche a janela preta do terminal, pois o fluxo da partida ocorre inteiramente por ela.

Caso encontre dificuldades técnicas durante o download ou execução, valide se todos os passos de descompactação foram seguidos rigidamente e se o arquivo está sendo executado de dentro da pasta `dist`. Bom aprendizado e excelente batalha!

Apêndice B
Guia do jogo “Batalha dos eixos” – versão digital

O jogo “Batalha dos Eixos – Sistema de Defesa Cartesiano” é um software educacional estruturado para ensinar funções polinomiais através de mecânicas de gamificação. A gamificação abrange a utilização de mecanismos de jogos para a resolução de problemas e para a motivação e engajamento de um determinado público. Nesta atividade gamificada, foram aplicados princípios apresentados por Busarello [3].

Abaixo é apresentado o guia detalhado de cada tela do sistema, explicando sua funcionalidade técnica e seu propósito gamificado.

B.1 Menu Principal

A interface inicial atua como a central de navegação do jogador, apresentando um *banner* temático de ficção científica e botões de acesso para as diferentes áreas do jogo: “Novo Recruta”, “Carregar Piloto”, “Hall da Fama”, “A Saga” e “Sair”. O design estabelece imediatamente a imersão no universo do jogo.

B.1.1 “A Saga” – História e narrativa)

Esta tela exibe o “Arquivo Confidencial: Operação Horizonte”. O texto introduz o ano de 2437, onde a humanidade enfrenta “A Desordem”, uma força que corrompe o espaço-tempo. O jogador assume o papel de um cadete que deve usar o “Canhão de Singularidade” para disparar funções matemáticas.

- **Fundamento de gamificação:** A narrativa é essencial na gamificação, pois o uso de histórias proporciona relevância e significância para as experiências vividas pelo sujeito, fornecendo contextos lúdicos para a aplicação das tarefas. Trata-se de uma fantasia endógena, onde o conteúdo de aprendizagem (matemática) está totalmente envolvido com a ação no universo ficcional.

B.1.2 Cadastro e *login*

- **Novo Recruta:** O aluno insere seu "Nome de Guerra", uma senha e escolhe a "Cor da Frota" (como Azul Aliança ou Vermelho Marte). Uma simulação visual em um pequeno quadro mostra como a nave do jogador ficará no radar.
- **Carregar Piloto:** Permite que jogadores recorrentes selecionem seus perfis em uma lista e insiram a senha para continuar seu progresso, possuindo também uma opção para deletar pilotos.
- **Fundamento de gamificação:** Permite ao aluno assumir uma identidade própria e personalizada, o que promove a experimentação e aumenta o engajamento afetivo com o sistema.

B.1.3 "Hall da Fama" – Sistema de *ranking*

Esta área é dividida em duas partes:

- **Informações de mérito:** Explica a distribuição de pontos (1000 pontos para acerto na 1ª tentativa, 500 para a 2ª e 250 para a 1ª em diante) e lista as "Medalhas de Honra", como "Sniper Matemático" (acertar de primeira) e "Persistente" (tentar 5 vezes sem desistir).
- **Classificação global:** Uma tabela que exibe a posição, nome do piloto, patente atual (Cadete, Tenente, Capitão, Almirante), pontuação e medalhas conquistadas.
- **Fundamento de gamificação:** Utiliza pontos, distintivos (divisas) e placares para medir o desempenho do jogador e estimular a concorrência e o reconhecimento social. Recompensar o aluno pela falha (Medalha Persistente) ajuda a evitar ansiedade e motiva a continuação das tentativas.

B.1.4 Progressão de níveis

A tela exibe o status atual do comandante, sua pontuação e suas medalhas no topo. Abaixo, lista as 5 missões disponíveis no jogo, indicando se estão "Cumpridas" (verde), "Ativas" (amarelo) ou "Aguardando Ordem" (bloqueadas).

- **Fundamento de gamificação:** Os níveis indicam o progresso do jogador e auxiliam no controle do aumento das habilidades do indivíduo. O jogo divide a tarefa complexa de aprender funções polinomiais em etapas menores: começa no Grau 1 (reta), passa pelo Grau 2 (parábola) e termina no Grau 3 (função cúbica).

B.1.5 Instruções da missão

Uma janela que aparece antes ou durante o combate, exibindo o "Relatório de Inteligência" daquela fase específica. Ela mostra o alvo, a equação de armamento necessária (ex: $y = ax^2 + bx + c$) e uma dica estratégica do comandante.

- **Fundamento de gamificação:** Fornecer metas claras e objetivas possibilita que o indivíduo entenda rapidamente o que deve ser realizado para superar os obstáculos.

B.1.6 Área de combate gráfico

Esta é a tela principal de interação onde a aprendizagem matemática acontece:

- **Radar de dados:** Um gráfico interativo simulando um radar. Ele plota o plano cartesiano com marcações numéricas, a nave do jogador e os pontos vermelhos representando os inimigos.
- **Sistema de mira:** Painel lateral onde o aluno insere os valores dos coeficientes matemáticos correspondentes à função daquela fase (a, b, c, d).
- **Disparar:** Ao clicar no botão, o software traça a curva no gráfico em forma de animação ponto a ponto. O software mantém desenhadas, de forma "fantasma" (linhas tracejadas), as tentativas anteriores que falharam.
- **Fundamento de gamificação:** O jogo desencadeia repetidos ciclos de rápidos feedbacks (resposta imediata do sistema apontando onde a reta/curva passou), o que permite ao estudante ajustar suas estratégias cognitivas e corrigir erros instantaneamente.

B.1.7 Sucesso e falha

- **Sucesso:** A tela pisca em verde, um som de vitória é tocado, e um "Relatório de Missão" aparece informando a quantidade de pontos recebidos e as novas condecorações.
- **Falha:** A tela pisca em vermelho, e uma mensagem de erro informa a discrepância matemática exata, por exemplo, "Esperado $y = 5$, Calculado $y = 3.2$".
- **Fundamento de gamificação:** O sistema de feedback orienta o indivíduo sobre sua posição e o resultado de suas ações, sendo um recurso essencial para suportar a performance e a motivação.

B.1.8 Revisão gráfica

Acessível após a conclusão de uma fase. A tela exibe novamente o gráfico com a trajetória correta e um relatório textual descrevendo a equação formulada pelo aluno e a verificação matemática detalhada (ponto a ponto), provando que o y calculado bateu perfeitamente com a posição dos inimigos.

- **Fundamento de gamificação:** Promove o reforço do conhecimento e a clareza da aprendizagem, mostrando na prática a relação teórica que levou à vitória, consolidando o conhecimento algébrico e geométrico.

B.1.9 Vitória final

Uma tela de encerramento ativada após a conclusão da Missão 5. O texto parabeniza o aluno por restabelecer a estabilidade cósmica usando trajetórias matemáticas perfeitas e o promove a "Mestre das Funções".

- **Fundamento de gamificação:** Fornece um fechamento claro para as metas estabelecidas. Ambientes baseados em jogos têm início e fim bem definidos, o que estimula o engajamento contínuo até a resolução final do mistério narrativo.