

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



RONALDO HENRIQUE XAVIER

**TRIÂNGULO ARITMÉTICO E O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO
NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Belo Horizonte

2025

RONALDO HENRIQUE XAVIER

**TRIÂNGULO ARITMÉTICO E O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NO
ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Centro Federal
Educação Tecnológica de Minas Gerais
como parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, para
obtenção do título de Mestre.

Orientador:

Davidson Paulo Azevedo Oliveira

Coorientadora:

Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora:

Izabela Marques de Oliveira

Ana Paula Perovano

Belo Horizonte
2025

FICHA CATALOGRÁFICA

X3t Xavier, Ronaldo Henrique
 Triângulo aritmético e o raciocínio combinatório no ensino fundamental
 / Ronaldo Henrique Xavier. – 2025.
 55 f. : il.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Davidson Paulo Azevedo Oliveira.

Coorientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais.

1. Análise Combinatória. 2. Triângulo aritmético. 3. Matemática -
História. I. Oliveira, Davidson Paulo Azevedo. II. Ferreira, Fernanda
Aparecida. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV.
Título.

CDD: 511.6

ATA DA 41ª SESSÃO PÚBLICA DE APRESENTAÇÃO E DEFESA DE DISSERTAÇÃO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia 13 de fevereiro de 2025, nas dependências do Campus Nova Gameleira do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), às 14 horas, reuniu-se a Banca Examinadora de Defesa de Dissertação, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), constituída pelos professores doutores Davidson Paulo Azevedo Oliveira (orientador), Fernanda Aparecida Ferreira (coorientadora), Ana Paula Perovano e Izabela Marques de Oliveira para examinar a pesquisa de mestrado do candidato **Ronaldo Henrique Xavier**, sob o título: “Triângulo Aritmético e o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental”. O Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira, como Presidente da Comissão Examinadora, declarou aberta a sessão, passando a palavra ao candidato Ronaldo Henrique Xavier para que expusesse sua Dissertação. Terminada a exposição, o Presidente passou a palavra aos membros da Banca Examinadora, que iniciaram a arguição na seguinte ordem: Prof.^a Dr.^a Ana Paula Perovano, Prof.^a Dr.^a Izabela Marques de Oliveira e Prof.^a Dr.^a Fernanda Aparecida Ferreira. Terminada a arguição, a Banca Examinadora reuniu-se, sem a presença do mestrando e do público para deliberação. Em seguida, o Presidente deu conhecimento ao candidato e ao público que a dissertação foi (x) aprovada () reprovada, ressaltando-se a evolução acadêmica do discente e amadurecimento intelectual e que no prazo de 02 (dois) meses o discente deverá incluir as sugestões da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, o Presidente declarou encerrada a sessão, cujas atividades são registradas nesta Ata, a qual assina juntamente com os outros membros da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação.

Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Presidente da Banca Examinadora
de Defesa de Dissertação

Prof.^a Dr.^a Fernanda Aparecida Ferreira
Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais

Prof.^a Dr.^a Ana Paula Perovano
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof.^a Dr.^a Izabela Marques de Oliveira
Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 1/2025 - DM (11.56.11)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 13/02/2025 16:36)

DAVIDSON PAULO AZEVEDO OLIVEIRA

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DM (11.56.11)

Matrícula: ###618#1

(Assinado digitalmente em 13/02/2025 17:28)

FERNANDA APARECIDA FERREIRA

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DM (11.56.11)

Matrícula: ###104#2

(Assinado digitalmente em 13/02/2025 17:14)

IZABELA MARQUES DE OLIVEIRA

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DM (11.56.11)

Matrícula: ###116#8

Visualize o documento original em <https://sig.cefetmg.br/documentos/> informando seu número: **1**, ano: **2025**, tipo:
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO, data de emissão: **13/02/2025** e o código de verificação: **3ccb265d17**

*Dedico primeiramente a Deus, pois nele
e somente nele, eu penso e existo. Em
segundo: dedico aos meus familiares,
professores e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me proporcionar esta oportunidade e por permitir que eu sinta sua presença nos momentos de dificuldade e como se já não fosse o bastante, ainda colocou, em meu caminho, professores e orientadores super capacitados, pacientes e amigos.

À minha mãe, Angela Luiza Xavier, pelo apoio e educação a qual se esforçou em me proporcionar.

Aos meus amigos pela confiança e apoio depositados em mim.

Agradeço aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e pela partilha de experiências ao longo de todo o curso.

Agradeço aos meus professores por compartilharem um pouco de seus conhecimentos e, assim, me permitirem vislumbrar a Matemática por uma nova ótica.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo de Oliveira e a minha coorientadora Profa Dra. Fernanda Aparecida Ferreira pelas valiosas sugestões e orientações para a construção deste trabalho e pela paciência e compreensão ao longo de seu desenvolvimento.

Aos professores participantes da banca examinadora pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta para o ensino de análise combinatória no Ensino Fundamental, utilizando o Triângulo Aritmético como recurso pedagógico. Nossa abordagem é fundamentada na História da Matemática e nas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nosso trabalho é baseado nas contribuições de Mendes(2002), Jankvist (2009) e Fried(2001), em que desenvolvemos uma atividade que destaca a História como ferramenta didática capaz de contextualizar a situação de ensino, humanizar a Matemática e estimular a resolução de problemas. Realizamos uma adaptação didática para o problema histórico proposto pelo islâmico Al-Muncim, que, no século XIII, usou combinações de linhas de seda para construir um Triângulo Aritmético, destacando sua relevância cultural e prática. A abordagem favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório de forma intuitiva, valorizando a diversidade cultural e integrando elementos que vão ao encontro de um aprendizado mais integral, em conformidade com as competências gerais da BNCC. As atividades propostas, voltadas principalmente para o 8º ano do Ensino Fundamental, utilizam o Princípio Fundamental da Contagem para trabalhar conceitos de forma prática e visual, sem exigir rigor formal, permitindo também adaptações para outros níveis de ensino. A inclusão da História da Matemática pode contribuir para aproximar os alunos dos conceitos, despertando o interesse, fortalecendo a compreensão e promovendo a Matemática como construção histórica e cultural. O estudo ainda destaca, marginalmente, a importância da formação docente e da disponibilização de materiais didáticos que integrem a História à Matemática, superando as lacunas apontadas pelos autores que fundamentam este estudo. A proposta visa não apenas desenvolver competências Matemáticas nos alunos, mas também prepará-los para desafios futuros, fomentando o pensamento crítico e o protagonismo no aprendizado.

Palavras-chave: Triângulo Aritmético. Análise Combinatória. História da Matemática. Educação Básica.

ABSTRACT

In this thesis, we present a proposal for teaching combinatorial analysis in elementary education, using the Arithmetic Triangle as a pedagogical resource, grounded in the History of Mathematics and the guidelines of the Base Nacional Curricular Comum- National Common Curricular Base (BNCC). In our research, based on the contributions of Mendes (2002), Jankvist (2009), and Fried (2001), we developed an activity based on History that highlights it as a didactic tool capable of contextualizing learning, humanizing Mathematics, and stimulating problem-solving. We made a didactic adaptation to the historical problem proposed by the Islamic scholar Al-Muncim, who, in the 13th century, used combinations of silk threads to construct an Arithmetic Triangle, emphasizing its cultural and practical relevance. The approach favors the development of combinatorial reasoning in an intuitive way, valuing cultural diversity and integrating elements that contribute to a more holistic learning experience, in line with the general competencies of the BNCC. The proposed activities, aimed primarily at the 8th grade of elementary school, use the Fundamental Principle of Counting (FPC) to work with concepts in a practical and visual way, without requiring formal rigor, also allowing adaptations for other education levels. The inclusion of the History of Mathematics can help bring students closer to the concepts, sparking interest, strengthening understanding, and promoting Mathematics as a historical and cultural construction. The study also highlights, albeit marginally, the importance of teacher training and the availability of teaching materials that integrate History with Mathematics, overcoming the gaps pointed out by the authors that underpin this study. The proposal aims not only to develop mathematical competencies in students but also to prepare them for future challenges, fostering critical thinking and student agency in learning.

Keywords: Arithmetic Triangle. Combinatorial Analysis. History of Mathematics. Elementary Education.

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas e Técnicas

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CRMG - Currículo Referência do Estado de Minas Gerais

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama da Fundamentação Teórica	14
Figura 2: Categorias de Jankvist	21
Figura 3: Conquista e expansão do Islã.....	29
Figura 4: Triângulo Aritmético de Pingala	32
Figura 5: Sábios indianos que discutiram o Triângulo Aritmético	32
Figura 6: Triângulo Aritmético de Yang Hui.....	33
Figura 7: Capa do livro de Apianus	34
Figura 8: Capa do livro de Stiefel.....	35
Figura 9: Triângulo Aritmético na obra de Stiefel.....	36
Figura 10: Capa do livro de Tartaglia na qual pode-se observar sua foto	37
Figura 11: Triângulo Aritmético na obra de Tartaglia.....	38
Figura 12: Pascaline	39
Figura 13: Capa do tratado de Pascal	39
Figura 14: Triângulo Aritmético na obra de Pascal	40
Figura 15: Capa da tradução de Djebbar	41
Figura 16: Sumário do trabalho de Djebbar	42
Figura 17: Rota da seda.....	43
Figura 18: Triângulo de Al-Muncim	43
Figura 19: Triângulo aritmético traduzido	44
Figura 20: Ilustração de borlas de uma cor	46
Figura 21: Tabela da atividade preenchida.....	47

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 Questão de investigação da Pesquisa	12
1.2 O objetivo geral	12
2 REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1 Orientações da BNCC	15
2.2 Perspectiva de Jankvist.....	20
2.3 Perspectivas de Fried	22
2.4 Perspectiva de Mendes	25
2.5 Comparação das perspectivas	26
3 A CIVILIZAÇÃO ISLÂMICA	28
4 BREVE HISTÓRICO SOBRE O TRIÂNGULO ARITMÉTICO	31
4.1 História do Triângulo Aritmético	31
5-O PROBLEMA DAS SEDAS DE AL-MUNCIM.....	41
5.1 O que sabemos sobre o sabio Al- Muncin.....	47
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
6.1 Implicações da Pesquisa para o Professor.....	49
6.2 Implicações da Pesquisa, para mim, como Pesquisador.....	51
6.3 Trabalhos Futuros	52
REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

Minha trajetória acadêmica e profissional foi profundamente influenciada pelo desejo de proporcionar aos estudantes, além do aprendizado da Matemática, uma compreensão significativa e aprofundada de seus conceitos. Tal objetivo demanda não apenas uma sólida formação em Matemática, mas também um conhecimento aprofundado das metodologias de ensino e uma postura de constante aprimoramento profissional. Como educador, procuro partir do princípio de que o processo de aprendizado deve ser contínuo e bidirecional, na medida em que ensinar implica, necessariamente, estar disposto a aprender.

O interesse pela Matemática surgiu no Ensino Primário, embora, à época, as notas obtidas não refletissem um desempenho de excelência. Com o tempo, tornou-se evidente que melhorar nessa disciplina exigia o desenvolvimento de uma habilidade fundamental: o pensamento matemático. Essa trajetória, entretanto, não foi simples, considerando que, nos anos 1990, o modelo predominante de ensino não favorecia uma compreensão mais aprofundada dos conceitos matemáticos, já que se pautava na memorização e repetição de processos.

Ao longo das décadas, o ensino de Matemática no Brasil passou por mudanças significativas, principalmente no que diz respeito às abordagens pedagógicas. Observamos uma transição para métodos que tornaram o ensino mais acessível e atrativo, simplificando o processo de ensinoaprendizagem. Contudo, essa transformação não nos parece que ocorreu de maneira homogênea em todos os conteúdos. Um exemplo emblemático é a Análise Combinatória, que, desde o Ensino Básico até o Ensino Superior, foi identificada, por mim, como um dos conteúdos mais desafiadores de minha trajetória acadêmica.

A lacuna na formação inicial, aliada à complexidade inerente à Análise Combinatória, gerou, por anos, insegurança ao abordar esse conteúdo em sala de aula. Esse desconforto é particularmente significativo, pois a compreensão do raciocínio combinatório é essencial para o desenvolvimento de habilidades Matemáticas mais amplas, especialmente quando relacionadas à probabilidade. Esse desafio motivou-me a buscar alternativas para superar essas dificuldades e, posteriormente, contribuir para que outros educadores e alunos abordassem/estudassem o tema com maior clareza.

A minha inserção no curso de Licenciatura em Matemática, inicialmente encarada como um meio para alcançar outros objetivos, transformou-se em uma paixão pela docência. Tal envolvimento culminou na realização de um mestrado profissional no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no qual foi possível revisitar a análise combinatória sob uma nova perspectiva. Por meio da disciplina de Matemática Discreta, foram apresentadas abordagens inovadoras que priorizam métodos intuitivos e independentes de fórmulas, promovendo um aprendizado significativo.

Com base nessa experiência, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de atividades didáticas voltadas ao ensino de análise combinatória no Ensino Fundamental, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) aliado à História da Matemática. Nesse sentido, a questão de investigação e objetivos do trabalho estão apresentados a seguir.

1.1 Questão de investigação da Pesquisa

Uma atividade que utiliza a História da Matemática como ferramenta pode auxiliar os professores a abordarem, na prática em sala de aula, conceitos da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, em específico o Princípio Fundamental da Contagem (PFC)?

1.2 O objetivo geral

Apresentar atividades didáticas baseadas na História da Matemática que explorem a construção e algumas propriedades do Triângulo Aritmético, por meio de uma adaptação de um problema histórico proposto no século XIII, permitindo a compreensão do PFC sem o rigor das fórmulas.

A partir deste objetivo geral elencamos **objetivos específicos** que nos guiaram na compreensão da nossa questão de investigação:

- Construir um Triângulo Aritmético utilizando o raciocínio combinatório, com base na História da Matemática, a partir da estratégia da acomodação;
- Desenvolver atividades pedagógicas que utilizem o Triângulo Aritmético como ferramenta visual para ensinar conceitos de Análise Combinatória, favorecendo uma abordagem intuitiva;
- Elaborar um Recurso Educacional a partir da adaptação didática de um problema histórico do século XIII, proposto pelo sábio islâmico Al-Muncim, para auxiliar

professores na prática pedagógica.

A estrutura da dissertação é composta por seis capítulos e um Recurso Educacional. No primeiro capítulo é apresentada esta introdução e o contexto do trabalho. O segundo capítulo, **Referencial Teórico**, aborda perspectivas sobre a utilização da História da Matemática no Ensino Básico, as orientações presentes em documentos oficiais e as teorias que fundamentam nossa pesquisa.

O terceiro capítulo, **A Civilização Islâmica**, se inicia com a distinção entre árabe, muçulmano e islâmico. Na sequência é contextualizado o ambiente histórico e cultural em que Al-Muncim desenvolveu seus trabalhos, os quais inspiraram este estudo, com destaque para algumas das principais conquistas territoriais e culturais do Império Islâmico.

O quarto capítulo, **Triângulo Aritmético**, apresenta um sucinto desenvolvimento histórico dessa ferramenta Matemática, destacando suas aplicações em outras culturas e povos como chineses, indianos e europeus. No cenário europeu lançamos um pouco mais de luz ao trabalho de Blaise Pascal (1623 - 1662) por ser o nome adotado no Brasil para o triângulo, “Triângulo de Pascal”.

No quinto capítulo, **O Problema das Sedas**, é apresentado e analisado o décimo primeiro problema da obra de Al-Muncim. O problema refere-se a combinações de sedas coloridas e sua relação com o Triângulo Aritmético. Além disso, discorreremos sucintamente sobre a vida e a obra deste sábio islâmico.

Finalizamos esta dissertação com o sexto capítulo, **Considerações Finais**, no qual são discutidas: (a) as implicações da pesquisa na minha prática docente; (b) os impactos da formação acadêmica na minha trajetória; (c) e minhas perspectivas futuras acadêmica e profissionalmente.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste trabalho trazemos uma adaptação de um problema matemático abordado com uma metodologia de ensino baseada na História Matemática aliada a algumas características de uma investigação histórica. Essa abordagem defendida e incentivada por Mendes (2002), oferece uma diferente estratégia para a aprendizagem, visto que pode oferecer aos professores e alunos condições de compreender a Matemática como criação humana, trazendo mais motivação e qualidade ao ensino.

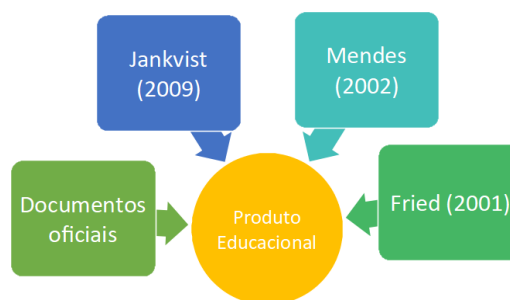
Além disso, as argumentações que justificam a inserção da História da Matemática em sala de aula são baseadas em Jankvist (2009), que discute dois Argumentos (*ferramenta e objetivo*) e três Abordagens (*iluminação, baseada na História e modular*). Nosso trabalho está fundamentado na Abordagem baseada na História e no Argumento da História como Ferramenta, a partir do que propõe o autor.

Alinhando-se às argumentações e abordagens propostas por Jankvist (2009) apresentamos algumas vantagens e desvantagens da História da Matemática no ensino, na perspectiva de Fried (2001). Assim, discute-se diversos argumentos do “porquê” utilizar a História da Matemática no ensino de Matemática da Educação Básica. Segundo Fried (2001) o uso da História da Matemática em sala de aula:

- (1) humaniza a Matemática;
- (2) deixa a Matemática mais acessível e mais atraente para os estudantes;
- (3) traz inspiração na resolução de problemas modernos.

Na figura 1 sintetizamos as abordagens teóricas que fundamentam a construção do nosso Recurso Educacional:

Figura 1: Diagrama da Fundamentação Teórica



Fonte- produzido pelos autores

Todos estes argumentos serão discutidos mais adiante. Frisamos que este trabalho está alicerçado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que atualmente orienta os currículos da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) em todo o território nacional.

2.1 Orientações da BNCC

A utilização da História da Matemática no Ensino Básico apresenta-se como uma ferramenta pedagógica capaz de enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem, conforme orientações da BNCC (Brasil, 2017). Ao explorar algumas perspectivas e potencialidades dessa abordagem, destaca-se suas contribuições para a contextualização do conhecimento matemático e a valorização da diversidade cultural. Argumenta-se que a História da Matemática não apenas promove uma compreensão mais significativa dos conteúdos, mas também humaniza a disciplina, aproximando-a dos estudantes.

A História da Matemática constitui um campo de estudos que permite compreender o desenvolvimento dos conceitos matemáticos ao longo do tempo, em diferentes contextos históricos e culturais. A BNCC enfatiza a importância de um ensino que contextualiza os conhecimentos, promovendo a articulação entre os saberes escolares e o mundo real (Brasil, 2017). Nesse sentido, a inserção da História da Matemática no Ensino Básico revela-se como uma estratégia que pode ser eficaz para tornar o aprendizado mais significativo e atrativo.

De acordo com a BNCC, o ensino de Matemática deve promover o desenvolvimento de competências que articulem o conhecimento matemático com situações reais, favorecendo a resolução de problemas e a contextualização (Brasil, 2017). O modo como o professor utiliza a História da Matemática pode contribuir para a contextualização de problemas em outras civilizações e os desafios enfrentados por diferentes culturas.

Por exemplo, a exploração da geometria egípcia ou da trigonometria babilônica pode ser utilizada para introduzir tópicos relacionados a áreas e proporções. De forma semelhante, o estudo histórico dos números inteiros pode auxiliar o professor a contextualizar o conceito de diferentes bases numéricas, promovendo uma compreensão mais profunda sobre sua utilização. Desse modo, a História da Matemática oferece diversas potencialidades pedagógicas para o Ensino Básico.

A inserção de problemas históricos no ensino pode proporcionar um contexto significativo para o aprendizado dos estudantes ao ser proposta a discussão de situações concretas ligadas a conceitos matemáticos. Exemplo disso pode ser visto no cálculo da área do círculo proposto por Arquimedes ou os sistemas de medição utilizados pelos egípcios.

Assim, os estudantes compreendem que a Matemática é uma construção humana voltada para resolver problemas reais, mesmo que de contextos e épocas distintas.

Ao explorar os métodos e as lógicas empregadas por estudiosos do passado, os estudantes são desafiados a refletir sobre os diferentes caminhos para resolver problemas. Essa abordagem estimula o debate em sala de aula, fortalecendo as habilidades argumentativas dos alunos.

A História da Matemática no ensino desponta, portanto, como uma abordagem que se propõe a contribuir para a humanização do ensino e ampliar as perspectivas de compreensão dos estudantes. Alinhada às diretrizes da BNCC, ela contribui para a formação integral dos alunos, promovendo a contextualização, o pensamento crítico e a valorização da diversidade cultural. Dessa forma, é essencial que educadores explorem essas potencialidades, incorporando a História da Matemática de maneira planejada e significativa no cotidiano escolar em alguns conteúdos de sala de aula. Ainda, a BNCC (Brasil, 2017) estabelece diretrizes gerais para a educação básica no Brasil, incluindo o ensino de Análise Combinatória, com ênfase na resolução de problemas como habilidade essencial. Os alunos devem ser capazes de aplicar os conceitos aprendidos para resolver uma variedade de problemas, abrangendo desde situações simples até problemas mais complexos.

A compreensão dos conceitos fundamentais da Análise Combinatória, como permutações, combinações, arranjos e fatorial, é fundamental para o desenvolvimento dessa habilidade, mesmo que não venham com esses nomes nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Além disso, é necessário que os estudantes utilizem estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos em diferentes áreas, como Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Ao longo desse processo, é indicado que eles analisem “a plausibilidade dos resultados encontrados e a adequação das soluções propostas, visando a construção de uma argumentação consistente.” (Brasil, 2017, p. 523)

O ensino de Análise Combinatória também contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, permitindo que justifiquem suas soluções, identifiquem padrões e desenvolvam estratégias para abordar problemas de contagem e probabilidade. De acordo com a BNCC são habilidades necessárias para o Ensino Médio:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenados ou não de elementos, utilizando os princípios multiplicativo e aditivo, com o auxílio de diversas estratégias, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade (Brasil, 2017, p. 529).

Portanto, a abordagem da Análise Combinatória pode não só enriquecer o conhecimento matemático dos alunos, como também pode prepará-los para resolver problemas complexos, promovendo habilidades essenciais para a formação acadêmica e para a vida cotidiana.

A nível regional, no Plano de Curso do estado de Minas Gerais (Minas Gerais, 2024), são reiteradas as habilidades contempladas pela BNCC, e fornecidas algumas orientações pedagógicas para os professores. Uma das orientações é que a proposta para trabalhar os conteúdos da Análise Combinatória seja realizada a partir de diferentes estratégias de contagem, comparando representações por meio de listas, tabelas, esquemas e diagramas. A ideia é mostrar as possíveis combinações e quantificá-las, separando as etapas dos problemas para facilitar a resolução pelos alunos (Minas Gerais, 2024).

Para os anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC orienta o uso do princípio multiplicativo e de métodos visuais ou lúdicos para trabalhar problemas de contagem. No contexto da unidade temática de números, o documento apresenta exemplos de como os problemas de contagem podem ser formulados: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?" (Brasil, 2017, p. 294). A habilidade correspondente é a seguinte:

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, utilizando diagramas de árvore ou tabelas (Brasil, 2017, p. 295).

O Currículo Referência de Minas Gerais - CRMG (Minas Gerais, 2024) também apresenta orientações para os professores, que são praticamente a íntegra de orientações da BNCC que incluem o uso de diagramas de árvores ou tabelas para resolver problemas de contagem baseados no princípio multiplicativo. Com exemplo compare esta orientação com a habilidade EF05MA09 que está citado acima: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?" A resolução desses problemas pode ser feita por diversas estratégias, incluindo a multiplicação (Minas Gerais, 2024, p. s/nº).

No 8º ano do Ensino Fundamental (anos finais), o ensino de raciocínio combinatório está mais associado ao ensino de probabilidades. Nos Objetos de Conhecimento destacados para a área de conhecimento Matemática, o "Princípio multiplicativo da contagem" e a "Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral" são temas abordados, com as seguintes habilidades correspondentes:

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1 (Brasil, 2017, p. 315).

No Plano de Curso do Estado são apresentadas orientações para os professores, destacando a importância de uma boa contextualização ao trabalhar com cálculos de combinações simples, onde em geral repetem na íntegra as orientações da BNCC. Exemplos incluem combinações de roupas, combos de lanches e combinações de senhas, que podem ser utilizados como estratégias pedagógicas para o ensino de análise combinatória e probabilidades (Minas Gerais, 2024, p. s/nº).

De modo geral podemos sintetizar as habilidades propostas pela BNCC e pelo CRMG relativas a esta nossa dissertação no quadro 1:

Quadro 1

5º ano do Ensino Fundamental	
Objeto do Conhecimento	Habilidades
Problemas de contagem “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção, por meio de Diagramas de árvores ou tabelas.
8º ano do Ensino Fundamental	
Habilidade	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Fonte: Brasil (2017, p. 294-295 e 315)

A partir das orientações presentes nos documentos oficiais, desenvolvemos nosso Recurso Educacional, centrado em uma atividade adaptada de um problema proposto por um sábio islâmico, inserido em um contexto cultural e histórico específico. Nesse sentido, pesquisadores como Mendes (2009), Jankvist (2009) e Fried (2001), enfatizam a importância de o professor de Matemática, ao utilizar a História da Matemática em sala de aula, apropriar-se desse contexto histórico e cultural, destacando-o para os estudantes. Assim, é fundamental que o professor também se atente às recomendações dos documentos oficiais, especialmente a BNCC, que sugerem a abordagem de discussões sobre outras civilizações com os alunos.

A BNCC enfatiza a importância de temas interdisciplinares¹ na Educação Básica, reconhecendo que a integração de diferentes áreas do conhecimento é fundamental para o desenvolvimento integral dos alunos. A abordagem de novas metodologias é destacada em várias diretrizes e componentes curriculares, promovendo a conexão entre disciplinas para proporcionar uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Muitas dessas competências, como a resolução de problemas, a comunicação, a argumentação, exigem uma abordagem interdisciplinar para serem plenamente alcançadas. Ela também enfatiza que os conteúdos escolares devem ser contextualizados e relevantes para a vida dos estudantes. Isso envolve a utilização de temas interdisciplinares que conectam o aprendizado escolar com situações reais e problemas do cotidiano.

Desta forma, neste trabalho, nos apropriamos de um problema inserido em um contexto histórico do século XIII no qual os alunos podem aprender um conteúdo matemático. Para isto, entra em contato com a cultura e História Islâmica, cumprindo, assim, com o que determina a BNCC, que destaca a importância do ensino de História para promover o entendimento das diferentes civilizações e culturas ao longo do tempo. Embora não haja uma especificação direta sobre o ensino da História da civilização Islâmica, o documento sugere abordagens gerais para o ensino de História que podem ser utilizadas dentro desse contexto.

Portanto, o ensino da História da civilização Islâmica pode ser contextualizado dentro de um entendimento mais amplo da História mundial. Isso inclui destacar a contribuição dessa civilização para o desenvolvimento global, seja na ciência, na arte, na filosofia, no comércio ou em outras áreas do conhecimento. Para isso é essencial abordar a diversidade dentro dessa civilização destacando as diferentes etnias, línguas, tradições religiosas e culturais que coexistem e interagem ao longo do tempo. Neste diálogo intercultural o ensino da História da

¹ Não discutiremos neste trabalho sobre interdisciplinaridade e teorias que envolvem seu uso na sala de aula por não ser o foco principal. Embora seja interessante o professor perceber que é um tópico que pode ser explorado com atividades a partir da História da Matemática.

civilização Islâmica poderia promover a compreensão mútua entre diferentes culturas e civilizações. Nessa direção, a pesar de não se tratar especificamente de Matemática a BNCC indica uma Interdisciplinaridade com a História e estabelece que “Analisar e compreender o movimento de populações e mercadorias no tempo e no espaço e seus significados históricos, levando em conta o respeito e a solidariedade com as diferentes populações.” (Brasil, 2017, p.402)

Em relação ao ensino de História, na unidade temática “Povos e Culturas: meu lugar no mundo e meu grupo social”, o objeto de conhecimento “Cidadania, diversidade cultural e respeito às diferenças sociais, culturais e históricas”, a BNCC aponta uma habilidade específica sobre o assunto: “(EF05HI03) Analisar o papel das culturas e das religiões na composição identitária dos povos antigos” (Brasil, 2017, p. 415).

Tal habilidade pode ser compreendida, no âmbito deste trabalho, como uma orientação para a adoção de diversas metodologias de ensino e aprendizagem em sala de aula, de forma a favorecer o desenvolvimento integral dos alunos. Assim, busca-se priorizar não apenas o conhecimento formal, mas também a valorização da diversidade cultural e social. Nesse sentido, este estudo contempla o conhecimento acerca da História Islâmica, com o intuito de promover maior integração cultural, ampliação do saber histórico e estímulo à tolerância às diferenças e diversidades entre os alunos.

Desta forma, em nossa pesquisa trabalhamos conceitos de Análise Combinatória com atividades baseadas na História da Matemática de modo a mostrar aspectos da cultura Islâmica, a partir da perspectiva de Jankvist (2009), Fried (2001) e Mendes (2009), discutidos na sequência deste trabalho.

2.2 Perspectiva de Jankvist

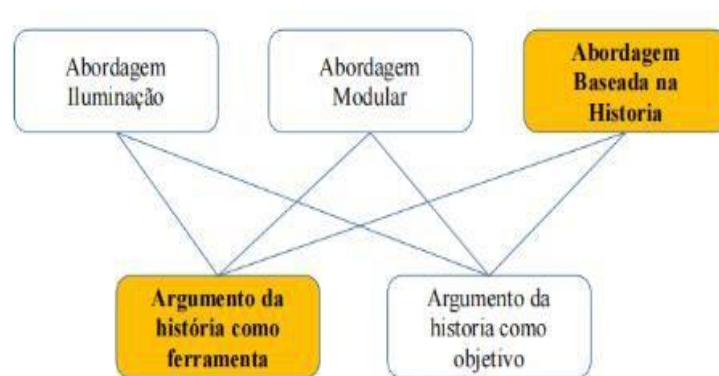
Iniciamos com o trabalho do pesquisador dinamarquês Uffe Thomas Jankvist (2009) que discute e apresenta maneiras e formas de se utilizar a História da Matemática no ensino de Matemática como uma metodologia de ensino. O pesquisador não mostra como fazer, mas sugere o que fazer. Vale a pena ressaltar que no período em que Jankvist desenvolveu suas pesquisas era compulsório na Dinamarca a inserção da História da Matemática no ensino da Educação Básica.

Em seus estudos ele apresenta categorias de inserção da História da Matemática no ensino, formuladas por meio de três abordagens. Na primeira delas, ele afirma que essa inserção em sala de aula pode ser realizada com um enfoque denominado de “**iluminação**”, cujo viés se

dá por meio de pequenos fatos histórico, curiosidades históricas, pequenas biografias ou trechos históricos do que ocorria em um determinado período ou outro meio qualquer, apenas para trazer um pouco de clareza ou sentido ao que está sendo explicado. Além disso, pode-se utilizar a História da Matemática a partir de “**módulos**”, ou seja, um enfoque histórico em temas específicos nos quais os conteúdos são apresentados do início ao fim seguindo uma sequência histórica. O pesquisador ainda propõe que podemos utilizar a História da Matemática na sala de aula como uma referência e propor atividades que estejam “**baseadas na História**”. Diferentemente da abordagem anterior, nesta o percurso histórico não precisa ser o mesmo, havendo uma adaptação para a sala de aula.

Essas três formas de abordagens combinam com dois argumentos que, de acordo com o autor, podem ter a História como **objetivo final** ou como **ferramenta**. Combinando as três abordagens e os dois argumentos obtemos as seis formas possíveis, segundo Jankvist (2009), de associar e ensinar Matemática por meio da História da Matemática (Figura 2):

Figura 2: Categorias de Jankvist



Fonte: Adaptado de Jankvist (2009)

Destacamos na Figura 2, nossa opção metodológica para o Recurso Educacional que propomos. Como nosso desejo maior é que os alunos aprendam conceitos e raciocínios matemáticos da análise combinatória, o contexto histórico é uma ferramenta que pode ser utilizada para que alcancemos esse fim, e sua abordagem é apenas uma base de referência e não um fim em si mesma. Assim sendo, utilizamos a História da Matemática como uma ferramenta em uma situação cuja abordagem é baseada na História.

Em Jankvist (2009) descobrimos os caminhos que podemos percorrer para interligar a Matemática à História da Matemática em sala de aula. Agora, com toda a discussão do

pesquisador Michael Fried (2001) veremos como fazer isso e quais empecilhos terão de ser superados pelos professores e pesquisadores com essa intenção.

2.3 Perspectivas de Fried

Conforme aponta Fried (2001), a incorporação da História da Matemática no ensino dessa disciplina apresenta desafios significativos, apesar do crescente interesse em articular essas áreas. A principal dificuldade identificada pelo autor consiste em equilibrar o ensino das técnicas da Matemática moderna, indispensáveis para a resolução de problemas nas ciências, engenharias e outras áreas, com a preservação da integridade histórica dos conceitos matemáticos. Esse compromisso, muitas vezes, conduz à distorção ou banalização da História (anacronismos), resultando em abordagens inadequadas e simplificadas, que não respeitam a profundidade desse campo.

Fried (2001) propõe duas soluções para esse impasse. A primeira, denominada **separação radical**, sugere que a História da Matemática seja ensinada como uma disciplina autônoma no currículo escolar, similar ao modelo adotado em cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Esse formato, embora permita um estudo mais detalhado e estruturado da História da Matemática, limita sua integração com o ensino da Matemática em si, especialmente no âmbito da Educação Básica.

Na segunda solução proposta por ele, conhecida como **acomodação radical**, o pesquisador defende que o ensino da Matemática seja conduzido a partir de um roteiro guiado pelos desenvolvimentos históricos da disciplina. Nesse modelo, os conteúdos matemáticos são apresentados no contexto de seu desenvolvimento histórico.

Ambas as abordagens apresentam limitações para os professores da educação básica. A **separação radical** proporciona liberdade ao professor para incluir elementos históricos no ensino, mas corre o risco de não atender plenamente às expectativas pedagógicas e históricas, o que pode tornar ou a História da Matemática ou o conteúdo matemático um elemento periférico.

Por outro lado, a **acomodação radical**, embora promissora em termos de interdisciplinaridade, enfrenta desafios práticos, como a exigência de maior carga horária para cobrir tanto os conteúdos históricos quanto os modernos. Além disso, esse modelo pode gerar o chamado **desvio histórico**, no qual a História da Matemática é explorada apenas em função de sua utilidade contemporânea. Tal prática, segundo Fried (2001), deve ser rejeitada, pois desvaloriza os aspectos mais amplos e intrínsecos do desenvolvimento histórico da

Matemática.

Ainda nesse sentido, outro entrave significativo é o que Fried (2001) e outros autores denominam **problema do tempo**. Em currículos escolares bastante sobrecarregados de conteúdos a inserção de novas disciplinas ou conteúdos, como a História da Matemática, enfrenta barreiras práticas. No Brasil, apesar do avanço na promoção de disciplinas interdisciplinares no ensino básico, a limitação da carga horária, que possui um valor mínimo anual e, na prática, tende a ser fixo, dificulta a implementação de propostas diferenciadas.

Para contornar o problema do tempo, Fried (2001) sugere a adoção de práticas pedagógicas que integrem a História da Matemática de forma orgânica ao ensino. Por exemplo, problemas e exercícios históricos podem substituir questões tradicionais, permitindo que os alunos aprendam conceitos matemáticos no contexto de seu desenvolvimento. Essa abordagem não exige tempo adicional significativo, mas requer planejamento pedagógico cuidadoso para garantir que os objetivos curriculares sejam atingidos.

No contexto brasileiro, entrou em vigor em 2023 a Lei 14.640/23, proveniente do Projeto de Lei 2617/23, que cria o programa Escola em Tempo Integral e pretende garantir acesso à jornada de sete horas diárias de aulas para mais 1 milhão de estudantes brasileiros e que já foi implementado em diversas regiões do Brasil, com aulas diversificadas chamadas de Itinerários Formativos que podem ser uma alternativa estrutural para o problema do tempo. Essa mudança poderia ampliar a carga horária disponível, favorecendo a inclusão de abordagens interdisciplinares, como a integração da História da Matemática ao ensino regular. A implementação dessas práticas, entretanto, depende de políticas públicas consistentes, formação docente adequada e materiais didáticos que articulem História e Matemática de maneira acessível e rigorosa.

Em síntese, a inserção da História da Matemática no ensino básico, embora desafiadora, apresenta potencial significativo para enriquecer o processo de aprendizagem. Ao contextualizar conceitos matemáticos em seu desenvolvimento histórico, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais profunda e crítica, conectando o conhecimento abstrato da Matemática às suas aplicações e significados no mundo real.

Em nosso trabalho, adaptamos um problema de cunho histórico relacionado ao Triângulo Aritmético, cuja resolução pelos estudantes ocorre no contexto de sua inserção histórica, sem necessidade de alocação de tempo adicional. Contudo, identificamos uma carência significativa de materiais didáticos destinados a professores que desejam trabalhar com a História da Matemática em sala de aula. Conforme Mendes (2009, p. 78), “a natureza da literatura histórica disponível sobre a História da Matemática a torna particularmente

imprópria à utilização didática”. Essa insuficiência de materiais, que se reflete até os dias atuais, compromete o uso efetivo dessa abordagem no âmbito educacional.

A ausência de materiais apropriados, reiterada por Mendes (2009), enfatiza a importância do conhecimento histórico por parte dos professores e a dificuldade de acesso a recursos que possam auxiliá-los no planejamento e na execução de atividades didáticas fundamentadas na História da Matemática. Em complemento, Fried (2001) destaca que o ensino da História da Matemática apresenta desafios em função da escassez de literatura adequada, especialmente sobre o período anterior ao século XIX e XX, o que compromete sua utilização pedagógica.

Embora exista uma quantidade considerável de livros sobre a História da Matemática em português e espanhol, Nobre (2004) ressalta a dificuldade de acesso a essas obras, que frequentemente não estão disponíveis em livrarias ou bibliotecas. Ademais, a carência de materiais específicos para sala de aula é agravada por uma fragilidade na formação docente no que tange ao uso da História da Matemática. Segundo Nobre (2004), erros e equívocos históricos são recorrentes devido à inexistência de documentos comprobatórios ou à manipulação de informações por terceiros. Muitas das informações conhecidas foram reconstruídas de forma aproximada, dada a falta de registros confiáveis.

Como exemplos, Nobre (2004) cita uma série de distorções, equívocos: Como Thales de Mileto, um dos primeiros matemáticos da Grécia Antiga, que viveu entre os anos 625 e 547 a.E.C. e cuja História está envolta em lacunas e distorções. Também há uma série de atribuições equivocadas na História da Matemática, como o Princípio de Cavalieri, que já era conhecido pelos chineses no século VI E.C.; o Triângulo de Pascal, que aparece na tradição chinesa como Triângulo de Yang Hui (? -1298) e será objeto de discussão no capítulo seguinte; e o Binômio de Newton, trabalhado previamente por Michael Stifel (1487-1567) e Blaise Pascal. Além disso, o Teorema de L'Hôpital e o Princípio de Cauchy não são atribuídos aos matemáticos que levam seus nomes (Nobre, 2004).

Essa complexidade evidencia que as descobertas e criações Matemáticas não seguem uma linearidade temporal ou geográfica. Segundo Nobre (2004), é fundamental questionar se os equívocos decorrem de falta de conhecimento ou de “interpretações conduzidas”. Isso aponta para a necessidade de atualização constante no movimento historiográfico, bem como de maior rigor na verificação e contextualização das informações históricas. Em nossa pesquisa, buscamos mitigar tais problemas por meio da consulta a diversas fontes, de modo a assegurar maior fidelidade histórica aos conteúdos apresentados.

2.4 Perspectiva de Mendes

O ensino de Matemática tem enfrentado desafios significativos, sobretudo no que diz respeito ao desinteresse dos alunos e às dificuldades em relacionar os conteúdos escolares ao cotidiano. Nesse contexto, Mendes (2009) destaca a importância de se utilizar a História da Matemática como metodologia pedagógica, argumentando que essa abordagem promove um ensino mais significativo e motivador.

Segundo Mendes (2009) a inserção da História da Matemática ao Ensino Básico pode ser realizada por meio de diversas estratégias, incluindo: Resolução de Problemas Históricos com a utilização de situações reais enfrentadas por civilizações do passado, incentivando a criatividade e a experimentação; Uso de Recursos Lúdicos por meio de jogos e simulações que repliquem desafios matemáticos de épocas passadas; e o estudo de biografias e análise da vida e das contribuições de sábios, destacando suas trajetórias e desafios.

O pesquisador ressalta que o uso da História da Matemática no ensino permite compreender o desenvolvimento dos conceitos matemáticos como uma construção humana, influenciada por contextos culturais, sociais e científicos. Segundo o autor, essa abordagem contribui para que os estudantes não apenas aprendam os conceitos, mas também compreendam os motivos de sua criação e suas aplicações práticas.

Mendes (2009, p. 76) afirma que “Com essa prática considero ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente.” Sendo assim, essa abordagem auxilia na superação de dificuldades de aprendizagem ao estimular nos alunos a reflexão crítica sobre os conceitos matemáticos e sua transposição para situações cotidianas.

A investigação histórica é apresentada por Mendes (2009) como uma metodologia que possibilita a compreensão da Matemática em sua totalidade, destacando as relações entre os conceitos ao longo do tempo. O pesquisador enfatiza que “a Matemática não deve ser ensinada como uma sucessão de eventos isolados, mas como uma narrativa contínua” (Mendes, 2009, p. 89).

Essa abordagem que ele propõe leva em consideração atividades investigativas baseadas em fontes históricas, como livros didáticos antigos, paradidáticos e textos acadêmicos, possibilitando aos estudantes explorar os conceitos matemáticos de maneira autônoma, com a orientação do professor. Mendes (2009) destaca que essa prática promove a autonomia dos alunos e a construção de um conhecimento significativo. A proposta

metodológica fundamenta-se na elaboração de atividades históricas organizadas em etapas, visando à investigação e à reflexão crítica dos estudantes. As atividades devem ser apresentadas em sequências que preservem a continuidade da aprendizagem e contenham enunciados claros e instigantes. As atividades devem incluir:

- **Enunciado:** Uma questão ou situação que estimule a curiosidade dos estudantes;
- **Fontes:** Textos históricos, problemas clássicos ou relatos de descobertas Matemáticas;
- **Etapas:** Procedimentos que conduzam os alunos à formulação de hipóteses, à resolução de problemas e à reflexão sobre os resultados obtidos.

Nesse sentido, o professor atua como mediador do processo de aprendizagem, orientando os alunos na escolha de materiais, no desenvolvimento das atividades e na interpretação dos resultados. Mendes (2009) alerta que é essencial evitar fornecer respostas prontas, incentivando os estudantes a construí-las de forma autônoma.

O uso da História da Matemática no ensino, aliado a atividades investigativas, favorece o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da motivação dos alunos. Conforme Mendes (2009) assinala, essa abordagem também promove uma maior interação entre professor e aluno, criando um ambiente propício para a aprendizagem colaborativa. Além disso, ao compreenderem a Matemática como uma construção histórica, os estudantes passam a valorizá-la como parte integrante do desenvolvimento humano, o que contribui para a superação do desinteresse em relação à disciplina.

A proposta de atividades investigativas apresentada pelo pesquisador demonstra que a História da Matemática pode ser utilizada como uma ferramenta eficaz para o ensino, possibilitando a construção de um conhecimento significativo e contextualizado. No entanto, a implementação dessa metodologia requer preparação docente e a seleção cuidadosa de materiais e atividades. Recomenda-se que estudos futuros explorem outras aplicações da História da Matemática no ensino, analisando seu impacto em diferentes níveis de educação e contextos culturais.

2.5 Comparação das perspectivas

Faremos , agora uma síntese comparativa entre as visões de autores que estruturam nosso trabalho

- **Fried** adota uma visão mais rigorosa e acadêmica da História da Matemática, enfatizando que seu uso na educação deve ser bem fundamentado para evitar distorções.
- **Jankvist** sistematiza o uso da História na educação Matemática, criando um modelo que diferencia quando a História é usada para ensinar Matemática e quando é estudada por si mesma.
- **Mendes** tem uma abordagem mais prática e pedagógica, focando no uso de narrativas e problemas históricos para facilitar o aprendizado e motivar os alunos.

	Michael N. Fried	Uffe Thomas Jankvist	Iran Abreu Mendes
Perspectiva sobre História da Matemática	A História da Matemática deve ser estudada de forma rigorosa e não apenas como uma ferramenta pedagógica.	Enfatiza dois usos principais da História da Matemática: como um meio para ensinar (História como ferramenta) e como um fim em si mesma (História como objeto de estudo).	A História da Matemática deve ser usada para tornar o ensino mais significativo, contextualizando o aprendizado.
Objetivo Principal	Melhor compreensão dos conceitos matemáticos a partir de seu desenvolvimento histórico.	Melhorar a aprendizagem Matemática por meio de uma abordagem histórica estruturada.	Aproximar a Matemática da realidade dos alunos e facilitar a aprendizagem.
Enfoque Metodológico	Propõe um estudo mais profundo das fontes históricas originais para evitar distorções.	Introduz a ideia de “História como meio” e “História como fim” para diferenciar os usos da História da Matemática no ensino.	Propõe o uso de narrativas históricas e problemas clássicos para estimular o raciocínio e o interesse dos alunos.
Aplicação na Educação	Acredita que o uso da História deve ser feito com cuidado para evitar simplificações excessivas ou mitos sobre matemáticos do passado.	Sugere que professores usem a História para ensinar conceitos matemáticos, e também para desenvolver a visão epistemológica dos alunos.	Defende que a História pode ajudar a superar dificuldades de aprendizagem, tornando os conteúdos mais acessíveis e menos mecânicos.
Contribuição Principal	Reflexão sobre a relação entre História da Matemática e Educação Matemática, criticando abordagens superficiais.	Estrutura um modelo didático para o uso da História da Matemática no ensino, diferenciando propósitos distintos.	Enfatiza a importância da História para tornar o ensino mais motivador e contextualizado.

3 A CIVILIZAÇÃO ISLÂMICA

A atividade proposta no Recurso Educacional oriundo desta dissertação foi inspirada na atividade originalmente elaborada por um sábio islâmico em um contexto histórico, cultural e social completamente distinto do nosso, Al-Muncim. Por esse motivo, torna-se fundamental compreender o período histórico em que a obra desse sábio foi concebida para melhor assimilar suas particularidades. A proposta de atividade que propusemos integra dimensões do conhecimento matemático e da História, destacando seu caráter multidimensional.

Antes, porém, de adentrarmos na civilização Islâmica é importante conhecermos que há diferenças entre os termos e os conceitos de “Árabe”, “Muçulmano” e “Islâmico” que segundo Morey, Oliveira e Nascimento (2021), muitas vezes, são utilizados de forma imprecisa, portanto, eles definem.

- **Árabe:** Refere-se à etnia dos povos originários da Península Arábica, região localizada no Oriente Médio, entre o Mar Vermelho e o Oceano Índico.
- **Civilização Islâmica:** Designa a sociedade ou o Estado cujas instituições e leis são baseadas na religião Islâmica. Essa civilização pode incluir indivíduos de diferentes religiões, incluindo ateus.
- **Muçulmano:** Indivíduo que professa a religião Islâmica. Nem todos os árabes são muçulmanos, e é possível que indivíduos de outras etnias sejam muçulmanos.

Em nosso Recurso Educacional, utilizaremos os termos "Civilização Islâmica" ou "Matemática Islâmica", uma vez que a atividade proposta foi desenvolvida nesse contexto histórico e cultural. O documento que embasa nossa atividade foi escrito por um sábio de Marraquexe, no norte da África (não sabemos ao certo, seu local de nascimento, possivelmente em andaluz, sul da Espanha), e não na Península Arábica, portanto, ele não era árabe. Acreditamos que Al-Muncim era muçulmano a partir da leitura das páginas introdutórias de seu trabalho, portanto, ele era seguidor do Islã.

Conforme Morey, Oliveira e Nascimento (2021), o Islã teve origem na Península Arábica em 622 EC., com o profeta Maomé (Muhammad). O termo "Islã" significa submissão, referindo-se à submissão a Alá (Deus), sendo o livro sagrado do Islã é o Alcorão.

Segundo Morey, Oliveira e Nascimento (2021), a Matemática Islâmica medieval desempenhou um papel crucial no desenvolvimento do conhecimento científico, conectando tradições gregas e romanas ao Renascimento europeu. Entre os séculos VIII e XV, o mundo islâmico promoveu avanços significativos em álgebra, geometria, trigonometria e teoria dos números:

- **Álgebra:** Al-Khwarizmi, sábio do século IX, sistematizou soluções de equações e estabeleceu a base da álgebra moderna em sua obra *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*;
- **Trigonometria:** Demandas práticas da astronomia levaram ao desenvolvimento de tabelas precisas do que denominamos atualmente como funções como seno e cosseno.
- **Preservação do Conhecimento:** Textos de Euclides, Arquimedes e Diofanto foram traduzidos, reinterpretados e ampliados.

A Matemática Islâmica foi influenciada pelo contexto religioso e cultural, atendendo a necessidades práticas como o cálculo do calendário lunar e a direção da oração. O legado da civilização Islâmica transcende suas fronteiras, influenciando decisivamente a ciência moderna. Obras de estudiosos como Avicena e Averróis preservaram e ampliaram conhecimentos clássicos, enquanto textos matemáticos de Al-Khwarizmi e Omar Khayyam foram fundamentais para o desenvolvimento europeu. Assim, a civilização Islâmica não apenas preservou o conhecimento antigo, mas também o expandiu, contribuindo para o progresso do saber humano.

4-BREVE HISTÓRICO SOBRE O TRIÂNGULO ARITMÉTICO

Ao pensar no desenvolvimento de nossa dissertação, entendemos a importância de se compreender como o Triângulo Aritmético foi pensado, percebido, projetado, adaptado e até criado por sábios de outras civilizações. Este panorama pode nos auxiliar a compreendermos melhor a dificuldade de Al-Muncim em propor problemas e, assim, adaptarmos o nosso Recurso Educacional para os dias atuais. Pensando nisso, discutiremos, neste capítulo, um pouco mais sobre o Triângulo Aritmético em algumas civilizações.

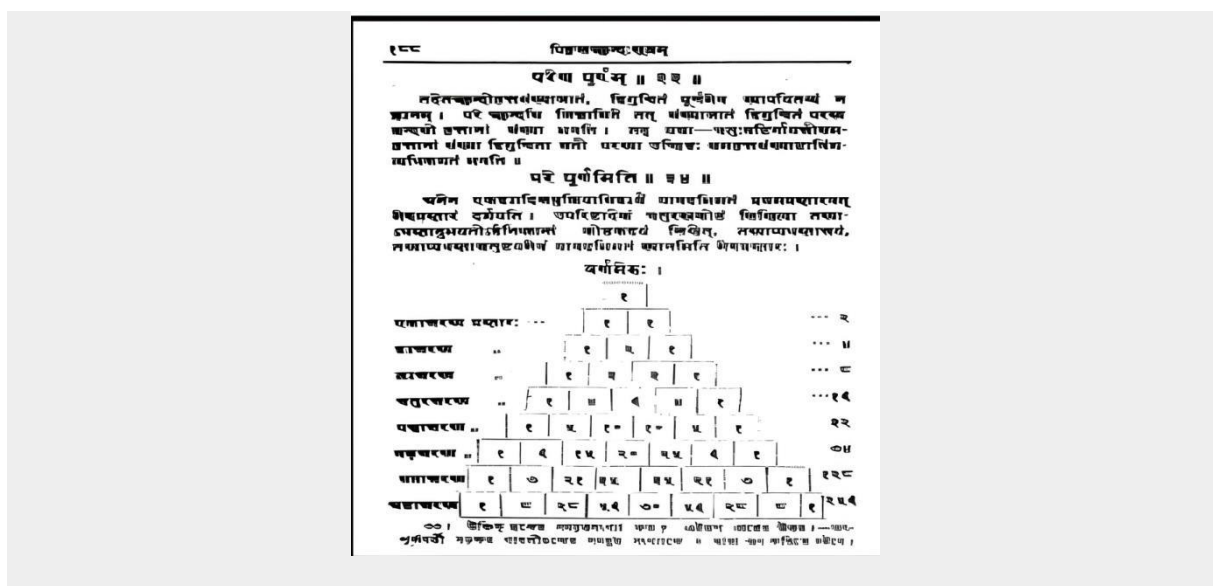
4.1-História do Triângulo Aritmético

Segundo Nobre (2004), o Triângulo Aritmético foi chamado de vários outros nomes ao longo do tempo e do local, tais como: Triângulo Aritmético, Triângulo de Yang Hui, Triângulo Combinatório, Triângulo de Tartaglia e Triângulo de Pascal. Isso é devido a ele ter sido percebido ou divulgado por diversos estudiosos, em sociedades diferentes, por isso, algumas vezes o triângulo recebia o nome de tal estudioso. Essas alterações constantes aconteceram visto que o estudo foi desenvolvido por diversos homens em tempos e sociedades diferentes. Neste trabalho adotaremos o nome de Triângulo Aritmético de modo a evitar o eurocêntrico de Triângulo de Pascal ou Tartaglia, ressaltando que utilizaremos o trabalho de um sábio islâmico. Mais à frente o leitor poderá observar que até mesmo Pascal o denominava de Triângulo Aritmético.

Iniciaremos a apresentação sucinta de alguns estudiosos que se dedicaram ao Triângulo Aritmético em regiões não europeias. Por exemplo, na Índia, conforme apontado Silva (2015), os primeiros registros de estudo são do indiano Pingala que viveu por volta de 200 a.E.C., ou seja, esse triângulo já existia muito antes do francês Pascal (nascido no ano de 1623 E.C). Pingala utilizou o Triângulo Aritmético, em um de seus estudos do que hoje denominamos de análise combinatória.

O Triângulo Aritmético, utilizado por ele, ficou conhecido como Triângulo Combinatório, no qual se estudava combinações métricas das sílabas e é descrito em sua obra *Chandra Sutra* (Figura 5).

Figura 4: Triângulo Aritmético de Pingala



Fonte: Affonso (2014, p.14)

As combinações discutidas por Pingala foram realizadas a partir de caracteres de seu idioma. Para realizarmos uma adaptação didática para o idioma português imagine que queremos calcular as combinações possíveis para as sílabas ma, me e mi. Pingala observou a quarta linha do Triângulo Aritmético para resolver este problema. Dividindo em casos podemos observar que teremos:

- Três combinações de uma só sílaba: {ma, me, mi}
- Três combinações de duas sílabas: { mame, mami, memi}
- Uma combinação de três sílabas: {mamemi}

Vale ressaltar que o estudo do Triângulo Aritmético por estudiosos indianos não se restringiu a Pingala. Na Figura 6, o leitor pode observar os nomes de outros sábios da Índia que se dedicaram a estudos e escreveram obras relacionadas ao triângulo.

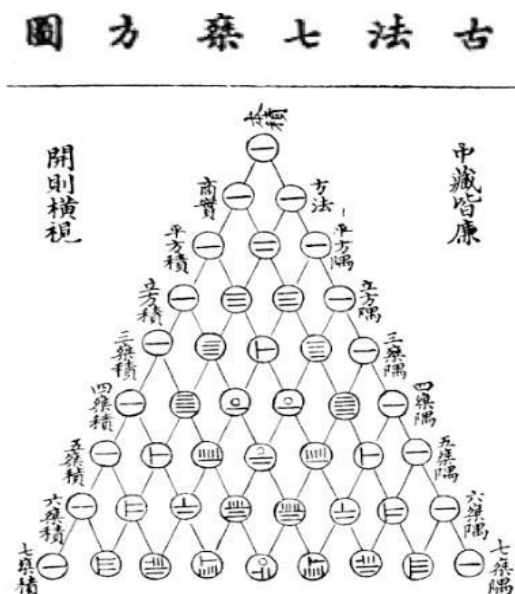
Figura 5: Sábios indianos que discutiram o Triângulo

Matemático	Época	Livros associados ao triângulo
?	300 AC	<i>Bhagabati Sutra</i>
?	200 AC	<i>Sthananga Sutra</i>
Pingala	200 AC	<i>Chanda Sutra</i>
Mahavira	850 dC	<i>Ganita Sara Samgraha</i>
Halayudha	950 dC	<i>Mritasanjivani</i>

Fonte: Affonso (2014, p.15)

Em outros continentes o triângulo também foi objeto de estudo, por exemplo, na China. Segundo Santiago (2016) o aparecimento do Triângulo Aritmético se deu através do estudo das aproximações das raízes quadradas, cúbicas e as demais, e foi denominado sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais. Esse estudo foi realizado pelo famoso chinês Yang Hui (1238-1298), que escreveu dois livros abordando o estudo do Triângulo Aritmético e suas aplicações, a saber: *Alfa e Ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos e Uma análise detalhada dos métodos do livro Jiuzhang Suanshu "Nove Capítulos da arte Matemática"*. Dessa forma, o Triângulo Aritmético ficou conhecido também como, triângulo de Yang Hui por meio de cálculo dos coeficientes binomiais.

Figura 6: Triângulo Aritmético de Yang Hui



Fonte: Affonso (2014, p.16)

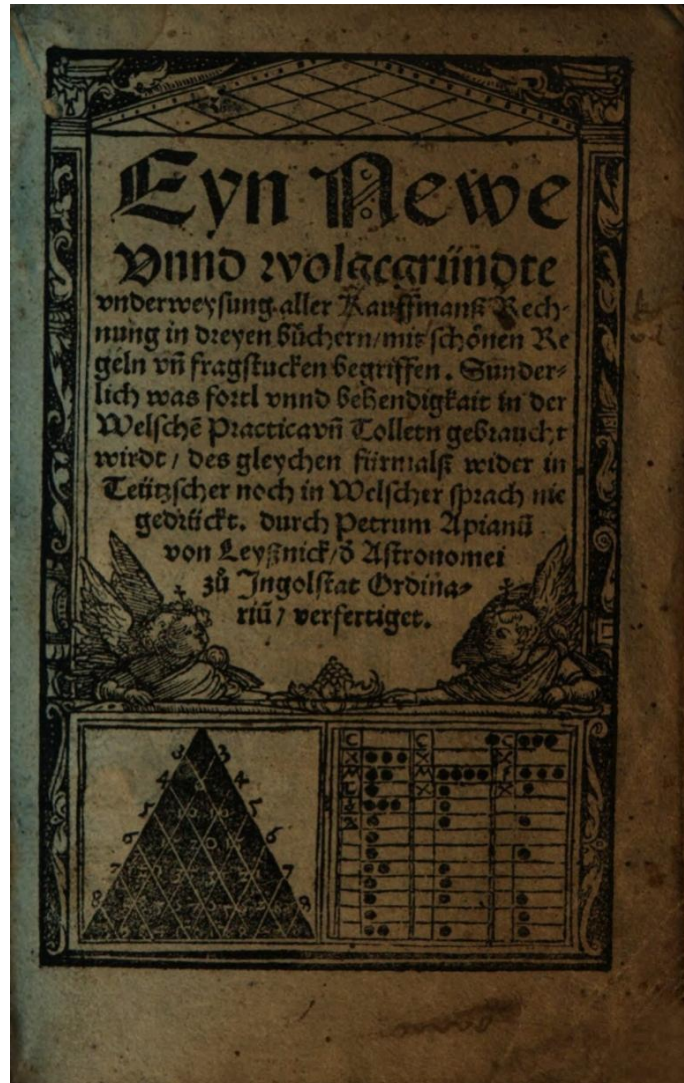
Este texto: *Jiuzhang Suanshu* traduzido por “Nove capítulos da Arte Matemática”, é um dos mais importantes e antigo livro dos chineses. Observe que é um texto anônimo que remonta ao segundo século antes da Era Comum.

Ao direcionarmos nosso olhar para a Europa, iniciamos com os estudos realizados por acadêmicos alemães no final do século XV. Destacamos Petrus Apian (1495-1551), que publicou, em 1527, a obra intitulada *Eyn Neue unnd wolgegründte underweysung aller Kauffmannss- Rechnung*², em tradução livre, Um novo e bem fundamentado ensinamento de

² Uma cópia do trabalho de Petrus Apianus pode ser encontrada no link: <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11110160?page=1>

Cálculo dos Comerciantes, que se trata de um trabalho específico sobre aritmética comercial ou contabilidade comercial. Nesta obra, observe que na capa o Triângulo Aritmético aparece no canto inferior esquerdo (Figura 8).

Figura 7: Capa do livro de Apianus

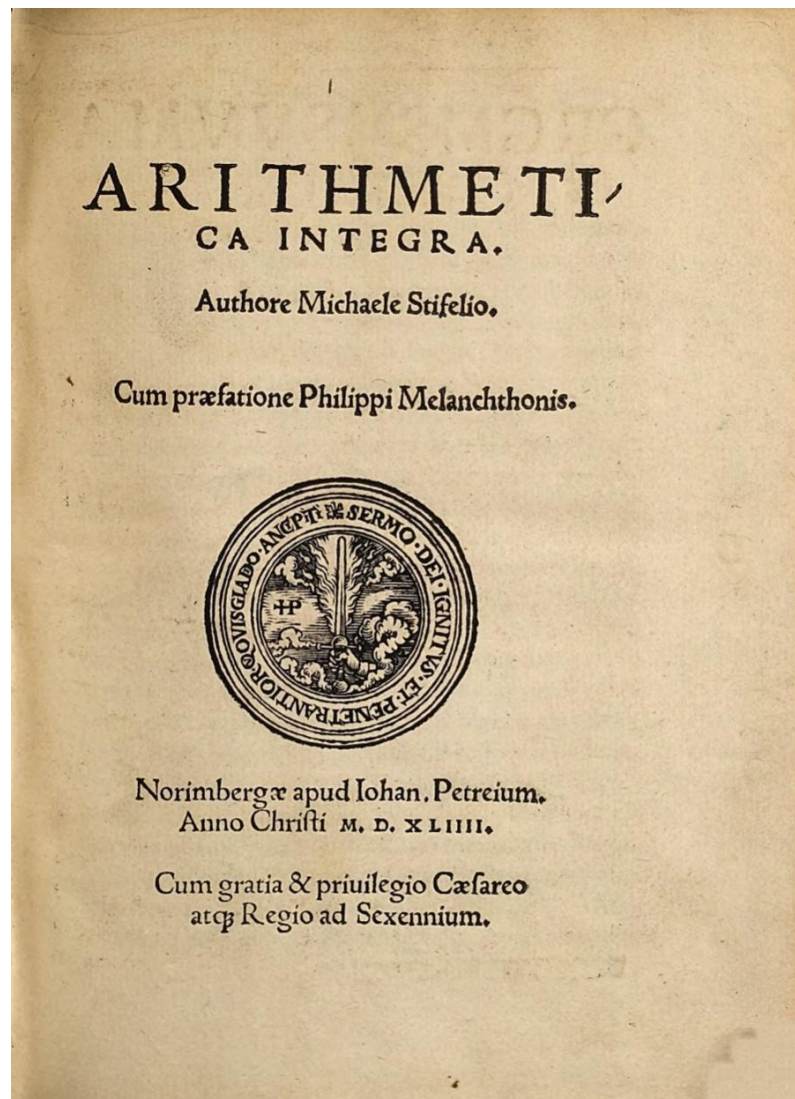


Fonte: Arquivo do autor

Outro estudioso que fez menção ao Triângulo Aritmético na Europa foi o também alemão Michel Stiefel (1486-1567). Ele estudou algumas das propriedades do Triângulo Aritmético e as apresenta em sua obra de 1544, escrita em latim e intitulada *Arithmetica Integra*³ (Figura 9).

³ Uma cópia do trabalho de Stiefel pode ser encontrada em: <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11740149?q=%28arithmetica+integra%29&page=9>

Figura 8: Capa do livro de Stiefel



Fonte: Arquivo do autor

Não é o intuito de nosso trabalho estudarmos em profundidade a obra de Stiefel, por esse motivo não realizaremos a tradução do latim para o português. Porém, o leitor pode ver na Figura 10, a apresentação do Triângulo Aritmético no texto do sábio alemão.

francesas lideradas por Gaston de Foix, buscou refúgio em uma igreja com sua mãe e irmã. No entanto, foi gravemente ferido por golpes na cabeça e no rosto. Sem recursos para pagar um médico, sua mãe tratou das feridas com sua própria saliva, prática instintiva observada em animais.

Figura 10: Capa do livro de Tartaglia na qual pode-se observar sua foto

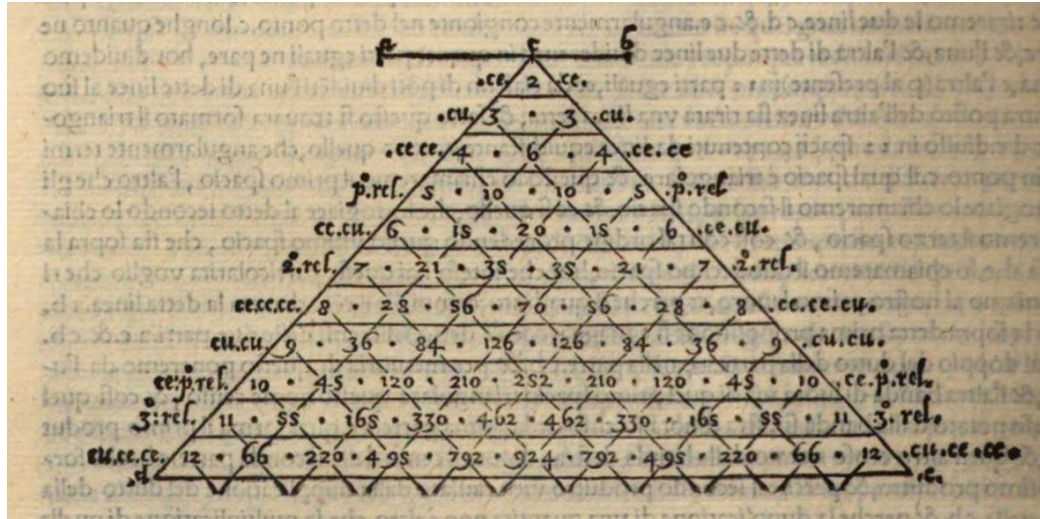


Fonte: Arquivo do autor

Segundo Silva (2015), Tartaglia foi um dos primeiros matemáticos ocidentais a construir uma tabela contendo o número de combinações possíveis em um lançamento de dado, o que consolidou sua reivindicação como criador do Triângulo Aritmético (Figura 12).

Seus estudos culminaram na publicação do livro *General Trattato di numeri et misure*⁴ (Tratado Geral sobre Números e Medidas) em 1556, que abordava temas como cálculos combinatórios, regras de aritmética, álgebra, geometria e física.

Figura 11: Triângulo Aritmético na obra de Tartaglia

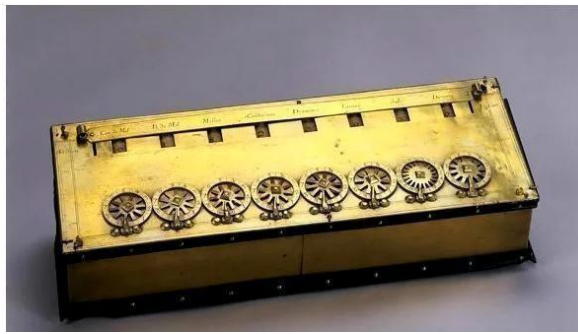


Fonte: Arquivo do autor

Outro personagem europeu que discutiu o Triângulo Aritmético é o famoso filósofo, matemático, físico e escritor francês Blaise Pascal (1623-1662). Pascal nasceu em Clermont-Ferrand, França, em 19 de junho de 1623, e, após a morte de sua mãe, foi educado pelo pai. Demonstrou talento precoce para as ciências, o que levou sua família a se mudar para Paris. Aos 16 anos, escreveu o *Essai pour les coniques*, (Ensaio Sobre as Cônicas) (1640), e, posteriormente, em Rouen, realizou suas primeiras pesquisas no campo do que consideramos hoje como ciência Física. Nessa época, inventou a primeira máquina de calcular (figura 10), chamada Pascaline, hoje preservada no Conservatório de Artes e Medidas de Paris.

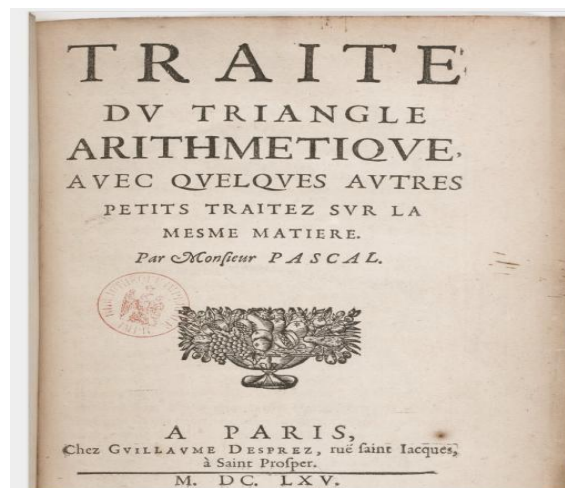
Pascal consolidou os estudos do Triângulo Aritmético, publicando em 1654 um trabalho que demonstrava diversas propriedades do triângulo aplicadas ao estudo das probabilidades. Dessa forma, Pascal se destacou como um dos principais matemáticos de sua época, dedicando grande parte de sua vida à Matemática e à Física

⁴ Uma cópia do trabalho de tartaglia pode ser encontrada em <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10860863?q=%28General+Trattato+di+numeri+et+misure+%29&page=1>

Figura 12: Pascaline

Fonte: Revista eletrônica “eBIOGRAFIA

O Triângulo Aritmético ficou conhecido como “Triângulo de Pascal” devido à monografia de cerca de sessenta páginas sobre este triângulo escrita por ele, intitulada *Traité du Triangle Arithmétique*⁵ ou ‘Tratado do Triângulo Aritmético’ a qual foi publicada após sua morte, em 1665 (figura 14). Note que ele não nomeia o triângulo com seu nome, a denominação de Triângulo de Pascal foi realizada em 1730, ano em que Abrahan de Moivre (1667-1754) em sua marcante e influente obra "Miscellanea analytica de série bus et quadraturis (1730)" usou o nome de Pascal ("Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM") para dar referência ao Triângulo Aritmético.

Figura 13: Capa do tratado de Pascal

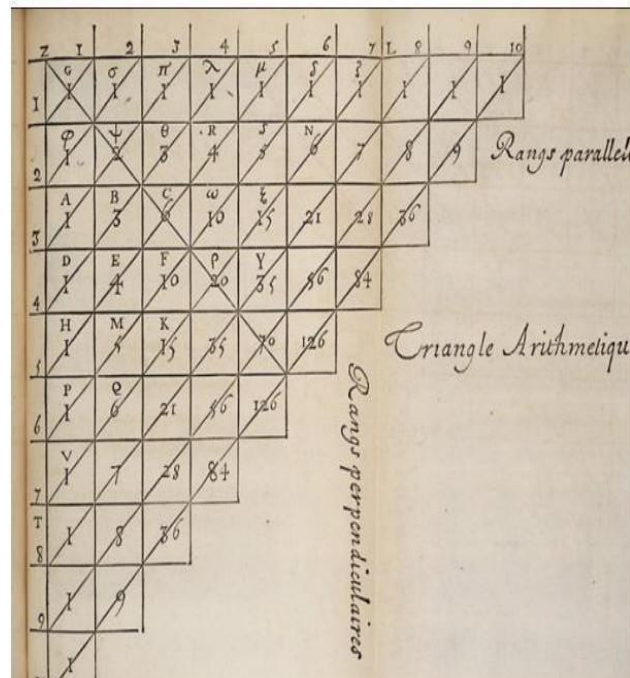
Fonte: Arquivo do autor

Conforme Silveira (2024), Pascal é conhecido não apenas pelas análises do Triângulo Aritmético, mas por distintas contribuições na própria Matemática, como estudos sobre as cônicas, o cicloide e por ser desbravador e iniciador nos estudos de probabilidade. Desse

⁵ Uma cópia deste trabalho pode ser encontrada em <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012?rk=21459;2>

modo, o matemático Blaise Pascal analisou suas propriedades do Triângulo Aritmético fazendo sua construção pensando de forma mais geométrica em retas horizontais, verticais e diagonais.

Figura 14: Triângulo Aritmético na obra de Pascal



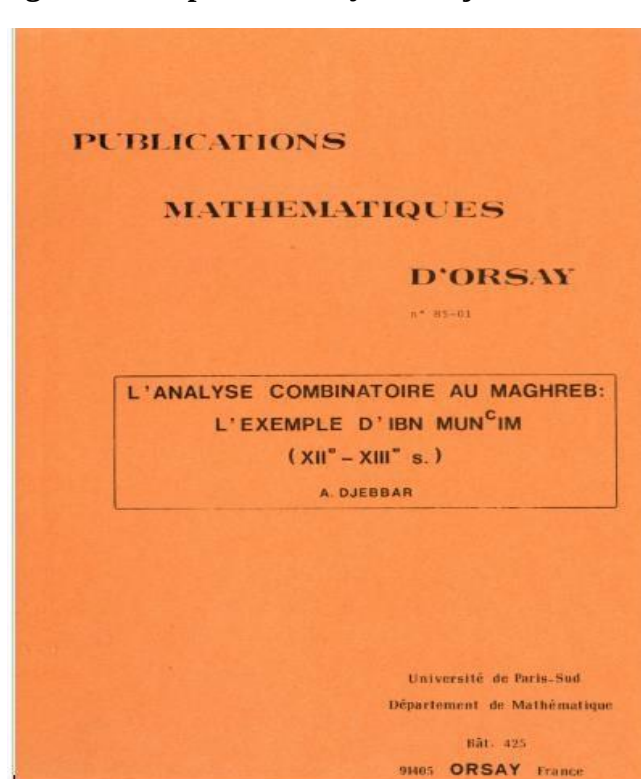
Fonte: Arquivo do autor

Em suma, o conhecimento histórico sobre o Triângulo Aritmético evidencia sua relevância ao longo dos séculos, desde suas primeiras formulações em manuscritos chineses até sua sistematização por matemáticos como Blaise Pascal, entre outros. Sua estrutura permite diversas aplicações em áreas como combinatória, teoria dos números e probabilidade, e em vários ramos da ciência demonstrando sua importância para o desenvolvimento da Matemática. Além disso, compreender sua evolução histórica contribui para uma visão mais ampla do progresso do pensamento matemático, ressaltando a interconexão entre diferentes períodos e culturas na construção do conhecimento científico. Contribui, também para uma visão mais contextualizada nos conhecimentos matemáticos e culturais que inspirou Al Muncin na construção do triângulo, este no qual está baseado nosso produto pedagógico.

5-O PROBLEMA DAS SEDAS DE AL-MUNCIM

O problema que deu origem a nosso Recurso Educacional está presente na obra do sábio islâmico Al Muncim. Tivemos acesso ao trabalho por meio da tradução comentada realizada pelo matemático e historiador da Matemática argelino Ahmed Djebbar⁶, que em 1985 propôs uma obra de análise combinatória intitulado *L'Analyse combinatoire au Maghreb: l'exemple d'Ibn Muncim (XII - XIII s⁷)* (Figura 16).

Figura 15: Capa da tradução de Djebbar



Fonte: Arquivo do autor

Djebbar (1985) estruturou seu pequeno livro em oito capítulos⁸, conforme podemos observar na Figura 17, sendo no nosso interesse principal o capítulo terceiro, intitulado Du Fiqh al Hisab, no qual realiza a tradução, para o francês, dos problemas propostos por Al-Muncim, bem como as discussões das resoluções.

⁶ Ahmed Djebbar, matemático e historiador da ciência argelino, destacaram-se por suas contribuições no estudo da Matemática no mundo islâmico durante a Idade Média, investigando a riqueza de ideias Matemáticas que floresceram nesse período.

⁷ Análise combinatória em Magrebe: o exemplo de Ibn Muncim (séculos XII a XIII)

⁸ Introdução; Análise e Comentários; Tradução da seção XI Du Fiqh al-Hisab; Índice de palavras; Texto árabe da seção XI; Anexos; Notas e referências; Índice de nomes próprios.

Figura 16: Sumário do trabalho de Djebbar

I.	INTRODUCTION	1
II.	ANALYSE ET COMMENTAIRES	18
III.	TRADUCTION DE LA SECTION XI DU FIQH AL-HISĀB	49
IV.	INDEX DES MOTS	79
V.	TEXTE ARABE DE LA SECTION XI	81
VI.	ANNEXES	104
VII.	NOTES ET REFERENCES	115
VIII.	INDEX DES NOMS PROPRES	122

Fonte: Djebbar(1985, p. 1)

O sábio islâmico Al-Muncim escreve uma obra dedicada a estudantes em que propõe onze problemas a partir dos quais é possível se discutir o que hoje denominamos de Análise Combinatória. Segundo Djebbar (1985) os matemáticos da região de Magrebe, cidade atualmente localizada em Marrocos, se interessam por combinatória a partir de duas tradições: (1) linguística e gramática árabe e atividades de astrologia; (2) música, astronomia e álgebra.

A obra de Al-Muncim está baseada na primeira tradição elencada pelo autor e propõe que o leitor encontre números de combinações possíveis de palavras a partir de letras. Entretanto, o trabalho se inicia com um problema mais prático a partir de combinações de linhas de sedas para se contruir **borlas** (Figura 21, p. 35). Nesse sentido, o problema das borlas, proposto por Al-Muncim, combina cores de fios de seda para a confecção de borlas⁹, conforme pode ser observado a seguir:

Dadas dez cores de seda, com as quais queremos fazer borlas de uma cor, duas cores, três cores, e assim sucessivamente até que a última borla que é dada pelas dez cores de seda seja construída. Queremos saber qual é o número de **borlas** de cada tipo, dado que as cores de cada borla são conhecidas e qual o número de todas as borlas juntas tendo em vista as diferentes cores de borlas (Djebbar, 1985, p.50, tradução nossa).

Importante salientar o papel das sedas na civilização Islâmica. A Rota da Seda foi uma antiga rede de vias comercial, formalmente estabelecida, ligava as regiões do mundo antigo por meio do comércio. A rota da seda passava por mar e terra e atravessava vastas extensões de território, passando por desertos, estepes, montanhas e planícies (Figura 18). Ela se

⁹ Borlas são enfeites feitos de fitas, lãs ou sedas. Esses ornamentos são pendentes que podem ser utilizados em roupas, tapetes, bolsas.

estendia desde a China, até as margens do Mar Mediterrâneo, abrangendo cerca de 6.400 quilômetros.

Figura 17: Rota da seda



Fonte: World History Encyclopedia

Enquanto isso, a rota seguia pelos mares do Sul da Ásia, conectando o Oriente Médio, a Índia, o Sudeste Asiático e a China. Portanto, devido a esta rota, houve intenso comércio de especiarias e tecidos. A Rota da Seda desempenhou um papel crucial no desenvolvimento econômico e cultural das civilizações ao longo dos séculos. Ela facilitou o intercâmbio de conhecimentos, tecnologias e culturas entre o Oriente e o Ocidente, influenciando profundamente o curso da História mundial. Os tecidos coloridos de seda desempenharam um papel importante na cultura Islâmica para confecção de roupas e acessórios como borlas.

Retomando ao problema proposto por Al-Muncim, ao apresentar a resolução que se trata de combinar cores, o sábio islâmico constroi uma tabela que ao se colocar as respostas em determinada sequência, a sua forma assemelha-se a um triângulo que denominamos Aritmético (Figura 19):

Figura 18: Triângulo de Al-Muncim

وهكذا تخطيط المثال في الجدول										جدول الجواب
من عشرة ألوان										1
جدول الشرايب التي من تسعة ألوان تسعة ألوان										9
جدول الشرايب التي من ثمانية ألوان ثمانية ألوان										8
جدول الشرايب التي من سبعة ألوان سبعة ألوان										7
جدول الشرايب التي من ستة ألوان ستة ألوان										6
من خمسة ألوان خمسة ألوان										5
من أربعة ألوان أربعة ألوان										4
من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان										3
من لونين لونين										2
من لون لون										1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	45
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	120
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	210
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	252
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	210
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	120
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	45
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10

Fonte: Djebbar (1985, p.45)

Como a figura anterior está escrita em árabe, fizemos a tradução para o português a partir da obra francesa na qual podemos observar na segunda linha uma tabela de borlas de nove cores (Figura 20). Na última coluna da tabela o leitor pode observar a soma dos resultados das linhas.

Figura 19: Triângulo aritmético traduzido

Este é o layout do exemplo na tabela										
De dez cores										1
Mesa de borlas de nove cores.										9
Mesa de borlas de oito cores.										36
Tabela de franjas de sete cores, sete cores										120
Tabela de borlas do ano das cores, ano das cores										210
De cinco cores, cinco cores										252
De quatro cores, quatro cores										210
De três cores, três cores										120
De duas cores, duas cores										45
De cor em cor										10
	Primeira cor	Segunda cor	Tercera cor	Quarta cor	Quinta cor	Sexta cor	Sétima cor	Oitava cor	Nona cor	Décima cor
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Oliveira (2021, p.5)

Na construção adaptada do Triângulo utilizamos a metodologia de dividir o problema em partes por meio de perguntas apropriadas conforme indicado por Mendes (2002), elaborando uma adaptação didática, em que no seu desenvolvimento, os alunos obterão dados que serão usados para preencher uma tabela e construir o Triângulo Aritmético. A primeira questão proposta servirá para construir uma das linhas do triângulo. Assim, por exemplo, o professor pode propor a seguinte questão:

Atividade

Questão 1: Se tivermos três rolos de cores diferentes, por exemplo, azul, vermelho e amarelo, quantas borlas distintas poderemos construir? Lembrem-se de que podemos construir borlas usando apenas uma cor de seda, duas cores de seda ou as três cores de seda.

- a) com zero rolos de sedas, quantas possibilidades existem de construir borlas distintas nós teremos?
- b) Com os três rolos de linhas disponíveis, quantas

borlas diferentes podem fazer com apenas uma cor?

c) Ainda com os três rolos de linhas disponíveis, quantas borlas podemos construir que tenham duas cores?

d) Por fim, vamos construir borlas com as três cores, quantas podem ser construídas?

As resoluções e discussões da atividade podem ser vistas em detalhes em nosso Recurso Educacional, neste capítulo apresentamos a discussão desta primeira questão e como pode ser abordada pelo professor.

Questão 1: Se tivermos três rolos de cores diferentes, por exemplo, azul, vermelho e amarelo, quantas borlas distintas poderemos construir? Lembrem-se de que podemos construir borlas usando apenas uma cor de seda, duas cores de seda ou as três cores de seda.

Essa questão também pode ser dividida em partes de modo que os estudantes preencham os dados de uma das linhas a partir de cada célula. Nesse sentido, o professor pode propor outras questões.

a) com zero rolos de sedas, quantas possibilidades existem de construir borlas distintas nós teremos?

Resolução: 01 possibilidade apenas, pois é aquela que não tem cor nenhuma. Deve ser destacada para os estudantes que não estamos interessados no número de cores, mas sim no número de possibilidades de borlas a serem construídas, nesse caso, zero pode ser considerado como sendo uma possibilidade.

Na figura temos as ilustrações dessas borlas.

Figura 20: Ilustração de borlas de uma cor



Fonte: Imagem de nossa própria autoria

b) Com os três rolos de linhas disponíveis, quantas borlas diferentes podem fazer com apenas uma cor?

Resolução: 03 possibilidades de borlas, cada borla é feita de uma só cor. Temos uma borla toda em azul, uma toda em vermelho, e uma toda em amarelo.

c) Ainda com os três rolos de linhas disponíveis, quantas borlas podemos construir que tenham duas cores?

Resolução: Para a resolução deste item vamos enumerar as borlas que podem ser construídas e contar quantos resultados obtivemos.

Borla 1: azul e vermelha

Borla 2: azul e amarela

Borla 3: vermelha e amarela

Ou seja, temos três possibilidades.

d) Por fim, vamos construir borlas com as três cores, quantas podem ser construídas?

Resolução: Temos apenas 01 solução, ou seja, a borla que é vermelha, azul e amarela.

Portanto, a solução da questão proposta, pode ser organizada em uma tabela de modo que os estudantes possam observar, a partir das demais questões, como o Triângulo Aritmético vai sendo construído (Figura 21).

Figura 21: Tabela da atividade preenchida

Rolos de linha de cores diferentes	a) com 0 cor	b) com 1 cor	c) com 2 cores	d) com 3 cores	e) com 4 cores	f) com 5 cores
Q1) (0 rolo)	1					
Q2) (1 rolo)	1	1				
Q3) (2 rolos)	1	2	1			
Q4) (3 rolos)	1	3	3	1		
Q5) (4 rolos)	1	4	6	4	1	

Fonte: Produzido pelo autor

Também há questões referentes às interessantes propriedades do Triângulo Aritmético que podem ser exploradas, algo que fazemos na proposta do nosso Recurso Educacional que é uma adaptação pedagógica do problema proposto pelo sábio Islâmico Al-Muncim.

5.1 O que sabemos sobre o sabio Al- Muncin

Nesta seção exploramos a vida e a obra de Ahmad al-Muncim. Segundo Oliveira, Gil e Drummond (2024, p.03) Al Muncin foi um estudioso Islâmico falecido em 1228, produziu o tratado *Fiqh al-Hisab* (A Jurisprudência da Aritmética) que reúne cálculos práticos e teóricos, com destaque para a análise combinatória, introduzindo métodos inovadores que representam uma transição do uso exclusivo de tabelas para a aplicação de fórmulas. A pesquisa contextualiza o manuscrito no cenário político e cultural de Marraquexe, bem como discute suas contribuições para a Matemática e a linguística árabes. Ahmad al-Muncim é uma figura central na História da Matemática Islâmica, particularmente no campo da análise combinatória. Seu manuscrito, *Fiqh al-*

Hisab, escrito entre 1207 e 1212, representa um marco na sistematização de problemas matemáticos, com implicações significativas para o desenvolvimento posterior da combinatória.

Al-Muncim nasceu na Andaluzia e posteriormente estabeleceu-se em Marraquexe, onde trabalhou e faleceu em 1228. O contexto político da época, marcado pela Dinastia Almóada, influenciou o ambiente acadêmico e possibilitou avanços científicos significativos. O manuscrito foi dedicado aos estudantes e visava combinar as ciências teóricas e práticas em um único tratado, algo inovador para o período.

Conforme Oliveira, Gil e Drummond (2024, p.03), o tratado aborda questões de análise combinatória no capítulo XI, introduzindo problemas que iam além das tabelas tradicionais. Al-Muncim propõe um método geral, estruturado por meio de problemas que aumentam progressivamente em complexidade, culminando na formulação de uma regra geral em linguagem textual. A obra é pioneira ao integrar linguística árabe e Matemática, utilizando conceitos gramaticais e outras características do idioma árabe para explorar as configurações de palavras.

A principal inovação de Al-Muncim foi a transição do uso exclusivo de tabelas para o desenvolvimento de fórmulas, expressas textualmente pela característica da época. Essa abordagem marcou o início de uma nova era na combinatória, alinhada ao que posteriormente seria o triângulo aritmético e o coeficiente binomial (Djebbar, 1985). Suas ideias foram retomadas por outros sábios como Ibn al-Banna e influenciaram gerações posteriores (Oliveira, Gil e Drummond,, 2024 p.1 - 3).

Ahmad Al-Muncim desempenhou um papel crucial no desenvolvimento do que denominamos atualmente de Análise Combinatória e na integração de métodos teóricos e práticos. Sua obra, enraizada no contexto cultural islâmico, ilustra a riqueza da Matemática não-eurocêntrica e permanece um testemunho do vigor intelectual da época. Hoje em dia o Triângulo Aritmético que já foi chamado por vários nomes está presente nos livros didáticos brasileiros como “Triângulo de Pascal”.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi tratar de um dos temas do currículo de Matemática do Ensino Básico, a Análise Combinatória, porém a partir de uma perspectiva distinta da tradicional voltada para o Ensino Fundamental anos finais, propondo assim que o aluno não decore fórmulas, mas que ele consiga compreender por meio de uma pesquisa investigativa histórica em Matemática (Mendes, 2002).

Seguindo esta proposta didática, o aluno não se tornará um conhecedor passivo, mas um construtor ativo de seu conhecimento, o que não quer dizer que o professor perderá sua função, pois caberá a ele orientar e auxiliar o aluno a organizar o conhecimento.

Esta dissertação é uma adaptação de uma atividade proposta pelo estudioso islâmico de nome Al-Muncim, que no século XII, montou o Triângulo Aritmético através de combinações de linhas de seda, usadas em sua sociedade para a confecção de adereços em roupas, borlas. Assim sendo, esta proposta traz ao aluno não apenas uma bagagem Matemática, mas também conhecimentos extracurriculares, auxiliando em seu desenvolvimento social e cultural ao estar em contato com uma cultura tão rica e distinta. Não desejamos chegar ao fim da discussão sobre como ensinar análise combinatória no nível do ensino fundamental, mas podemos assumir que já não é possível mais ensiná-la sem dar início a uma reflexão sobre a prática pedagógica que aproxime melhor o aluno do conhecimento desejado.

6.1 Implicações da Pesquisa para o Professor

A utilização da História da Matemática como metodologia pedagógica para o ensino do Triângulo Aritmético e de Análise Combinatória no Ensino Fundamental apresenta implicações significativas para a minha prática docente. A seguir, são discutidas algumas das principais contribuições e desafios derivados dessa abordagem que noto durante minha prática enquanto professor de Matemática do Ensino Fundamental.

A inserção da História da Matemática no planejamento das minhas aulas, me oferece ferramentas para contextualizar conceitos matemáticos, facilitando a compreensão dos alunos. No caso da análise combinatória, abordar problemas históricos, como a atividade proposta por Al-Muncim, pode ajudar os alunos a perceberem o desenvolvimento histórico das ideias Matemáticas. Esse entendimento histórico reforça a conexão entre os conteúdos escolares e aplicações do mundo real ou acadêmico.

Por meio da exploração histórica, sou, também, levado a refletir sobre a natureza da Matemática enquanto construção humana e cultural. Esse processo incentiva uma visão crítica sobre como os conceitos matemáticos são apresentados e compreendidos em sala de aula. Por exemplo, o triângulo aritmético, além de sua utilidade prática, também pode ser explorado como um reflexo do pensamento matemático de sua época, promovendo discussões sobre o papel da curiosidade e da investigação no avanço da ciência.

A abordagem histórica requer do professor não apenas conhecimento matemático, mas também competências de pesquisa e interpretação de textos históricos. Essa demanda promove o aprimoramento profissional, incentivando o docente a ampliar seus horizontes teóricos e práticos. Além disso, o professor precisa adaptar estratégias de ensino para integrar narrativas históricas e problemas clássicos ao currículo tradicional, equilibrando rigor acadêmico com acessibilidade pedagógica.

Ao conectar a Matemática às Histórias dos sábios estudiosos e ao contexto sociocultural de sua época, eu como professor tenho a oportunidade de tornar as aulas mais significativas e envolventes. Essa abordagem pode estimular o interesse dos alunos, especialmente aqueles que encontram dificuldades em visualizar a relevância dos conceitos matemáticos. Por exemplo, ao ensinar o triângulo aritmético, narrar as contribuições de Al Muncin, Stiffel, Pascal, entre outros, e isso pode gerar curiosidade e abrir espaço para discussões interdisciplinares.

Embora as vantagens dessa abordagem sejam evidentes, também há desafios que precisam ser considerados. A incorporação da História da Matemática exige formação continuada para que os professores possam desenvolver competências em pesquisa histórica e didática específica. Ademais, há uma necessidade de materiais didáticos apropriados que articulem o conteúdo histórico com os objetivos do ensino fundamental, sem sobrecarregar o planejamento docente.

Como conclusão final, tenho para mim que a pesquisa sobre o uso da História da Matemática para o ensino de análise combinatória e do triângulo aritmético no ensino fundamental aponta para um caminho promissor de inovação pedagógica. Para o professor, as implicações incluem o enriquecimento de sua prática profissional, por minha própria experiência, pois sempre tive muita dificuldade em compreender o estudo de probabilidades associado à análise combinatória ou mesmo no raciocínio combinatório como um todo e essa dificuldade me trouxe insegurança, fazendo com que eu ignorasse de ensinar esse conteúdo aos alunos e agora, me sinto mais seguro trazendo mais motivação para mim e a potencialização do engajamento dos alunos e com isso, auxiliando para o fortalecimento da

relação entre a Matemática e a sociedade. Contudo, para que essa abordagem se consolide, é indispensável um investimento contínuo em formação e recursos pedagógicos, como livros e apostilas, por exemplo, já prontos e preparados especificamente para sala de aula.

Após a escrita desta dissertação, minhas aulas foram alteradas e comecei a pincelar tópicos de História da Matemática com os estudantes. Por exemplo, ao ensinar sobre os números inteiros eu pesquisei como e porquê se originou esse estudo e a importância de seu contexto histórico para o Ensino, e notei, o interesse dos alunos aumentarem ao saberem de como facilitou o comércio de mercadorias, por exemplo, e como impactou diversas sociedades, sendo que foi uma evolução que ocorreu gradualmente de forma independente em várias culturas, acompanhando o desenvolvimento do pensamento matemático.

6.2 Implicações da Pesquisa, para mim, como Pesquisador

As implicações da pesquisa sobre análise combinatória e o triângulo aritmético no ensino fundamental, utilizando a História da Matemática como metodologia pedagógica, são significativas para mim como pesquisador, tanto no âmbito pessoal quanto profissional. Esta investigação transcende os limites da própria formação acadêmica, promovendo um aprofundamento conceitual, metodológico e pedagógico.

Em primeiro lugar, ao me dedicar ao estudo de análise combinatória e do triângulo aritmético, eu desenvolvi uma compreensão mais profunda e ampliada de conceitos matemáticos fundamentais. Este aprofundamento não apenas aprimorou a minha competência Matemática como pesquisador, mas também me permitiu identificar e superar lacunas de conceitos matemáticos que haviam na abordagem destes temas em minha própria prática pedagógica. O contato com fontes históricas e aliado à análise crítica do desenvolvimento histórico da Matemática, favoreceu-me na construção de uma visão mais integrada e contextualizada da área.

Além disso, a utilização da História da Matemática como metodologia pedagógica contribuiu para a formação de uma perspectiva mais reflexiva. Este processo me instiga como pesquisador a explorar novos caminhos didáticos, elaborando estratégias que engajem os estudantes por meio de narrativas históricas e aplicações mais concretas. Essa abordagem também enriqueceu minhas competências de pesquisador em planejamento e execução de práticas educacionais inovadoras, promovendo um ensino mais significativo e conectado à realidade dos estudantes.

Do ponto de vista acadêmico, a pesquisa representou um importante passo na

consolidação da minha carreira enquanto profissional da educação. A elaboração da dissertação me ofereceu a oportunidade de contribuir para o campo da educação Matemática, especialmente no que tange à inserção de temas históricos no ensino básico. As contribuições derivadas deste trabalho podem ser apresentadas em eventos escolares e acadêmicos ou outros espaços de divulgação, ampliando a rede de colaborações e fortalecendo o diálogo com outros professores e pesquisadores da área.

Por fim, no âmbito pessoal, o envolvimento com uma pesquisa desta natureza favoreceu o desenvolvimento e melhoria de habilidades como pensamento crítico, organização e disciplina. A interação constante com fontes acadêmicas passadas por meus orientadores, aliada à busca por soluções criativas para problemas de ensino, acabou por me transformar em um pesquisador e em um profissional mais preparado para lidar com os desafios da sala de aula e para atuar como agente de transformação educacional.

Em síntese, as implicações da pesquisa são amplas e multidimensionais, fortalecendo o papel do pesquisador como educador, estudioso e inovador no campo da educação Matemática, assim como no ensino da Matemática. Este trabalho não apenas contribui para o avanço do conhecimento na área, mas também impacta profundamente a própria prática docente, resultando em uma educação mais rica e transformadora para todos os envolvidos.

6.3 Trabalhos Futuros

O mestrado em Matemática constituiu um marco significativo em minha trajetória profissional, proporcionando não apenas um aprofundamento teórico, mas também o desenvolvimento de práticas metodológicas que transformaram minha abordagem ao ensino da Matemática. A escolha do tema "O Triângulo Aritmético e o Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental" foi motivada pelo desejo de contribuir para uma aprendizagem significativa e pelo desafio de tornar conceitos matemáticos abstratos mais acessíveis aos estudantes dessa etapa da educação básica. Este subcapítulo da dissertação tem por objetivo explorar os impactos dessa pesquisa em minha prática docente e sua influência nas minhas futuras iniciativas pedagógicas.

A pesquisa desenvolvida ao longo do mestrado consolidou minha compreensão sobre a relevância da História da Matemática e da investigação científica como instrumentos pedagógicos. A inserção de contextos históricos na apresentação dos conceitos de análise combinatória e do triângulo aritmético possibilitou a elaboração de atividades que fomentam a reflexão crítica e o engajamento dos alunos. Essa abordagem contribuiu para a ressignificação dos conteúdos curriculares e para o aprimoramento de minhas competências enquanto

professor-pesquisador. Inicialmente, o ensino desses tópicos representava um grande desafio para mim, especialmente quando relacionados ao tema das probabilidades, a ponto de serem relegados no planejamento didático. Consequentemente, os alunos ficavam desassistidos em uma área Matemática rica em conceitos e aplicações práticas. A pesquisa possibilitou que eu superasse tais dificuldades, promovendo uma abordagem mais estruturada e eficiente para esses conteúdos.

A partir do começo do estudo da História da Matemática no Mestrado passei a incorporar estratégias de ensino baseadas na História da Matemática, explorando conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Além disso, a utilização de tecnologias educacionais e recursos manipulativos tem enriquecido o processo de ensino-aprendizagem. O aprimoramento no uso de ferramentas como o GeoGebra, bem como a ampliação das competências em pesquisa utilizando a informática, contribuíram para a criação de um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e interativo, permitindo que os alunos desenvolvam competências Matemáticas de forma mais autônoma e criativa.

A experiência adquirida no mestrado também resultou na elaboração de materiais didáticos inovadores, tais como sequências de atividades baseadas no triângulo aritmético e na análise combinatória. Esses materiais, alinhados à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), foram desenvolvidos com o intuito de facilitar a compreensão de conceitos complexos pelos alunos do Ensino Fundamental, promovendo um aprendizado mais significativo e contextualizado.

As implicações do mestrado extrapolam a esfera da sala de aula, abrindo possibilidades para novas pesquisas e colaborações acadêmicas. Pretendo continuar investigando a utilização da História da Matemática como metodologia pedagógica, ampliando os estudos para outros níveis de ensino e explorando temáticas complementares, como a Educação Inclusiva e a formação continuada de professores. Essas perspectivas fortalecem a importância de um ensino matemático inovador e acessível a diferentes públicos.

O mestrado representou um divisor de águas em minha trajetória docente, permitindo-me ressignificar a prática pedagógica no Ensino Fundamental. As habilidades e os conhecimentos adquiridos têm gerado impactos positivos tanto na minha atuação em sala de aula quanto na produção de materiais e no planejamento de projetos educacionais. A continuidade dessa trajetória, pautada na pesquisa e na inovação, será essencial para enfrentar os desafios futuros no ensino da Matemática, possivelmente culminando em um futuro curso de doutorado, consolidando ainda mais minha formação acadêmica e profissional.

REFERÊNCIAS

- AFFONSO, A. **O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton**, 2014. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=56>. Acesso em: 06 dez. 2018.
- BIOGRAFIAS Y VIDA : <https://www.biografiasyvidas.com/> Acesso em: 10 set 224
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma Introdução à Teoria e aos Métodos** : Porto, 1994 p. 336
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.
- DJEBAR, Ahmed. **Publications Mathématiques d'Orsay**. Orsay: *Université Paris-Sud*, 1985.
- FRIED, Michael N. **Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist. Science & Education** **10**, 391–408. 2001. <https://doi.org/10.1023/A:10112050146082001>.
- ISLAMISMO História e Aspectos Gerais da Religião- Revista eletrônica: História do Mundo <https://www.historiadomundo.com.br/> Acesso em : 08 set 2024
- JANKVIST, U. T. **A categorization of the ‘whys’ and ‘hows’ of using history in mathematics education**. Educational Studies in Mathematics, 2009.
- LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade**. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 23, n. 36, p. 657-682, ago. 2010. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/71807>>. Acesso em: 23 maio 2015.
- MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. 2009.
- MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Belo Horizonte: SEE-MG, 2018.
- MOREY, Bernadete Barbosa - OLIVEIRA Davidson Paulo Azevedo e NASCIMENTO, Ana Paula Pereira -**Tópicos de História da Matemática Islâmica Medieval** , 2021
- NOBRE, Sérgio. **Leitura Crítica da História: Reflexões sobre a História da Matemática**. 2004.
- OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; VIANA, Marger da Conceição Ventura; ROSA, Milton. **A Perspectiva Sociocultural da História da Matemática na Sala de Aula: Possibilidades e Limites**. Revista REMATEC, 2014.
- OLIVEIRA, A. R. et al. **Blaise Pascal: Curiosidades sobre o Triângulo**. 2018. Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/pasca_l/index.htm>. Acesso em: 23 dez. 2024.

OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; LOPES, Maria Maroni. **História da Matemática em um Programa de Iniciação Científica Júnior**. REMATEC, 2016.

OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; LÁZARO, Santos Gil ; DRUMOND, Flávio Guilherme de Abreu- **Matemática e Linguística na Civilização Islâmica do Século XII**- revista História da Matemática para professores RHMP, ano 2024

PASCAL. Traité du Triangle Arithmétique. 1617. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/services/engine/search/sru?operation=searchRetrieve&version=1.2&query=%28gallica%20l1%20%22Trait%C3%A9%20du%20triangle%20arithm%C3%A9tique%22%29&lang=fr&suggest=0>

POZO, Juan Ignacio; GÓMEZ CRESPO, Miguel Ángel. **A Aprendizagem e o Ensino de Ciências: do Conhecimento Cotidiano ao Conhecimento Científico**. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 296 p.

PULSKAMP, R. **The Arithmetic Triangle**. 2009. Disponível em: https://www.cs.xu.edu/math/Sources/Pascal/Sources/arith_triangle.pdf. Acesso em: 15 dez. 2024.

ROSADAS, V. D. S. **Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica**. 2016. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/28192/28192.PDF>. Acesso em: 15 dez. 2024.

SANTIAGO, T. P. **Triângulo de Pascal: Aplicações no Ensino Fundamental e Médio**. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/23383/1/Dissertação%20Final.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2024.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GREGO, Sérgio Emílio (Org.). **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Ática, 2002. 664 p.

SILVA, Mariluce Oliveira de. **Do Triângulo à Pirâmide de Pascal**. PROFMAT. UESC, Bahia, 2015. 53p.

SILVEIRA, J. F. P. D. **O Triângulo Pascal é de Pascal? História da Matemática - UFRGS**. 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>. Acesso em: 13 dez. 2024.

VIANA, Marger da Conceição Ventura; ROSA, Milton; OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo. **A Perspectiva Sociocultural da História da Matemática na Sala de Aula: Possibilidades e Limites**. Revista REMATEC, 2014.