Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Daniel de Sousa Silva

O Ensino de Funções sob a Ótica da Interdisciplinaridade em Problemas Naturais

Belo Horizonte
2026

Daniel de Sousa Silva

O ENSINO DE FUNÇÕES SOB A ÓTICA DA INTERDISCIPLINARIDADE EM PROBLEMAS NATURAIS

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Carlos Magno Martins Cosme

Coorientador
Jônathas Douglas Santos Oliveira

Banca Examinadora
Fernanda Aparecida Ferreira
Mehran Sabeti

Belo Horizonte
2026

Silva, Daniel de Sousa
S586e O ensino de funções sob a ótica da interdisciplinaridade em problemas naturais / Daniel de Sousa Silva. – 2026.
62 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Carlos Magno Martins Cosme.
Coorientador: Jônathas Douglas Santos Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Equações diferenciais ordinárias – Teses. 2. Funções (Matemática) – Teses. 3. Abordagem interdisciplinar do conhecimento na educação – Teses. 4. Modelagem Matemática – Teses. I. Cosme, Carlos Magno Martins. II. Oliveira, Jônathas Douglas Santos. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 515.352

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DANIEL DE SOUSA SILVA

O ENSINO DE FUNÇÕES SOB A ÓTICA DA INTERDISCIPLINARIDADE EM PROBLEMAS NATURAIS

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado Profissional em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Data da defesa: 26/08/2026
Data de aprovação: 26/08/2026

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
CARLOS MAGNO MARTINS COSME
Data: 28/08/2026 15:35:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Carlos Magno Martins Cosme
Presidente da banca examinadora - CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
JONATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA
Data: 28/08/2026 09:30:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jônathas Douglas Santos de Oliveira
Vice-presidente da banca examinadora - CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
FERNANDA APARECIDA FERREIRA
Data: 27/08/2026 12:38:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Fernanda Aparecida Ferreira
Membro da banca examinadora - CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
MEHRAN SABETI
Data: 27/08/2026 10:03:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Mehran Sabeti
Membro da banca examinadora - UFV – Campus Florestal

Dedico este trabalho aos meus alunos, que são a razão contínua da minha busca por uma Matemática mais viva e mais significativa para eles.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ser a presença constante em minha jornada, concedendo-me não apenas a oportunidade de ingressar neste mestrado, mas também a resiliência e a clareza mental necessárias para não esmorecer diante dos obstáculos. Fechar mais este importante e desafiador ciclo na minha trajetória só foi possível pela fé que me guiou nos momentos de incerteza e que renovou minhas energias a cada novo obstáculo superado.

À minha esposa e aos meus filhos, dedico a minha mais profunda e sincera gratidão. Vocês vivenciaram comigo cada etapa e cada degrau deste processo, que, como bem sabemos, esteve longe de ser fácil. Foram incontáveis noites de sono reduzido, finais de semana debruçado sobre a pesquisa, códigos e equações, e momentos em que o cansaço físico e mental parecia tomar conta. Obrigado por serem tão amorosos e compreensivos diante das minhas frequentes ausências — mesmo quando eu estava fisicamente presente, mas com a mente imersa na dissertação. O suporte incondicional de vocês foi o meu maior combustível. Por abraçarem comigo os sacrifícios e entenderem a importância singular dessa etapa, tenham a certeza de que esta conquista e este título também pertencem a vocês.

Aos meus pais, expresso o meu eterno reconhecimento. Vocês sempre acreditaram no poder transformador da educação e plantaram em mim, desde os meus primeiros passos, a semente da dedicação. Foram o alicerce sólido e inabalável, muitas vezes fazendo renúncias silenciosas, para que eu pudesse trilhar este caminho e nunca deixasse de buscar os meus sonhos mais altos. Se hoje alcanço esta vitória, é porque me apoiei nos valores e no exemplo de perseverança que recebi de vocês.

Aos meus colegas do PROFMAT, meus parceiros inseparáveis de jornada. Juntos, dividimos não apenas as angústias, as dúvidas e as infindáveis horas de estudo, mas também a inquebrantável vontade de vencer. A batalha foi arduamente travada, repleta de prazos, cálculos e pressões, mas lutar lado a lado com pessoas tão inspiradoras e que compartilhavam exatamente do mesmo propósito fez toda a diferença. O companheirismo e a troca de saberes entre nós tornaram a carga mais leve e a caminhada inesquecível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função na Educação Básica é, frequentemente, marcado por uma abordagem superficial e fragmentada, distanciando-se do seu potencial de descrever e prever fenômenos do mundo real. Diante desse cenário, esta dissertação investiga o ensino de funções sob a ótica da interdisciplinaridade, através da modelagem matemática de problemas naturais. O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um produto educacional, no formato de e-book, destinado a professores do Ensino Médio, que realiza a transposição didática de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e técnicas de ajuste de curvas para a sala de aula, priorizando a análise qualitativa do comportamento funcional em detrimento do formalismo do cálculo diferencial. Para fundamentar essa proposta, realizou-se inicialmente uma revisão sistemática de dissertações do PROFMAT, a qual evidenciou a eficácia da modelagem matemática como recurso interdisciplinar, mas também apontou uma lacuna na articulação simultânea entre EDOs, interdisciplinaridade e o ensino do conceito de função. A partir dessa base teórica, o estudo explora modelos matemáticos de fenômenos da Física, Química e Biologia — como Resistência em Fluidos, Crescimento Malthusiano, Equação Logística, Decaimento Radioativo, Lei do Resfriamento de Newton e Movimentos Oscilatórios. O e-book resultante traduz esses modelos em situações-problema acessíveis e roteiros dinâmicos no GeoGebra, permitindo que os estudantes compreendam o comportamento de diferentes tipos de funções na prática. Conclui-se que a inserção de modelos naturais no currículo não apenas atende às diretrizes curriculares normativas, mas também promove uma aprendizagem significativa, estimulando o pensamento crítico e a capacidade de leitura de mundo dos estudantes.

Palavras-chave: Funções; Interdisciplinaridade; EDOs; Modelagem Matemática.

Abstract

The teaching and learning process of the concept of function in Basic Education is frequently marked by a superficial and fragmented approach, distancing itself from its potential to describe and predict real-world phenomena. In view of this scenario, this dissertation investigates the teaching of functions from an interdisciplinary perspective, through the mathematical modeling of natural problems. The primary objective of this work is the development of an educational product, in the format of an e-book aimed at high school teachers, which carries out the didactic transposition of Ordinary Differential Equation (ODE) solutions and curve fitting techniques into the classroom, prioritizing the qualitative analysis of functional behavior over the formalism of differential calculus. To substantiate this proposal, a systematic review of PROFMAT dissertations was initially conducted, highlighting the effectiveness of mathematical modeling as an interdisciplinary resource while also revealing a gap in the simultaneous articulation of ODEs, interdisciplinarity, and the teaching of the concept of function. Grounded in this theoretical framework, the study explores mathematical models of phenomena from Physics, Chemistry, and Biology—such as Fluid Resistance, Malthusian Growth, the Logistic Equation, Radioactive Decay, Newton's Law of Cooling, and Oscillatory Motions. The resulting e-book translates these models into accessible problem situations and dynamic GeoGebra activities, enabling students to understand the behavior of different types of functions in practice. It is concluded that the incorporation of natural models into the curriculum not only aligns with national regulatory curricular guidelines, but also fosters meaningful learning, stimulating critical thinking and students' capacity to interpret the world.

Keywords: Functions; Interdisciplinarity; ODEs; Mathematical Modeling.

Lista de Figuras

3.1 Diagrama relacionando os trabalhos e suas abordagens temáticas 27

4.1 Resistência em Fluidos - Exemplo 4.1.1 32
4.2 Queda Livre - Velocidade x tempo - Exemplo 4.1.2 34
4.3 Queda Livre - Posição x tempo - Exemplo 4.1.2 35
4.4 Crescimento Malthusiano - Exemplo 4.1.3 36
4.5 Equação Logística - Exemplo 4.1.4 38
4.6 Dados de mortes e casos registrados no Brasil até 9 de Agosto de 2020 . . . 39
4.7 Decaimento Radioativo - Exemplo 4.1.5 41
4.8 Lei do Resfriamento de Newton - Exemplo 4.1.6 43
4.9 Movimento Harmônico Simples - Exemplo 4.1.7 47
4.10 Movimento Subamortecido - Exemplo 4.1.8 48
4.11 Misturas - Tanque com entrada e saída 49
4.12 Modelo de Misturas - Exemplo 4.1.9 50
4.13 Ajuste de curva: Quociente de Inteligência (QI) x Rendimento Escolar . . . 52
4.14 Relação entre Δx_n e x_n 53

Lista de Tabelas

3.1 Relação dos trabalhos com suas respectivas abordagens temáticas 20
3.2 Síntese das lacunas identificadas na produção do PROFMAT e os direcionamentos para a elaboração do produto educacional 28

4.1 Relação entre o Quociente de Inteligência (QI) e o rendimento escolar . . . 52
4.2 Relação entre Δx_n e x_n 53

5.1 Mapeamento de Capítulos e Modelos Naturais do E-book 56

Sumário

1 Introdução **10**

2 O Ensino de Funções e a Abordagem Interdisciplinar **12**
2.1 Perspectivas da Interdisciplinaridade na Educação Básica 14
2.2 Modelagem Matemática como Recurso Interdisciplinar 17

3 Análise de Dissertações do PROFMAT **19**
3.1 Apresentação do Objetivo e Recurso Didático das Dissertações 21
3.2 A Interdisciplinaridade na Educação Matemática 24
3.3 A Modelagem Matemática como Recurso Interdisciplinar 24
3.4 O Estudo de Funções na Educação Básica 25
3.5 O Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias 26
3.6 Considerações Sobre a Análise 26

4 Modelagem Matemática de Problemas Naturais **29**
4.1 Modelagem por Equações Diferenciais Ordinárias 30
4.1.1 Resistência em Fluidos 30
4.1.2 Queda Livre (sem resistência do ar) 32
4.1.3 Crescimento Malthusiano 34
4.1.4 Equação Logística 36
4.1.5 Decaimento Radioativo 39
4.1.6 Lei do Resfriamento de Newton 40
4.1.7 Movimentos Oscilatórios 42
4.1.8 Misturas 48
4.2 Modelagem por Ajuste de Curvas 51

5 Recurso Educacional **54**

6 Considerações Finais **57**

Referências **59**

1 Introdução

A compreensão do conceito de função é de extrema importância na Matemática da Educação Básica. No entanto, o processo de ensino-aprendizagem desse tema é muitas vezes conduzido de forma mecânica e fragmentada, limitando-se à memorização de fórmulas, construção descontextualizada de gráficos e categorização dos tipos de funções (afim, quadrática, exponencial, etc.). Essa compartimentação dificulta a percepção do estudante sobre como as variáveis se relacionam dinamicamente e se distancia do potencial que a Matemática tem de descrever a realidade.

Historicamente, diretrizes como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+) [1] já apontavam para a importância de superar essa fragmentação por meio da contextualização. No cenário atual, os documentos normativos vigentes, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2] e as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) [3], regulamentadas no âmbito da Lei Federal nº 14.945/2024 [4], reforçam a importância de um ensino integrado e interdisciplinar. Exige-se que o aluno seja capaz de interpretar criticamente fatos relativos às Ciências da Natureza, o que pode ser potencializado pela análise de taxas de variação e pela construção de modelos matemáticos para intervir em situações-problema. É na convergência entre essa exigência normativa e a necessidade de tornar a Matemática mais atrativa e significativa que esta dissertação se insere.

Em busca de uma alternativa pedagógica mais eficaz, este trabalho de mestrado — desenvolvido no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) — propõe o estudo do conceito de função sob a ótica da interdisciplinaridade em problemas naturais. Adota-se aqui a expressão "problemas naturais" para designar prioritariamente situações-problema originadas em fenômenos físicos, químicos e biológicos cujas relações funcionais emergem de leis da natureza, estendendo-se também à interpretação de regularidades que surgem do cotidiano.

Para evidenciar a necessidade desta pesquisa, o trabalho traz uma revisão sistemática de dissertações apresentadas no repositório do PROFMAT, mapeando as produções que relacionam o ensino de funções, interdisciplinaridade, modelagem matemática e equações

diferenciais. A análise desses trabalhos evidenciou uma lacuna acadêmica e pedagógica que motivou e justificou a elaboração deste projeto.

Para viabilizar essa abordagem em sala de aula, o presente estudo tem como objetivo principal a elaboração de um produto educacional, no formato de e-book, focado no uso de modelos naturais e dados empíricos. Tais situações, frequentemente fundamentadas em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e técnicas de ajuste de curvas, têm como soluções funções estudadas no Ensino Médio. A proposta concentra-se na transposição didática dessas soluções, priorizando a análise qualitativa do comportamento gráfico e funcional, sem sobrecarregar o estudante com o formalismo analítico do cálculo avançado.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: o Capítulo 2 discute a fundamentação teórica sobre o ensino de funções e as perspectivas contemporâneas da interdisciplinaridade, articulando a modelagem matemática como elo pedagógico. No Capítulo 3, apresenta-se a metodologia e a análise da revisão sistemática das dissertações do PROFMAT, demonstrando como as lacunas identificadas orientaram a concepção do produto educacional. No Capítulo 4, explora-se a modelagem matemática de problemas naturais e empíricos por meio de soluções de EDOs clássicas e técnicas de ajuste de curvas, evidenciando as conexões conceituais com a Educação Básica. No Capítulo 5, detalha-se a concepção, a estrutura e a proposta metodológica do Recurso Educacional desenvolvido (*e-book*). Por fim, no Capítulo 6, são apresentadas as considerações finais e as perspectivas de desdobramentos futuros desta pesquisa.

2 O Ensino de Funções e a Abordagem Interdisciplinar

O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função na Educação Básica tem se mostrado, historicamente, marcado por uma abordagem superficial e limitada. De acordo com Maciel e Cardoso [5], o termo é quase sempre reduzido a uma mera classificação e memorização de tipos de funções, um esvaziamento técnico que prejudica o real potencial pedagógico dos conceitos subjacentes. Os autores ponderam que a consolidação do conceito contemporâneo de função exigiu o "desenvolvimento de outros conceitos, tais como o de variável dependente, variável independente, continuidade, domínio, contradomínio, funções analíticas, etc. [5, p. 1351]". Afastando-se dessa abordagem puramente mecânica, a inserção de modelos reais surge como uma alternativa promissora, permitindo trabalhar a relação funcional de forma mais eficaz, contextualizada e sintonizada com situações práticas, o que confere maior significado à experiência matemática.

Essa necessidade de aproximação com o real é corroborada por Santos [6], que destaca a intrínseca proximidade entre o estudo de funções e a dinâmica de fenômenos naturais ou sociais, cujos comportamentos podem ser previstos, generalizados e compreendidos por meio do uso integrado de tabelas, diagramas e expressões algébricas. Todavia, o autor adverte que a maioria dos livros didáticos falha gravemente ao negligenciar a conexão primordial entre a função e a relação de dependência entre variáveis. Em vez disso, o ensino costuma se dar de maneira fragmentada, promovendo uma ruptura precoce e rígida entre função afim, quadrática, exponencial e as demais tipologias. Essa compartimentação atua como um obstáculo cognitivo desde o início da escolarização, dificultando que o estudante estabeleça conexões conceituais mais amplas e integradas entre os conteúdos estudados.

Essa crítica à rigidez estrutural estende-se à organização curricular da disciplina como um todo. Ao analisar o ensino da matemática, Machado [7] questiona o atual planejamento linear de conteúdos, modelo que assume qualquer mudança nessa sequência preestabelecida como uma fatalidade para a aprendizagem. Para o autor, muitos dos pré-requisitos formalistas trazidos pelas teorias tradicionais não precisam, necessariamente,

seguir a ordem imutável imposta por tais cronogramas. Esse entendimento converge diretamente com a perspectiva de Santos [6] em prol de uma dinâmica pedagógica menos fragmentada, que priorize o entendimento global dos conceitos em detrimento da segmentação técnica.

Esse distanciamento entre a teoria e a compreensão do conceito pode ser interpretado sob a ótica de Sfard [8], ao discutir a dupla natureza das noções matemáticas: a concepção operacional (focada em processos, algoritmos e ações sobre grandezas) e a concepção estrutural (que apreende a noção como um objeto abstrato). Segundo a autora, a aprendizagem de conceitos matemáticos costuma ocorrer por um percurso em que a perspectiva operacional precede a estrutural, transitando de processos para objetos. No contexto do ensino de funções, priorizar fórmulas e classificações descontextualizadas impõe ao estudante a assimilação de um objeto sem que ele tenha vivenciado os processos que lhe dão sustentação. Ao fundamentar o estudo no comportamento de grandezas e suas taxas de variação, possibilita-se que o aluno compreenda a função primeiramente como uma relação de dependência (processo), construindo o modelo até atingir a compreensão da função (objeto).

Apesar de as diretrizes contemporâneas buscarem mitigar esse isolamento, a análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2] revela que as competências associadas às funções ainda se encontram dispersas em habilidades atomizadas, o que acaba por reforçar, indiretamente, a fragmentação criticada pela literatura. Essas normas mencionam, de forma isolada:

- a necessidade de se interpretar criticamente fatos relativos às Ciências da Natureza, verificando a variação de grandezas, comportamento gráfico, taxas de variação (EM13MAT101) [2];
- a construção de modelos em funções de 1º ou 2º grau para resolver problemas contextualizados (habilidade EM13MAT302) [2];
- a elaboração e resolução de problemas com funções exponenciais, logarítmicas e periódicas e interpretação da variação das grandezas (EM13MAT304, EM13MAT305 e EM13MAT306) [2];
- e ainda o estudo de características como domínio, imagem, crescimento e decrescimento de funções, estabelecendo relações e expressando comportamento em tabelas e no plano cartesiano (EM13MAT403 e EM13MAT404) [2].

A distribuição dessas habilidades em eixos distintos ilustra o desafio prático de se trabalhar o conceito de função de maneira holística na Educação Básica. Tratar conceitos estruturais, tipologias e interpretações gráficas como metas de aprendizagem separadas

obstaculiza a construção de uma rede de significados pelo aluno, prejudicando a consolidação do saber. Torna-se evidente, portanto, que a superação dessa compartimentação exige uma estratégia que unifique essas competências em torno de um propósito comum. É nesse horizonte que a interdisciplinaridade se consolida, integrando o estudo de funções a modelos naturais e convertendo o processo de ensino-aprendizagem em uma experiência motivadora e ligada à realidade.

2.1 Perspectivas da Interdisciplinaridade na Educação Básica

A importante discussão sobre a necessidade de tornar o ensino mais integrado entre as diversas áreas do conhecimento não é recente e diversos autores têm discutido o tema ao longo dos anos.

Dentre eles, Terradas [9] defende que a interdisciplinaridade está além da sala de aula, considerando ser necessária no próprio dia-a-dia. Para o autor, a partir da globalização, passa a ser necessária a integração entre áreas de conhecimento, o que reflete em sala de aula, motivando a busca por novos conhecimentos. Ele também considera que uma mudança de atitude é necessária para que se busque o conhecimento além dos limites do próprio saber, agregando então o conhecimento de outras disciplinas. Esse pensamento converge com as ideias de Japiassu [10] que vê a interdisciplinaridade como um convite a lutar contra as especialidades e linguagens particulares nas ciências, sendo uma oposição ao sistema de ensino tradicional fragmentado. O autor apoia-se no interesse crescente pelo tema em diversos trabalhos atuais voltados à interdisciplinaridade, destacando a necessidade de uma reorganização do sistema de ensino, em que julga necessário que as especialidades confrontem-se, criando elos entre áreas, através de problemas que tangem ambas.

Para compreender como essa aproximação ocorre na prática, torna-se essencial analisar os níveis de maturidade e integração entre as disciplinas. A partir das formulações precursoras de Heckhausen [11], Japiassu detalha uma gradação progressiva de interações disciplinares:

- Interdisciplinaridade heterogênea: Não há uma real integração entre saberes, sendo apenas uma sobreposição de informações. Buscar formar profissionais com conhecimentos básicos de diversas áreas;
- Pseudo-interdisciplinaridade: Acontece quando diferentes disciplinas usam de uma mesma ferramenta sem que haja interação real dos seus conceitos, o que não gera

uma interdisciplinaridade genuína, distanciando os campos de conhecimento;

- Interdisciplinaridade auxiliar: Ocorre quando uma disciplina utiliza de métodos ou recursos de outra disciplina como apoio, para fundamentar alguma prática;
- Interdisciplinaridade compósita: É uma junção prática que busca resolver problemas complexos, reunindo diversas disciplinas, sem interação entre elas, mas com cada área tendo sua autonomia;
- Interdisciplinaridade unificadora: Nível mais avançado de integração, fundindo métodos, conceitos e teorias de diferentes áreas de conhecimento. Sendo que, dessa união, podem surgir campos híbridos de conhecimento.

Com o intuito de sintetizar essas dinâmicas, Japiassu generaliza essas relações em duas grandes categorias estruturantes: a interdisciplinaridade linear ou "cruzada", na qual ocorre uma troca de informações unidirecional e utilitarista, servindo uma disciplina puramente como auxílio temporário a outra; e a interdisciplinaridade "estrutural", que pressupõe um diálogo recíproco e simétrico, onde conceitos e métodos fundem-se em um plano de equivalência para construir um novo horizonte de compreensão.

Outro estudo relevante sobre o tema é apresentado por Fazenda [12], que faz uma síntese do desenvolvimento do tema no Brasil, a partir dos anos 70. Em geral, a autora verificou um grande desinteresse dos educadores em compreender efetivamente uma proposta interdisciplinar, somado a um projeto educacional brasileiro que pouco fez em relação às questões do conhecimento. A partir desta síntese, a autora conclui que a interdisciplinaridade deve ser vista não só como um meio de se unir duas ou mais disciplinas, se afastando da ideia da simples troca de informações e se aproximando à ideia do diálogo entre os campos de conhecimento, convergindo com o conceito de interdisciplinaridade "estrutural" trazida por Japiassu, que busca a união de campos do saber que visam agregar às disciplinas um conhecimento significativo.

Em desdobramentos mais recentes, no que tange especificamente à formação docente, Fazenda [13] aprofunda essa análise ao discutir as formas de conceber a interdisciplinaridade sob a ótica de Fourez [14] e Lenoir [15], dividindo-as em duas ordens fundamentais:

- Ordenação científica: conduz aos saberes interdisciplinares. O professor, a partir do sua organização e dinâmica, percebe a necessidade de analisar determinado conceito em uma diferente perspectiva, fazendo que com ele reveja suas práticas, gerando um movimento interdisciplinar. Essa ordenação é legitimada pelo saber, e pela pura capacidade de abstração (saber/saber).
- Ordenação social: conduz ao desdobramento dos saberes. O professor observa as exigências sociais e culturais, constituindo a aprendizagem interativa com a

realidade. Essa ordenação enfatiza os impasses de se trabalhar com as disciplinas isoladas, enfrentando problemas mais complexos, e caminha para o sentido da prática (saber/fazer).

Ao trazer essas ordenações, Fazenda [13] critica a falta de conexão entre a formação de professores e a necessidade de se praticar a interdisciplinaridade. Para a autora, há uma diferença entre o estudo acadêmico sobre o tema, e a prática interdisciplinar, fazendo com que a formação esteja distante da realidade escolar.

Essas reflexões clássicas sobre a interdisciplinaridade encontram desdobramentos nas pesquisas contemporâneas em Educação Matemática. Conforme apontam Silva *et al.* [16], ao analisarem a produção acadêmica nacional, muitos trabalhos ainda tratam práticas como interdisciplinares sem explicitar o referencial teórico adotado, reduzindo com frequência a proposta à simples inserção de conteúdos de disciplinas distintas em uma mesma questão. Diante disso, convém delimitar a concepção de interdisciplinaridade assumida neste trabalho: ela é compreendida não como uma justaposição circunstancial de conteúdos, mas como um diálogo em que os fenômenos demandam ferramentas matemáticas para sua modelagem, enquanto os conceitos das Ciências da Natureza dão sentido, parâmetros e validação física aos objetos matemáticos em estudo.

Quando transpomos essa necessidade de articulação para o campo da Educação Matemática, Tomaz e David [17] exploram como o enriquecimento do ensino da matemática pode se dar através da interdisciplinaridade, fazendo com que a aprendizagem seja mais contextualizada e significativa para os estudantes. Cabe destacar que essa perspectiva possui histórico nas diretrizes curriculares nacionais: os Parâmetros Curriculares Nacionais e os PCN+ [1] constituíram marcos históricos ao argumentarem sobre as importantes implicações sobre o "aprender" matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos. No cenário contemporâneo, esse respaldo consolida-se normativamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2] e nas recentes Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) [3], estabelecidas no âmbito da Lei nº 14.945/2024 [4], que reafirmam o compromisso de articular os saberes matemáticos com outras áreas em contextos reais e problemas autênticos.

Dessa forma, ao considerar que a interdisciplinaridade deve ser mais do que uma sobreposição de informações, percebe-se a necessidade de ferramentas que concretizem o diálogo entre disciplinas. A busca por um saber/fazer exige que o ensino da matemática não apenas dialogue com outras áreas, mas utilize problemas do mundo real como eixo central da aprendizagem. Nesse cenário, a modelagem matemática surge como uma estratégia fundamental para fazer essas conexões, permitindo que o estudante explore a matemática

como uma linguagem capaz de interpretar e intervir na realidade.

2.2 Modelagem Matemática como Recurso Interdisciplinar

A transição de um ensino fragmentado para um ensino interdisciplinar encontra na modelagem matemática uma via prática para sua implementação. Se, como apontado anteriormente, a interdisciplinaridade requer um confronto entre especialidades para a criação de elos, a modelagem fornece o processo investigativo necessário para que esse diálogo ocorra. Ela se apresenta não apenas como um método de resolução de problemas, mas como uma ponte fundamental que conecta a abstração matemática às exigências sociais e culturais destacadas.

É preciso ponderar, no entanto, que a modelagem matemática não se configura como uma prática interdisciplinar por simples definição. Como alertam Schrenk e Vertuan [18], a caracterização da modelagem matemática como prática pedagógica reside na postura investigativa do estudante diante de problemas reais, indo além da reprodução de modelos acabados como aplicação de conteúdos prévios. Muitas investigações matemáticas em sala de aula podem restringir-se a aspectos internos da própria disciplina, como problemas de otimização estritamente algébricos ou geométricos, sem estabelecer contato com outras áreas. A interdisciplinaridade se efetiva, portanto, a partir da natureza do problema adotado, são as especificidades das situações do mundo físico e natural que tornam imprescindível o diálogo entre saberes.

Corroborando essa perspectiva integradora, Bassanezi *et al.* [19] traçam um paralelo direto com a multidisciplinaridade ao afirmar que:

> "As vantagens do emprego da modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos como a Física, a Química, a Biologia e a Astrofísica, entre outros. Uma das características mais importantes da modelagem é que pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa [19, p. 19]"

Aprofundando essa visão teórica, Bassanezi [20] argumenta que a modelagem matemática constitui uma oportunidade valiosa para o exercício da criatividade, indo além da simples aplicação de habilidades algébricas ao estimular a formulação de problemas originais. O autor destaca que o processo valoriza o "saber fazer", criando um ambiente propício para que o estudante desenvolva a capacidade de construir modelos em diferentes situações, explicando fenômenos reais que refletem a sua própria realidade, com suas interpretações e subjetividades. Além disso, a mediação docente atua como catalisadora,

visto que "o professor [...] facilita o processo de aprendizagem da modelagem matemática, já que a melhor maneira de se saber usar a modelagem matemática é praticando modelagem [20, p. 13]".

O funcionamento desse processo é descrito por Brito e Almeida [21], que estabelecem a necessidade de se definir inicialmente uma situação-problema para, a partir dela, iniciar uma investigação focada na obtenção de um modelo matemático viável para sua resolução. Essa dinâmica investigativa alinha-se diretamente ao pensamento de Terradas [9]. Ao analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [1], o autor destaca que "é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la [9, p. 100]". Evidencia-se, assim, que a modelagem é percebida na literatura como uma ferramenta hermenêutica para uma melhor compreensão do mundo.

Nesse contexto, os chamados "problemas naturais" emergem como o elo entre o formal e a investigação. Convém explicitar que, nesta dissertação, a expressão é utilizada prioritariamente no sentido das Ciências da Natureza, compreendendo fenômenos físicos, químicos e biológicos cujas grandezas e taxas de variação são dadas por leis naturais (como decaimento radioativo, dinâmicas populacionais malthusiana e logística, taxas de resfriamento e movimentos oscilatórios). A formulação e interpretação desses modelos exigem conceitos dessas ciências experimentais, tornando a atividade interdisciplinar. Por extensão, a metodologia de ajuste e validação de dados pode ser aplicada analogamente a situações de cotidiano e de contexto social, desde que preservada a lógica da modelagem enquanto leitura de dados.

Ao adotar a modelagem como recurso interdisciplinar, o docente permite que o estudante não apenas aprenda formalmente sobre funções, mas que ativamente as utilize como ferramentas de leitura de mundo. Contudo, para viabilizar essa abordagem no contexto educacional brasileiro, torna-se necessário investigar como tais temas têm sido articulados nas pesquisas acadêmicas recentes, buscando identificar convergências e lacunas que justifiquem a proposição de novas estratégias pedagógicas.

3 Análise de Dissertações do PROFMAT

A fundamentação teórica apresentada nos capítulos anteriores, que posiciona a interdisciplinaridade e a modelagem matemática como pilares para um ensino de funções mais significativo, exige um olhar atento sobre a produção acadêmica vigente. Se, por um lado, a literatura clássica defende a ruptura do ensino fragmentado, por outro, é no âmbito das pesquisas aplicadas — como as desenvolvidas no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) — que se observa como é dada a didática desses conceitos para a sala de aula. Assim, esta seção dedica-se a uma revisão sistemática de trabalhos que buscaram conectar o estudo de funções e as equações diferenciais a problemas reais, servindo de base para o desenvolvimento do produto educacional proposto nesta dissertação.

Apresentamos uma revisão sistemática de dissertações publicadas no Repositório Institucional do PROFMAT a respeito da temática apresentada anteriormente. Para conferir transparência e reprodutibilidade ao levantamento, explicita-se o protocolo adotado:

a) **Data e recorte da busca:** o levantamento foi finalizado no primeiro semestre de 2026, cobrindo o acervo histórico disponível desde a criação do programa;

b) **Campos e descritores:** as consultas foram realizadas no mecanismo de busca textual do repositório (título, resumo e palavras-chave), utilizando os descritores exatos e suas variações: “Interdisciplinar” (e “Interdisciplinaridade”), “Modelagem” (e “Modelagem Matemática”), “Funções”, “Conceito de Função”, e “Equações Diferenciais” (incluindo as siglas “EDOs” e “EDO’s”);

c) **Critérios de inclusão:** trabalhos desenvolvidos no âmbito do PROFMAT voltados prioritariamente ao Ensino Médio, que envolvessem propostas pedagógicas aplicadas, sequências didáticas ou produtos educacionais articulando ao menos dois dos eixos de interesse (funções, modelagem, interdisciplinaridade ou EDOs);

d) **Critérios de exclusão:** pesquisas voltadas exclusivamente aos Ensinos Fundamental ou Superior sem possibilidade direta de transposição; revisões puramente teóricas desprovidas de articulação prática com a Educação Básica; e trabalhos com temas descolados dos eixos centrais da investigação;

e) **Procedimento de seleção:** após a busca geral e eliminação de duplicidades decorrentes

de termos análogos, procedeu-se à leitura exploratória dos títulos e resumos para verificar a pertinência temática, culminando na leitura integral das pesquisas pré-selecionadas.

A partir desses descritores, encontramos 83 dissertações através da busca "Interdisciplinar" (sendo 27 através de "Interdisciplinaridade"), 223 através de "Modelagem" (sendo 175 através de "Modelagem Matemática"), 480 através de "Funções", 16 através de "Conceito de Função", 29 através de "Equações Diferenciais" (sendo 2 dissertações através de "EDOs" e "EDO's"). E a partir dessa busca, selecionamos 14 dissertações que tangenciam com maior relevância a pesquisa, sendo:

- 8 trabalhos foram selecionados através da busca "Interdisciplinaridade";
- 10 trabalhos através da busca "Modelagem Matemática";
- 11 trabalhos através da busca "Funções";
  - Sendo 3 trabalhos através da busca "Conceito de Função";
- 3 trabalhos através da busca "Equações Diferenciais".

Dentre todos os trabalhos analisados, nenhum deles atende às 5 buscas mencionadas acima, como pode ser observado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Relação dos trabalhos com suas respectivas abordagens temáticas

Autor(es)	**Interdisciplinaridade**	**Modelagem**	**Funções**	**Conceitos de funções**	**EDOs**
Gonçalves [22]			✓	✓	
Silva [23]	✓	✓			
Silva [24]	✓				
Rech [25]		✓	✓		✓
Ribeiro [26]	✓	✓	✓		
Lima [27]	✓	✓			
Marques [28]		✓	✓		✓
D'Aquino [29]		✓	✓		✓
Corrêa [30]		✓	✓		
Araújo [31]		✓	✓	✓	
Silva [32]	✓	✓	✓		
Cruz [33]	✓		✓	✓	
Duarte [34]	✓		✓		
Pacheco [35]	✓	✓	✓		

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Sendo assim, na sequência, serão analisados esses 14 trabalhos, separados por cada um dos temas que interessam à pesquisa.

Todas as dissertações se enquadram no campo da pesquisa qualitativa aplicada trazido por Goldenberg [36], com foco em compreender as práticas de ensino, com desenvolvimento de estratégias pedagógicas, buscando uma melhor compreensão dos contextos, analisando práticas como modelagem matemática, resolução de problemas e tecnologia, preocupando-se em verificar o impacto dessas práticas no aprendizado dos estudantes.

Algumas dessas pesquisas também apresentam características de estudos de casos de Goldenberg [36], pois analisam situações que envolvem grupos de estudantes ou turmas, observando a participação dos mesmos e utilizando atividades práticas.

Outra estratégia metodológica utilizada foi o recurso de entrevistas e questionários na dissertação relacionada à EJA em Pacheco [35].

3.1 Apresentação do Objetivo e Recurso Didático das Dissertações

O trabalho "Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos", de Gonçalves (2015) [22] investiga como os aspectos históricos do conceito de funções podem contribuir para o ensino, enfatizando suas diferentes representações, através de pesquisa bibliográfica e análise literária de livros didáticos. Elaborou uma proposta de Unidade de Ensino para formação de professores, com o objetivo de integrar o tema e ampliar sua compreensão.

A obra "Modelagem matemática e interdisciplinaridade: Possibilidades e desafios na construção de um projeto de hortas em escolas rurais do Distrito Federal – Brasil", de Silva (2022) [23] utiliza a modelagem matemática e a interdisciplinaridade para criar hortas em instituições rurais. Faz uma pesquisa quantitativa e qualitativa com 80 professores de 8 escolas. Como produto educacional, desenvolve uma sequência de atividades para a construção de hortas geométricas, com manual ilustrado, um gibi temático e integra a matemática com uma prática agrícola sustentável.

Na dissertação "Explorando como a interdisciplinaridade melhora a aprendizagem na matemática: os conhecimentos matemáticos empregados a um ensino motivador via velocidade média e taxa de variação", de Silva (2024) [24] é feita uma investigação sobre a abordagem interdisciplinar entre matemática e física, com foco nos conceitos de velocidade média e taxa de variação. Também é feita uma pesquisa bibliográfica descritiva. Não apresenta um produto, mas propõe estratégias de integração entre os conteúdos, buscando o estímulo através da interdisciplinaridade.

Já no trabalho "Equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem: Aplicações e

duas propostas para o ensino médio, lançamento de projéteis e o modelo Malthusiano", de Rech (2021) [25], o autor explora o ensino de EDOs de 1ª e 2ª ordem, por aplicação prática e contextualizada para o Ensino Médio com o movimento de projéteis e o modelo Malthusiano. É uma pesquisa bibliográfica e modelagem matemática aplicada. Desenvolve dois produtos para intervenção para um ensino mais significativo: lançamento de foguetes com garrafas PET (desenvolvendo conceitos de função quadrática e análise de movimento) e estudo da evolução populacional no Brasil e Rio Grande do Sul (modelo exponencial).

Na obra "Modelagem com funções elementares no ensino médio: uma proposta interdisciplinar aliando prática e teoria", de Ribeiro (2017) [26], há a investigação sobre como a modelagem matemática pode ser usada de forma interdisciplinar para o desenvolvimento do conhecimento de funções afim, quadrática e exponencial. A metodologia é baseada em experimentos contextualizados com física e biologia. Como produto educacional, desenvolve sequências didáticas, integrando técnicas de ajustes de modelos e recursos com o GeoGebra.

Na dissertação "Uma abordagem interdisciplinar da modelagem matemática de experimentos de Física através da utilização do software Modellus", de Lima (2014) [27], é investigada a modelagem matemática de experimentos físicos através do software Modellus, e analisa como isso pode contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos e físicos de maneira contextualizada. A metodologia usada foi quantitativa e qualitativa, com aplicações práticas, envolvendo conteúdos de Mecânica no curso de Engenharia Civil. Como produto educacional, o autor propõe um conjunto de atividades que podem ser adaptadas e aplicadas ao Ensino Médio.

O trabalho "Equações Diferenciais Ordinárias Aplicadas a Fenômenos Físicos: Uma Proposta para o Ensino Médio", de Marques (2024) [28] tem como objetivo desenvolver o pensamento crítico e criatividade dos estudantes através da modelagem de fenômenos físicos, usando EDOs. É feita uma pesquisa bibliográfica e uma fundamentação teórica de EDOs, modelagem e Lei do Resfriamento de Newton, além do uso do GeoGebra. Propõe uma oficina pedagógica, com o objetivo de demonstrar aos estudantes a aplicabilidade da matemática em contextos reais e interdisciplinares.

A obra "Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª Ordem: Modelos Aplicados ao Ensino Médio", de D'Aquino (2023) [29] busca aproximar os alunos das EDOs por meio de aplicações em contextos reais e acessíveis, como crescimento populacional, decaimento radioativo, pêndulo simples e sistemas massa-mola. A metodologia baseia-se em pesquisa bibliográfica e construção de modelos aplicados. Propõe sequências didáticas para diferentes tipos de funções, aplicadas a fenômenos físicos e sociais.

A dissertação "Uso de Modelagem Matemática em Funções Elementares como

Estratégia de Ensino-Aprendizagem Matemática", de Corrêa (2022) [30] tem como objetivo investigar o uso da modelagem matemática como estratégia para melhorar o processo de ensino-aprendizagem de funções elementares. É feita uma pesquisa qualitativa com professores de matemática, aplicando um minicurso de formação sobre modelagem, com foco em funções afim e quadrática. Elaborou, como produto, sequências didáticas baseadas em situações contextualizadas.

O trabalho "Utilização da Modelagem Matemática para a Introdução do Conceito de Funções no Ensino Médio: Modelagem da Queda da Temperatura d'Água", de Araújo (2016) [31] propõe o uso da modelagem para o estudo de conceitos de função, através da observação e registro de temperatura de uma água previamente aquecida. É feita uma pesquisa bibliográfica e desenvolve um produto que utiliza a modelagem através da coleta de dados, análise da taxa média de variação, permitindo a construção do conhecimento de conceitos relacionados às funções.

A obra "O estudo de funções afins e seus gráficos de maneira interdisciplinar utilizando a modelagem em robótica como instrumento de aprendizagem", de Silva (2019) [32] utiliza a robótica para o estudo de função afim, através da modelagem matemática. A metodologia integra a matemática e a robótica, com construção, programação e simulação de movimentos uniformes, registrando dados e transformando-os em gráficos de funções afins, que são construídos em sala de aula junto aos alunos.

Na dissertação "Interdisciplinaridade como prática para a construção do conceito de função", de Cruz (2015) [33], o autor investiga a aplicação da interdisciplinaridade para o ensino de conceitos de função, propondo uma reflexão sobre o ensino da matemática e das demais áreas de conhecimento. Utiliza uma metodologia teórica, com estudo histórico e conceitual da interdisciplinaridade, análise do desenvolvimento do conceito de função e investigação em livros da PNLD sobre o tratamento desse conceito. Não apresenta produto educacional.

No trabalho "Resolução de Problemas: Uma Metodologia de Ensino Envolvendo Funções e Interdisciplinaridade", de Duarte (2022) [34] o objetivo é investigar como a resolução de problemas pode ser aplicada como metodologia para o ensino de conceitos de função de forma interdisciplinar, integrando matemática, física, química e biologia no Ensino Médio. É feita uma pesquisa bibliográfica e propõe a aplicação prática de dois problemas extraídos do ENEM, sobre funções quadrática e exponencial. Como recurso educacional, propõe uma resolução de problemas interdisciplinares entre matemática e ciências da natureza, visando a construção dos conhecimentos.

Por fim, na dissertação "Como a Modelagem Matemática com o Ensino de Funções do

1º Grau Pode Auxiliar no Aprendizado nas Turmas da EJA: Uma Proposta Interdisciplinar", de Pacheco (2025) [35], o autor usa a modelagem através de uma abordagem interdisciplinar para contribuir com o ensino de função afim em turmas da EJA do Ensino Médio. A pesquisa é feita através de uma metodologia de natureza qualitativa e exploratória, com coleta de dados, entrevistas e registros. Como produto, elaborou uma sequência didática que culminou em uma apostila para o ensino de função afim, integrando a matemática a situações cotidianas.

3.2 A Interdisciplinaridade na Educação Matemática

Das obras analisadas, oito delas, sendo Silva [23], Silva [24], Ribeiro [26], Lima [27], Silva [32], Cruz [33], Duarte [34], Pacheco [35], defendem a interdisciplinaridade como uma ferramenta utilizada para a contextualização de conteúdos, tornando a aprendizagem mais significativa para os estudantes e a maior parte desses trabalhos explora a modelagem matemática como um fator interdisciplinar entre conteúdos matemáticos e situações cotidianas. Alguns desses autores apresentam a interdisciplinaridade associando a matemática com as ciências naturais, história, geografia e até à tecnologia e robótica. E em todos, enfatizam o estímulo ao desenvolvimento de resolução de problemas, raciocínio lógico e pensamento crítico. Porém, reconhecem os desafios para a implementação da interdisciplinaridade pelas dificuldades para se integrar conteúdos de forma planejada e até mesmo por despreparo na formação dos professores. Apesar de algumas divergências entre os trabalhos citados, essas não são contraditórias, sendo apenas variações de aplicabilidade da interdisciplinaridade, de acordo com o contexto, o público-alvo e até mesmo os recursos disponíveis.

3.3 A Modelagem Matemática como Recurso Interdisciplinar

Das dissertações analisadas, dez obras, sendo elas Silva [23], Rech [25], Ribeiro [26], Lima [27], Marques [28], D'Aquino [29], Corrêa [30], Araújo [31], Silva [32], Pacheco [35], concluíram que a modelagem matemática faz uma ponte entre o ensino e a realidade, tornando a aprendizagem mais significativa e ajudando na compreensão de conteúdos. Para estes autores, a modelagem estimula a resolução de problemas através da investigação, com uma proposta mais centrada no estudante.

A maioria dessas obras faz um paralelo entre a modelagem matemática e a interdisciplinaridade, tornando possível trabalhar a matemática em conjunto com disciplinas diversas, dentre elas as associadas às ciências da natureza. A modelagem surge nesses

contextos como uma ferramenta utilizada para a ruptura do ensino fragmentado. Enquanto alguns trabalhos focam em problemas cotidianos e funções elementares [30] [35], outros focam em fenômenos físicos mais complexos, como o estudo de modelos com Equações diferenciais [28] [29] [25], mesmo que de uma maneira mais simplificada, para aplicação ao Ensino Médio.

Sobre a aplicação da modelagem matemática, há uma variação entre os trabalhos analisados, desde atividades manuais [23] até o uso de softwares [27], passando por experimentações físicas [31], mas todas com o mesmo objetivo: facilitar a compreensão do conteúdo trabalhado.

Os autores buscam transformar situações cotidianas em modelagem matemática, desenvolvendo um olhar científico nos alunos, estimulando a curiosidade, criatividade e senso crítico [36], buscando a compreensão da matemática como um instrumento de análise de situações do dia a dia. Os trabalhos também têm como partida um problema claro: tornar o ensino da matemática mais significativo, contextualizado e aplicável, que conecta uma pesquisa relevante com demandas do ambiente escolar.

Assim, observamos que todas as dissertações convergem em relação à opinião de que a modelagem matemática estimula os estudantes, aplicando a matemática a diferentes contextos, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, autonomia, trabalho em grupo e até senso crítico.

3.4 O Estudo de Funções na Educação Básica

Entre as dissertações analisadas, onze delas, sendo Gonçalves [22], Rech [25], Ribeiro [26], Marques [28], D'Aquino [29], Corrêa [30], Araújo [31], Silva [32], Cruz [33], Duarte [34], Pacheco [35], defendem que o ensino de funções deve ser contextualizado, não se limitando à memorização de procedimentos e fórmulas, e, sim, promovendo a compreensão da relação entre grandezas, principalmente quando relacionadas ao dia a dia. As obras, em sua maioria, também fazem menção à modelagem matemática, interdisciplinaridade e resolução de problemas, enquanto criticam o modelo tradicional fragmentado de ensino.

Dentre essas onze obras relacionadas ao estudo de funções, destacam-se três [22] [31] [33], cujo foco está nos conceitos de funções, objetivo maior desta pesquisa.

Os autores destacam que é necessária uma compreensão histórica do conceito de funções e que isso pode contribuir para um ensino mais significativo, que pode ser fortemente observado nos trabalhos de Gonçalves [22] e Cruz [33].

Todos esses onze autores reforçam que o conceito de funções deve ser apresentado como uma relação de dependência entre variáveis, fazendo com que seja mais simples

a relação entre funções e situações cotidianas [31]. Gonçalves [22] ainda critica o uso exclusivo de linguagem algébrica, afirmando que diferentes tipos de representação são importantes para melhor compreender o conceito de funções.

A interdisciplinaridade também é citada como um meio para se contextualizar o estudo do conceito de funções, sendo esta uma estratégia que pode aproximar a matemática com outras áreas de conhecimento, como física, geografia e até mesmo economia [33].

3.5 O Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias

Das obras analisadas, em três delas, sendo Marques [28], D'Aquino [29], Rech [25], os autores utilizam Equações Diferenciais Ordinárias para contextualizar a matemática, aplicando-a aos fenômenos físicos, biológicos e sociais. Elas utilizam a modelagem matemática com o objetivo de aproximar o conteúdo ao cotidiano dos estudantes, fazendo com que o ensino seja mais motivador. Todas essas três obras destacam a importância de atividades práticas, seja por oficinas, ou com experimentos ou pelo uso de ferramentas digitais, como o GeoGebra.

Rech [25] enfatiza em sua pesquisa à interdisciplinaridade com a Física, enquanto Marques [28], apesar de caminhar para a mesma área de conhecimento, tem o foco no Resfriamento de Newton. Enquanto isso, D'Aquino [29] faz uma abordagem mais ampla e teórica, explorando modelos que envolvem pêndulo, decaimento radioativo, crescimento populacional e sistema massa-mola, com maior detalhamento matemático.

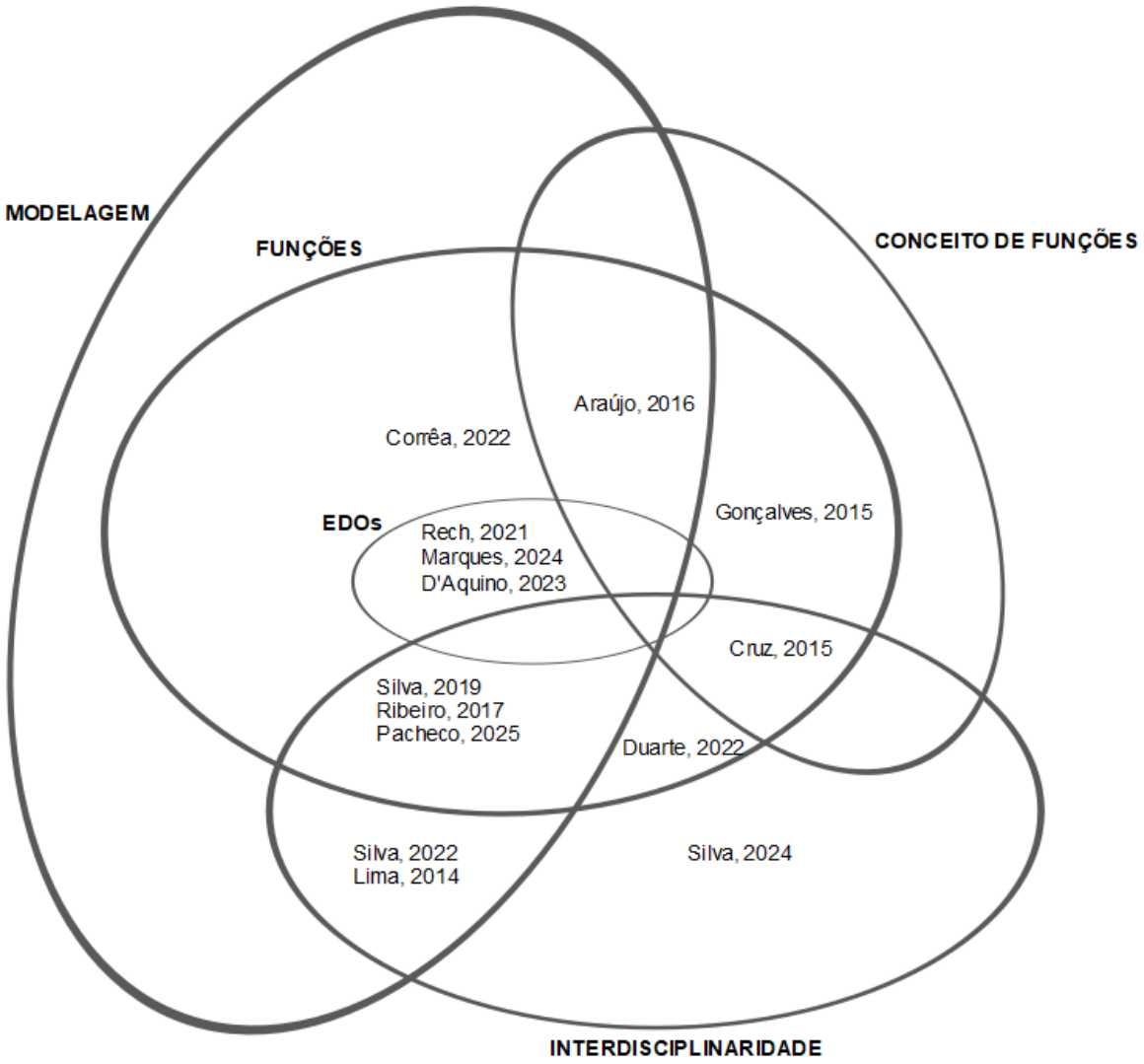
As equações diferenciais ordinárias podem ser um caminho para se trabalhar de forma contextualizada a matemática aplicada em situações reais, contribuindo para uma aprendizagem mais interessante para os estudantes. Observa-se que a relação entre as equações diferenciais ordinárias e as ciências da natureza é próxima, agregando valor e significado ao ensino.

3.6 Considerações Sobre a Análise

A análise aponta que nenhuma das 14 dissertações analisadas relaciona diretamente as cinco abordagens temáticas de interesse desse estudo: interdisciplinaridade, modelagem matemática, conceito de funções e equações diferenciais ordinárias. Porém, elas possuem uma relação de proximidade que pode ser observada na Figura 3.1.

Assim, não foi observado neste estudo nenhuma dissertação no Repositório do PROFMAT que relacionasse todas as abordagens temáticas. Observamos então uma lacuna entre os trabalhos analisados que motiva a pesquisa de mestrado em andamento, na qual pretende-se relacionar todas as vertentes mencionadas, culminando em um estudo

Figura 3.1: Diagrama relacionando os trabalhos e suas abordagens temáticas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

do conceito de função abordado pela ótica da interdisciplinaridade em problemas naturais simples.

Para seguir com esta pesquisa, os dados apresentados foram de fundamental importância. Neles, observou-se um consenso em relação à interdisciplinaridade e sua importância para tornar o ensino mais propício ao engajamento dos estudantes. Além disso, a modelagem matemática é um caminho para tornar o ensino interdisciplinar. Tem-se, portanto, uma forte ligação entre interdisciplinaridade e modelagem matemática.

Em relação ao estudo do conceito de função, temos, através de modelos naturais, no âmbito das Equações Diferenciais Ordinárias, uma abertura para se trabalhar de maneira contextualizada e tangenciando o mundo real, fazendo com que o processo de ensino-aprendizagem seja mais motivador, de modo que os alunos se engajem melhor no

sistema.

Conclui-se então que há um campo a ser pesquisado que conecta todas as abordagens temáticas, de modo que facilite a compreensão dos conceitos em funções, através de modelos naturais, usando como ferramenta a modelagem matemática através da interdisciplinaridade, justificando o desenvolvimento da dissertação. Dessa forma, o e-book desenvolvido foi concebido para responder às demandas pedagógicas não contempladas integralmente pelas pesquisas do PROFMAT catalogadas. A Tabela 3.2 sintetiza as principais lacunas mapeadas na literatura e explicita os direcionamentos práticos adotados na concepção do recurso educacional.

Tabela 3.2: Síntese das lacunas identificadas na produção do PROFMAT e os direcionamentos para a elaboração do produto educacional

Lacuna / Necessidade Identificada	**Direcionamento para o Produto Educacional**
Fragmentação e ensino compartimentado dos tipos de funções	Organização dos modelos em torno de diferentes famílias de funções integradas por relações comuns de dependência e variação
Distanciamento entre as fórmulas matemáticas e fenômenos reais	Utilização de fenômenos empíricos como ponto de partida para a construção, análise gráfica e interpretação das funções
Pouca articulação entre EDOs e a Educação Básica	Realização de adequada transposição didática, adaptando soluções de EDOs e ajuste de curvas para o Ensino Médio sem sobrecarga do cálculo diferencial formal
Carência de integração explícita entre Matemática e outras áreas	Seleção diversificada de fenômenos naturais vinculados à Física, Química e Biologia (dinâmica malthusiana e logística, decaimento radioativo, resfriamento, osciladores e fluidos)
Escassez de materiais didáticos estruturados prontos para a prática docente	Produção de um e-book contendo situações-problema modeladas, roteiros práticos no GeoGebra e orientações didáticas para o professor

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

4 Modelagem Matemática de Problemas Naturais

De acordo com Bassanezi [20] e Bassanezi *et al* [19], diversos problemas naturais podem ser modelados através de três métodos principais: o ajuste de curvas, equações de diferenças e equações diferenciais. Nesse capítulo, focamos nas equações diferenciais ordinárias e nos ajustes de curvas, pois acreditamos bastar para que tenhamos os modelos necessários para se trabalhar todas as habilidades matemáticas que envolvem funções no ensino médio.

O ajuste de curvas, também chamado de regressão, é um recurso que expressa uma relação entre duas variáveis, uma independente e uma dependente, formando uma relação que pode ser expressa como função. Essa relação parte de uma coleta de dados inicial, e a partir disso, uma análise gráfica dentro do intervalo analisado, em busca de um modelo de tendência. Usaremos uma técnica chamada de Método dos Mínimos Quadrados que consiste em encontrar a melhor relação entre as variáveis, minimizando a soma dos quadrados dos desvios entre os valores observados e ajustados [20].

Muitos problemas naturais também podem ser modelados em termos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) simples. Bassanezi *et al* [19] se refere as equações diferenciais como modelos de fenômenos ou experimentos, descrevendo variações de quantidades, formando-se então, leis que regem tais fenômenos. Boyce [37] destaca que situações como o crescimento e decaimento exponenciais, sistemas de massa-mola, circuitos elétricos, dentre outros, fazem uma correspondência com fenômenos que acontecem na prática e podem ser modelados através de equações que podem até ser simples.

As soluções para tais modelos são funções dos mais variados tipos, como racionais, quadráticas, exponenciais, etc. Desta forma, levar tais modelos para a sala de aula propiciará aos estudantes uma rica experiência em que poderão observar que há uma ampla variedade de aplicações dessas funções no mundo real. Esses modelos naturais também podem emergir da observação prática de um dado fenômeno, como, por exemplo, o caso de mofo em um alimento. A partir da observação do fenômeno, com os dados coletados e

adequadamente tratados, pode-se extrair daí uma função que melhor aproxime os valores observados. Nesse caso, assim como em tantos outros, a modelagem matemática não lança mão das equações diferenciais, mas igualmente dá a oportunidade ao professor de apresentar o conceito de função associado ao problema.

Apresentaremos alguns modelos extraídos das obras de Boyce [37], Santos [38] e Bassanezi [20] para analisar suas soluções e como poderemos usá-las para se trabalhar os conceitos de funções no Ensino Médio. Aqui não estaremos focados em apresentar a teoria por trás das modelagens apresentadas, pois queremos trabalhar com as soluções e tudo que elas nos proporcionam em relação ao ensino de funções no contexto de Ensino Básico. O leitor interessado nos aspectos mais relacionados à teoria da modelagem e das equações diferenciais encontrará valioso material nas referências citadas.

4.1 Modelagem por Equações Diferenciais Ordinárias

Nessa seção vamos explorar os modelos de resistência em fluidos, queda livre, crescimento malthusiano, decaimento radioativo, equação logística, lei do resfriamento de Newton, movimentos oscilatórios, misturas e o modelo predador-presa. Em todos os modelos, apresentamos problemas como exemplos e também uma breve discussão sobre como podemos utilizar as soluções das EDOS no ensino médio e o que podemos abordar e também trouxemos gráficos, para melhor visualizar os modelos.

Sobre a definição de uma EDO, Santos [38] diz que é uma equação que envolve uma função desconhecida $y(x)$, suas derivadas e uma variável independente x, sendo a ordem dessa equação definida pela derivada de maior ordem. Quando acrescentamos condições iniciais para tal equação, buscamos uma solução particular para o problema, e esse conjunto é chamado de Problema de Valor Inicial (PVI). Levando em consideração o Teorema de Existência e Unicidade, garantimos que as soluções encontradas são únicas.

4.1.1 Resistência em Fluidos

Começaremos com um problema de movimento, estudado em Dinâmica, dentro da área da Mecânica, na Física. Um paraquedista, ao saltar de uma determinada altura, está sob influência de duas forças principais: o seu peso, que atua na direção da Terra, e a resistência do ar, que se opõe ao movimento.

Matematicamente, um corpo que se desloca em um meio fluido pela ação de uma força constante F (como o peso) sofre uma força de resistência proporcional à sua velocidade, dada por $F_{res} = -\gamma v$, onde v é a velocidade instantânea e γ é o coeficiente de resistência do meio.

A Segunda Lei de Newton é definida por Halliday *et al* [39] da seguinte forma: a força resultante (F_R) sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração ($F_R = m \cdot a$).

Considerando que a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo ($a = \frac{dv}{dt}$), temos a seguinte equação diferencial:

$$F_R = F + F_{res} \quad \Rightarrow \quad ma = F - \gamma v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{F - \gamma v}{m}$$

Para resolver este problema, estabelecemos como condição inicial que o corpo parte do repouso, ou seja, no instante $t = 0$, com velocidade $v(0) = 0$. Se tratando de equações separáveis, pode-se integrar ambos os membros da equação e aplicando a condição inicial para determinar a constante de integração, obtemos a **solução geral** para a velocidade em função do tempo:

$$v(t) = \frac{F}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}) \tag{4.1}$$

A função encontrada descreve o crescimento da velocidade. Diferente de uma queda livre no vácuo (onde a velocidade cresceria linearmente), a presença do fluido impõe uma velocidade limite, conhecida como **velocidade terminal**. Note que, quando $t \to \infty$, o termo exponencial tende a zero e a velocidade estabiliza-se em $v_{term} = \frac{F}{\gamma}$, ponto onde a força de resistência anula exatamente a força motora.

Uma vez que a velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo ($v = \frac{ds}{dt}$), a função posição $s(t)$ pode ser obtida através da integração da equação 4.1.

Exemplo 4.1.1: Suponha um objeto em queda, de massa $m = 10kg$, $\gamma = 2kg/s$. Calcule sua velocidade após 5 segundos de queda ($v(5)$). Calcule também $v(30)$ e $v(40)$. Considere que a gravidade seja $10m/s^2$.

Usaremos a solução geral 4.1 encontrada, substituindo os valores dados. Observe que nesse caso $F = P$, e $P = mg$.

$$v(t) = \frac{F}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\gamma t}{m}}) \quad \Rightarrow \quad v(t) = 50(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}})$$

Calculando $v(5)$:

$$v(5) = 50(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{5}}) \quad \Rightarrow \quad v(5) \cong 31{,}6m/s$$

Calculando $v(30)$:

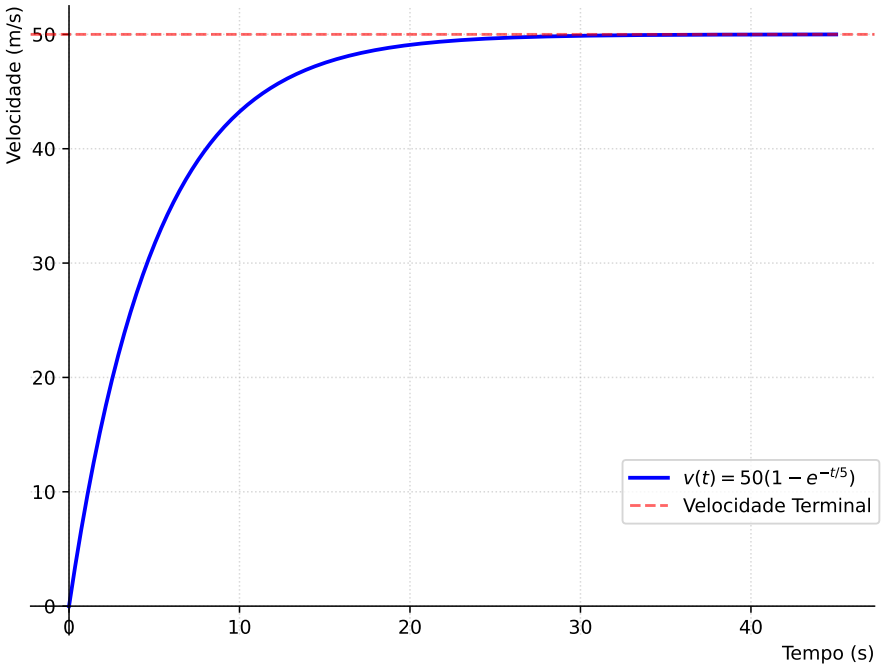
$$v(30) = 50(1 - \mathrm{e}^{-\frac{30}{5}}) \quad \Rightarrow \quad v(30) \cong 49{,}87m/s$$

Calculando $v(40)$:

$$v(40) = 50(1 - \mathrm{e}^{-\frac{40}{5}}) \quad \Rightarrow \quad v(40) \cong 49{,}98 m/s$$

Observe que quanto maior o tempo, mais próximo da velocidade de $50m/s$ o corpo chega. Essa será sua velocidade limite. Não há mais aceleração e a velocidade se torna constante. Podemos observar esse comportamento no gráfico da Figura 4.1.

Figura 4.1: Resistência em Fluidos - Exemplo 4.1.1



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Veja que, nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, conceitos de funções exponenciais, assim como o conceito de assíntotas, levantando a discussão por verificação com medidas de tempo cada vez maiores, ou até mesmo pela observação do gráfico. Nesse caso também podemos abordar números irracionais, com o número de Euler (e) e até mesmo fazer a conexão com logarítmo natural (ln).

4.1.2 Queda Livre (sem resistência do ar)

A queda livre é outro problema associado à Mecânica, na Física, que possui a mesma ideia da resistência em fluidos, mas consideraremos o cenário em que não há resistência do ar. Logo, a força resultante ($F_R = ma$) depende apenas da força peso P do objeto de

massa m em queda, diretamente proporcional à gravidade g ($F_R = P$). Assim, temos:

$$F_R = -mg \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -g$$

Através da integração dessa equação separável e considerando que no momento do início da queda ($t = 0$), temos $v(0) = 0$, concluímos que a **solução geral da velocidade** em relação ao tempo é dada por:

$$v(t) = -gt \tag{4.2}$$

A partir disso, podemos também determinar a solução que relaciona a posição em relação ao tempo, basta que, a partir da solução 4.2, e sabendo que $v = \frac{dx}{dt}$, sigamos com:

$$v(t) = -gt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -gt$$

E integrando os membros da equação, considerando que a posição no início do movimento ($t = 0$) seja $x(0) = x_0$, concluímos que a **solução geral da posição** em relação ao tempo é dada por:

$$x(t) = x_0 - \frac{gt^2}{2} \tag{4.3}$$

Exemplo 4.1.2: Um paraquedista com o seu paraquedas pesa 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O paraquedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Vamos determinar a velocidade que o paraquedista atinge no momento que o paraquedas abre. Vamos determinar também a que altura o paraquedista estava quando o paraquedas abriu. Considere que até que haja a abertura do paraquedas, não há resistência do ar e a gravidade seja $10m/s^2$.

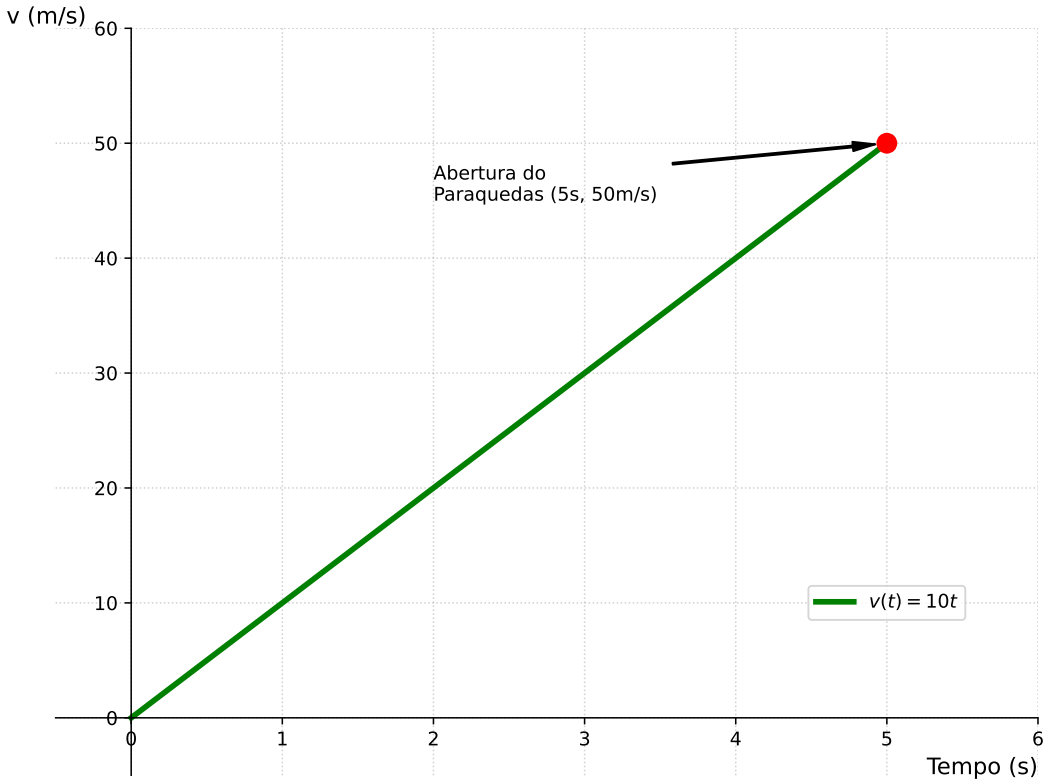
Usando a solução geral de velocidade 4.2, conseguimos determinar a velocidade após 5 segundos de queda, e também podemos observar esse comportamento no gráfico da Figura 4.2.

$$v(t) = -gt \quad \Rightarrow \quad v(5) = -50m/s$$

Agora, para descobrir a altura do paraquedista no momento de abertura do paraquedas, usamos a solução geral da posição 4.3 e também podemos observar esse comportamento no gráfico da Figura 4.3.

$$x(t) = x_0 - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x(5) = 1275m$$

Figura 4.2: Queda Livre - Velocidade x tempo - Exemplo 4.1.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

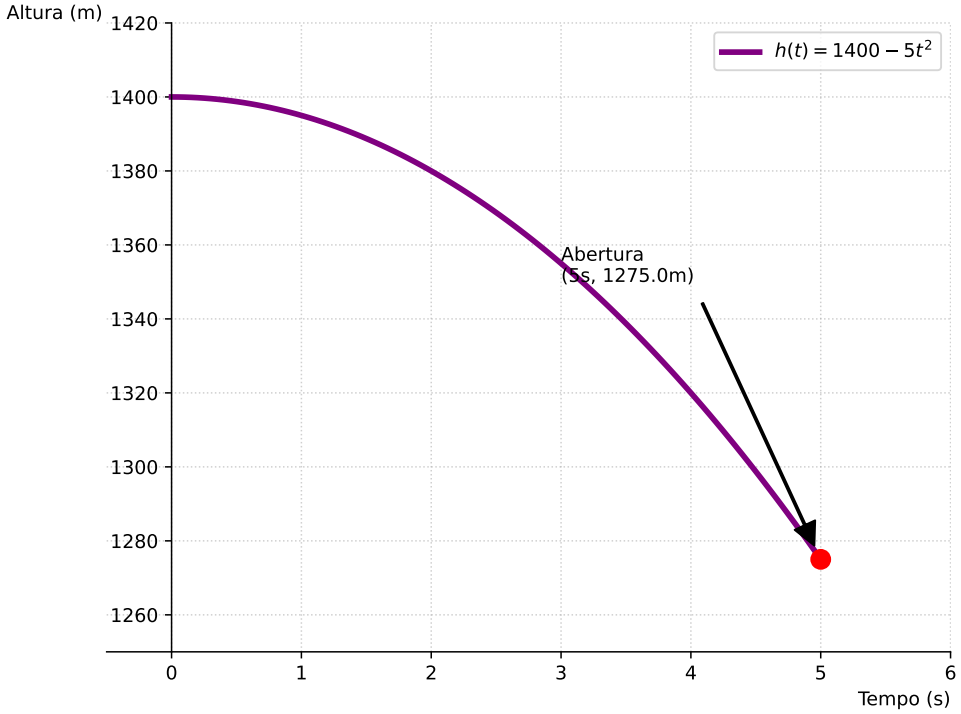
Veja que, nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, conceitos de funções afim, no caso da velocidade, assim como conceitos de funções quadráticas, no caso da posição.

4.1.3 Crescimento Malthusiano

Agora traremos um problema associado à área da Ecologia, ramo da Biologia, o modelo de Crescimento Malthusiano, também chamado de Crescimento Exponencial, que nesse contexto está relacionado à dinâmica populacional, é dado pela hipótese de que a taxa de variação de determinada população está relacionada com a população atual. Não obstante, esse mesmo tipo de comportamento é observado em outras situações corriqueiras, como por exemplo nos juros compostos.

Considerando $y(t)$ como a representação da população de uma espécie em um instante t, a modelagem assume que a taxa de variação da população, expressa por $\frac{dy}{dt}$, seja diretamente proporcional ao valor da população atual y. Para formalizar este modelo, estabelecemos que a população inicial no instante zero é $y(0) = y_0$, com a condição de que $y_0 > 0$. A constante r representa a taxa de crescimento ou declínio; em um cenário de

Figura 4.3: Queda Livre - Posição x tempo - Exemplo 4.1.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

população crescente, assume-se que $r > 0$. Assim, temos:

$$\frac{dy}{dt} = ry \tag{4.4}$$

Essa relação resulta no **Modelo de Malthus** e através da integração com separação de variáveis, adotando a condição inicial $y(0) = y_0$, temos uma **solução geral** da forma:

$$y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{rt} \tag{4.5}$$

Exemplo 4.1.3: Consideremos uma situação formada por uma população de organismos zooplanctônicos. São colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que em 10 dias havia 240 indivíduos, determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à população atual (crescimento exponencial).

Usando a equação geral 4.5, e conhecendo a população inicial $y_0 = 3$, temos:

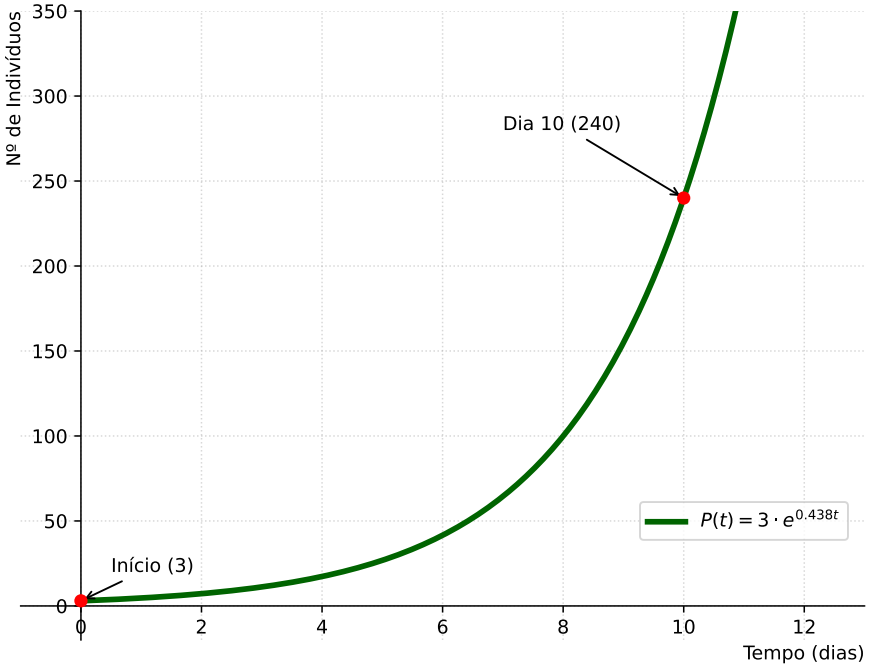
$$y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{rt} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3\, \mathrm{e}^{rt}$$

Agora, sabendo que a população após 10 dias era de 240 indivíduos, temos $y(10) = 240$, segue que:

$$y(10) = 3\,\mathrm{e}^{r\cdot 10} = 240 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{10r} = 80 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{ln80}{10} \quad \Rightarrow$$
$$y(t) = 3\,\mathrm{e}^{\frac{ln80}{10}\cdot t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3 \cdot 80^{\frac{t}{10}}$$

Podemos observar o comportamento dessa função no gráfico da Figura 4.4.

Figura 4.4: Crescimento Malthusiano - Exemplo 4.1.3



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Veja que nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, conceitos de funções exponenciais, assim como no modelo de Resistência em Fluidos. Problemas desse tipo também podem ser observados em crescimento de fungos, coelhos e outras populações que possuem um crescimento muito acelerado, mas esses aumentos de população não conseguem se sustentar para sempre, chegando em um momento de estabilidade, que veremos na próxima subseção.

4.1.4 Equação Logística

Outro problema associado à Ecologia, na Biologia, é a equação logística, que foi introduzida pelo matemático belga Verhulst como uma correção mais realista do modelo

Malthusiano (que possui crescimento infinito). Neste modelo, o crescimento não é infinito. Ou seja, em determinado momento, a população não consegue mais crescer por limitação de recursos ou espaço, por exemplo, ficando limitado a determinado valor K por alguma razão.

Nesse caso, usaremos como inspiração o Modelo Malthusiano, visto na subseção 4.1.3, mas substituiremos, na equação 4.4 a constante r por uma função $h(y)$, chegando à equação modificada:

$$\frac{dy}{dt} = ry \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = h(y)y \tag{4.6}$$

Para a função $h(y)$ a ideia é que à medida que a população y aumenta, os recursos ficam mais escassos. Assim, a taxa de crescimento deve diminuir ao passo que a população cresce. Isso acontece até que a população fique tão grande que não haverá mais recursos, fazendo com que a população comece a diminuir ($h(y) < 0$). A maneira mais simplificada de representar essa situação, é com uma função afim decrescente, que podemos representar como $h(y) = r - ay$. Logo, temos:

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y \tag{4.7}$$

Reorganizando a equação 4.7, para solucionar através da integral, usando o método da separação de variáveis, com auxilio de frações parciais e considerando o valor inicial $y(0) = y_0$, chegamos na **solução geral** dada por:

$$y(t) = \frac{K}{(\frac{K}{y_0} - 1)\,\mathrm{e}^{-rt} + 1} \tag{4.8}$$

Exemplo 4.1.4: O modelo logístico tem sido aplicado ao crescimento natural da população de linguado gigante em determinadas áreas do Oceano Pacífico. Seja y, medido em quilogramas, a massa total, ou biomassa, da população de linguado gigante no instante t. Estima-se que os parâmetros na equação logística tenham os valores $r = 0{,}71$ por ano e $K = 80{,}5 \cdot 10^6$ kg. Se a biomassa inicial for $y_0 = 0{,}25K$, encontre a biomassa dois anos depois. Calcule, também, o instante τ para o qual $y(\tau) = 0{,}75K$.

Usando a solução geral 4.8, temos:

$$y(t) = \frac{K}{(\frac{K}{y_0} - 1)\,\mathrm{e}^{-rt} + 1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{80{,}5 \cdot 10^6}{3\,\mathrm{e}^{-0{,}71t} + 1} \tag{4.9}$$

Para descobrir a população em dois anos, $y(2)$, seguimos, substituindo na fórmula 4.9:

$$y(2) = \frac{80{,}5 \cdot 10^6}{3\,\mathrm{e}^{-0{,}71 \cdot 2} + 1} \quad \Rightarrow \quad y(2) \cong 46{,}7 \cdot 10^6$$

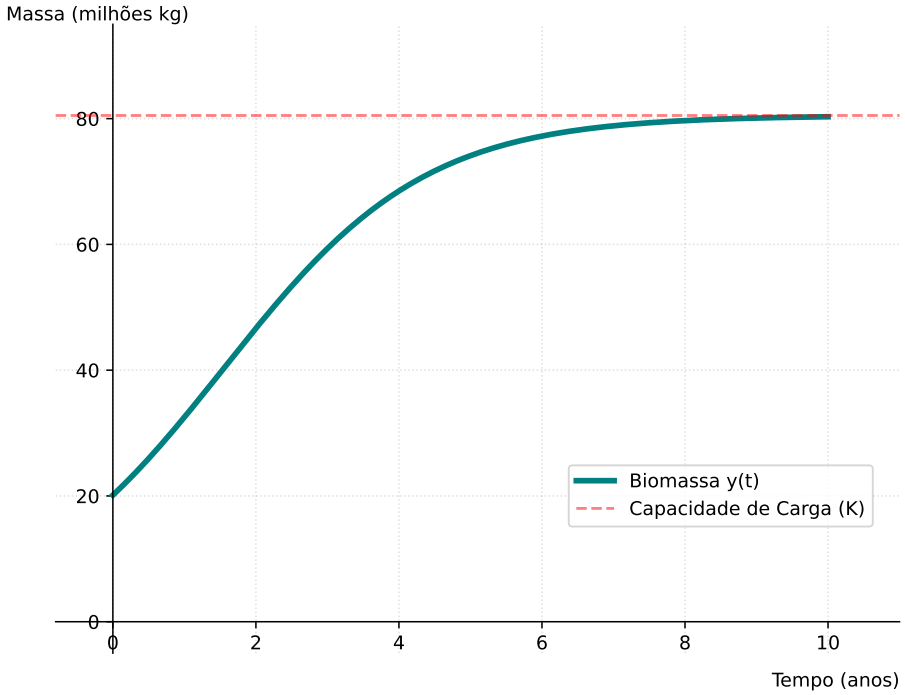
Ou seja, em dois anos, a biomassa de linguado gigante será de $46{,}7 \cdot 10^6$ kg.

Agora, para descobrir o instante τ que a biomasssa de linguado gigante seja de $y(\tau) = 0{,}75K$, usaremos também a solução 4.9:

$$y(\tau) = \frac{80{,}5 \cdot 10^6}{3\,\mathrm{e}^{-0{,}71\tau} + 1} = 0{,}75 \cdot 80{,}5 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}25}{2{,}25} = \mathrm{e}^{-0{,}71\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau \cong 3{,}1$$

Concluímos então, que o tempo necessário para a biomassa de linguado ser de $0{,}75K$ é de aproximadamente 3,1 anos. Esse comportamento pode ser observados no gráfico da Figura 4.5.

Figura 4.5: Equação Logística - Exemplo 4.1.4

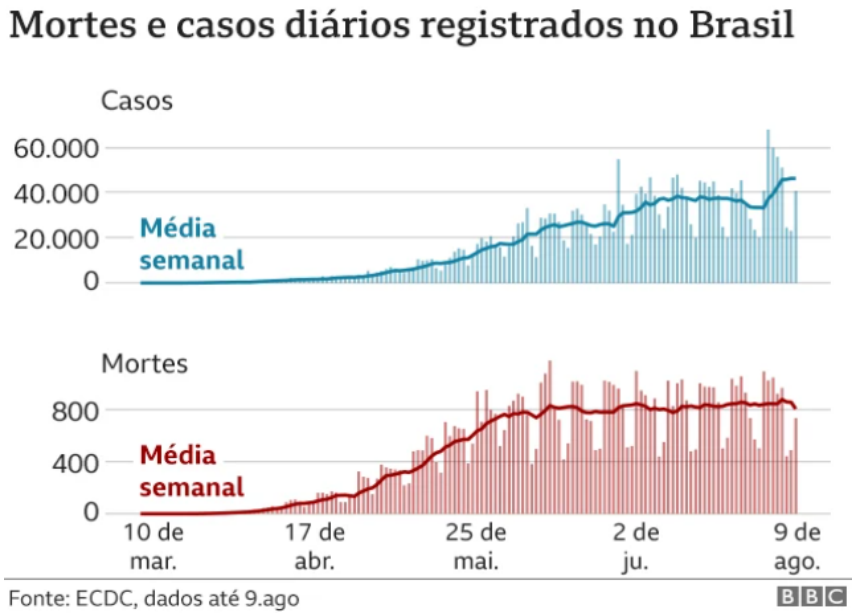


Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Veja que nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, uma função que exige manipulação algébrica. Além disso, pode ser explorado o fato de possuir duas assíntotas e pode ser feita uma análise sobre quando o crescimento é maior ou menor, buscando o ponto de maior crescimento, através do gráfico.

Recentemente, tivemos o caso do coronavírus, que chamou a atenção do mundo, e em gráficos relacionados à doença e suas consequentes mortes, conseguimos observar um comportamento muito similar a de uma Equação Logística. Veja o gráfico da figura 4.6, extraído de uma matéria da BBC News [40].

Figura 4.6: Dados de mortes e casos registrados no Brasil até 9 de Agosto de 2020



Fonte: BBC News Brasil (2020) [40]

4.1.5 Decaimento Radioativo

O problema que trazemos nessa subseção, está relacionado à várias áreas de estudo, como Física Nuclear, Química Nuclear e até mesmo na Geologia. O fenômeno do decaimento radioativo, na ótica da física, está relacionado à desintegração de núcleos instáveis, em que a probabilidade de um núcleo se transformar em um estado mais estável é constante ao longo do tempo. Na ótica da Química, está relacionado com reações nucleares, estudando o comportamento de isótopos radioativos. E na ótica da Geologia, é muito utilizado para datação por Carbono-14, determinando idade de fósseis, rochas e outras coisas mais.

Matematicamente, esse processo é descrito através de uma relação em que a taxa de variação da quantidade de material radioativo, denotada por $\frac{dy}{dt}$, é diretamente proporcional à quantidade de núcleos y presentes na amostra em um instante t, acompanhada por uma constante de proporcionalidade k negativa ($k < 0$) que caracteriza a redução da substância. Esta relação estabelece uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, indicando que a velocidade de desintegração é proporcional à massa atual. O modelo pode ser descrito como:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Esse modelo é análogo ao de Crescimento Malthusiano, mas voltada ao declínio da matéria. Considerando então, que a quantidade de material radioativo, em uma condição

inicial, em que $y(0) = y_0$, temos como **solução geral** a seguinte equação:

$$y(t) = y_0 \, \mathrm{e}^{kt} \tag{4.10}$$

Outro conceito importante a ser apresentado é o de meia-vida, que mede o tempo necessário para que a quantidade de algo caia para a metade do valor inicial.

Exemplo 4.1.5: Em um pedaço de madeira é encontrado $\frac{1}{500}$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, ou seja, que em 5600 anos metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Vamos determinar a idade deste pedaço de madeira.

Usando a equação geral 4.10, e sabendo que meia-vida é o tempo necessário para que a população seja a metade da inicial, para que a população seja $\frac{y_0}{2}$, o tempo necessário é de 5600 anos. Assim, temos:

$$\frac{y_0}{2} = y_0 \, \mathrm{e}^{k \cdot 5600} \quad \Rightarrow \quad ln\frac{1}{2} = ln \, \mathrm{e}^{5600k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{ln\frac{1}{2}}{5600}$$

Agora, para saber a idade do pedaço de madeira, usaremos a informação inicial, que ele tem $\frac{1}{500}$ da quantidade original de carbono 14. Ou seja:

$$\frac{y_0}{500} = y_0 \, \mathrm{e}^{\frac{ln\frac{1}{2}}{5600} \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t \cong 50208$$

Temos assim, que a idade do pedaço de madeira é de aproximadamente 50208 anos. Essa evolução pode ser observada no gráfico da Figura 4.7.

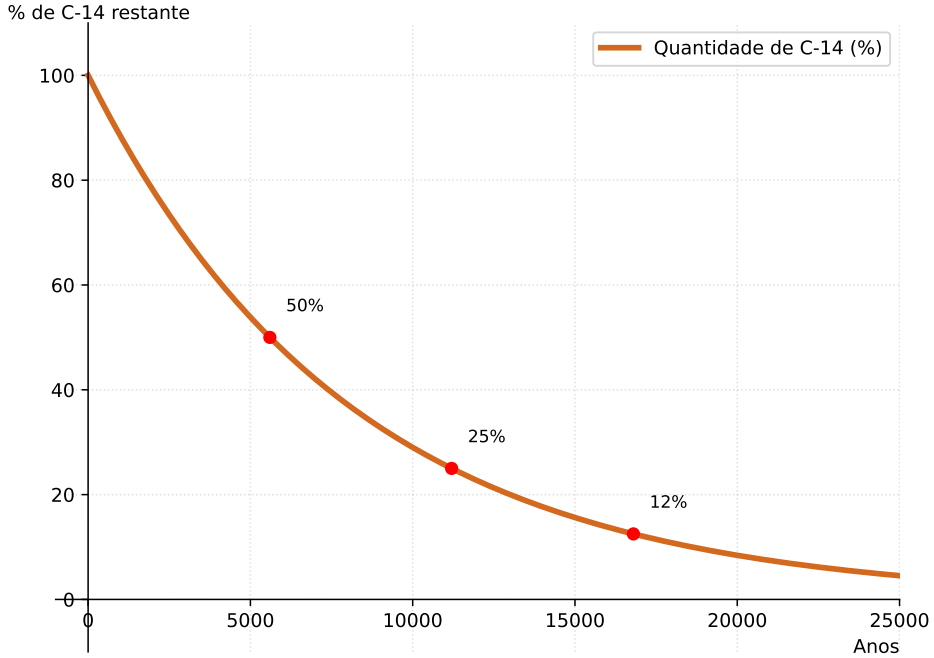
Veja que nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, conceitos de funções exponenciais, assim como nos modelos de Resistência em Fluidos e Crescimento Malthusiano.

4.1.6 Lei do Resfriamento de Newton

Esse modelo é explorado pela Termodinâmica, na Física, e explora a taxa de variação de temperatura (T) de um objeto ao longo do tempo (t) sendo proporcional à diferença entre a sua própria temperatura e a temperatura ambiente (T_a).

Imagine a seguinte situação: você deixa uma caneca de café em cima de uma mesa e depois de um tempo, percebe que a temperatura do café caiu. Isso acontece porque a temperatura de um objeto varia com o tempo, dependendo também da temperatura ambiente, o que pode alterar, inclusive, o comportamento, se realizado o experimento no inverno ou verão.

Figura 4.7: Decaimento Radioativo - Exemplo 4.1.5



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Do ponto de vista matemático, a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo, denotada por $\frac{dT}{dt}$, é proporcional à diferença térmica entre o corpo e o meio em que se encontra (T_a). Essa relação de proporcionalidade é estabelecida pela constante de resfriamento k, sendo $(k < 0)$, refletindo a dissipação de calor. Assim, a dinâmica do sistema é descrita por:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \tag{4.11}$$

Usando a integração pelo método de separação de variáveis, e considerando a condição inicial $T(0) = T_0$, determinamos a **solução geral** do modelo como:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\,\mathrm{e}^{kt} \tag{4.12}$$

Exemplo 4.1.6: O café está a 90°C logo depois de coado e, um minuto depois, passa para 85°C, em uma cozinha a 25°C. Vamos determinar a temperatura do café em função do tempo e o tempo que levará para o café chegar a 60°C.

Usando a solução geral 4.12 e sabendo que:

- $T(0) = 90°C$,
- $T(1) = 85°C$ e

- $T_a = 25^oC$

Usaremos esses dados para resolver o problema. Para $T(0)$, temos:

$$T(0) = 25 + C\,\mathrm{e}^{k0} = 90 \quad \Rightarrow \quad C = 65$$

Sabendo o valor de C, agora conseguimos descobrir o valor de k, usando $T(1)$:

$$T(1) = 25 + 65\,\mathrm{e}^{k\cdot 1} = 85 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^k = \frac{60}{65}$$

E aplicando o logaritmo natural em ambos os termos da equação, segue que:

$$ln\,\mathrm{e}^k = ln\frac{60}{65} \quad \Rightarrow \quad k = ln\frac{12}{13}$$

Com essas informações conclui-se que a temperatura do café em função do tempo é:

$$T(t) = 25 + 65\,\mathrm{e}^{(ln\frac{12}{13})\cdot t} \tag{4.13}$$

Agora, para descobrir o tempo necessário para que o café atinja a temperatura de 60ºC, basta substituir na equação 4.13. Veja:

$$T(t) = 25 + 65\,\mathrm{e}^{(ln\frac{12}{13})\cdot t} \quad \Rightarrow \quad \frac{35}{65} = \mathrm{e}^{(ln\frac{12}{13})\cdot t}$$

E aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação, tem-se:

$$ln\frac{35}{65} = ln\,\mathrm{e}^{(ln\frac{12}{13})\cdot t} \quad \Rightarrow \quad t \cong 7{,}73$$

Assim, temos que o tempo necessário para que a temperatura do café atinja 60ºC é de aproximadamente 8 minutos. Isso pode ser observado no gráfico da Figura 4.8.

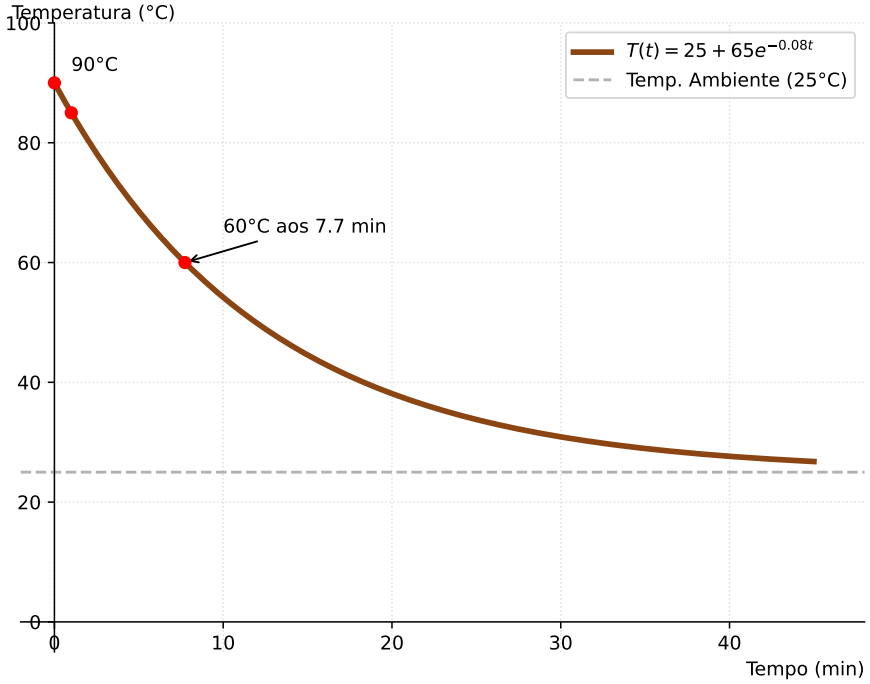
Veja que nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, conceitos de funções exponenciais, assim como nos modelos de Resistência em Fluidos, Crescimento Malthusiano e Decaimento Radioativo.

4.1.7 Movimentos Oscilatórios

Outro problema em Mecânica, na área da Física, modela o movimento de uma massa presa a uma mola, onde se busca determinar a posição dessa massa quando é posta em movimento. Esse movimento oscilatório é comumente chamado de Movimento Harmônico.

Quando um corpo é posto em movimento, a força da mola faz com que ele tente voltar para a posição inicial, mas, devido a velocidade de retorno à posição inicial, o corpo ultrapassa essa posição, gerando um movimento oscilatório.

Figura 4.8: Lei do Resfriamento de Newton - Exemplo 4.1.6



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Matematicamente, as forças envolvidas nesse movimento são a força elástica (F_e) e a força de resistêcia (F_r). Nesse caso, não há força motriz, que acontece somente em oscilações forçadas. E a força resultante (F_R) é dada por:

$$F_R = F_e + F_r$$

Observe que F_e e F_r têm sinais negativos, isso porquê, no caso da F_e, a força é proporcional ao alongamento da mola, mas em sentido contrário, resultando em $F_e = -kx$, com k sendo a constante elástica e x a posição do centro de massa do corpo. E no caso da força de resistência F_r, ela é proporcional à velocidade v, mas também em sentido diferente, resultando em $F_r = -\gamma v$ ou $F_r = -\gamma \frac{dx}{dt}$, sendo γ a constante de amortecimento. Também temos, pela 2ª Lei de Newton, que $F_R = ma$, sendo $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Assim, temos:

$$ma = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{4.14}$$

A equação 4.14 descreve os movimentos oscilatórios simples através de uma EDO linear de segunda ordem, para a qual ainda deve-se informar as condições iniciais do movimento, prescrevendo a posição e a velocidade inicial do movimento.

Para a resolução da EDO 4.14, admitindo que ela possua soluções exponenciais, do tipo, $x = \mathrm{e}^{rt}$, tem-se que os valores de r que definem tais soluções serão as raízes da equação característica:

$$mr^2 + \gamma r + k = 0$$

Admitindo-se raízes complexas e multiplicidade, serão sempre duas raízes que produzirão duas soluções, chamadas Soluções Fundamentais, que irão gerar a solução geral da EDO.

Veremos abaixo o caso em que não há amortecimento ($\gamma = 0$) e os casos com amortecimento, que são diferenciados a partir das raízes dessa equação e que determinam o comportamento do sistema massa-mola.

Movimento Harmônico Simples (MHS)

No caso em que $\gamma = 0$ o sistema é não amortecido e chamado de Movimento Harmônico Simples (MHS). Observa-se que as raízes da equação característica são um par de números complexos conjugados da forma:

$$r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Essas raízes complexas definem duas soluções exponencias complexas que, com auxilio da Fórmula de Euler, podem ser transformadas em duas soluções reais da forma:

$$x_1 = \cos w_0 t \quad \text{e} \quad x_2 = \operatorname{sen} w_0 t \quad \text{, onde} \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Assim, a solução geral da EDO é dada por:

$$x = C_1 \cos(w_0 \cdot t) + C_2 \operatorname{sen}(w_0 \cdot t)$$

Fazendo $C_1 = R\cos\phi$ e $C_2 = R\operatorname{sen}\phi$, é possível reescrever a **solução geral** na forma:

$$x(t) = R\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{4.15}$$

Nessa solução, R representa a amplitude do movimento (o deslocamento máximo a partir da posição de equilíbrio) e ω_0 representa a frequência angular do sistema ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$). O termo ϕ representa a constante de fase (ou fase inicial), cujo valor é determinado pelas condições iniciais do sistema, ou seja, a posição e a velocidade no instante $t = 0$. A partir da frequência angular, define-se também o período de oscilação (T), que é o tempo necessário para que o sistema complete um ciclo de movimento, dado pela relação $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Movimentos Oscilatórios Amortecidos

Como vimos anteriormente, a equação 4.14 rege os sistemas massa-mola. Veremos agora, os casos em que há amortecimento.

Para o caso em que $\gamma \neq 0$, o sistema massa-mola é dito amortecido e vai se aproximar mais da realidade, prevendo que com o passar do tempo, o movimento irá parar na posição de equilibrio do sistema ($x = 0$). Em termos dos coeficientes, as raízes da equação característica são dadas por:

$$r = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

A solução geral dependerá do valor de $\Delta = \gamma^2 - 4mk$. E existem três casos possíveis:

- **Superamortecido ($\Delta > 0$)**

Para o regime de superamortecimento, o discriminante da equação característica é positivo, isto é, $\gamma^2 - 4mk > 0 \Rightarrow \gamma^2 > 4mk$. Isso implica a existência de duas raízes reais, distintas e negativas, denotadas por r_1 e r_2. Assumindo como solução base a função exponencial $x(t) = e^{rt}$, a solução geral para o sistema é construída a partir da superposição dessas raízes, resultando em:

$$x(t) = C_1\, \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\, \mathrm{e}^{r_2 t} \tag{4.16}$$

Trata-se de uma combinação de exponencias negativas, que fazem com que o sistema retorne rapidamente ao equilíbrio, sem oscilar.

- **Criticamente Amortecido ($\Delta = 0$)**

Nesse caso, temos:

$$\gamma^2 - 4mk = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = 4mk$$

Assim, existem duas raízes iguais, sendo $r = -\frac{\gamma}{2m}$. O que leva à solução geral:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m} t} \tag{4.17}$$

O regime criticamente amortecido proporciona o retorno mais rápido ao estado de equilíbrio sem que o sistema entre em um padrão de oscilações repetitivas (como ocorre no subamortecimento).

- **Subamortecimento ($\Delta < 0$)**

Nesse caso, temos:

$$\gamma^2 - 4mk < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 < 4mk$$

Assim, existem duas raízes complexas e conjugadas:

$$r = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

Considerando, $\alpha = -\frac{\gamma}{2m}$ e $\omega_0 = \frac{\sqrt{\gamma^2-4mk}}{2m}$, temos:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2m}t}(A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t) \tag{4.18}$$

Nesse tipo de sistema, há oscilação em torno da posição de equilíbrio, mas sua amplitude diminui rapidamente devido à exponencial negativa que multiplica a função cosseno, responsável pela oscilação.

Veja que nesses problemas, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, o produto de funções, com função exponencial e função trigonométrica, em que enquanto a exponencial decrescente tenta parar o movimento, a trigonométrica tenta manter a oscilação. Também pode ser explorado o que aconteceria se o sistema fosse colocado em um meio diferente.

Exemplo 4.1.7: Em um sistema massa mola, determine a posição de uma partícula de massa $1kg$ no instante $t = 10$, sabendo que a amplitude é 2, frequência igual a $\sqrt{3}$ e fase igual a $\frac{2\pi}{3}$.

Temos então, as seguintes informações:

- $R = 2$
- $\omega_0 = \sqrt{3}$
- $\phi = \frac{2\pi}{3}$

A partir desses dados e usando a solução geral 4.15, temos:

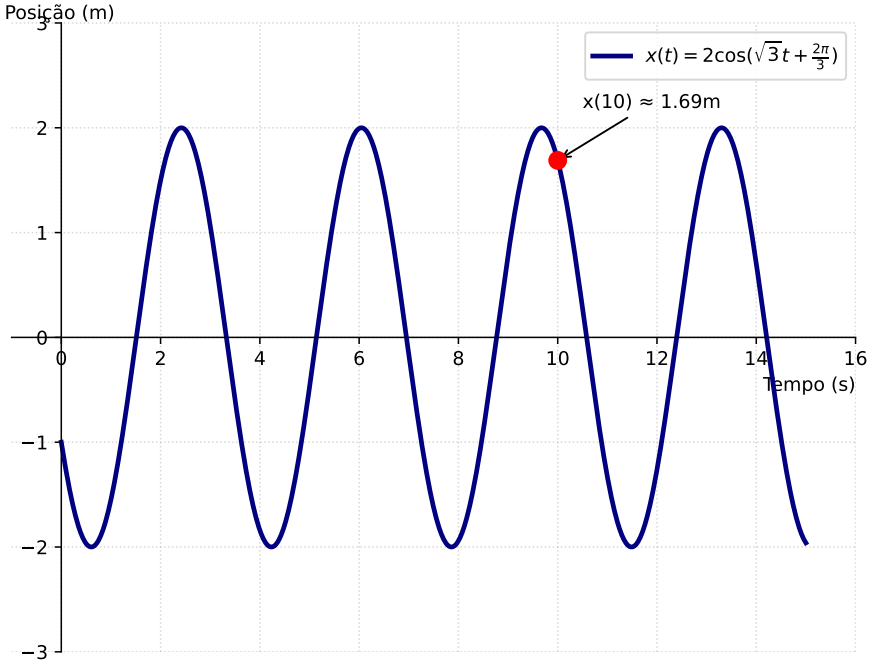
$$x(t) = 2\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad x(10) = 2\cos\left(\sqrt{3}\cdot 10 + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad x(10) \cong 1{,}69$$

Podemos observar o comportamento desse modelo no gráfico da Figura 4.9.

Veja que nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, conceitos de funções trigonométrica, também pode ser explorado o conceito de período e frequência, com análise gráfica. O modelo também permite discutir o uso de números complexos para o cálculo das raízes da equação característica. É justamente a presença de raízes complexas conjugadas (ou imaginárias) que, através da Relação de Euler, justifica o surgimento das funções seno e cosseno na solução geral.

Exemplo 4.1.8: Se um sistema massa-mola com uma massa de $2kg$ e uma mola com constante de elasticidade igual $0{,}5N/m$ é colocado em movimento, no instante $t = 0$, num meio em que a constante de amortecimento é igual a $1N \cdot s/m$, determine a posição da

Figura 4.9: Movimento Harmônico Simples - Exemplo 4.1.7



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

massa em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual u_0 e a velocidade inicial u_0'.

Sabemos que a equação 4.14 rege esse movimento e assim, substituindo os valores dados, temos:

$$m\frac{d^2x}{dt} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{d^2x}{dt} + 1\frac{dx}{dt} + 0{,}5x = 0 \Rightarrow$$
$$2r^2 + 1r + 0{,}5 = 0 \quad \text{(Equação característica)}$$

Com isso, temos $\Delta < 0$, o que leva a raízes complexas:

$$r_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad \text{e} \quad r_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

e um caso de subamortecimento, cuja solução geral é dada pela função 4.18, e assim, temos:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-0{,}25\cdot t}\left[A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) + B \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right]$$

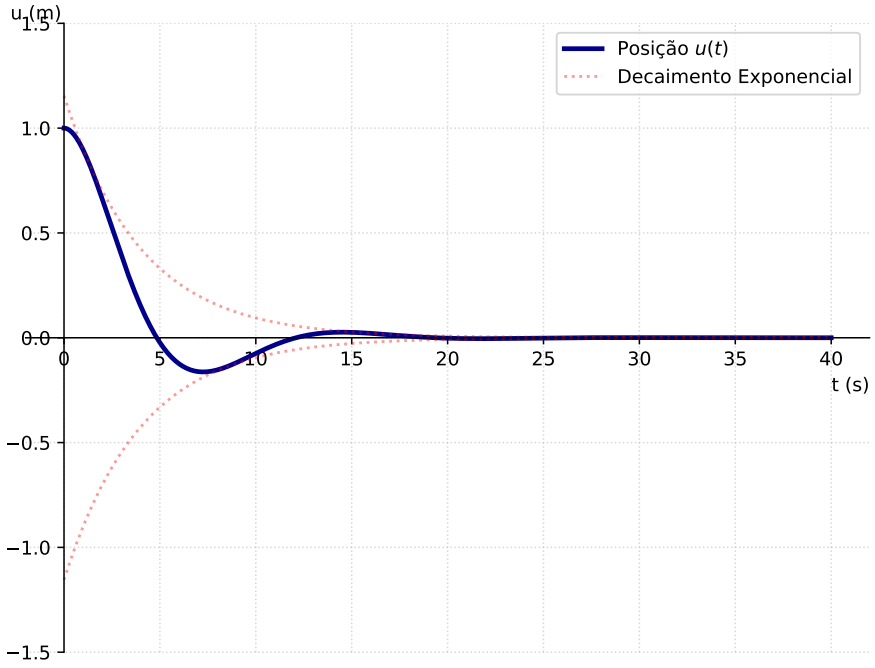
E usando as condições iniciais $t = 0$ e $u(0) = u_0$, e aplicando essas condições à derivada de u ($u'(0) = u_0' =$), considerando que $A = u_0$ e $B = \frac{4u_0' + U_0}{\sqrt{3}}$ e definindo

$A = R\cos\phi$ e $B = R\,\text{sen}\,\phi$, concluímos que a equação de posição será:

$$u(t) = Re^{-0{,}25t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t - \phi\right)$$

Nessa equação, temos $R = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{4u_0' + u_0}{\sqrt{3}}\right)^2}$ e $\text{tg}\,\phi = \frac{4u_0' + u_0}{u_0\sqrt{3}}$.
Podemos observar esse comportamento no gráfico da Figura 4.10.

Figura 4.10: Movimento Subamortecido - Exemplo 4.1.8



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Veja que nesse problema, conseguimos explorar, a nível de ensino médio, o produto de funções, com função exponencial e função trigonométrica, em que enquanto a exponencial decrescente tenta parar o movimento, a trigonométrica tenta manter a oscilação. Também pode ser explorado o que aconteceria se o sistema fosse colocado em um meio diferente.

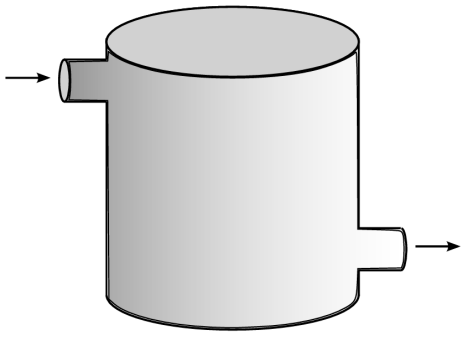
4.1.8 Misturas

O chamado problema de misturas procura determinar a quantidade de um determinado produto (soluto) que encontra-se em uma solução, admitindo-se que exista um fluxo de entrada e de saída desta solução no recipiente onde ela esteja. Por exemplo, uma salmoura (água + sal) ou um contaminante de uma industria sendo despejado em uma lagoa, etc.

Vamos supor um tanque contendo a mistura de água e sal. Esse tanque possui um volume inicial V_0 e uma quantidade Q_0 gramas de sal. Uma solução salina é bombeada para o tanque a uma taxa T_e em litros por minuto, com uma concentração C_e gramas de sal por litro. E há uma saída de uma solução bem misturada a uma taxa T_s litros por minuto.

Vale ressaltar que a modelagem dessa variação de quantidade de sal através de uma EDO só é possível se considerarmos que a solução dentro do tanque é mantida sempre homogênea, em todos os instantes, o que é viável em reservatórios pequenos. Dependendo da escala do sistema, esse modelo deixa de ser adequado pois em um reservatório grande haverá diferenças de concentração, sendo a região mais próxima à entrada mais concentrada do que a região mais próxima à saída.

Figura 4.11: Misturas - Tanque com entrada e saída



Fonte: Santos [38]

A taxa de variação da quantidade de sal durante determinado tempo, $Q(t)$, é dada pela diferença entre a quantidade que entra $(T_e \cdot C_e)$ e a que sai $(T_s \cdot C_s)$. Como a concentração de saída C_s é a razão entre a quantidade de sal e o volume total, e o volume varia conforme a função $V(t) = V_0 + (T_e - T_s)t$, a equação descreve como a massa de sal evolui dentro do sistema. Com isso, chegamos ao problema:

$$\frac{dQ}{dt} = T_e \cdot C_e - T_s \left(\frac{Q}{V_0 + (T_e - T_s)t} \right) \tag{4.19}$$

Utilizando o método do fator integrante, para resolver essa equação diferencial 4.19, fazendo todo o cálculo algébrico e considerando que $Q(0) = Q_0$, chegamos à **solução geral**:

$$Q(t) = C_e[V_0 + (T_e - T_s)t] + C[V_0 + (T_e - T_s)t]^{-\frac{T_s}{T_e - T_s}} \tag{4.20}$$

Exemplo 4.1.9: Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Vamos determinar qual a concentração de sal no tanque ao fim de 50 minutos.

Usando a equação 4.20 e os dados fornecidos pelo problema, temos:

- $C_e = 0g/L$
- $V_0 = 100L$
- $T_e = 6L/min$
- $T_s = 4L/min$
- $Q(0) = 30g$

E consequentemente:

$$Q(t) = \frac{C}{(100+2t)^2} \quad \text{e como } Q(0) = 30 \quad \Rightarrow \quad C = 300000 \quad \Rightarrow$$

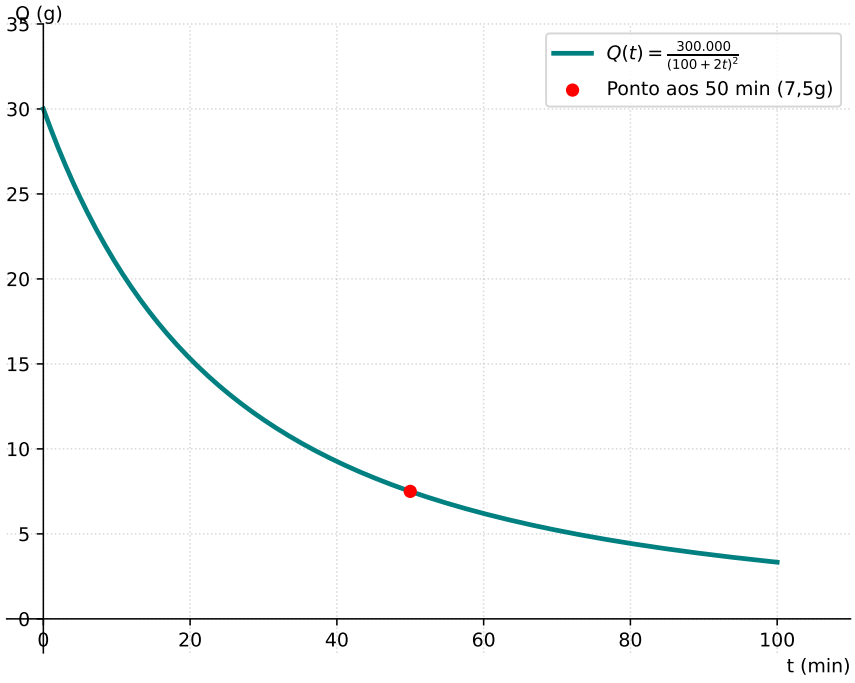
$$Q(t) = \frac{300000}{(100+2t)^2}$$

Com isso, determinamos que em $t = 50$ minutos teremos:

$$Q(50) = \frac{300000}{(100+2\cdot 50)^2} \quad \Rightarrow \quad 7{,}5g$$

Podemos observar esse comportamento no gráfico da Figura 4.12.

Figura 4.12: Modelo de Misturas - Exemplo 4.1.9



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

4.2 Modelagem por Ajuste de Curvas

Nessa seção vamos explorar a modelagem por ajuste de curvas que Bassanezi *et al* [19] definem como um recurso utilizado para representar uma relação entre uma variável dependente (y_i) e uma variável independente (x_i), resultando em uma relação $y_i = f(x_i)$, a partir de dados coletados estatisticamente. O objetivo é determinar a função de forma que os dados estejam o mais próximo possível de um intervalo de valores considerado. Vale ressaltar que nesse tipo de modelagem, nem sempre é possível fazer previsões futuras, sendo possível apenas a análise dos dados dentro dos parâmetros analisados.

Embora esta dissertação tenha como foco prioritário a modelagem de fenômenos das Ciências da Natureza governados por leis físicas ou biológicas, a técnica de ajuste de curvas constitui uma ferramenta metodológica ampla e transversal. Sua aplicabilidade estende-se tanto a dados empíricos de experimentos laboratoriais quanto a situações reais de natureza social, comportamental e educacional. Desse modo, o recurso estatístico de regressão permite ao professor trabalhar a correlação funcional a partir de diferentes conjuntos de dados observados no cotidiano, fortalecendo a compreensão de que a Matemática atua na leitura de regularidades diversas.

Para minimizar o desvio entre os pontos observados e o modelo, aplica-se o Método dos Mínimos Quadrados. Sob o ponto de vista matemático, essa técnica busca minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os previstos pela função, utilizando ferramentas de cálculo de várias variáveis para assegurar que o desvio padrão seja o menor possível.

Bassanezi [20, p. 86] define o método dos quadrados mínimos dizendo que ao considerar um conjunto de n dados observados $\{\bar{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e uma função $x_n = f(n,a_1,a_2,...,a_j)$ onde $a_j(j = 1,2,3,...)$ são parâmetros. **O método dos mínimos quadrados** consiste em determinar esses parâmetros de modo que minimize o valor de:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_i})^2 = \sum_{i=1}^{n}[f(n, a_1, a_2, \ldots, a_j) - \overline{x_i}]^2$$

isto é, devemos minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores $\bar{x}_n$ observados e os valores ajustados $x_n = f(n,a_1,a_2,...,a_j)$.

Exemplo 4.2.1: Para ilustrar a aplicação do ajuste linear em um contexto empírico do ambiente educacional, vamos usar uma lista de dados simulados (tabela 4.1) para calcular a correlação entre o Quociente de Inteligência (QI) e o rendimento escolar de um grupo de estudantes. Vamos determinar a função que relaciona esses dados e calcular o rendimento

escolar de um aluno com $QI = 123$.

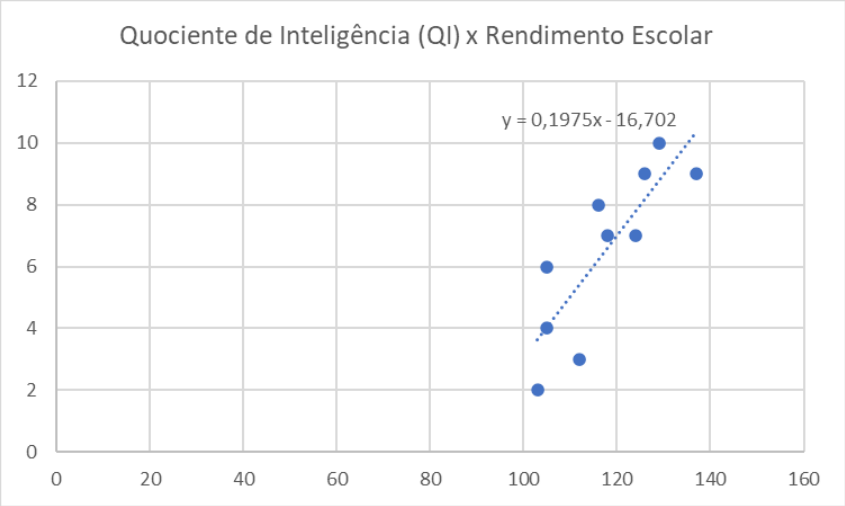
Tabela 4.1: Relação entre o Quociente de Inteligência (QI) e o rendimento escolar

Quociente de Inteligência (QI)	Rendimento Escolar
105	4
116	8
103	2
124	7
137	9
126	9
112	3
129	10
118	7
105	6

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Usando o GeoGebra ou uma planilha do Excel, conseguimos marcar os pontos dessa tabela e fazer um ajuste de curvas para determinar a função que relaciona o Quociente de Inteligência (x) com o rendimento escolar (y). Observe a construção na figura 4.13.

Figura 4.13: Ajuste de curva: Quociente de Inteligência (QI) x Rendimento Escolar



Com isso, temos que a função que relaciona o QI e o rendimento escolar é dada por $f(x) = 0{,}1975x - 16{,}702$. E com isso conseguimos determinar o rendimento escolar de um aluno com $QI = 123$:

$$f(x) = 0{,}1975x - 16{,}702 \quad \Rightarrow \quad f(123) = 0{,}1975(123) - 16{,}702 \quad \Rightarrow \quad f(123) \cong 7{,}6$$

Exemplo 4.2.2: Consideremos que, de alguma situação analisada, obtivemos uma lista de valores dados na tabela 4.2. Considerando $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, vamos determinar a função que relaciona x_n e Δx_n e encontrar seu ponto máximo.

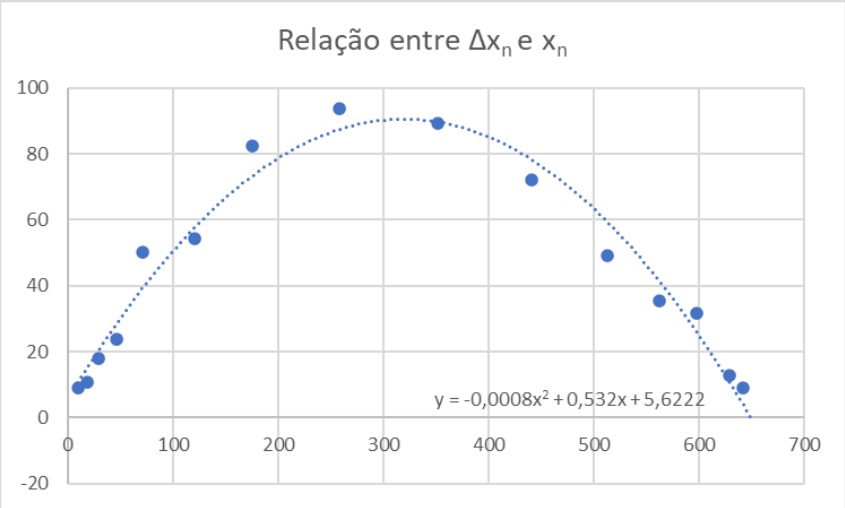
Tabela 4.2: Relação entre Δx_n e x_n

Tempo	n	0	1	2	3	4	5	6	7
Variável x_n	x_n	9,5	18,5	29,1	46,9	70,8	121,1	175,3	257,7
Variação	Δx_n	9	10,6	17,8	23,9	50,3	54,2	82,4	93,7
Tempo	n	8	9	10	11	12	13	14	15
Variável	x_n	351,4	440,8	512,9	562,2	597,7	629,4	642,3	651,2
Variação	Δx_n	89,4	72,1	49,3	35,5	31,7	12,9	8,9	

Fonte: Dados fictícios [19]

Usando o GeoGebra ou uma planilha do Excel, conseguimos marcar os pontos dessa tabela e fazer um ajuste de curvas para determinar a função que relaciona Δx_n com x_n. Observe a construção na figura 4.14.

Figura 4.14: Relação entre Δx_n e x_n



Com isso, temos que a função que relaciona esses dados pode ser escrita como $f(x) = -0{,}0008x^2 + 0{,}532x - 5{,}6222$. E para descobrir o ponto máximo, devemos achar as coordenadas do vértice:

$$x_v = -\frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_v = -\frac{0{,}532}{2 \cdot -0{,}0008} \quad \Rightarrow \quad x_v = 332{,}5$$

E substituindo o valor de x_v na função, temos que:

$$y_v = 82{,}8228$$

E assim concluímos que o ponto máximo da função é $(332{,}5; 82{,}8228)$.

5 Recurso Educacional

A partir da análise da produção acadêmica no âmbito do PROFMAT apresentada no Capítulo 3, observou-se uma possibilidade de contribuição na elaboração de materiais didáticos que articulem a interdisciplinaridade, a modelagem matemática e o conceito de função sob a perspectiva das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e pelo Ajuste de Curvas. Diante disso, este capítulo detalha a concepção, a estrutura e a proposta pedagógica do produto educacional desenvolvido: um e-book direcionado a professores de Matemática do Ensino Médio, intitulado *"Funções - Estudo através de Modelos Naturais"*.

O material foi elaborado com o propósito de conectar as Ciências da Natureza à Matemática de forma integrada, superando abordagens teóricas e abstratas ao apresentar a interdisciplinaridade como uma metodologia prática aplicável ao cotidiano da sala de aula. Nessa perspectiva, o recurso materializa a concepção teórica assumida nesta dissertação, a interdisciplinaridade não é tratada como justaposição de conteúdos disciplinares, mas como uma articulação em que os problemas das Ciências da Natureza fornecem o sentido, as variáveis e os dados reais, cabendo à Matemática estruturar a linguagem representativa e explicativa por meio de modelos.

A fundamentação do e-book baseia-se no princípio de que determinados fenômenos naturais estudados em Física, Química e Biologia possuem como solução funções de diferentes tipos. Quando esses fenômenos são formalizados matematicamente, geram EDOs cujas soluções correspondem às funções que compõem o currículo da Educação Básica (tais como funções afins, exponenciais, logarítmicas, polinomiais, trigonométricas e racionais).

Para realizar a transposição desse conteúdo para o Ensino Médio, a base teórica e conceitual dos modelos foram respaldados em obras de referência na área, como Boyce [37], Santos [38] e Bassanezi [19]. O diferencial desta proposta consiste em dispensar a exigência do domínio de técnicas para a resolução de EDOs. Em vez de sobrecarregar o estudante da Educação Básica com métodos analíticos de integração ou ferramentas do cálculo diferencial e integral avançado, o foco pedagógico centraliza-se na adequada transposição didática, priorizando a análise do comportamento da função resultante (a solução da EDO) e na sua respectiva interpretação diante de determinado fenômeno. Essa

escolha didática dialoga diretamente com a transição entre as concepções operacional e estrutural de funções, permitindo que os estudantes acompanhem a dinâmica das taxas de variação e a dependência entre variáveis reais antes de sistematizarem as representações algébricas formais.

O e-book está organizado em seis capítulos, cada um voltado a um determinado tipo de função. A opção por essa organização fundamenta-se em três aspectos principais:

- **Alinhamento Curricular:** A ordem dos capítulos acompanha o progresso do estudo de funções no Ensino Médio. Inicia-se com variações lineares e avança para crescimentos proporcionais (exponenciais), limites de saturação (logísticas) e fenômenos cíclicos (trigonométricos).
- **Flexibilidade para o Professor:** A divisão em módulos independentes confere autonomia ao professor, permitindo selecionar o tipo de função que melhor se adapte a seu planejamento ou a projetos interdisciplinares.
- **Interdisciplinaridade:** Cada unidade explicita como determinado modelo pode ser trabalhado com as Ciências da Natureza, facilitando o planejamento com docentes de Física, Química ou Biologia.

Para viabilizar sua aplicação, todos os modelos, apresentados em seções, seguem o mesmo padrão de organização, estruturado de forma que o docente possa seguir sempre com a mesma linha de raciocínio, independente do modelo que escolha discutir em sala de aula:

- **Apresentação e Contextualização do Fenômeno:** Uma introdução ao problema natural para apresentar ou resgatar os conhecimentos prévios dos estudantes nas disciplinas mencionadas, estabelecendo o ponto de partida para o estudo do modelo.
- **A solução para o modelo apresentado:** Discussão sobre como as variáveis reais (como tempo, temperatura e biomassa) se relacionam a partir de hipóteses. Prioriza-se a compreensão da teoria e do conceito e apresenta-se a solução para os modelos.
- **Exploração da Função:** Com a função que soluciona o modelo definida, integra-se o uso de recursos tecnológicos, sugerindo-se simulações interativas no GeoGebra. Também há uma proposta de desafio, para instigar a investigação matemática. Essa etapa visa permitir que o estudante manipule parâmetros e visualize diretamente como alterações nas condições do fenômeno modificam o comportamento de um gráfico.
- **Resolução de Problemas e Aplicação:** Atividades e problemas contextualizados focados na consolidação do aprendizado e na interpretação de dados.

A distribuição dos modelos é feita através de tipo de função em que as soluções dos

fenômenos se enquadram, o que pode ser verificado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Mapeamento de Capítulos e Modelos Naturais do E-book

Capítulo	**Modelos Naturais**
Capítulo 1: Funções de 1º grau	Queda Livre e a Velocidade Correlação e a Construção da Função Afim
Capítulo 2: Funções de 2º grau	Queda Livre e a Altura Lançamento Oblíquo
Capítulo 3: Funções Exponenciais	Crescimento Malthusiano Equação Logística Lei do Resfriamento de Newton Decaimento Radioativo Resistência em Fluidos
Capítulo 4: Funções Logarítmicas	Lei de Weber-Fechner
Capítulo 5: Funções Trigonométricas	Movimento Harmônico Simples (MHS) Movimentos Oscilatórios Amortecidos
Capítulo 6: Funções Racionais	Misturas

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A utilidade deste produto educacional está na sua capacidade de aproximar conceitos matemáticos abstratos de aplicações concretas, gerando um material de suporte voltado à prática docente. Alinhado às demandas por propostas integradas na Educação Básica, conforme preconizado pelas diretrizes curriculares nacionais vigentes, o e-book atua como um recurso didático de apoio para os professores.

Ao disponibilizar modelos estruturados e roteiros que podem ser reproduzidos, o material contribui para o planejamento das aulas e oferece alternativas viáveis para o desenvolvimento de práticas interdisciplinares em sala de aula, estimulando a investigação para os estudantes. Desta forma, o produto consolida-se como uma resposta estruturada às necessidades formativas e aos desafios didáticos mapeados ao longo da pesquisa.

6 Considerações Finais

O presente trabalho originou-se da inquietação frente ao ensino do conceito de função, frequentemente marcado pela fragmentação e pelo distanciamento da realidade do estudante. Ao longo desta pesquisa, buscamos demonstrar que a união entre a Matemática e as Ciências da Natureza, por meio da interdisciplinaridade e da modelagem matemática, não é apenas uma recomendação dos marcos curriculares normativos, mas uma necessidade pedagógica para formar indivíduos críticos e capazes de ler o mundo de forma quantitativa e reflexiva.

A revisão das dissertações do PROFMAT evidenciou um movimento crescente na academia em prol de aulas mais contextualizadas. No entanto, confirmou também uma lacuna significativa: a escassez de trabalhos que integrassem de forma simultânea a interdisciplinaridade, a modelagem matemática e a análise do conceito de função utilizando o ambiente das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e do ajuste de curvas de maneira adaptada para a Educação Básica.

O estudo dos modelos naturais mostrou que fenômenos físicos, químicos e biológicos resultam em soluções matemáticas que são as próprias funções ensinadas no Ensino Médio (afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e racionais). Em vez de restringir a função a uma regra puramente algébrica ou classificatória, a modelagem associada à análise qualitativa permite que o estudante compreenda a dinâmica de variação entre grandezas, o motivo da função existir e o significado físico de cada um de seus parâmetros.

A consolidação de toda essa reflexão resultou no desenvolvimento do e-book, o produto educacional desta dissertação. Elaborado como uma resposta direta às lacunas identificadas e como material de apoio prático ao docente, o e-book materializa o diálogo interdisciplinar e instrumentaliza o professor de Matemática para trabalhar lado a lado com os saberes das Ciências da Natureza, sem a sobrecarga do formalismo avançado do cálculo diferencial.

Embora o material tenha sido desenhado para ser intuitivo e aplicável, são reconhecidos os desafios da prática interdisciplinar no contexto escolar brasileiro, que vão desde a

compartimentação das matrizes curriculares até a escassez de tempos institucionais para o planejamento conjunto entre áreas. Contudo, acreditamos que ferramentas estruturadas como este e-book servem como um primeiro passo viável para encorajar os professores a ousarem além dos manuais didáticos tradicionais.

Como perspectivas futuras, sugere-se a aplicação prática das unidades deste e-book em salas de aula do Ensino Médio e em projetos colaborativos com outras turmas e instituições, visando coletar dados sobre o engajamento dos estudantes e a eficácia na consolidação dos conceitos de função. Espera-se que este trabalho inspire novas pontes entre a matemática formal e a dinâmica dos fenômenos do mundo real, consolidando uma educação matemática verdadeiramente transformadora.

Referências

1 EDUCAÇÃO, B. M. DA. *PCN+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília, 2000.

2 BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Documento Oficial.

3 BRASIL. CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. CÂMARA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. *Resolução CNE/CEB nº 2, de 13 de novembro de 2024. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)*. 2024. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF.

4 BRASIL. *Lei nº 14.945, de 31 de julho de 2024. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), para definir novas diretrizes para o Ensino Médio*. 2024. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2024-2027/2024/lei/l14945.htm.

5 MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. L. A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 2014.

6 SANTOS, A. F. DOS. *Estudo interdisciplinar sobre funções*. 2016. Diss. (Mestrado) – UFMG.

7 MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e Matemática. *Pro-Posições*, Campinas, v. 4, n. 1, p. 24–34, mar. 1993.

8 SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 1–36, 1991.

9 TERRADAS, R. D. A importância da interdisciplinaridade na educação matemática. *Revista da Faculdade de Educação*, v. 9, n. 16, p. 95–114, jul. 2011.

10 JAPIASSU, H. *Interdisciplinaridade e Patologia do Saber*. IMAGO Editora, 1976.

11 HECKHAUSEN, H. Discipline et interdisciplinarité. *CERI, L'Interdisciplinarité. Problèmes d'Enseignement et de Recherche dans les Universités*, 1972.

12 FAZENDA, I. C. A. *Interdisciplinaridade: História, Teoria e Pesquisa.* Papirus, 1994.

13 FAZENDA, I. C. A. Interdisciplinaridade e Transdisciplinaridade na Formação de Professores. *Ideação*, UNIOESTE, Foz do Iguaçu, v. 10, n. 1, p. 93–103, 2008.

14 FOUREZ, G. Fondements épistémologiques pour l'interdisciplinarité. *In:* LENOIR, Y.; REY, B.; FAZENDA, I. (ed.). *Les fondements de l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement.* Canadá: Éditions du CRP/UNESCO, 2001.

15 LENOIR, Y.; REY, B.; FAZENDA, I. (ed.). *Les fondements de l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement*. Canadá: Éditions du CRP/UNESCO, 2001.

16 SILVA, T. R. D. *et al.* Interdisciplinaridade em trabalhos na Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. *Revemop*, v. 3, e202117, 2021.

17 TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. *Interdisciplinaridade e Aprendizagem da Matemática em Sala de Aula*. Autêntica, 2024.

18 SCHRENK, M. J.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática como prática pedagógica: uma possível caracterização em Educação Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 24, n. 1, p. 279–311, 2022.

19 BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. D. M. Modelagem matemática. UFU, 2014.

20 BASSANEZI, R. C. *Modelagem matemática: teoria e prática*. Contexto, 2023.

21 BRITO, D. D. S.; ALMEIDA, L. M. W. D. O conceito de função em situações de modelagem matemática. *Zetetike*, 2005.

22 GONÇALVES, A. C. *Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos*. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade de São Paulo - São Carlos.

23 SILVA, A. B. D. *Modelagem Matemática e Interdisciplinaridade: possibilidades e desafios na construção de um projeto de hortas em escolas rurais do Distrito Federal-Brasil*. 2022. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás.

24 SILVA, D. M. B. *Explorando Como a Interdisciplinaridade Melhora a Aprendizagem na Matemática: Os Conhecimentos Matemáticos Empregados a um Ensino Motivador via Velocidade Média e Taxa de Variação*. 2024. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás.

25 RECH, D. *Equação Diferencial Ordinária de 1° e 2° ordem: Aplicações e duas propostas para o ensino médio, Lançamento de Projéteis e o modelo Malthusiano*. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

26 RIBEIRO, E. D. S. *Modelagem com Funções Elementares no Ensino Médio: Uma Proposta Interdisciplinar Aliando Prática e Teoria*. 2017. Diss. (Mestrado) – universidade Federal de Alagoas.

27 LIMA, I. B. *Uma Abordagem Interdisciplinar da Modelagem Matemática de Experimentos de Física Através da Utilização do Software Modellus*. 2017. Diss. (Mestrado) – universidade Federal de Alagoas.

28 MARQUES, I. C. P. D. S. *Equações Diferenciais Ordinárias Aplicadas a Fenômenos Físicos: Uma Proposta para o Ensino Médio*. 2024. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia.

29 D'AQUINO, J. I. D. *Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de 1º e 2º Ordem: Modelos Aplicados ao Ensino Médio*. 2023. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado do Amazonas.

30 CORRÊA, J. V. A. *Uso de Modelagem Matemática em Funções Elementares como Estratégia de Ensino-Aprendizagem Matemática*. 2022. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual do Maranhão.

31 ARAÚJO, M. G. D. *Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água*. 2016. Diss. (Mestrado) – Universidade de São Paulo - São Carlos.

32 SILVA, O. O. D. *O Estudo de Funções Afins e Seus Gráficos de Maneira Interdisciplinar Utilizando a Modelagem em Robótica como Instrumento de Aprendizagem*. 2019. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Amazonas.

33 CRUZ, P. J. D. *Interdisciplinaridade como Prática para a Construção do Conceito de Função*. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido.

34 DUARTE, R. V. D. N. *Interdisciplinaridade como Prática para a Construção do Conceito de Função*. 2022. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul.

35 PACHECO, T. L. *Como a Modelagem Matemática com o Ensino de Funções do 1º grau Podem Auxiliar no Aprendizado nas Turmas da EJA: Uma Proposta Interdisciplinar*. 2025. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

36 GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Editora Record, 2011.

37 BOYCE, W. E.; MEADE, D. S.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2024.

38 SANTOS, R. J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2013. ISBN 978-85-7470-021-2.

39 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física, Volume 1: Mecânica*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Tradução de Flávio Menezes de Aguiar e José Wellington Rocha Tabosa. ISBN 978-85-216-1484-5.

40 BBC NEWS BRASIL. *20 milhões de infecções por coronavírus: gráficos mostram onde casos de covid-19 crescem mais*. 2020. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/internacional-53734786. Acesso em: 15 mar. 2026.