



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PEDRO LUCAS LOPES DOS SANTOS

**DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM SISTEMA GRANULAR DEVIDO À
APLICAÇÃO DE UMA CARGA PONTUAL:**

ABORDAGEM VIA DINÂMICA MOLECULAR E TEORIA DA ELASTICIDADE

BELO HORIZONTE

2026

PEDRO LUCAS LOPES DOS SANTOS

**DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM SISTEMA GRANULAR DEVIDO À
APLICAÇÃO DE UMA CARGA PONTUAL:**

ABORDAGEM VIA DINÂMICA MOLECULAR E TEORIA DA ELASTICIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Engenharia Civil do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Gomes de Mattos

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Luiz Coelho Morandini

BELO HORIZONTE

2026

Santos, Pedro Lucas Lopes dos
S237d Distribuição de tensões em sistema granular devido à aplicação de uma carga pontual: abordagem via dinâmica molecular e teoria da elasticidade / Pedro Lucas Lopes dos Santos. – 2026.
80 f. : il., gráfs, tabs., fotos.

Trabalho de conclusão de curso apresentado no curso de graduação do Programa de Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Thiago Gomes de Mattos.

Coorientador: Thiago Luiz Coelho Morandini.

Bibliografia: f. 73-76.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Civil.

1. Dinâmica molecular – Teses. 2. Elasticidade – Teses. 3. Análise elástica (Engenharia) – Teses. 4. Deformações e tensões – Teses. 5. Método dos elementos discretos – Teses. 6. Materiais granulares – Teses. I. Mattos, Thiago Gomes de. II. Morandini, Thiago Luiz Coelho. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 624.171



FOLHA DE APROVAÇÃO DE TCC N° 2/2026 - DEC (11.56.07)

N° do Protocolo: 23062.034108/2026-14

Belo Horizonte-MG, 01 de julho de 2026.

PEDRO LUCAS LOPES DOS SANTOS

DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES SOBRE UM SISTEMA GRANULAR DEVIDO À APLICAÇÃO DE UMA CARGA PONTUAL: Abordagem via dinâmica molecular e teoria da elasticidade

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, do Campus Nova Gameleira, como parte do requisito para obtenção do grau de Bacharel em Engenheiro Civil.

Aprovado em 19 de junho de 2026

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Thiago Gomes de Mattos - Orientador
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Thiago Luiz Coelho Morandini - Coorientador
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Profa. Dra. Renata Gomes Lanna da Silva
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Allbens Atman Picardi Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

**BELO HORIZONTE
2026**

(Assinado digitalmente em 02/07/2026 16:55)

ALLBENS ATMAN PICARDI FARIA

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DF (11.56.10)

Matrícula: ###103#3

(Assinado digitalmente em 02/07/2026 08:28)

RENATA GOMES LANNA DA SILVA

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

CEPC (11.51.14)

Matrícula: ###840#9

(Assinado digitalmente em 02/07/2026 16:47)

THIAGO GOMES DE MATTOS

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DF (11.56.10)

Matrícula: ###195#0

(Assinado digitalmente em 02/07/2026 08:30)

THIAGO LUIZ COELHO MORANDINI

PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO

DEC (11.56.07)

Matrícula: ###172#6

(Assinado digitalmente em 01/07/2026 20:34)

PEDRO LUCAS LOPES DOS SANTOS

DISCENTE

Matrícula: 2021#####8

Visualize o documento original em <https://sig.cefetmg.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: 2, ano: 2026, tipo: **FOLHA DE APROVAÇÃO DE TCC**, data de emissão: **01/07/2026** e o código de verificação: **455a7dce23**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
Av. Amazonas, 7675 – Bairro Nova Gameleira – Belo Horizonte - MG
Departamento de Engenharia Civil - Prédio 12 - Telefone: (31) 3319-6810 – secretaria@civil.cefetmg.br

TERMO DE ACEITE FINAL - ORIENTADOR

Título do TCC:	Distribuição de tensões sobre um sistema granular devido à aplicação de uma carga pontual: Abordagem via dinâmica molecular e teoria da elasticidade.
Data defesa:	19 de junho de 2026
Discente:	Pedro Lucas Lopes dos Santos
Orientador:	Thiago Gomes de Mattos

Eu, Pedro Lucas Lopes dos Santos, declaro que todas as sugestões de correção e melhoria indicadas pela banca de avaliação de meu Trabalho de Conclusão de Curso e acordadas com meu Prof. Orientador foram implementadas no texto e entregues ao mesmo, Prof. Thiago Gomes de Mattos, para validação final.

Documento assinado digitalmente
gov.br PEDRO LUCAS LOPES DOS SANTOS
Data: 22/06/2026 19:41:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

De acordo: Belo Horizonte, 22 de junho de 2026,

Assinatura do Discente

Declaro ter recebido e conferido a versão final do texto e que as sugestões de correção e melhorias indicadas pela banca e acatadas por mim foram implementadas.

Documento assinado digitalmente
gov.br THIAGO GOMES DE MATTOS
Data: 24/06/2026 12:58:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

De acordo: Belo Horizonte, 23 de junho de 2026,

Assinatura do Orientador

Este trabalho é dedicado a todos que veem a mortalidade como uma corrida contra o tempo pela busca do conhecimento, não do capital.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, ao Grande Arquiteto do Universo. Alguns chamam de Deus, outros de Alá, Jeová, Elohim, Adonai, Javé, El, Prakriti, *etc.* Seja lá quem for, ou o que for, apenas sei que se encontra em todas as expressões matemáticas do universo, sua beleza é descomunal, e busco cada vez mais compreendê-lo através dos cálculos.

Ao Thiago Gomes de Mattos pela orientação ao longo dessa jornada, pelos trabalhos em conjunto e, acima de tudo, pelas conversas sempre descontraídas e com muita física. Sou muito seu fã.

Ao Allbens Atman Picardi Faria e Thiago Luiz Coelho Morandini, sou grato por terem aceitado fazerem parte da construção desse trabalho, onde mais uma vez a física e a engenharia andam lado a lado.

Aos esforços e à dedicação de minha mãe, Letícia Lopes Moutinho. Suas lutas tiveram seus frutos aqui, pois agora sou o projeto concluído com que a senhora tanto sonhou. Amarei-te eternamente.

Ao meu pai, Vagner Nogueira dos Santos, por toda a ajuda no meu início de carreira.

Ao meu noivo, David Tadeu Carvalho Amaral, pelo carinho, pela ajuda, pelos momentos de desabafo e por sempre ser uma pessoa presente quando eu precisava. Sem você nada sou, por isso a você "dedico a nação chinesa.[...] Eu te amo como uma coisa nem sequer sabe que ama outra coisa."(Clarice Lispector).

Ao Pedro Henrique Silva, pela amizade que proporcionou conversas e trocas de conhecimento ao longo dessa jornada, e pela ajuda nos ensinamentos com programação.

A todos os professores e colegas que contribuíram nesta minha caminhada.

Aos membros da banca.

À instituição (CEFET-MG) e, em especial, ao Departamento de Engenharia Civil.

Por fim, mas não menos importante, ao neurônio que primeiro brilhou na escuridão de meu lobo frontal, dedico como saudosas lembranças esta monografia e suas abstrações.

A filosofia é escrita neste grande livro que continuamente abre-se diante de nossos olhos (isto é, o universo), e não se pode compreendê-lo, se não se aprende a língua e conhecem-se os caracteres com os quais é escrito. Ele é escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas; sem esses meios é humanamente impossível entender uma só palavra [...] (Galilei, 1623, p. 25, tradução própria).

RESUMO

A análise da distribuição de tensões no solo sob as estruturas é uma etapa da engenharia, sendo tradicionalmente abordada por soluções analíticas baseadas na Teoria da Elasticidade. Embora fundamental, essa abordagem idealiza o solo como um meio contínuo, elástico, isotrópico e homogêneo, distanciando-se do comportamento real de materiais granulares, que são anisotrópicos e particulados. Este trabalho apresenta o estudo do uso da dinâmica molecular, intrínseca ao Método dos Elementos Discretos, na reprodução da distribuição das tensões no solo em comparação com a Teoria da Elasticidade. Utilizou-se um código computacional escrito em Fortran que simula o comportamento de um sistema granular bidimensional modelado como um conjunto de discos circulares, denominados “grãos”. A interação entre os grãos é governada por leis de contato que decompõem as forças em componentes normais e tangenciais, incorporando a rigidez e o atrito das partículas. As simulações partem de configurações iniciais aleatórias nas quais os grãos, sob efeito da gravidade, acomodam-se para representar o comportamento similar ao solo. Subsequentemente, uma carga pontual foi aplicada em um dos grãos na superfície. Realizou-se um conjunto de simulações independentes das quais se extraíram os dados de posição e forças de contato gerados pelo modelo. A média dos resultados foi pós-processada e visualizada graficamente por meio de bibliotecas de código aberto escritas em Python[®], permitindo a análise das tensões internas. Os resultados das simulações foram comparados com os resultados do método de integração formulado por Poulos a partir das equações de Burmister e com os resultados da equação de Boussinesq. Os resultados evidenciaram a propagação heterogênea das tensões via cadeias de força e uma atenuação em profundidade mais lenta que as previsões analíticas. Contudo, destaca-se a forte semelhança do comportamento vertical na interface com a base rígida, onde a restrição de deformação gerou uma concentração de esforços que corrobora diretamente com a previsão da solução de Burmister.

Palavras-chave: dinâmica molecular; teoria da elasticidade; tensões; método dos elementos discretos; sistema granular.

ABSTRACT

The analysis of stress distribution in soils beneath structures is a stage in engineering traditionally addressed by analytical solutions based on the Theory of Elasticity. Although fundamental, this approach idealizes the soil as a continuous, elastic, isotropic, and homogeneous medium, diverging from the actual behavior of granular materials, which are anisotropic and particulate in nature. This work presents a study on the use of molecular dynamics, inherent to the Discrete Element Method, in reproducing soil stress distribution compared to the Theory of Elasticity. A computational code written in Fortran was utilized to simulate the behavior of a two-dimensional granular system modeled as an assembly of circular disks, referred to as "grains." The interaction between grains is governed by contact laws that decompose forces into normal and tangential components, incorporating particle stiffness and friction. The simulations originate from random initial configurations in which the grains settle under the effect of gravity to represent soil-like behavior. Subsequently, a point load was applied to a single surface grain. A set of independent simulations was conducted, from which the position and contact force data generated by the model were extracted. The averaged results were post-processed and graphically visualized using open-source libraries written in Python[®], allowing for the analysis of internal stresses. The simulation outcomes were compared with the results of the integration method formulated by Poulos based on Burmister's equations, and with the results of Boussinesq's equation. The results evidenced a heterogeneous stress propagation through force chains and a slower attenuation with depth compared to analytical predictions. However, the strong similarity of the vertical behavior at the substrate interface is noteworthy, where the deformation constraint generated a stress concentration that directly corroborates the prediction of Burmister's solution.

Keywords: molecular dynamics; theory of elasticity; stresses; discrete element method; granular system.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação do material particulado em função do tamanho da partícula.	26
Figura 2 – Fenômeno da avalanche em uma pilha de grãos.	27
Figura 3 – Dilatância de Reynolds em um meio granular.	28
Figura 4 – Formação de arqueamento em silos.	29
Figura 5 – Experimento de distribuição de tensões em areia seca em cima de um alçapão.	30
Figura 6 – Colisões entre partículas: esferas macias e esferas rígidas.	31
Figura 7 – Ilustração do contato entre duas partículas para o caso esferas macias.	33
Figura 8 – Ilustração do modelo mola-amortecedor na interação entre grãos.	35
Figura 9 – Círculo de Mohr e envoltório de ruptura.	37
Figura 10 – Inclinação do plano de ruptura no solo em relação ao plano principal maior.	38
Figura 11 – Curva concentração crítica <i>versus</i> cisalhamento de materiais granulares superconsolidados e subconsolidados.	39
Figura 12 – Tensão resposta das simulações.	41
Figura 13 – Conexão entre experimentos reais, teoria e simulações computacionais.	42
Figura 14 – Esquema do algoritmo de Dinâmica Molecular.	46
Figura 15 – Esfera de corte ao redor de um grão 1.	47
Figura 16 – Esquema de contato entre grãos.	48
Figura 17 – Distribuição de tensões conforme a profundidade.	49
Figura 18 – Bulbos de tensões provenientes de uma carga pontual.	50
Figura 19 – Tensões em um ponto no interior do maciço de solo.	51
Figura 20 – Tensões no interior do maciço de solo abaixo da carga.	52
Figura 21 – Problema de Burmister (1945).	52
Figura 22 – Fluxograma com as principais etapas da pesquisa.	57
Figura 23 – Visualização gráfica da configuração inicial do sistema.	59
Figura 24 – Visualização gráfica do sistema submetido ao efeito da gravidade.	62
Figura 25 – Visualização gráfica das forças de contato entre os grãos.	63
Figura 26 – Fluxo de sementes para independência estatística entre simulações.	64
Figura 27 – Visualização gráfica das forças de contato entre os grãos.	68
Figura 28 – Visualização gráfica das forças de contato com a base rígida.	70
Figura 29 – Perfil de distribuição de tensões na base.	71

Figura 30 – Comparação da distribuição de tensão vertical normalizada ao longo do eixo vertical.	72
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,0$).	. . .	80
Tabela 2	–	Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,2$).	. . .	81
Tabela 3	–	Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,4$).	. . .	82
Tabela 4	–	Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,5$).	. . .	83

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Geração dos grãos - <i>Prepare</i>	58
Algoritmo 2 – Visualização dos Grãos - <i>Visual Grains</i>	59
Algoritmo 3 – Depositar os grãos - <i>Depose</i>	60
Algoritmo 4 – Cálculo e construção do perfil de tensões - <i>Ecrase</i>	62
Algoritmo 5 – Visualização do Esmagamento - <i>Visual Ecrase</i>	63
Algoritmo 6 – Ajuste <i>Coarse-Graining</i> das Tensões	66
Algoritmo 7 – Análise Comparativa de Tensões Verticais	67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CG	<i>Coarse-Graining</i>
DC	Dinâmica de Contato
DM	Dinâmica Molecular
ED	Evento Dirigido
F	Fortran
MED	Método dos Elementos Discretos
P	Python [®]
TE	Teoria da Elasticidade
TEC	Teoria do Estado Crítico

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Maiúsculas

D	Amortecedor
D_1	Denominador do integrando da solução de Poulos
F	Função de resistência (Critério de Mohr-Coulomb)
$\vec{F}_{ac}$	Força de atrito de Coulomb
$\vec{F}_{am}$	Força de amortecimento
$\vec{F}_{el}$	Força elástica
$\vec{F}_i^{\text{total}}$	Força resultante total a atuar sobre a partícula i
$\vec{F}_{nki}$	Força normal no contato entre as esferas/partículas
$\vec{F}_{tki}$	Força tangencial no contato entre as esferas
I_{σ_z}	Fator de influência adimensional
J_0	Função de Bessel
$J_{i,k}$	Momento de inércia polar das esferas/partículas
K	Rigidez da mola
L	Largura do sistema
$M_{i,k}$	Torque das esferas
N_1	Numerador do integrando da solução de Poulos
N	Quantidade de grãos em uma dimensão do sistema
Q	Carga pontual aplicada na superfície
$R_{i,j,k}$	Raio das esferas
R_{max}	Raio máximo dos grãos

Letras Romanas Minúsculas

c	Coeficiente de coesão do material
c_0, c_1, c_2, c_3	Constantes numéricas utilizadas na correção do algoritmo Preditor-Corretor de Gear
d	Diâmetro médio do grão
f_0	Sobrecarga aplicada nos grãos
$\vec{f}_{i/k}$	Força de contato entre as esferas/partículas

$f_{\xi}^{y,initial/final}$	Componente de força vertical no estado inicial/final do sistema
$\vec{g}$	Aceleração da gravidade
h	Espessura total da camada de solo elástico
k_n	Força elástica proporcionada pela força normal (rigidez de contato normal)
k_t	Força elástica proporcionada pela força tangencial (rigidez de contato tangencial)
m	Menor massa do sistema
m_{ef}	Massa efetiva do sistema de duas partículas em colisão
$m_{i,k}$	Massa das esferas/partículas
$\hat{n}_{i/k}$	Vetor de direção da força normal
q	Variável no domínio de Fourier
r	Raio de influência da carga (distância radial)
$\dot{\vec{r}}^{corr}$	Vetor de aceleração corrigida
$\vec{r}^{corr}, \vec{v}^{corr}, \vec{\omega}^{corr}$	Vetores de posição, velocidade e velocidade angular corrigidos
$\vec{r}^{pr}, \vec{v}^{pr}, \vec{\omega}^{pr}$	Vetores de posição, velocidade e velocidade angular previstos
$\vec{r}_{i,k}$	Vetor posição das esferas/partículas
s	Variável paramétrica da integral de contorno
t	Tempo
$\hat{t}_{i/k}$	Vetor de direção da força tangencial
t_s	Período característico de oscilação do contato normal
v_c	Concentração crítica
$v_{i,k}$	Velocidade das esferas/partículas
v_{nki}	Velocidade relativa normal
v_{nki}^*	Velocidade relativa normal imediatamente após a colisão
v_{tki}	Velocidade relativa tangencial
w	Largura (escala de comprimento) da função de <i>coarse-graining</i>
z	Profundidade

Letras Gregas Maiúsculas

ΔF_n	Incremento de força normal compressiva
--------------	--

Δt (ou d_t)	Passo de tempo de integração molecular
$\Delta\sigma_{yy}$	Incremento de tensão vertical macroscópica

Letras Gregas Minúsculas

α	Variável de integração
γ_n	Coeficiente de amortecimento crítico normal
γ_t	Coeficiente de amortecimento crítico tangencial
δ	Profundidade da penetração durante a colisão entre duas partículas
ϵ	Coeficiente de restituição
ζ_{ik}	Deslocamento tangencial
$\theta_{i/k}$	Ângulo de contato entre as esferas/partículas em relação ao centro
θ_m	Ângulo crítico
θ_r	Ângulo de repouso
θ_s	Tensão de volume
λ_n	Constante elástica normal
λ_t	Constante elástica tangencial
$\mu_{e,d}$	Coeficiente de atrito estático (e) ou dinâmico (d)
ν	Coeficiente de Poisson
ξ_{ik}	Compressão mútua na colisão entre esferas/partículas
σ	Tensão total aplicada ao solo
σ_1, σ_3	Tensões principais (maior e menor)
σ'_1, σ'_3	Tensões principais efetivas (maior e menor)
σ_z (ou σ_v)	Tensão vertical em profundidade
$\sigma_{\alpha\beta}$	Tensor de tensão macroscópico contínuo
σ_θ	Tensão tangencial
τ_f	Tensão de cisalhamento no plano de rutura
$\vec{\tau}_i^{\text{total}}$	Torque resultante total a atuar sobre a partícula i
ϕ	Ângulo de atrito do solo
ϕ'	Coeficiente de atrito efetivo
$\phi(\vec{R})$	Função de suavização (gaussiana) de <i>coarse-graining</i>

ψ_n	Amortecimento normal
ψ_t	Amortecimento tangencial
ω_{ik}	Velocidade angular das esferas/partículas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Pergunta de Pesquisa	22
1.2	Objetivos	22
1.2.1	Objetivo Geral	23
1.2.2	Objetivo Específico	23
1.3	Justificativa	23
1.4	Estrutura do Trabalho	23
1.5	Restrições e Limitações	24
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1	Materiais Granulares	25
2.1.1	Fenomenologia em Sistemas Granulares	26
2.1.2	Forças de Contato	31
2.1.3	Cadeias de Forças	36
2.2	Simulação Computacional	41
2.2.1	Dinâmica Molecular	43
2.2.2	Preditor-Corretor de Gear e Velocidade-Verlet	45
2.3	Distribuição de Tensões	47
2.3.1	Solução de Boussinesq para Carga Pontual	50
2.3.2	Solução de Burmister para Carga Pontual	52
3	EQUIPAMENTO E METODOLOGIAS	56
3.1	Equipamento	56
3.2	Método de Abordagem	56
3.3	Método de Procedimentos	57
3.3.1	Construção do Modelo	57
3.3.2	Aplicação da Dinâmica Molecular	59
3.3.3	Coleta e Tratamento de Dados	62
4	RESULTADOS	68
5	CONCLUSÃO	74
5.1	Trabalhos Futuros	75
	REFERÊNCIAS	76
	ANEXO A – VALORES DE INFLUÊNCIA DA TENSÃO VERTICAL	80

1 INTRODUÇÃO

Conforme a definição dada por Brown e Richards (1970): "Um material granular é composto de sólidos discretos que estão em contato a maior parte do tempo". Em uma definição mais completa, segundo Duran (2012), os materiais granulares configuram-se como um sistema discreto, constituído por agregados de partículas individuais ou aglomerados, cuja dimensão pode abarcar distintas ordens de grandeza. Em meios granulares as partículas variam desde microns (μm), como um grão de areia, até metros (m) de diâmetros, presentes desde blocos de gelo à deriva pelos mares polares até nos anéis de Saturno, os quais são formados por partículas geladas de variados tamanhos.

Os estudos sobre materiais granulares buscam obter uma melhor compreensão em relação as interações da matéria mesoscópica para explicar seu comportamento macroscópico, que atuam de forma pouco intuitiva. De acordo com Mehta (2007), o qualificativo “macroscópico” denota que os constituintes desses materiais devem, ao menos, ser notórios a olho nu. Luding (2008) salienta que as propriedades macroscópicas dos meios granulares são controladas pelo contato “microscópico”, forças e torques, envolvendo, por exemplo, adesão de contato ou atrito.

Segundo Duran (2012), percebe-se as propriedades mecânicas de um corpo rígido ao analisar os grãos de forma isolada, entretanto os resultados não são os mesmos ao analisar as interações do aglomerado de partículas, pois considera-se, pertinentemente, sua dependência aos parâmetros de força, atrito, velocidade, pressão, energia interna, angulação, dentre outros. Os estudos de Jaeger, Nagel e Behringer (1996) demonstram que, ao alterar esses parâmetros, o aglomerado de partículas pode remodelar sua macroestrutura e transitar entre os estados físicos: sólido, líquido e gasoso.

As propriedades dos granulados dependem principalmente da natureza das interações entre as próprias partículas, bem como entre estas e o ambiente, sem que, no entanto, suas propriedades inerciais e térmicas sejam significativamente influenciadas pelo meio intersticial (Duran, 2012).

Meios granulares não são completamente sólidos nem completamente líquidos em seu comportamento - eles se acumulam como sólidos, mas fluem como líquidos, assumindo a forma do recipiente que os contém, mas, diferente dos líquidos, também podem adotar uma variedade de formas quando estão independentes (Mehta, 2007, p.1, tradução própria).

Os sistemas físicos, dentre os quais se incluem os materiais granulares, são objetos de estudo sob três vertentes primordiais: teórica, experimental e, em tempos mais recentes, a simulação computacional. A última vertente, para alcançar a exatidão almejada, deve ser

concebida com rigor, de modo a refletir, com a máxima fidelidade, as propriedades inerentes ao sistema real (Allen; Tildesley, 1987).

Entretanto, consoante às afirmações de Pöschel e Schwager (2005), a física dos materiais granulares apresenta particularidades que tornam a busca por uma regra geral, que reja seu comportamento e lhes confira previsibilidade, uma tarefa nada trivial. Esse objetivo requer a importante tarefa de desenvolver estudos interdisciplinares intensos e abrangentes, que envolvam modelações tanto teóricas quanto propostas experimentais, sejam estas em laboratórios ou por meio computacional.

A simulação computacional tornou-se viável para diversos experimentos à medida em que aumentaram as exigências por baixos custos e celeridade nas pesquisas. Todavia, avanço em alguns campos do conhecimento trazem consigo a complexidade de atingir e realizar parâmetros experimentais, tornando-os inviáveis ou inexecutáveis em laboratórios (Boaventura, 2020).

Por consequência, diversas áreas de pesquisa impulsionaram o uso de experimentos por simulações, incluindo aqueles interessados nos fenômenos de meios granulares. Similarmente, Magalhães (2018, p. 22, tradução própria) afirma:

É neste contexto que a abordagem numérica floresce como o principal ferramenta para cientistas que investigam empacotamentos e fluxos de grãos. A liberdade total na escolha dos parâmetros, o fácil acesso a qualquer variável do sistema e o baixo custo são apenas algumas das vantagens de tal abordagem.

As simulações de interações entre partículas iniciaram no contexto científico em que os principais objetivos de pesquisa eram: cálculo das trajetórias de todas as partículas do sistema e simulação numérica de gases moleculares e líquidos simples; sendo Alder e Wainwright¹ pioneiros no que denominaram como mecânica molecular. Ao passar do tempo, esse método foi ampliado e aperfeiçoado até se tornar uma das ferramentas numéricas mais poderosas e bem estabelecidas dentro do campo da física e da engenharia (Pöschel; Schwager, 2005).

Segundo Allen e Tildesley (1987), a definição de mecânica molecular, *i.e.* Dinâmica Molecular (DM), é um método determinístico que se baseia no comportamento de um sistema molecular, utilizando da mecânica clássica para descrever as interações do sistema e simular a dinâmica através da integração numérica das equações de movimento.

Em 1971, Peter Alan Cundall² utilizou a DM em seus estudos. Cundall introduziu novos recursos nas interações entre as partículas, dentre os quais são os graus de liberdade rotacionais, e denominou Método dos Elementos Discretos (MED). Contudo, seus princípios básicos continuam sendo os mesmos: interação pareada de curto alcance entre partículas e a evolução temporal dada

¹ Cf. Alder e Wainwright (1957).

² Cf. Cundall (1971).

pela integração das equações de movimento de cada partícula (Magalhães, 2018).

A abordagem do MED constitui uma ferramenta robusta para a simulação computacional de materiais granulares não coesos, permitindo acompanhar o movimento de partículas individuais e suas interações com partículas vizinhas ao longo do tempo discretizado (Pöschel; Schwager, 2005).

A compreensão do comportamento físico dos grãos é de grande relevância para diversos setores industriais e possui aplicações importantes na engenharia civil, especialmente na engenharia de fundações. A análise do comportamento das camadas granulares em resposta às tensões aplicadas permite um melhor entendimento da mecânica dos solos, contribuindo para o aumento da eficácia e da eficiência dos cálculos e projetos relacionados à estabilidade do solo (Andreotti; Forterre; Pouliquen, 2013).

Conforme Cintra, Aoki e Albiero (2011) salientam, a compreensão da distribuição das tensões geradas devido às cargas das estruturas é de interesse para os engenheiros, os quais sempre se apoiaram sobre as formulações baseadas na Teoria da Elasticidade (TE). Nesse contexto, a análise da distribuição é um processo que viabiliza a determinação da influência da fundação nas camadas do solo. Tal procedimento é essencial, uma vez que o solo não constitui um meio homogêneo, apresentando variações de propriedades e condições ao longo da profundidade. A consideração dessa interdependência resulta, portanto, em projetos de fundações mais seguros e econômicos, otimizando o dimensionamento e prevenindo recalques excessivos.

1.1 Pergunta de Pesquisa

Diante do exposto, pretende-se responder ao seguinte problema de pesquisa:

Na análise da distribuição de tensões em meios granulares, os resultados obtidos via simulações computacionais que utilizam o método de Dinâmica Molecular convergem para as soluções baseadas na Teoria da Elasticidade?

1.2 Objetivos

As seções a seguir apresentam os objetivos que nortearam sua elaboração para a devida contextualização desta monografia e a delimitação de seu escopo. São descritos o objetivo geral, que define o propósito central, e os objetivos específicos, que detalham as etapas estabelecidas para o cumprimento do objetivo geral.

1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral confrontar os resultados numéricos de uma simulação baseada em Dinâmica Molecular com as soluções baseadas na Teoria da Elasticidade, no que tange à distribuição de tensões induzida por uma carga pontual em um sistema granular.

1.2.2 Objetivo Específico

Em vista do objetivo geral deste trabalho, são definidos os seguintes objetivos específicos:

1. Utilizar como ferramenta a simulação computacional de Atman et al. (2004), desenvolvida em linguagem Fortran (F), para calcular as interações entre grãos;
2. Estruturar um código com ferramentas baseadas em linguagem Python® (P) para representar graficamente os resultados numéricos;
3. Aplicar as equações que utilizam a TE para os mesmos parâmetros estabelecidos nas simulações;
4. Registrar os resultados de maneira gráfica e realizar a comparação.

1.3 Justificativa

A geotecnia avança em diversas áreas com o uso de modelos computacionais baseados no MED, gerando estudos sobre os fenômenos subjacentes ao comportamento do solo com ferramentas matemáticas avançadas. A elaboração desta pesquisa é justificada pelo intento de acrescentar à comunidade acadêmica um estudo da formulação computacional da DM na análise de distribuição de tensões. Ao empregar a dinâmica molecular como ferramenta computacional, almeja-se não apenas proporcionar um cálculo mais preciso dos esforços, mas também instigar novas investigações que possam expandir o uso desse método em contextos geotécnicos distintos.

1.4 Estrutura do Trabalho

Esta monografia está organizada em 5 capítulos.

No capítulo 1 é introduzido o tema e os conceitos que fundamentam a pesquisa, detalhando também os objetivos, a justificativa, a estrutura do trabalho e as limitações do estudo.

No capítulo 2 é redigida a revisão teórica sobre os assuntos que estruturam o tema abordado, apresentando conceitos, entendimentos e resultados dos últimos cinco anos. O estudo da arte foi realizado através do método *Knowledge Development Process-Constructivist (Pro-Know-C)* (Ensslin et al., 2010), o qual determina a análise de uma gama de artigos e trabalhos,

nacionais e internacionais, extraídos de três bancos de dados, sendo estes o *Web Science*, *Scopus* e *Science Direct*.

O capítulo 3 é dividido em três subseções: equipamento, abordagem e procedimentos. Primeiramente é descrito o tipo de equipamento utilizado na pesquisa para possibilitar a sua reprodução ou comparação. Em sequência, na metodologia de abordagem é realizado o enquadramento metodológico da pesquisa, determinando a natureza da pesquisa e do objeto, sua classificação quanto à lógica e o processo realizado, dentre outros tópicos. Por fim, na metodologia de procedimento são descritos em detalhes as etapas realizadas para que o objetivo geral deste monografia fosse alcançado.

No capítulo 4 é redigida a apresentação e análise dos resultados obtidos.

No capítulo 5 compreende-se as considerações finais acerca deste trabalho e propostas de estudos futuros.

1.5 Restrições e Limitações

Apesar da relevância dos resultados pretendidos, esta pesquisa apresenta algumas limitações que devem ser consideradas em sua análise e aplicação. A monografia em questão apresentou limitações quanto à quantidade de partículas simuladas. O estudo de um maciço de solo com grandes profundidades exige um número de grãos que despense um alto custo computacional. Para contornar essa restrição, optou-se pela utilização de um modelo reduzido. Essa simplificação foi, portanto, uma condição necessária para viabilizar a análise dentro de um tempo de processamento exequível.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é descrito o estado da arte referente ao tema proposto. Desenvolve-se uma análise fenomenológica dos materiais granulares, posteriormente a conceituação de elementos envolvidos na engenharia de fundações e a exposição das ferramentas matemáticas e computacionais imprescindíveis para a compreensão desta monografia.

2.1 Materiais Granulares

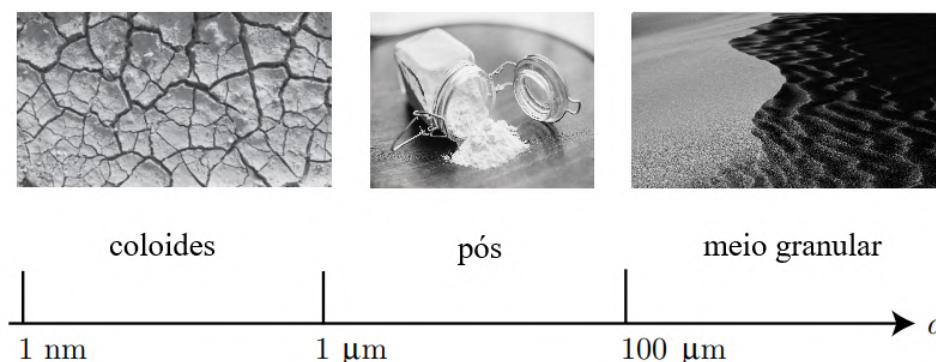
Os materiais granulares permeiam a existência em suas mais variadas formas, desde os finos cristais de açúcar que adoçam o café até os grãos escuros que produzem esta bebida, da impalpável poeira suspensa no ar ao solo que dá sustentação às edificações. A física empenha-se em compreender os fenômenos que regem essa peculiar manifestação da matéria, cujos comportamentos, contudo, revelam-se de tamanha complexidade (Andreotti; Forterre; Pouliquen, 2013).

Para ilustrar a complexidade dos meios granulares, Mehta (2007) apresenta o seguinte exemplo: ao serem depositados em uma superfície milhares de partículas, *e.g.* areia, é perceptível a sua organização de forma a empilhar e criar um amontoado macroscópico. Todavia, assim que atinge seu ângulo crítico, o material escoar espontaneamente sobre a superfície que se encontra. Logo, é possível afirmar que sua estabilidade se manifesta de maneira ambígua, *i.e.* a pilha possui uma biestabilidade a partir do mesmo conjunto de grãos, podendo estar em repouso, agindo de maneira sólida, ou escoando, similar a um fluido.

Consoante Luding (2008), os materiais granulares distinguem-se por propriedades físicas singulares e, por vezes, excêntricas. A natureza dessas propriedades decorre, primordialmente, das interações mútuas entre os grãos que os constituem, bem como das forças exercidas pelo meio que os envolve. Jaeger, Nagel e Behringer (1996) e Mehta (2007) afirmam que a dependência dos materiais granulares em relação às condições externas revela-se como um aspecto fundamental para sua compreensão, pois as leis que regem a termodinâmica e a hidrodinâmica, em sua formulação clássica, não englobam princípios que descrevam com exatidão seu comportamento.

Dessa forma, infere-se a existência de uma escala mínima a partir da qual se pode categorizar um sistema como granular ou não, conforme é demonstrado na Figura 1. Nesse contexto, Nedderman (1992) assegura que, embora inexista um limite superior para a dimensão de seus constituintes, há uma faixa inferior de tamanho que deve ser considerada, de modo a excluir do escopo de análises de forças intermoleculares, como as interações de Van der Waals.

Figura 1 – Classificação do material particulado em função do tamanho da partícula.



Fonte: adaptado de Andreotti, Forterre e Pouliquen (2013).

Legenda: Fotografia dos materiais: coloide (argila), pó (farinha) e grãos (duna de areia).

A resposta desses materiais às condições externas a que estão submetidos varia significativamente, razão pela qual exibem propriedades coletivas que transitam entre os estados sólido e fluido. Dessa forma, podem, por um lado, resistir a tensões e sustentar cargas, à semelhança de um sólido, e, por outro, escoar livremente, adaptando-se ao formato do recipiente que os contém, como se fosse um líquido (Duran, 2012).

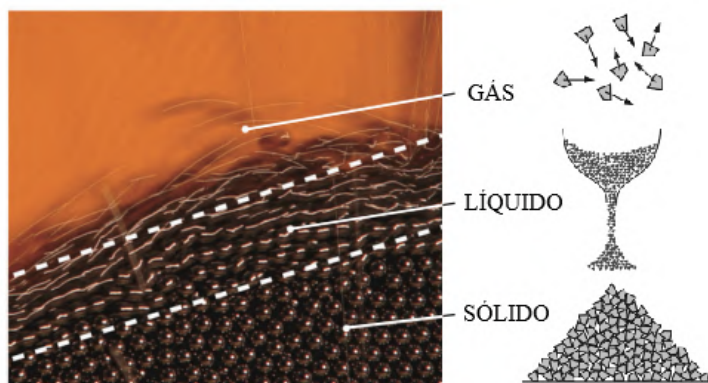
2.1.1 Fenomenologia em Sistemas Granulares

Segundo Andreotti, Forterre e Pouliquen (2013), há condições que dificultam a compreensão dos sistemas granulares, as quais são:

- I) sistema composto por uma grande quantidade de partículas;
- II) flutuações térmicas negligenciáveis;
- III) variedade de escalas no mesmo sistema;
- IV) interações complexas entre os grãos;
- V) dissipação rápida de energia;
- VI) exibição de diferentes estados da matéria.

Um dos fenômenos capazes de demonstrar essa gama de complexidades é a pilha de grãos, ilustrado na Figura 2. Consoante Jaeger, Nagel e Behringer (1996), os grãos, em contraste com os líquidos, permanecem estacionários desde que a camada superior esteja a um declive inferior ao θ_r (ângulo de repouso) da pilha e que não haja forças externas capazes de perturbar o sistema e desfazer sua estabilidade.

Figura 2 – Fenômeno da avalanche em uma pilha de grãos.



Fonte: adaptado de Andreotti, Forterre e Pouliquen (2013).

Tal qual Mehta (2007) descreve sobre a biestabilidade das pilhas de grãos, nenhum fluxo ocorre espontaneamente até que a inclinação esteja acima do θ_m (ângulo crítico) de estabilidade. Quando o declive ultrapassa ligeiramente o ângulo de repouso, os grãos começam a fluir e ocorre o fenômeno conhecido como "avalanche". Contudo, ao contrário do fluxo uniforme que se observa em fluidos ordinários, esse escoamento não se distribui homogeneamente por toda a amostra, mas se restringe a uma camada limite de espessura reduzida junto à superfície, gerando três comportamentos diferentes no mesmo sistema: sólido, líquido e gasoso. No intervalo $\Delta\theta = \theta_m - \theta_r$, a pilha de grãos manifesta metaestabilidade¹.

Análogo às observações de Watson, Bonnieu e Lappa (2023), assim que os grãos escoam, a dissipação de energia que ocorre no nível de contato granular, efetivamente, coloca esses meios em uma nova classe de comportamento físico para a qual equações contínuas, similares às equações de Navier-Stokes para fluidos, ainda não foram definidas (e nem mesmo está claro se tal tentativa faria sentido ou não).

O trabalho de Jaeger, Nagel e Behringer (1996) demonstra que a maior parte das dificuldades decorrem da natureza das interações entre as partículas. O principal motivo para o consumo, em pequenas escalas (*i.e.* dissipação), da energia injetada em uma coleção de partículas (em grandes escalas) reside no atrito estático e na inelasticidade inerente às colisões que se dão entre os grãos, conforme é abordado na Subseção 2.1.2 desta monografia, que versa sobre as forças de contato.

Nedderman (1992) salienta sobre outro fenômeno importante observado em materiais granulares: a segregação. Este fenômeno ocorre espontaneamente quando uma mistura homogênea

¹ Definido como "estado que possui precária estabilidade, podendo facilmente ser perturbado [...] uma pequena perturbação determinará que um sistema em estado metaestável cairá para um nível de energia mais baixo" (Daintith, 2005, p.318, tradução própria).

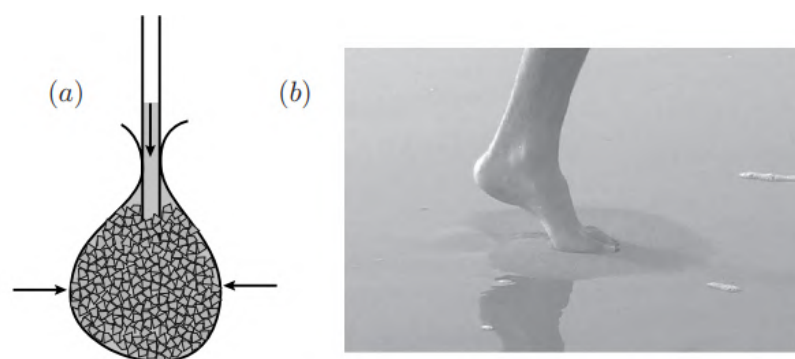
de diferentes tipos de grãos, sujeitos a forças externas, torna-se espacialmente não uniforme por meio de separação em termo de seus tamanhos e/ou massas.

No caso específico em que os estímulos externos consistem na aplicação de "vibrações", Brown e Richards (1970) estabelecem os desdobramentos possíveis no que tange ao comportamento macrofísico, abrangendo diferentes estados dinâmicos, como “agrupamento”, a formação espontânea de arcos estáveis, padrões celulares, ondas estacionárias de vários tipos, ondas viajantes, “acumulação”, movimento de aderência e deslizamento durante avalanches, segregação, liquefação, cisalhamento não newtoniano, tixotropia e, por último, convecção em massa induzida por vibração e até mesmo estados turbulentos.

Verbi gratia, embasando-se na demonstração por simulação de DM realizada por Rosato et al. (1987), observa-se que ao sujeitar-se uma mistura de diferentes grãos a vibrações verticais, contidas em um recipiente, os grãos maiores ascendem à superfície do sistema, fenômeno conhecido como *Brazil-Nut Effect*, ou Efeito da Castanha-do-Pará. Existe, também, o efeito contrário descrito por Shinbrot e Muzzio (1998) e denominado *Reverse Brazil-Nut Effect*, Efeito Castanha do Pará Reverso, no qual os grãos maiores e mais leves que os demais se deslocam para o fundo do recipiente.

Ademais, outro tópico recorrente é o princípio da dilatância de Reynolds, o qual se manifesta em algumas experiências simples, como a Figura 3 ilustra. Este princípio físico, conforme formulado por Reynolds (1885), manifesta-se quando um arranjo granular é submetido à compressão, paradoxalmente expandindo o espaço intersticial que o constitui.

Figura 3 – Dilatância de Reynolds em um meio granular.



Fonte: retirado de Andreotti, Forterre e Pouliquen (2013, p. 131).

Legenda: (a) Desenho de um material granular juntamente com um líquido, confinado em um balão. Pode-se analisar o nível do líquido no capilar saindo acima deste objeto. Quando o balão é pressionado, o líquido contido no capilar desce. (b) Fotografia da areia secando sob os pés na praia.

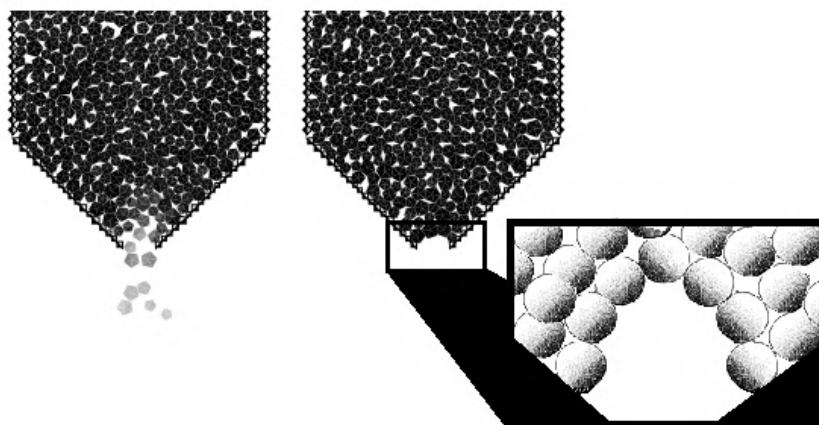
Na Figura 3 há a representação de um balão carregado de grãos e água, de modo que o nível de água atinge o tubo contido acima do recipiente. Ao ser comprimido, observa-se que o nível de água no tubo cai, contrariando o senso comum. Portanto, os grãos devem reorganizar

suas posições internamente ao sistema, passando por regiões não ocupadas. A expansão desses vazios, imprescindível para a reestruturação granular, constitui o princípio da dilatação, *i.e.* aumento do volume do sistema (Andreotti; Forterre; Pouliquen, 2013).

Segundo Duran (2012, p. 66, tradução própria), o mesmo princípio explica o porquê a areia úmida ao redor dos pés fica seca quando se está andando pela praia: "[...] conforme nossos pés transmitem nosso peso ao solo, a areia reage aumentando seu volume localmente e absorvendo a água da superfície, dando a ilusão de que ela seca". Entretanto, em certas análises, o fluido intersticial em contato com o arranjo granular é desconsiderado. Nessas circunstâncias, quando a influência do ambiente pode ser negligenciada, tais materiais são denominados granulares secos, sendo suas interações restritas ao atrito e às colisões, tanto entre os grãos do sistema quanto entre estes e as paredes do recipiente de confinamento.

Por fim, há o arqueamento nos meios granulares. Em sua dinâmica podem ocorrer formações estáveis de estruturas cooperativas, como ilustra a Figura 4, contribuindo para um fenômeno denominado *jamming*, *i.e.* engarrafamento. Este fenômeno é o responsável pelo entupimento do fluxo de grãos em silos (Mehta, 2007).

Figura 4 – Formação de arqueamento em silos.



Fonte: adaptado de Andreotti, Forterre e Pouliquen (2013).

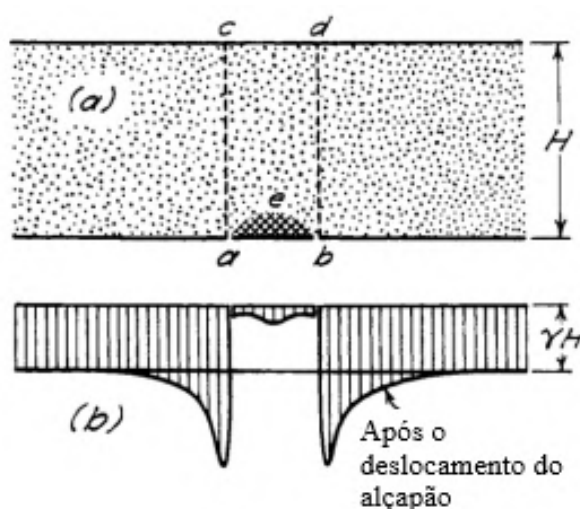
Segundo Sperl (2006), o efeito do arco é notado desde o século XIX a partir de Janssen que explicou a saturação de pressão com a altura na base de um cilindro vertical. Nos silos, em virtude do arqueamento, a pressão interna exercida pelo material não segue a progressão linear da pressão hidrostática em função da profundidade. Esse fenômeno decorre da redistribuição das tensões, em que parte do peso da massa granular em escoamento se transfere para as seções estáticas adjacentes, permitindo que as paredes suportem parcela significativa da carga (Duran, 2012).

Transpondo este tema para o domínio da ciência dos solos, de acordo com as observações do

engenheiro austríaco Terzaghi (1943), o fenômeno de arqueamento manifesta-se na movimentação relativa entre massas adjacentes de solo, podendo gerar uma redução ou um acréscimo de tensões devido ao redirecionamento das cargas atuantes na estrutura, tanto o peso próprio do aterro quanto as sobrecargas. Tal manifestação se vincula diretamente à formação de cadeias de forças, tema abordado na Subseção 2.1.3.

Terzaghi (1936) investigou o fenômeno do arqueamento por meio de ensaios experimentais conduzidos sobre uma plataforma associada a um alçapão, conjugada a uma balança meticulosamente adaptada, permitindo assim a mensuração da carga efetivamente transmitida ao alçapão. A Figura 5 expõe, com clareza didática, os aspectos essenciais do experimento.

Figura 5 – Experimento de distribuição de tensões em areia seca em cima de um alçapão.



Fonte: adaptado de Terzaghi e Peck (1967).

Legenda: (a) Desenho do aparato para investigação do fenômeno de arqueamento em solos granulares não coesivos. (b) Diagrama de tensão vertical sobre a plataforma e o alçapão, antes e depois do rebaixamento.

No interior de uma caixa experimental, dispôs-se um solo arenoso seco cujas propriedades (densidade específica, ângulo de atrito interno, coesão, entre outras) eram previamente conhecidas. Em estado inicial, antes do rebaixamento do alçapão (segmento *ab*), as tensões verticais mantinham-se invariáveis a uma mesma profundidade. Contudo, após o rebaixamento, verificou-se uma redução da tensão vertical incidente sobre o alçapão, atingindo aproximadamente o valor correspondente ao peso da massa de solo delimitada pela região sombreada *abe*. Paralelamente, as tensões verticais nas bordas da porção fixa elevaram-se, evidenciando um mecanismo de redistribuição de esforços (Terzaghi; Peck, 1967).

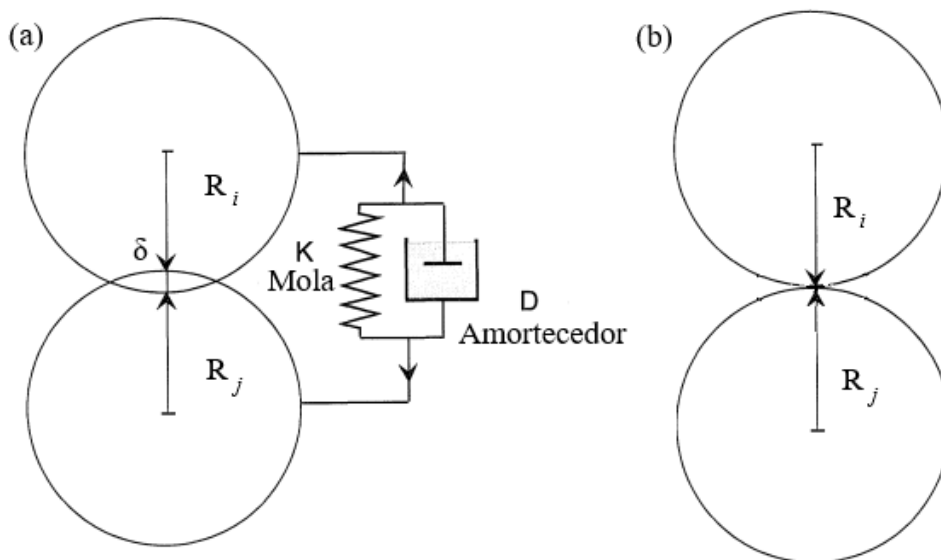
Tal redistribuição decorre do deslocamento das tensões cisalhantes ao longo das faces laterais do prisma definido pelos segmentos *ac* e *bd* na Figura 5(a), promovendo uma transferência de carga para as regiões adjacentes. A Figura 5(b) representa, de forma esquemática, a evolução

do diagrama de tensões verticais antes e depois do deslocamento do alçapão, sintetizando, assim, a dinâmica do processo investigado.

2.1.2 Forças de Contato

Entender as forças de contato entre os grãos é um desafio, pois, para analisar esta interação, o método consiste em derivar equações que descrevem o contato separadamente, em termos de suas forças normais e tangenciais (Rao; Nott, 2008). Conforme expresso pela Mehta (2007, p. 24, tradução própria): "Normalmente, simulações de partículas rígidas requerem representações adequadas de atrito estático e restituição tangencial, enquanto deformações hertzianas e associação de forças restauradoras são usadas para partículas macias", dois tipos de abordagens as quais são ilustradas na Figura 6.

Figura 6 – Colisões entre partículas: esferas macias e esferas rígidas.



Fonte: adaptado de Duran (2012).

Legenda: Sendo δ a profundidade da penetração durante a colisão e $(R_i$ e $R_j)$ é o raio de cada esfera: (a) Contato com interpenetração, representando o caso de *soft-spheres* (esferas-macias, em português) bidimensional. (b) Contato sem deformação, representando o caso de *hard-spheres* (esferas-rígidas, em português) bidimensional.

A origem física de forças como a normal e tangencial, em sua dimensão microscópica, abarca diversos fenômenos, os quais incluem a rugosidade superficial e as propriedades mecânicas locais, tais como a elasticidade e a plasticidade. Em virtude disso e considerando que o modelo de estudo é pela abordagem de esferas-macias, segundo Andreotti, Forterre e Pouliquen (2013), tais leis são expressas por meio da repulsão elástica, designada como contato de Hertz, e pelo atrito, representado pela lei do atrito de Coulomb.

A lei do atrito de Coulomb compreende que o atrito cinético é independente da velocidade de deslizamento, sendo resumida pela simples equação escalar $F = \mu N$, onde F é a força de

atrito proporcionada pela reação normal de contato (N) entre as duas superfícies em questão. Ambas estão relacionadas pelo coeficiente de atrito (μ).

A teoria elástica, proposta pelo físico alemão Hertz (1881), pode ser empregada para a obtenção dos campos de pressão e deformação somente se as seguintes condições forem atendidas:

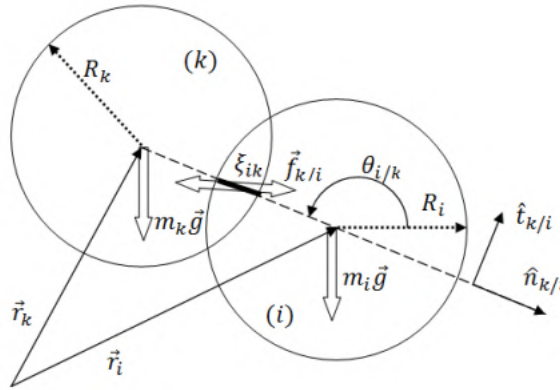
- I) os sólidos em contato devem ser constituídos de materiais com comportamento homogêneo, linear-elástico e isotrópico, conforme estabelecido pelas leis de Hooke;
- II) para aplicar a teoria de contato, as superfícies devem ser lisas (sem quinas), logo sua geometria deve possuir uma segunda derivada contínua, os corpos devem tocar-se inicialmente em um ponto ou linha (contato não conforme), e é preciso conhecer a curvatura local das superfícies no ponto de contato através dos seus raios de curvatura principais;
- III) nenhuma força tangencial deve atuar nos corpos, *i.e.* ausência de atrito, de modo que a força aplicada seja exclusivamente normal ao plano tangente comum;
- IV) as dimensões da área de contato devem ser pequenas quando comparadas com as dimensões dos sólidos em contato; e
- V) as dimensões da área de contato devem ser pequenas em relação aos raios de curvatura equivalentes.

A colisão simulada entre duas partículas está intimamente relacionada à lei de contato de Hertz, a qual, em duas dimensões, se reduz à famosa lei de Hooke. Neste caso, o contato inicial é linear, o que reduz o problema a uma dimensão bidimensional. Em termos mais simples, a força normal que atua entre dois grãos é diretamente proporcional à interpenetração entre eles (Soterroni, 2007). Consoante Pöschel e Schwager (2005), essa interpenetração, a qual denomina-se "compressão mútua" (ξ_{ik}), é definida pela Equação 1.

$$\xi_{ik} \equiv R_i + R_k - |\vec{r}_k - \vec{r}_i| > 0. \quad (1)$$

A modelagem da força normal e tangencial entre dois grãos, que são do tipo “colisões inelásticas”, quando $\xi \geq 0$, requer no mínimo dois termos: “repulsão” e algum tipo de “dissipação” (Pöschel; Schwager, 2005). E, tendo em vista a natureza deste estudo, adota-se a premissa de que os grãos se deformam exclusivamente de maneira elástica, o que através da Figura 7 se esclarece a concepção estabelecida ao que denomina-se como esferas macias.

Figura 7 – Ilustração do contato entre duas partículas para o caso esferas macias.



Fonte: retirado de Boaventura (2020, p. 9).

Legenda: (R_i, R_k) são os raios dos grãos envolvidos, $(\vec{r}_i, \vec{r}_k)$ são as posições de seus centros. Os grãos estão sujeitos ao peso próprio $(m_i g)$ e à força de contato $(\vec{f}_{k/i})$ entre vizinhos. $\theta_{i/k}$ é o ângulo de contato entre os grãos i e k . Devido ao atrito intergranular, a direção da força de contato pode desviar da linha reta que conecta os centros de i e k , i.e. o ângulo entre $\vec{f}_{k/i}$ e a horizontal pode ser diferente de $\theta_{k/i}$. Esta figura também mostra os vetores de direção, normal $\hat{n}_{k/i}$ e tangencial $\hat{t}_{k/i}$, para o contato.

As forças e velocidades envolvendo as partículas são decompostas em componentes normal e tangencial, nas direções dos vetores unitários $\hat{n}_{ki}$ e $\hat{t}_{ki}$, conforme Figura 7.

$$\hat{n}_{ki} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}, \quad (2)$$

$$\hat{t}_{ki} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{n}_{ki}. \quad (3)$$

Desta forma, as velocidades normal relativa $v_{n_{ki}}$ e tangencial relativa $v_{t_{ki}}$ são calculadas da seguinte forma:

$$v_{n_{ki}} = (\vec{v}_k \cdot \vec{n}_{ki}) \vec{n}_{ki}, \quad (4)$$

$$v_{t_{ki}} = (\vec{v}_k - \vec{v}_i) \cdot \hat{t}_{ki} + R_k \omega_k + R_i \omega_i, \quad (5)$$

onde ω_k e ω_i são, respectivamente, as velocidades angulares das partículas k e i .

Sendo a interação entre grãos feita por meio de contato mecânico, a força resultante entre dois destes, devido ao contato, é dada por:

$$\vec{F}_{ki} = \begin{cases} \vec{F}_{n_{ki}} + \vec{F}_{t_{ki}}, & \text{se } \xi_{ki} \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6)$$

onde $\vec{F}_{n_{ki}}$ e $\vec{F}_{t_{ki}}$ são as componentes da força na direção normal (responsável pela translação do grão) e tangencial (responsável pela rotação do grão), respectivamente. Ambas as forças, normal e tangencial, estão presentes em colisões oblíquas. Relacionamos a força tangencial à normal por meio da lei do atrito de Coulomb.

$$\vec{F}_t \leq \mu_e \vec{F}_n, \quad \text{para atrito estático, } (v_t = 0), \quad (7)$$

$$\vec{F}_t = \mu_d \vec{F}_n, \quad \text{para atrito dinâmico, } (v_t \neq 0). \quad (8)$$

Pode-se então modelar tais forças, para o caso bidimensional, como condicionado pelas premissas hertzianas, utilizando a Equação 9 e Equação 10.

$$F_{n_{ki}} = -\lambda_n \xi_{ik}, \quad (9)$$

$$F_{t_{ki}} = -\text{sign}(v_{t_{ki}}) \cdot \min(|\lambda_t \zeta_{ik}| \mu_{e,d} |F_{n_{ki}}|), \quad (10)$$

onde λ_n e λ_t são, respectivamente, as constantes elásticas: normal e tangencial. O termo ζ_{ik} representa o deslocamento tangencial, que tem início no tempo t_0 e fim no tempo t , quando o contato entre as duas partículas se desfaz. Este deslocamento pode ser descrito conforme a Equação 11.

$$\zeta_{ik}(t) = \int_{t_0}^t v_{t_{ki}}(t') dt'. \quad (11)$$

Segundo Boaventura (2020), para reproduzir a perda de energia devido às colisões inelásticas, devem ser introduzidos termos de amortecimento normal e tangencial, ψ_n e ψ_t , respectivamente, dados pelas expressões:

$$\psi_n = \gamma_n v_{n_{ki}}, \quad (12)$$

$$\psi_t = \gamma_t v_{t_{ki}}, \quad (13)$$

onde $v_{n_{ki}}$ é a velocidade relativa normal e $v_{t_{ki}}$, a velocidade relativa tangencial. O coeficiente de amortecimento crítico (γ_n), expresso pela Equação 14, relaciona-se com o coeficiente de restituição (ϵ) pela Equação 15.

$$\gamma_n = 2\sqrt{\lambda_n m}, \quad (14)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{4\lambda_n m_{ef}}{(\frac{\pi}{\ln(\epsilon)})^2 + 1}}. \quad (15)$$

Sendo m a menor massa do sistema e m_{ef} a massa efetiva representada pela fórmula:

$$m_{ef} = \frac{m_i m_k}{(m_i + m_k)}. \quad (16)$$

Enquanto ϵ é dado pela Equação 17, podendo variar dentre 0 a 1, *i.e.* $\epsilon \in [0,1]$.

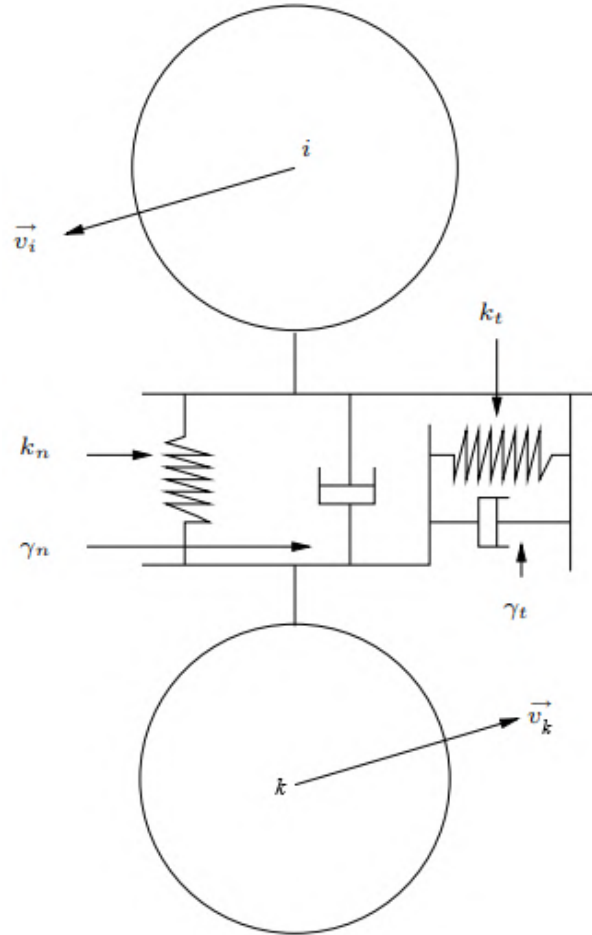
$$\epsilon = -\frac{v_{n_{ki}}^*}{v_{n_{ki}}}, \quad (17)$$

Sendo assim, o modelo empregado para descrever a interação entre os grãos considera a força de natureza elástica ($\vec{F}_{el}$), forças dissipativas, como a força de amortecimento ($\vec{F}_{am}$), e a

força de atrito de Coulomb ($\vec{F}_{ac}$). Logo, consoante Magalhães (2018), a força $\vec{F}_{ik}$, *i.e.* a força que atua sobre o grão i devido à interação com o grão k , como ilustrado na Figura 8, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{ac} + \vec{F}_{am}. \quad (18)$$

Figura 8 – Ilustração do modelo mola-amortecedor na interação entre grãos.



Fonte: adaptado de Soterroni (2007).

Legenda: As forças elásticas são representadas por molas (k_n e k_t) e a dissipação de energia por amortecedores (γ_n e γ_t), onde n e t são as direções normal e tangencial, respectivamente.

Soterroni (2007) salienta que as acelerações de translação e rotação dos grãos são estabelecidas pela segunda lei de Newton nas formulações do movimento retilíneo e rotacional, respectivamente. Desta forma, se um grão i , sob a ação de um campo gravitacional ($\vec{g}$), interage com um grão k , tem-se a força total e o torque total sobre o grão i definidos pela Equação 19 e Equação 20.

$$\vec{F}_i^{total} = m_i \vec{g} + \sum_k (\vec{F}_{n_{ik}} + \vec{F}_{t_{ik}}), \quad (19)$$

$$\vec{\tau}_i^{total} = -\frac{1}{2} \sum_k \vec{r}_{ik} \times \vec{F}_{t_{ik}}, \quad (20)$$

Posteriormente, os vetores de força e direção do grão k poderão ser calculados conforme à terceira lei de Newton.

2.1.3 Cadeias de Forças

As cadeias de forças estão indissociavelmente relacionadas ao conjunto de forças de atrito e cisalhamento que, conforme as observações feitas por Terzaghi (1943), configuram a união de múltiplos grãos, que, em suas interações, formam estruturas coletivas, robustas o suficiente para sustentar não apenas os esforços externos, mas também o peso dos próprios elementos constituintes. Um caso particular que se insere neste contexto é o fenômeno do arqueamento, apresentado na Subseção 2.1.1. Tal dinâmica é elucidada no estudo do fluxo em silos, como ilustrado na Figura 4.

De acordo com Campbell (2006), Coulomb descreveu pela primeira vez o escoamento de materiais granulares como um processo de atrito, não interessado em propriamente no fluxo desse material, mas na previsão de falhas do solo para aplicações dentro da engenharia civil. Afinal, o início da falha no solo, geralmente ocorre quando a cadeia de forças entra em colapso devido a movimentação subsequente do solo, *i.e.* a movimentação desse aglomerado de grãos.

Ao se dissertar sobre o comportamento plástico de um material granular, incide-se sobre a formulação tensorial dos modelos de plasticidade, iniciando-se pela teoria clássica de Mohr-Coulomb. Este modelo baseia-se no critério de atrito simples, desconsiderando a variação da fração volumétrica. Assim, tal abordagem se revela, *a priori*, válida apenas para deformações de grande magnitude, quando o estado crítico é atingido, e a fração de volume se mantém inalterada (Andreotti; Forterre; Pouliquen, 2013).

Mohr (1900) propôs uma teoria acerca da ruptura em materiais, segundo a qual a falha não ocorre exclusivamente pela ação isolada das forças normais ou de cisalhamento. Pelo contrário, sua teoria sustenta que a ruptura ocorre pela interação intrínseca entre essas duas forças. Assim, a relação funcional que rege a tensão normal e a tensão de cisalhamento em um plano de ruptura pode ser expressa pela Equação 21.

$$\tau_f = f(\sigma). \quad (21)$$

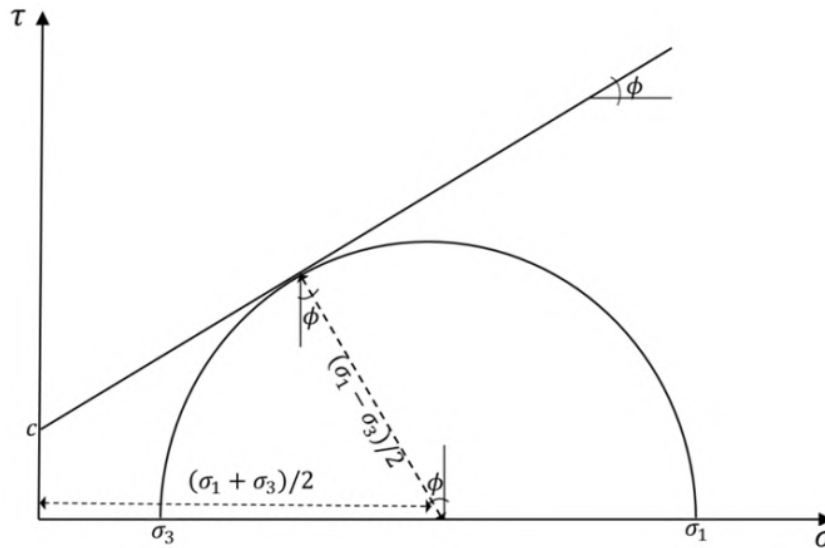
No critério de Mohr-Coulomb, a envoltória de ruptura, conforme definida pela Equação 21, assume a forma de uma linha curva. Contudo, para a grande maioria dos problemas relativos à mecânica dos solos, é plenamente adequado aproximar a tensão de cisalhamento no plano de ruptura por meio de uma função linear da tensão normal. Tal função linear pode ser expressa

como a equação de uma reta, conforme o critério de resistência proposto por Coulomb (2023), cuja formulação é conforme a Equação 22.

$$\tau \leq c + \sigma \tan \phi. \quad (22)$$

A equação acima é definida em termos das tensões normais (σ) e cisalhantes (τ) atuando em um plano, os parâmetros c e ϕ são a coesão e o ângulo de atrito último do material, respetivamente. O plano de ruptura ocorre em uma orientação crítica que, com base na representação do Círculo de Mohr na Figura 9, corresponde à tangente da envoltória de ruptura, a qual pode-se derivar da inclinação do plano de ruptura em relação ao plano principal maior.

Figura 9 – Círculo de Mohr e envoltória de ruptura.



Fonte: adaptado de Das (2011).

As tensões principais efetivas, sendo estas, segundo Caputo (1988), a parcela da tensão total que é suportada diretamente pelas partículas sólidas do solo, são definidas como σ'_1 (maior) e σ'_3 (menor). A análise geométrica define a relação matemática do ângulo crítico conforme a Equação 23, sendo ϕ' o coeficiente de atrito efetivo.

$$\phi = 45^\circ + \frac{\phi'}{2}. \quad (23)$$

Dessa forma, pode-se expressar a função de resistência em termos das tensões principais da seguinte forma:

$$\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \sin \phi + c \cos \phi, \quad (24)$$

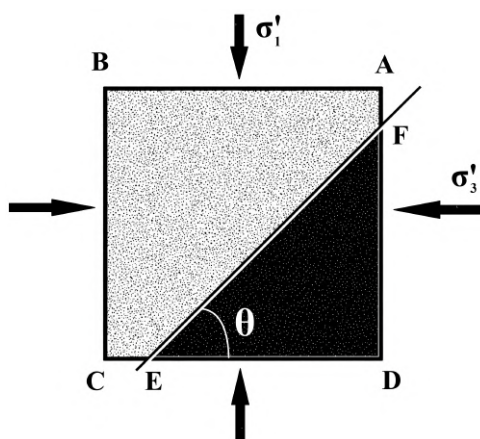
ou

$$F = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \sin \phi - \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} + c \cos \phi, \quad (25)$$

onde F é a função de resistência para o critério de Mohr-Coulomb em termo das tensões principais.

De acordo com o critério de Mohr-Coulomb, a tensão de falha sob compressão é maior do que sob tração porque a resistência aumenta com o confinamento (compressão normal), enquanto a tração reduz a resistência. A análise da ruptura por cisalhamento em um maciço de solo revela que a falha não ocorre em um plano aleatório, mas sim em uma superfície com uma orientação geométrica bem definida em relação ao estado de tensão aplicado. Essa orientação é expressa pelo ângulo formado entre o plano de ruptura e o plano principal maior, sobre o qual atua a tensão principal efetiva. A Figura 10 ilustra essa relação, apresentando a inclinação do plano de falha.

Figura 10 – Inclinação do plano de ruptura no solo em relação ao plano principal maior.



Fonte: adaptado de Das (2011).

Quando as partículas são grandes e secas, c , que representa a coesão do material, é declarado como zero. Quando o sistema atinge $\tau = \sigma \tan \phi$, o solo cede ao movimento. O critério de Coulomb, ou critério da máxima tensão normal, poderia ser usado para construir uma regra de escoamento plástico, e apenas a adoção de uma regra de fluxo era necessária para empregar os métodos de plasticidade do metal para fluxo granular. Como resultado, não é necessário considerar o comportamento no nível de partículas individuais, mas o material pode ser tratado como um sólido plástico contínuo (Campbell, 2006).

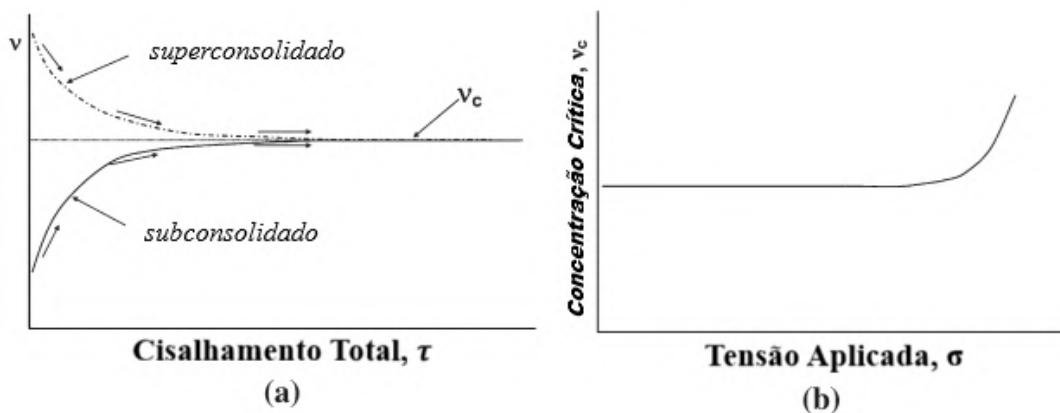
Schofield e Wroth (1968) observaram que os fluxos granulares lentos geralmente envolvem grandes deformações de cisalhamento. Nessas condições, o material tende a evoluir para um estado permanente de deformação, conhecido como Estado Crítico. Nesse estado, o material continua a se deformar por cisalhamento, porém sua resistência e sua densidade permanecem constantes. Um dos aspectos fundamentais da Teoria do Estado Crítico (TEC) é que um material granular submetido ao cisalhamento tende a convergir para uma concentração crítica, definida como a fração do volume total ocupada pelas partículas sólidas. Após atingir essa condição,

o material não apresenta mais variações significativas de volume, mesmo continuando a se deformar.

O valor da concentração crítica (v_c) depende do estado de tensões aplicado e é considerado uma propriedade característica do material. Dessa forma, a descrição do comportamento do fluxo granular torna-se mais simples, pois o material pode ser analisado a partir das condições associadas ao Estado Crítico. De acordo com Campbell (2006), a origem do conceito de estado crítico é, provavelmente, advinda dos estudos de Casagrande² e aprimorada por Schofield e Wroth como TEC.

Conforme a TEC, um solo submetido à compressão isotrópica apresenta o comportamento esquematizado na Figura 11, a qual mostra um gráfico representativo da aproximação de um solo em direção à concentração crítica. Um material que é “subconsolidado”, *i.e.* começando com uma concentração abaixo da concentração crítica (v_c), aumentará sua concentração conforme for cisalhado até atingir o valor crítico. Por outro lado, um material “superconsolidado” diminuirá sua concentração conforme for cisalhado até atingir a concentração crítica (Campbell, 2006).

Figura 11 – Curva concentração crítica *versus* cisalhamento de materiais granulares superconsolidados e subconsolidados.



Fonte: adaptado de Campbell (2006).

Legenda: (a) Ilustra como a concentração geral se aproxima da concentração crítica (v_c) à medida que o cisalhamento total aumenta. Um material superconsolidado começa acima da concentração crítica, enquanto um material subconsolidado começa abaixo, mas ambos colapsam para (v_c) em grandes deformações. (b) A variação da concentração crítica com a tensão aplicada σ .

Note-se que a concentração crítica se mantém praticamente constante ao longo de uma ampla faixa de tensão, elevando-se apenas quando a carga aplicada atinge valores consideráveis. Este aumento de v_c , sob tensões elevadas, pode ser atribuído à compressibilidade das partículas. Sob tais tensões, as partículas sólidas, comprimidas pela deformação nos pontos de contato, são forçadas a ocupar os interstícios do espaço poroso interpartícula. Contudo, na maioria

² Cf. Casagrande (1938).

da vezes em que são aplicadas cargas menores, a concentração crítica se mantém invariável, independentemente da tensão aplicada (Campbell, 2006).

Em diversas situações práticas da mecânica do solo, a tensão aplicada pode ser significativa (como no caso de grandes construções), caracterizando como um regime elástico. Consoante ao que Guo e Campbell (2016) explicam sobre os regimes elásticos, as partículas estão em contato constante com seus vizinhos, e os fluxos granulares são dominados por cadeias de forças. Estas são sequências quase lineares de partículas fortemente carregadas que se deformam elasticamente nos pontos de contato para suportar a carga aplicada. O regime elástico, no qual o comportamento dessas cadeias de forças está presente, é dividido em dois sub-regimes, o regime elástico-quase-estático e o regime elástico-inercial.

No regime elástico quase-estático, caracterizado por baixas taxas de cisalhamento, as partículas permanecem em contato contínuo e o material se deforma lentamente. Nessa condição, assumindo-se volume constante, a resistência do material é governada principalmente pelas cadeias de força. As cadeias de forças são criadas a uma taxa proporcional à taxa de cisalhamento ($\tan \phi$) e se quebram após uma duração proporcional a $1/\tan \phi$. Como resultado, as tensões médias são independentes da taxa de cisalhamento e diretamente proporcionais às forças compressivas. Já em regime elástico-inercial, que ocorre em uma taxa de cisalhamento maior, as cadeias de forças e a inércia das partículas têm efeito comparável, a força média dentro do fluxo terá a forma $c + \sigma \tan \phi$, sendo c correspondente à força do comportamento quase-estático, enquanto $\sigma \tan \phi$ é a parte adicional gerada pela inércia das partículas (Guo; Campbell, 2016).

Na prática, inexistem distinções físicas entre ambos sub-regimes, eles são diferenciados apenas por onde o efeito inercial se torna perceptível e as tensões aumentam linearmente à taxa de cisalhamento acima de seus valores quase-estáticos, *i.e.* se $\sigma \tan \phi \ll c$, o fluxo é elástico-quase-estático e quando $\sigma \tan \phi$ se torna comparável a c , em que o fluxo entra no regime elástico-inercial (Guo; Campbell, 2016).

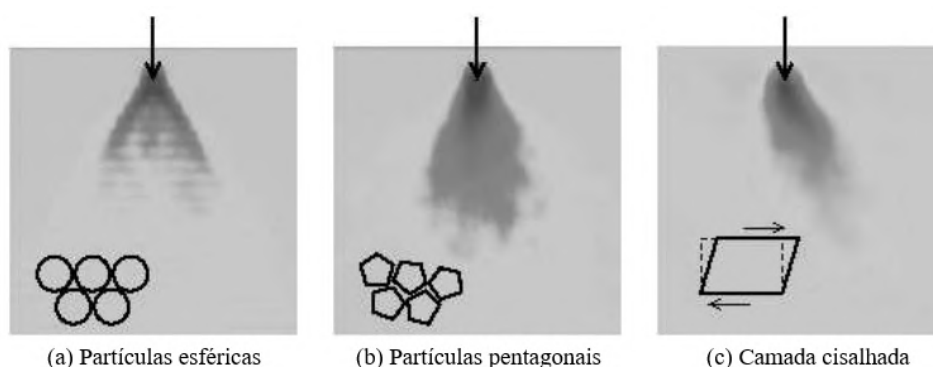
Essas técnicas, oriundas dos princípios da plasticidade, têm sido amplamente aplicadas na mecânica do solo, com o objetivo de prever as falhas de solos. Similarmente, Cintra, Aoki e Albiero (2011, p. 138) afirmam que em obras de fundações: "[...] estas análises em geral se reduzem à verificação do estado-limite último de ruptura ou deformação plástica excessiva e à verificação do estado-limite de serviço, isto é, a análise de deformações", a qual permite estimar os deslocamentos da fundação, especialmente os recalques totais e diferenciais.

Entretanto, a intrínseca desordem dos contatos e as forças de atrito presentes em qualquer pilha granular sugerem que o comportamento desses materiais pode, na realidade, divergir daquilo

que se poderia esperar, caso se considerassem apenas suas propriedades elásticas (Andreotti; Forterre; Pouliquen, 2013).

Atman et al. (2004) demonstraram através de seus estudos, utilizando do artifício computacional, que um conjunto granular, constituído por uma coleção de grãos idênticos, pode compactar-se sob diversas configurações microscópicas, cujas características são suscetíveis ao histórico de preparação. A Figura 12 revela em si os resultados alcançados.

Figura 12 – Tensão resposta das simulações.



Fonte: retirado de Atman et al. (2004, p. S2394).

A forma da resposta à aplicação da força na Figura (a) mostra duas trajetórias para a configuração do empacotamento regular das partículas esféricas, porém apenas uma única trajetória, sem bifurcações, quando a camada está desordenada, cuja representação é feita pela Figura (b). Por fim, quando a camada é cisalhada de antemão, a resposta é distorcida na direção do cisalhamento, como demonstrado pela Figura (c) (Atman et al., 2004).

Duran (2012, p. 59, tradução própria) afirma em sua obra:

Em particular, uma tensão externa aplicada a essa estrutura é transmitida por cadeia de forças, determinadas pelos contatos entre as partículas. Além disso, à medida que a tensão aumenta e as partículas se deformam, novos contatos são estabelecidos, criando caminhos adicionais para a transmissão das tensões. Consequentemente, a rigidez da estrutura aumenta com o nível de carregamento aplicado, resultando em desvios significativos do comportamento linear previsto pela lei de Hooke.

Diversos experimentos e simulações têm demonstrado que as forças aplicadas externamente a um meio granular são transmitidas de forma não uniforme pelos contatos entre as partículas (Radjai; Roux; Moreau, 1999).

2.2 Simulação Computacional

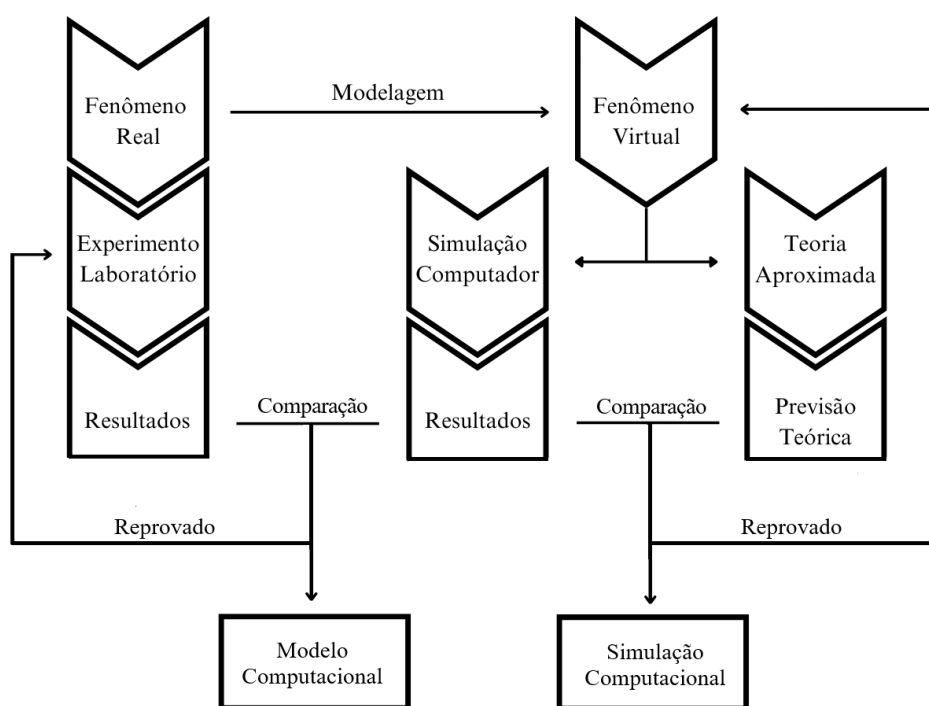
As simulações computacionais têm um papel valioso no fornecimento de resultados robustos principalmente para situações onde a solução analítica não é viável, permitindo ainda sua validação por meio da comparação com experimentos reais (Magalhães, 2018).

O avanço computacional, aliado à alta complexidade de determinados experimentos, os quais envolvem custos financeiros elevados, exigências temporais extenuantes e riscos de segurança consideráveis, impulsionou significativamente as pesquisas em simulações computacionais. Estas, por sua vez, possibilitam a variação de diversos parâmetros do sistema em estudo, algo que seria sobremodo difícil de se realizar em experimentos reais, *e.g.* a total eliminação do atrito, uma situação que seria não apenas improvável, mas extremamente desafiadora de se alcançar na maioria dos experimentos laboratoriais (Boaventura, 2020).

De forma análoga, Allen e Tildesley (1987) destacam que as simulações computacionais desempenham um papel fundamental no fornecimento de resultados mais próximos da realidade quando o modelo é bem calibrado e validado, que, de outra forma, seriam obtidos apenas por métodos aproximados ou, em certos casos, tornariam-se intratáveis. Nesse contexto, a simulação computacional serve como uma ferramenta de teste das teorias, sendo que, tem contribuído para a avaliação e comparação entre diferentes abordagens teóricas. Os resultados oriundos das simulações computacionais podem ser, ainda, confrontados com os de experimentos reais, funcionando assim como um teste rigoroso do modelo subjacente utilizado na simulação.

A Figura 13 apresenta uma esquematização da interação e do fluxo de validação entre os fenômenos reais, as previsões teóricas e os modelos virtuais.

Figura 13 – Conexão entre experimentos reais, teoria e simulações computacionais.



Fonte: adaptado de Allen e Tildesley (1987).

Eventualmente, se o modelo for bom, o simulador espera oferecer *insights* ao expe-

rimentalista e auxiliar na interpretação de novos resultados. Esse papel duplo da simulação, como uma ponte entre modelos e previsões teóricas por um lado, e entre modelos e resultados experimentais por outro, é ilustrado na Figura 13. Por causa desse papel de conexão e da maneira como as simulações são conduzidas e analisadas, essas técnicas são frequentemente denominadas 'experimentos de computador' (Allen; Tildesley, 1987).

2.2.1 Dinâmica Molecular

Em simulações de meios granulares é comum recorrer aos MED, que são técnicas numéricas que calculam as trajetórias de cada partícula em virtude da interação partícula-partícula e partícula-ambiente. Dentre as diversas técnicas de MED, podemos citar três das mais utilizadas para o tratamento de sistemas discretos: Evento Dirigido (ED), Dinâmica de Contatos (DC) e Dinâmica Molecular (Boaventura; Ducha; Atman, 2020). Uma importante diferença entre dinâmica molecular, referindo-se ao comportamento das moléculas, e dinâmica granular é o fato de que as colisões entre grãos são inelásticas, diferentemente das colisões entre moléculas (Mehta, 2007).

Para compreender o que são simulações por meio de DC ou ED em sistemas granulares, os pesquisadores Unger e Kertész (2002, p. 116, tradução própria) explicam: "O caminho é considerar as partículas como perfeitamente rígidas e lidar com a interação por meio da perfeita exclusão de volume, *i.e.* os corpos em contato não podem deformar-se". Ou seja, as simulações apresentam sistemas de *hard-spheres*, ou esferas rígidas. Neste tipo de sistema não há interpenetração de partículas, o contato ocorre em um ponto da esfera e o tempo de duração é consideravelmente curto.

Todavia, no método de DM as partículas não são consideradas perfeitamente rígidas, *i.e.* pode ocorrer interpenetração entre elas, as equações que descrevem esse tipo de abordagem foram apresentadas na subseção sobre Forças de Contato. Além disso, no método DM as interações seguintes são realizadas em função de um passo temporal constante e pré-definido, assim como é realizado na DC.

O método de DM, o qual é utilizado nesse estudo, fundamenta-se na segunda lei de Newton, conhecida como princípio fundamental da dinâmica. Para um meio granular, dada a soma de forças que atuam sobre o grão, o problema é reduzido à integração das equações de movimento de Newton para os graus de liberdade translacional e rotacional. Esse é um dos únicos métodos que possui cálculo direto das forças a partir das configurações microscópicas dos grãos (Luding, 2008).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_{k/i}(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \theta_k, \omega_k), \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{k/i}}{\partial t^2} = \frac{1}{J_i} \mathbf{M}_{k/i}(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \theta_k, \omega_k). \quad (27)$$

Onde:

$\mathbf{r}_i$ = posição da partícula i ;

m_i = massa da partícula;

$\mathbf{F}_{k/i}$ = força resultante exercida sobre a partícula i pelas partículas vizinhas k ;

J_i = momento de inércia polar da partícula;

$\theta_{k/i}$ = orientação angular da partícula;

$\mathbf{M}_{k/i}$ = momento (torque) resultante exercido pelos contatos.

Força e momento dependem da configuração instantânea do sistema, ou seja, dependem de posições dos grãos ($\mathbf{r}_k$), velocidades ($\mathbf{v}_k$), orientações (θ_k) e velocidades angulares (ω_k).

Consoante Pöschel e Schwager (2005), para partículas granulares na ausência de campos de longo alcance, a força $\mathbf{F}_{k/i}$ e o torque $\mathbf{M}_{k/i}$ atuando sobre a partícula i são dados pelas somas da interação em pares da partícula i com todas as outras partículas do sistema:

$$\vec{F}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \vec{F}_{ik}, \quad \vec{M}_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \vec{M}_{ik}. \quad (28)$$

Na simulação de meios granulares, tão importante quanto a análise das forças que atuam sobre as partículas é a discretização do tempo. Allen e Tildesley (1987) ponderam em sua obra o conceito de discretização, definindo como o ato de tornar um elemento contínuo em pequenas partes, subdividindo-o em elementos reconhecíveis e que podem aproximar da realidade observada. Dessa forma, quando lida-se com problemas temporais, conclui-se que para prever o que acontece no tempo ($t + \Delta t$) é necessário compreender o que ocorreu no tempo t , *i.e.* antes do ponto analisado.

Existem diversas formas de discretização para simular o comportamento de um material granular (Pöschel; Schwager, 2005). Nesta monografia, realizou-se simulações utilizando o método de DM através da técnica *Gear Predictor-Corrector* (Preditor-Corretor de Gear, em português) de terceira ordem empregando o algoritmo *Velocity-Verlet* (Velocidade-Verlet, em português).

2.2.2 Preditor-Corretor de Gear e Velocidade-Verlet

A integração das equações de movimento de Newton (equações 26 e 27) para sistemas de partículas granulares é numericamente difícil devido à interação de curto alcance com gradientes extremamente íngremes. O algoritmo Gear é particularmente adequado para este problema, principalmente por causa de sua estabilidade numérica. Ademais, há outra vantagem importante sobre muitos outros esquemas de integração: em cada passo de tempo, apenas uma avaliação das forças de interação é necessária. Portanto, há um enorme ganho em eficiência, pois a avaliação de força computacionalmente cara é realizada com menos frequência (Pöschel; Schwager, 2005).

Em seu trabalho, Gear (1967) desenvolve seu algoritmo em duas etapas. Primeiro, o preditor calcula as posições de partículas, velocidades e derivadas de tempo de ordem superior no tempo $t + \Delta t$ extrapolando os valores presentes usando uma expansão de Taylor³. Para a extrapolação, todas as derivadas de tempo até d^4/dt^4 são necessárias:

$$\begin{cases} \vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i(t) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{6}\Delta t^3 \vec{r}_i^{(3)}(t) + \dots \\ \vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) = \vec{v}_i(t) + \Delta t \ddot{\vec{r}}_i(t) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \vec{r}_i^{(3)}(t) + \dots \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) = \ddot{\vec{r}}_i(t) + \Delta t \vec{r}_i^{(3)}(t) + \dots \end{cases} \quad (29)$$

As coordenadas previstas e derivadas de tempo são usadas para o cálculo das forças $\vec{F}_i(\vec{r}_k^{pr}, \vec{v}_k^{pr}, \vec{\omega}_k^{pr})$ e $M_i(\vec{r}_k^{pr}, \vec{v}_k^{pr}, \vec{\omega}_k^{pr})$. A partir das forças e torques, as acelerações lineares e angulares $\ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t)$ e $\ddot{\theta}_i^{corr}(t + \Delta t)$ são obtidas. Em geral, essas acelerações diferem das quantidades previstas $\ddot{\vec{r}}_i^{pr}$. Se a previsão fosse precisa, as coordenadas, velocidades e acelerações previstas satisfariam a equação de movimento, portanto, $\ddot{\vec{r}}_i^{corr} = \ddot{\vec{r}}_i^{pr}$. Portanto, a diferença $\Delta \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_i^{corr} - \ddot{\vec{r}}_i^{pr}$ é uma medida para o desvio das coordenadas, velocidades e derivadas de ordem superior previstas de seus valores verdadeiros (Pöschel; Schwager, 2005).

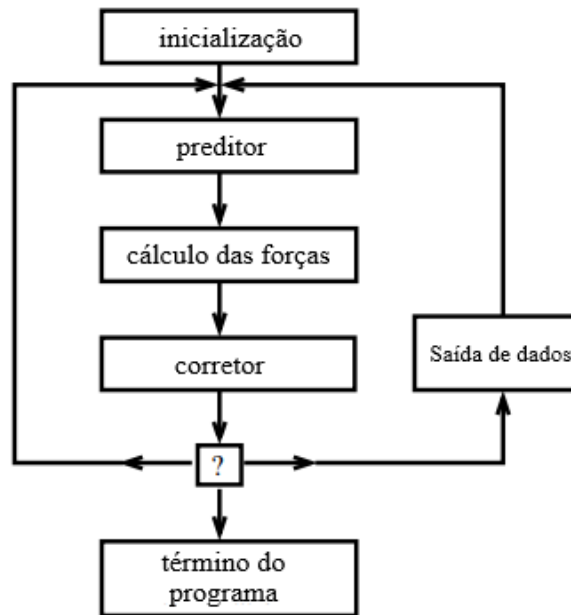
A segunda etapa do algoritmo de integração, o corretor, melhora os valores previstos adicionando um número que é proporcional ao desvio $\Delta \ddot{\vec{r}}$. Essa correção é ponderada de forma diferente para as diferentes derivadas de tempo:

³ Cf. Taylor (1715).

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{corr}(t + \Delta t) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \vec{v}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \ddot{\vec{r}}_i^{pr}(t + \Delta t) \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c0 \\ c1 \frac{1}{(\Delta t)^1} \\ c2 \frac{2}{(\Delta t)^2} \\ c3 \frac{6}{(\Delta t)^3} \\ \dots \end{pmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \Delta \ddot{\vec{r}}, \quad (30)$$

O objetivo geral de um passo de simulação de DM é baseado em um algoritmo preditor-corretor, o qual, inicialmente, desenvolve a lista de grãos vizinhos no tempo t , então prediz onde estarão os grãos no instante de tempo subsequente $t + \Delta t$, busca os contatos que foram formados com a predição, calcula as forças de contato entre cada grão e corrige as predições de velocidade e aceleração de cada grão (Pöschel; Schwager, 2005), conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Esquema do algoritmo de Dinâmica Molecular.



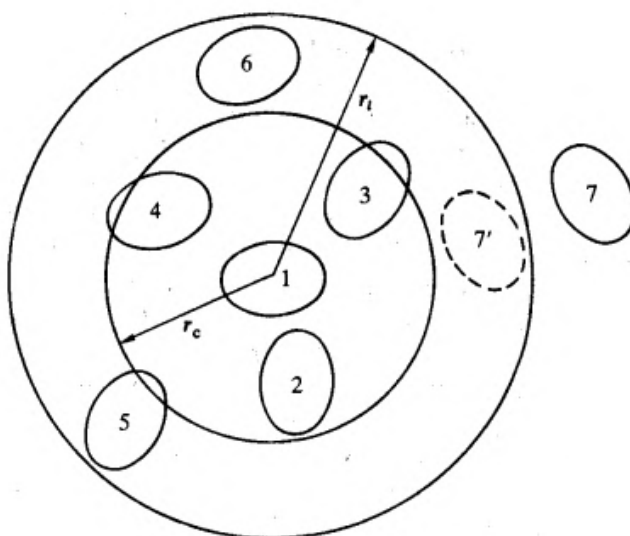
Fonte: adaptado de Pöschel e Schwager (2005).

As listas de Verlet são utilizadas em simulações de DM para manter eficiente a procura de vizinhos com o aumento do número de grãos no sistema. Assim, o sistema é dividido em “células” e cada célula tem sua vizinhança definida. Essa estrutura de dados mantém uma lista para cada partícula, na qual estão todos os possíveis vizinhos para um determinado raio, a cada passo de tempo é verificada a validade da lista. Assim que uma das listas perde a validade, é necessário recalcular todas as listas (Pöschel; Schwager, 2005).

A ideia do algoritmo de Verlet é que, no momento da inicialização, as relações de vizinhança entre as partículas são determinadas, *i.e.* as distâncias de todos os pares próximos de partículas são computadas. Pöschel e Schwager (2005) salienta que duas partículas são denominadas vizinhas próximas se a distância de suas superfícies for menor que uma constante predefinida *verlet_distância*. Para esferas, esse critério pode ser escrito conforme a Equação 1, sendo *verlet_distância* $> -\xi_{ik}$.

Segundo Allen e Tildesley (1987), no método original de Verlet, a esfera de corte potencial, de raio r_c , ao redor de uma partícula individual é concêntrica a uma outra esfera, para cobrir uma região maior de raio r_i , como mostrado na Figura 15.

Figura 15 – Esfera de corte ao redor de um grão 1.



Fonte: retirado de Allen e Tildesley (1987, p. 148).

Legenda: Os grãos 2, 3, 4, 5 e 6 estão na lista de grão 1; o grão 7 não está. Apenas os grãos 2, 3 e 4 estão dentro do intervalo do potencial no momento em que a lista é construída.

Esses vizinhos são armazenados em uma grande matriz, chamada, hipoteticamente, LISTA. Ao mesmo tempo, uma segunda matriz de indexação, PONTO, de tamanho N , é construída. $PONTO(I)$ aponta para a posição na matriz LISTA onde o primeiro vizinho da molécula I pode ser encontrado. Como $PONTO(I+1)$ aponta para o primeiro vizinho da molécula $I+1$, então $PONTO(I+1)-1$ aponta para o último vizinho da molécula I . Assim, usando PONTO, podemos identificar prontamente a parte da grande matriz LISTA que contém vizinhos de I (Allen; Tildesley, 1987).

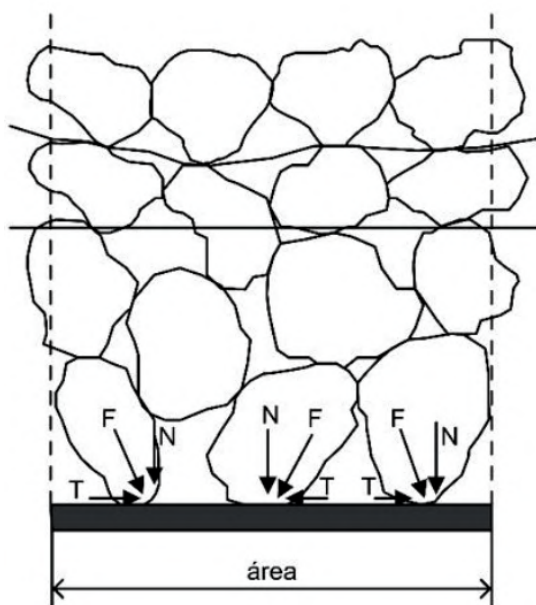
2.3 Distribuição de Tensões

Sendo o solo um meio intrinsecamente particulado, as tensões externas aplicadas são suportadas por dois mecanismos concorrentes: a transmissão de forças através da estrutura sólida,

de partícula a partícula, e a pressão neutra exercida pelo fluido intersticial, geralmente água, contido nos vazios (Caputo, 1988). Vale ressaltar que nesta monografia será considerado um material granular não coeso, logo o meio intersticial será desconsiderado.

Pinto (2006) representou através de uma imagem com dois planos a transmissão de tensões de um solo em aspecto microestrutural, sendo uma simplificação, dado que os esforços em maneira real atuam em três dimensões (x , y e z). Como resultado, uma seção plana hipotética que seccionasse a massa de solo interceptaria majoritariamente os grãos e os vazios, e apenas eventualmente os pontos de contato. Para fins de análise teórica, considere-se, no entanto, a possibilidade de inserir uma placa plana idealizada no interior do maciço de solo, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 16.

Figura 16 – Esquema de contato entre grãos.



Fonte: retirado de Pinto (2006, p.95).

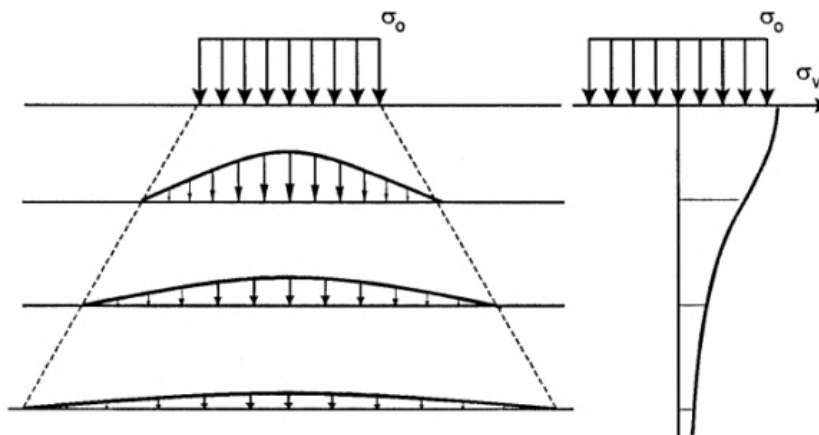
Independentemente do tipo de carregamento aplicado sobre uma área delimitada, o incremento de tensão resultante no interior do maciço de solo não se restringe à projeção vertical dessa área. De fato, ocorre uma dissipação lateral das tensões, as quais se somam às tensões geostáticas preexistentes, devidas ao peso próprio (Pinto, 2006).

É relevante notar que estes acréscimos de tensão são decorrentes da aplicação de sobrecargas. O processo inverso, como no caso de cortes (escavações), provoca um decréscimo das tensões, resultando em um alívio de carga no solo. Assim, a partir das considerações de Pinto (2006), compreende-se que o aumento da área sobre a qual a carga atua é um fator que, associado ao aumento da profundidade, promove a diminuição das tensões verticais.

A Figura 17 ilustra a distribuição das tensões verticais induzidas no solo por uma carga

superficial, evidenciando tanto o seu espalhamento horizontal quanto a sua atenuação ao longo da profundidade.

Figura 17 – Distribuição de tensões conforme a profundidade.



Fonte: adaptado de Pinto (2006).

O conceito de tensão interna nos solos, embora análogo ao utilizado em sólidos estruturais, apresenta uma distinção fundamental. Sólidos rígidos, como metais ou rochas, mantêm sua integridade devido a forças de ligação atômicas, moleculares ou de cimentação. Este aglutinamento intrínseco é responsável pela manutenção do estado rígido, permitindo que o material desenvolva resistência a tensões normais (incluindo tração) e de cisalhamento. Os solos, por outro lado, diferenciam-se deste contexto analítico por não possuírem uma estrutura interna resistente e, conseqüentemente, não resistirem a forças de tração impostas por ações externas (Júnior, 2020).

No entanto, mesmo na ausência dessa resistência interna, o solo exibe um comportamento similar ao de um sólido quando está confinado. Nesses casos, as tensões que garantem o equilíbrio não são internas, mas sim externas, impostas pelas condições de confinamento. Esta premissa valida a aplicação da Teoria da Elasticidade nas análises de carregamento em massas de solo, embora restrita a determinadas envoltórias limites. O principal condicionante é que o meio deve estar confinado; caso contrário, o desenvolvimento de tensões de tração causaria o descolamento entre as partículas, um efeito que é parcialmente minimizado em solos argilosos devido à presença da coesão (Júnior, 2020).

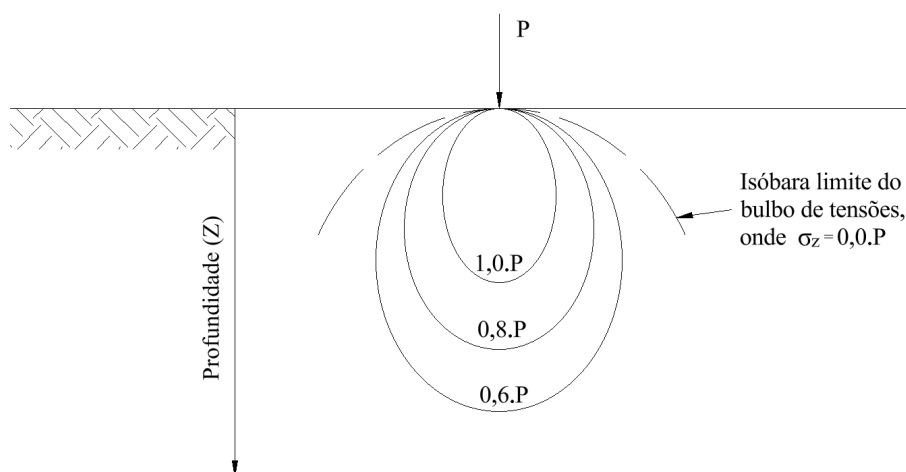
Como solos granulares se comportam de forma similar aos sólidos, é necessário entender suas deformações elásticas e plásticas sob a ação de forças externas. Nesse sentido, a teoria da elasticidade surge como uma ferramenta. Azevedo (2015, p. 14) contextualiza: "A teoria da elasticidade diz respeito ao estudo sistemático de tensão, deformação e deslocamento em um sólido elástico sob a influência de forças externas [...]", e é sobre esse entendimento que a solução de Boussinesq se baseia.

2.3.1 Solução de Boussinesq para Carga Pontual

A aplicação de uma carga na superfície induz um campo de tensões no interior do solo, cuja intensidade diminui tanto com a profundidade quanto com a distância horizontal ao centro do carregamento. Este fenômeno, conhecido como dissipação de tensões, faz com que a influência do carregamento seja mais significativa nas regiões diretamente abaixo da área aplicada, tornando-se progressivamente menor em pontos mais afastados do seu eixo de simetria (Pinto, 2006).

Para visualizar e quantificar este efeito, as soluções matemáticas de Boussinesq e outros autores permitem calcular o acréscimo de tensão em qualquer ponto. A partir desses cálculos, são traçadas as isóbaras, que são linhas que unem pontos de mesmo valor de acréscimo de tensão. O conjunto dessas curvas, como aponta Das (2011), define o bulbo de tensões, uma ferramenta gráfica que delimita a zona de influência da carga e que possui um contorno bulbiforme característico, conforme ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – Bulbos de tensões provenientes de uma carga pontual.



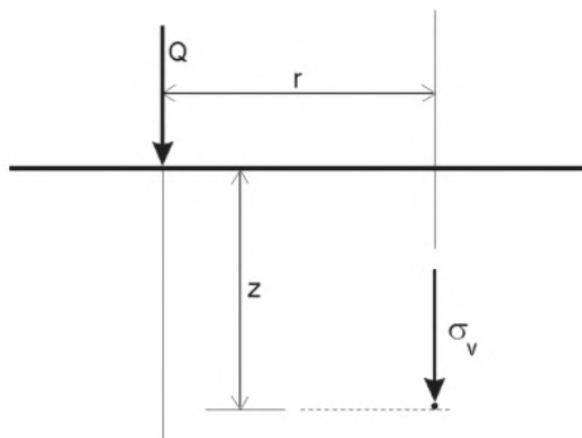
Fonte: adaptado de Caputo (1988).

A solução para a distribuição de tensões em um maciço, devida a uma carga pontual aplicada em sua superfície, foi desenvolvida por Boussinesq (1885) com base na Teoria da Elasticidade. A validade deste modelo clássico depende de um conjunto de hipóteses idealizadas. Entre as hipóteses pode-se citar: camada semi-infinita; material homogêneo, isotrópico e elástico; carga pontual aplicada na superfície. Sob essas condições, a solução de Boussinesq permite determinar o estado de tensão em qualquer ponto no interior do maciço por meio da formulação:

$$\sigma_v = \frac{3Qz^3}{2\pi(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (31)$$

sendo z e r definidos conforme a Figura 19:

Figura 19 – Tensões em um ponto no interior do maciço de solo.



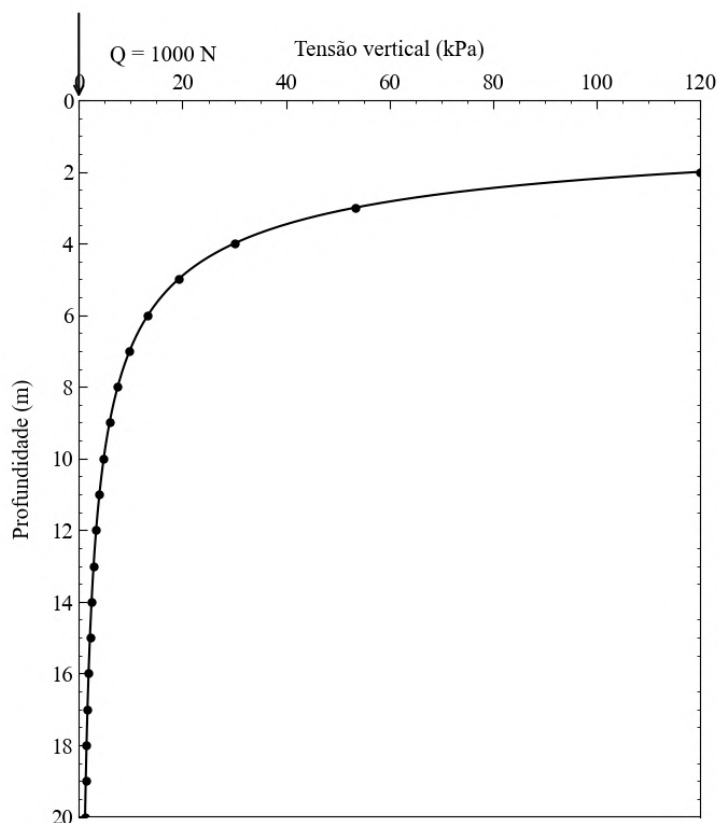
Fonte: retirado de Pinto (2006, p.166).

A união de pontos no interior do maciço de solo que experimentam o mesmo acréscimo de tensão define uma superfície de distribuição denominada isóbara. O conjunto dessas superfícies tridimensionais forma bulbo de tensões, conforme ilustrado anteriormente na Figura 18. Visto que a tensão induzida pela carga externa se dissipa com o afastamento do ponto de aplicação (tanto em profundidade quanto lateralmente), a isóbara funciona como uma fronteira de tensão. Por definição, qualquer ponto no interior do volume delimitado por uma isóbara (de valor σ_z) está submetido a uma tensão superior ao limite delimitado pela isóbara de σ_z , enquanto qualquer ponto externo a esse limite apresenta uma tensão inferior.

Pinto (2006) adverte sobre a imprecisão de se definir o bulbo de tensões de forma simplória, como se fosse a única região do subsolo afetada pelo acréscimo de tensão. Segundo o autor, existem múltiplos bulbos de tensão, pois é possível delinear uma isóbara distinta para cada nível de tensão que se opte por considerar.

Uma importante conclusão a partir da equação de Boussinesq é que os acréscimos de tensões independem dos parâmetros elásticos do material, ou seja, independem do tipo de solo (Ortigão, 2007). Dada a Equação 31 e mantida a relação r/z , a tensão é inversamente proporcional ao quadrado da profundidade do ponto considerado. A Figura 20 mostra o comportamento do acréscimo de tensões verticais abaixo do ponto de aplicação da carga ($r = 0$).

Figura 20 – Tensões no interior do maciço de solo abaixo da carga.

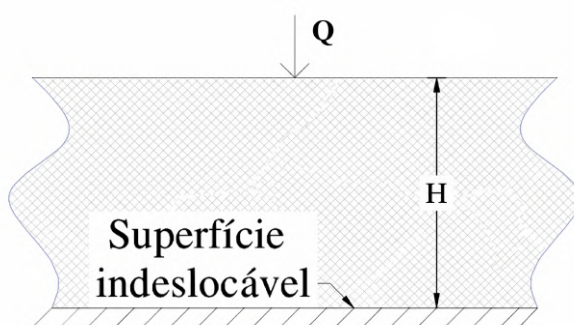


Fonte: adaptado de Ortigão (2007).

2.3.2 Solução de Burmister para Carga Pontual

A teoria de Boussinesq foi concebida para a determinação de tensões e deslocamentos sob a premissa de um meio elástico, homogêneo e semi-infinito, submetido a uma carga pontual aplicada em sua superfície. Em contrapartida, o modelo proposto por Burmister (1945) destina-se a sistemas elásticos estratificados, a exemplo de maciços compostos por duas ou três camadas, ou ainda de uma camada elástica sobreposta a uma base rígida como ilustra a Figura 21.

Figura 21 – Problema de Burmister (1945).



Fonte: adaptado de Poulos (1967).

Essa abordagem permite a atribuição de módulos de elasticidade e propriedades distintas para cada estrato, refletindo com maior fidedignidade o comportamento de depósitos de solo estratificados. Ao confrontar ambos os modelos, constatam-se divergências significativas em seus comportamentos. Primeiramente, no que tange à concentração e magnitude dos esforços, as tensões calculadas pelas equações clássicas de Boussinesq podem apresentar valores inferiores às tensões reais atuantes na base de uma camada. No modelo de Burmister, a presença de um substrato rígido subjacente à camada elástica induz uma concentração de tensões em sua base, nas proximidades do eixo de aplicação da carga, onde as tensões verticais podem superar em cerca de 50% os resultados derivados da solução geométrica de Boussinesq (Poulos, 1967).

Ademais, observa-se que a atenuação das tensões ocorre de maneira muito mais acentuada no sistema em camadas de Burmister à medida que se distancia do eixo de carregamento, em nítido contraste com a dissipação observada no semi-espço estudado por Boussinesq. Cumpre ressaltar, contudo, que as complexas equações de Burmister englobam a teoria de Boussinesq como um caso particular, reduzindo-se às formulações clássicas deste último quando os estratos do sistema passam a apresentar o mesmo módulo de elasticidade, configurando um maciço homogêneo, ou quando a espessura da camada superior tende ao infinito.

Outro fator de suma importância na análise de tensões é a influência do coeficiente de Poisson (ν). Em um meio semi-infinito, conforme postulado pela teoria de Boussinesq, a tensão vertical atua de forma independente desse coeficiente. Todavia, em um sistema estratificado, o coeficiente de Poisson exerce um efeito considerável na distribuição dos esforços. Isto ocorre, pois quando o material é confinado entre superfícies rígidas ele tentará expandir, porém como essa expansão é impedida, surgirão tensões horizontais, logo a distribuição das tensões internas será diferente quando considera-se um meio completamente homogêneo.

Para a carga pontual, a condição de que não há deformação lateral ao longo da base rígida e rugosa exige relações estritas governadas pelo valor de ν . O valor do coeficiente impacta na tensão vertical nas proximidades da base rígida. Tanto a tensão vertical quanto a tangencial (σ_θ) exibem uma forte dependência do coeficiente, como demonstra respectivamente as equações abaixo.

$$\sigma_z = \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) \theta_s, \quad (32)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\theta_s - \sigma_z}{2}, \quad (33)$$

onde θ_s representa o *bulk stress* (em português, tensão de volume).

Adicionalmente, o coeficiente de Poisson atua na definição dos limites assintóticos para os quais as tensões convergem a grandes distâncias do eixo de aplicação da carga. Por exemplo, o fator de influência referente à tensão de volume tende a um limite estipulado por $(1 + \nu)/(1 - \nu)$ com o incremento da distância tangencial tendendo ao infinito.

No contexto da determinação de esforços oriundos de carregamentos com geometrias complexas, destaca-se o método dos setores, uma abordagem gráfica sugerida por Poulos (1967). O referido método viabiliza o cálculo de tensões e deslocamentos, tanto em superfície quanto em profundidade, no interior de uma camada elástica sujeita a uma área carregada de formato genérico.

Fundamentado no princípio da superposição, o procedimento é estruturado em etapas contíguas de integração matemática e sobreposição geométrica. Inicialmente, faz-se necessária a obtenção das denominadas curvas de setor, que derivam da integração matemática dos fatores de influência de uma carga pontual. Para qualquer profundidade estipulada diretamente abaixo do ápice desse setor, o fator de influência resultante, correspondente a tensões ou deslocamentos, é calculado integrando-se o fator da carga pontual desde a origem até o limite dimensional, frequentemente normalizado por uma dimensão representativa do problema (Poulos, 1967).

$$\sigma_z = \frac{Q}{2\pi h^2} \int_0^\infty \frac{N_1}{D_1} \alpha J_0\left(\frac{r}{h}\alpha\right) d\alpha. \quad (34)$$

Sendo:

h : a espessura total da camada de solo elástico (profundidade até a base rígida);

r : a distância radial do eixo da carga até o ponto de análise;

α : a variável de integração; e

J_0 : a Função de Bessel.

Os termos que compõem o integrando (o numerador N_1 e o denominador D_1) são expressões extensas que dependem da profundidade, do coeficiente de Poisson e da variável de integração.

Para evitar a resolução manual dessa integral complexa para cada ponto, Poulos construiu e publicou as tabelas de Fatores de Influência adimensionais (I_{σ_z}), condensando toda a integral em um único valor tabelado, os quais podem ser consultados no Apêndice A.

A aplicação da Equação 34 possibilita a construção de gráficos que correlacionam diretamente o fator de influência no ápice com as propriedades geométricas do setor analisado. Para assegurar a aplicabilidade do método a variados cenários geotécnicos, essas curvas são sistematicamente calculadas e compiladas para um espectro de profundidades e para distintos

valores do coeficiente de Poisson.

Nos estudos originais conduzidos por Poulos (1967), a integração numérica dos valores de carga pontual viabilizou a geração de séries completas de curvas prontas para utilização, englobando as componentes de tensão σ_z , σ_r , θ , σ_θ e τ_{rz} , bem como os deslocamentos verticais e radiais.

3 EQUIPAMENTO E METODOLOGIAS

Neste capítulo são descritos os materiais e as metodologias adotados durante o desenvolvimento da pesquisa, os quais são parâmetros pertinentes para a organização, planejamento e execução do trabalho. Ademais, garantem transparência à pesquisa permitindo a compreensão dos procedimentos seguidos, viabilizando também que os resultados sejam replicáveis e passíveis de comparação com aqueles obtidos em outras pesquisas.

3.1 Equipamento

O presente trabalho demandou a realização de análises numéricas e gráficas com a utilização de algoritmos estruturados nas linguagens de programação Fortran e Python®. Dessa forma, foi empregado um computador para o desenvolvimento das etapas de pesquisa que contemplam a busca por informações, bem como para as análises numéricas e gráficas dos resultados. O modelo utilizado foi *Aspire Go AG15-71P-5939* com as seguintes especificações:

- processador 13th Gen Intel(R) Core(TM) i5-13420H (2.10 GHz);
- memória RAM de 8,00 GB, velocidade 5200 MT/s;
- sistema operacional 64 bits (Windows 11 - Versão: 25H2), processador baseado em x64;
- placa de vídeo 128 MB Intel(R) UHD Graphics.

3.2 Método de Abordagem

O objetivo deste trabalho é comparar os resultados numéricos de simulações de materiais granulares, obtidos pelo MED, com os resultados das formulações de Poulos, elaboradas a partir das equações de Burmister para a distribuição de tensões no solo sob a ação de uma carga pontual assentada sobre uma base rígida e indeslocável, bem como com a equação de Boussinesq. Dessa forma, caracteriza-se como uma pesquisa básica e exploratória, visando a identificação de padrões.

A natureza do objeto de pesquisa é conceitual, fundamentada na lógica dedutiva da física clássica e em formulações newtonianas. A abordagem do problema é, portanto, mista (qualitativa-quantitativa): a análise quantitativa baseia-se em dados primários gerados pelas simulações computacionais, enquanto a qualitativa foca na interpretação gráfica e padrões identificados.

Quanto aos procedimentos técnicos, a primeira fase, a qual consiste na revisão teórica,

foi conduzida utilizando o método *Pro-Know-C*. Esta escolha metodológica justifica-se por sua capacidade de estruturar uma revisão de forma sistemática e ampla. O processo envolveu etapas definidas de busca, filtragem e análise de referências, assegurando a seleção de arcabouço bibliográfico de relevância científica. O objetivo principal desta fase foi consolidar o estado da arte, identificar as lacunas de conhecimento existentes na literatura e fornecer o embasamento teórico.

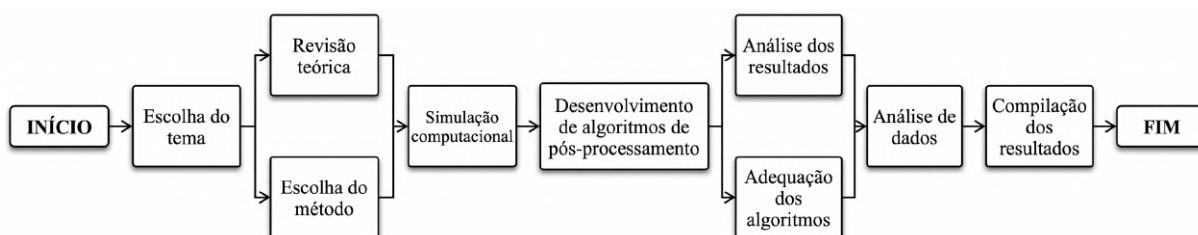
Subsequentemente, os estudos e metodologias identificadas na revisão direcionaram a segunda fase: a pesquisa experimental computacional, garantindo que o escopo prático do trabalho estivesse alinhado ao objetivo da pesquisa.

3.3 Método de Procedimentos

Esta pesquisa parte do uso do trabalho desenvolvido por Atman et al. (2004) em conjunto com o algoritmo de sua autoria, o qual proporciona uma análise numérica computacional da cadeia de forças oriunda da interação de materiais granulares. A Dinâmica Molecular foi a técnica adotada para a simulação do sistema bidimensional. Este capítulo descreve os procedimentos metodológicos para a aquisição dos dados.

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram realizadas as seguintes etapas conforme ilustrado na Figura 22.

Figura 22 – Fluxograma com as principais etapas da pesquisa.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

3.3.1 Construção do Modelo

A realização de cada simulação foi dividida em duas etapas. A primeira corresponde à geração das configurações iniciais do sistema, que será descrito nessa subseção, enquanto a segunda corresponde à aplicação da gravidade, que será descrita na Subseção 3.3.2. As duas etapas foram realizadas em códigos distintos, porém complementares. Os parâmetros iniciais dos grãos são gerados em linguagem F, pelo código *Prepare*, e tem como dados de entrada: quantidade de grãos e o raio máximo e mínimo.

O pseudocódigo descrito no Algoritmo 1 descreve a lógica de funcionamento do código, elaborado por Atman et al. (2004), nomeado como "*Prepare*" (Preparar, em português).

Algoritmo 1: Geração dos grãos - *Prepare*

Entrada: Dados do tamanho do sistema: quantidade de grãos, distribuição dos raios;

início

 Inicialização e leitura dos parâmetros de entrada;

para cada grão até o número total de grãos **faça**

 Cálculo do raio dos grãos;

 Cálculo das massas dos grãos;

até número total de grãos;

fim

fim

Saída: Arquivo com as configurações iniciais dos grãos.

A geração das coordenadas dos grãos é restrita pelas dimensões do domínio computacional, especificamente pela sua largura e altura. A largura do sistema é tratada por meio de condições de contorno periódicas, enquanto a altura é limitada pela base fixa e pela superfície livre.

Nas fronteiras laterais do domínio, foram aplicadas condições de contorno periódicas que na prática, quando um grão ultrapassa o limite espacial de uma face, ele é instantaneamente reintroduzido pela face oposta, conservando a quantidade total de grãos. Durante esse processo, o estado dinâmico da partícula, como o seu vetor velocidade, é conservado. Esse artifício computacional é utilizado para anular os efeitos de borda, permitindo que o modelo simule um meio material infinito na direção horizontal.

O parâmetro de entrada fornecido ao algoritmo *Prepare* define a malha de grãos. O algoritmo utiliza este valor para gerar um arranjo espacial bidimensional, estruturando o sistema em uma forma retangular. Esta forma é configurada para conter ' $2N$ ' grãos na dimensão horizontal e ' $N/2$ ' na dimensão vertical. O tamanho do sistema é essencial estar dimensionado na relação 1/4 (vertical/horizontal) para que seja possível obter as regiões de decaimento das curvas de tensões.

Consequentemente, a contagem total de grãos na configuração inicial será o resultado quadrático dessa entrada, totalizando N^2 grãos. Este método de geração estabelece uma geometria regular e uma compactação inicial uniforme para o sistema. Todavia, para a função randômica dos raios dos grãos, tem-se que utilizar valores dentro da faixa de 0,3 e 0,5, uma vez que a introdução de tamanhos fora dessa faixa geram a tendência de cristalização do empacotamento granular.

O Algoritmo 2, denominado como "*Visual Grains*" (Visualização de Grão, em português), foi estruturado em linguagem P para visualizar o arquivo de configuração resultante do "*Prepare*".

Algoritmo 2: Visualização dos Grãos - *Visual Grains***Entrada:** Arquivo obtido do *Prepare*;**início**

Lê os dados dos grãos (x, y, raio, massa);

Chama a *Função criar_imagem*;**início**

Inicializa a figura e os eixos do gráfico;

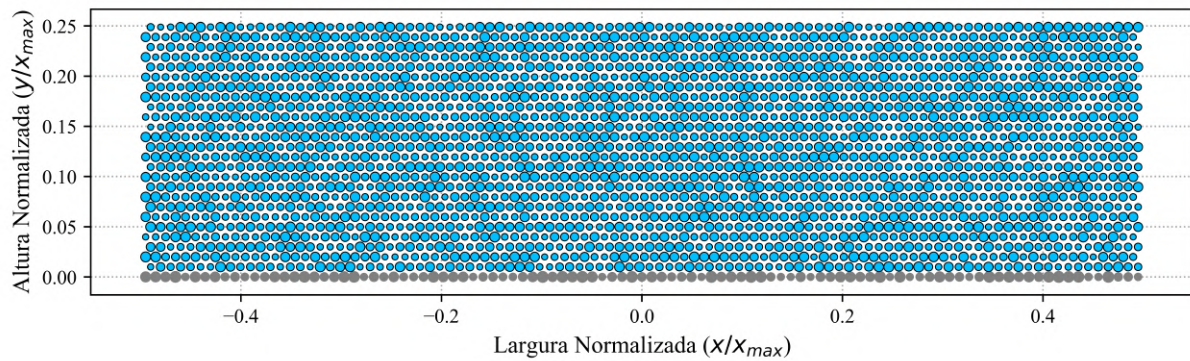
para cada grão no dicionário de grãos faça

Adiciona um círculo ao gráfico na posição do grão, com raio definido;

fim**fim****fim****Saída:** Imagem PNG.

O Algoritmo 2 gera imagens como apresentado na Figura 23.

Figura 23 – Visualização gráfica da configuração inicial do sistema.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

3.3.2 Aplicação da Dinâmica Molecular

Na simulação de DM, as forças de contato, resultantes das interações entre os grãos, servem como entrada para as equações de movimento de Newton. Estas equações são, então, resolvidas numericamente através do algoritmo iterativo *Velocity-Verlet*, o qual foi abordado na Subseção 2.2.2.

Para cada passo de tempo discretizado, enquanto o estado estacionário do sistema ou o limite de iterações não é alcançado, faz-se a busca dos grãos vizinhos. A busca é realizada em torno de cada disco, delimitada por um raio máximo de vizinhança. A busca por vizinhos incrementa uma lista, proposta por Verlet, que é refeita a cada 100 iterações. Essa busca de vizinhos, limitada, juntamente com a atualização da lista, reduz o custo computacional da simulação. Conforme explica Boaventura (2020), a complexidade desse algoritmo quando se trata de uma busca direta, de acordo com a teoria de análise de complexidade, é de $O(n^2)$. A lista de vizinhos otimiza para a ordem $O(n \log n)$.

As novas posições são calculadas com base nos valores de velocidades e acelerações. Em função da lista de vizinhos e das novas posições, são detectados os contatos entre os discos e então é criada uma lista de contatos. No momento do contato entre os grãos é feito o cálculo de interpenetração entre os discos i e j . São determinadas as forças de contato entre eles com base nas reações dos contatos. Então, as posições e velocidades de cada grão são recalculadas e corrigidas ainda para o mesmo instante de tempo.

O pseudocódigo descrito no Algoritmo 3 resume o código, elaborado por Atman et al. (2004), nomeado como "*Depose*" (Depor, em português), estruturado em linguagem F.

Algoritmo 3: Depositar os grãos - *Depose*

Entrada: Arquivo obtido do *Prepare*, k_n , k_s , μ , g_n , erro no peso dos grãos, frequência de verificação dos vizinhos, frequência de verificação do equilíbrio dinâmico e limite de interações;

início

 Inicialização e leitura do arquivo obtido do *Prepare*;

 Busca de vizinhos;

 Para cada passo de tempo **repita**

se *passadas 100 passos de dinâmica molecular* **então**

 Busca de Vizinhos;

fim

 Previsão das posições;

 Detecção de contatos;

 Cálculo das forças atuantes;

 Arquiva as reações;

 Correção das posições;

se *passadas 100 interações* **então**

 Verifica o estado do sistema;

 Arquiva as reações;

fim

se *passadas 1000 interações* **então**

 Salva as configurações no arquivo;

fim

até *o estado estacionário do sistema ou número de iterações ser alcançado*;

 Arquiva as reações finais;

fim

Saída: Arquivo com configuração das posições dos grãos em estado estacionário.

Os valores dos parâmetros foram definidos com base em quantidades normalizadas e no artigo de Atman, Claudin e Combe (2009). Os parâmetros específicos e os motivos pelos quais foram utilizados incluem:

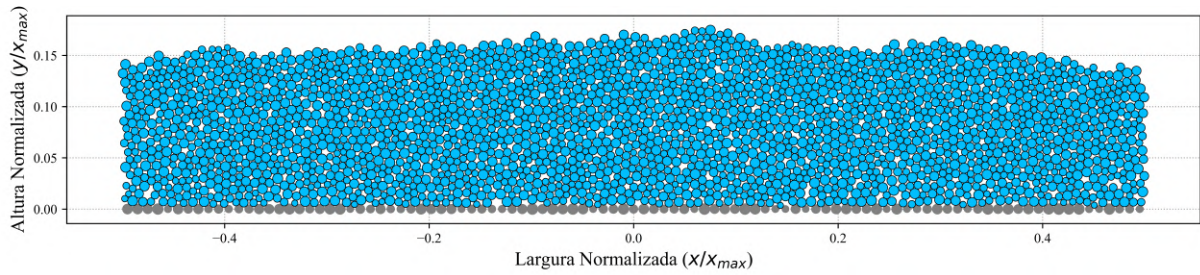
- I) **rigidez de contato normal (k_n) e tangencial (k_t):** O contato entre os grãos foi modelado utilizando duas molas com rigidez normal definida como $k_n=1000$ e tangencial como

$k_t=0,75k_n$. O uso desses valores resulta em uma deformação típica de contato próxima ao fundo de cerca de 0,1% do raio máximo (R_{max}), o que significa que os grãos simulados ainda se comportam de maneira rígida;

- II) **coeficiente de amortecimento (g_n):** O valor escolhido foi $g_n=30$. Esse valor foi determinado com o objetivo específico de obter um amortecimento crítico na direção normal durante o contato entre os grãos;
- III) **atrito de contato (μ):** Foi estabelecido um valor de $\mu=0,5$. Esse parâmetro unifica o modelo de atrito, pois os coeficientes de atrito estático e dinâmico foram considerados idênticos na simulação;
- IV) **passo de tempo de integração molecular (d_t):** O passo de tempo foi fixado em $d_t=ts/50$, onde ts é o período característico de oscilação do contato normal para o grão de menor massa da camada. Isso garante uma resolução temporal adequada para os cálculos da DM. Durante a preparação do sistema, os critérios para atestar que os grãos atingiram estabilidade mecânica são verificados regularmente a cada período de 100 passos de tempo;
- V) **escala da função de coarse graining (w):** O tensor de tensão foi calculado usando uma função Gaussiana com uma largura de granulação de $w=6d$ (sendo d o diâmetro médio do grão). Esse valor específico foi escolhido porque é pequeno o suficiente para não ser sensível à espessura finita da camada estudada, além da dependência do tensor de tensão em relação a essa escala se mostrar fraca após calcular a média de várias simulações;
- VI) **características dos grãos e da camada:** A simulação utilizou discos polidispersos com raios distribuídos de maneira homogênea entre um raio mínimo e o máximo para preencher a camada de teste, contendo 2500 grãos no total. A polidispersão é usada para criar uma distribuição de rede heterogênea realista na simulação.

O Algoritmo 2 é utilizado para visualizar a configuração dos grãos após a aplicação da gravidade, conforme apresenta a Figura 24.

Figura 24 – Visualização gráfica do sistema submetido ao efeito da gravidade.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

Por fim, através do incremento de uma linha no Algoritmo 2, os grãos foram enumerados para que fosse visualizada e escolhida a posição do grão mais superficial da posição $x/x_{max}=0$ como dado de entrada para o código *ecrase*.

3.3.3 Coleta e Tratamento de Dados

Os arquivos gerados pelo *Depose* registram as coordenadas e as forças reativas de cada grão individual. Esses dados são salvos em intervalos regulares, especificamente a cada 1000 passos de simulação, permitindo uma coleta de informações que abrange todo o processo dinâmico, desde o início até o sistema atingir a estabilidade.

O pseudocódigo apresentado no Algoritmo 4 descreve as etapas realizadas pelo código, elaborado por Atman et al. (2004), denominado "*Ecrase*" (Esmagado, em português), estruturado em linguagem F.

Algoritmo 4: Cálculo e construção do perfil de tensões - *Ecrase*

Entrada: Configuração das posições dos grãos: Arquivo obtido do *Depose*;

início

 Inserir o número do grão que deseja aplicar a força;

 Inserir o valor do coeficiente de atrito do sistema;

 Para a força aplicada **repita**

 Leitura das forças reativas;

 Cálculo das forças em y;

até atingido o número de grãos;

 Para o intervalo de janelas deslizantes **repita**

 Cálculo do tensor - σ_{yy}

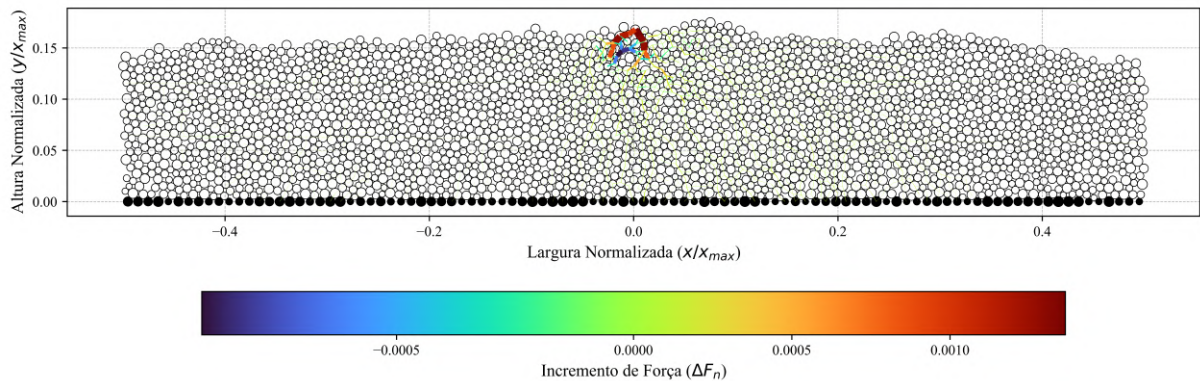
até atingido o comprimento do sistema;

fim

Saída: Salvar as configurações finais no arquivo.

Os dados gerados são pós-processados graficamente, conforme ilustra a Figura 25, com o objetivo de analisar detalhadamente as forças reativas em gradiente de temperatura.

Figura 25 – Visualização gráfica das forças de contato entre os grãos.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

O pseudocódigo descrito no Algoritmo 5 descreve as etapas realizadas pelo código nomeado "*Visual Ecrase*" (Visualização do Esmagamento, em português), estruturado em linguagem P, que cria a representação gráfica apresentada na Figura 25.

Algoritmo 5: Visualização do Esmagamento - *Visual Ecrase*

Entrada: Arquivos estado inicial (*Depose*) e deformado (*Ecrase*);

início

Lê os dados dos grãos (posição, raio, tipo) e as forças de contato de ambos os arquivos;

Calcula o incremento de força (ΔF_n) subtraindo as forças do estado inicial das forças do estado deformado;

Chama a *Função visualizar_diferenca_cadeias*;

início

Inicializa a figura, os eixos e o mapa de cores divergente;

para cada grão lido faça

Adiciona um círculo ao gráfico na posição correspondente;

fim

para cada par de grãos em contato faça

Filtra ruídos (ignora variações de força insignificantes);

Adiciona um segmento de reta conectando os centros dos grãos;

Ajusta a espessura e a cor do segmento proporcionalmente ao valor do incremento de força (ΔF_n);

fim

Insere a barra de cores (escala de referência) no gráfico;

fim

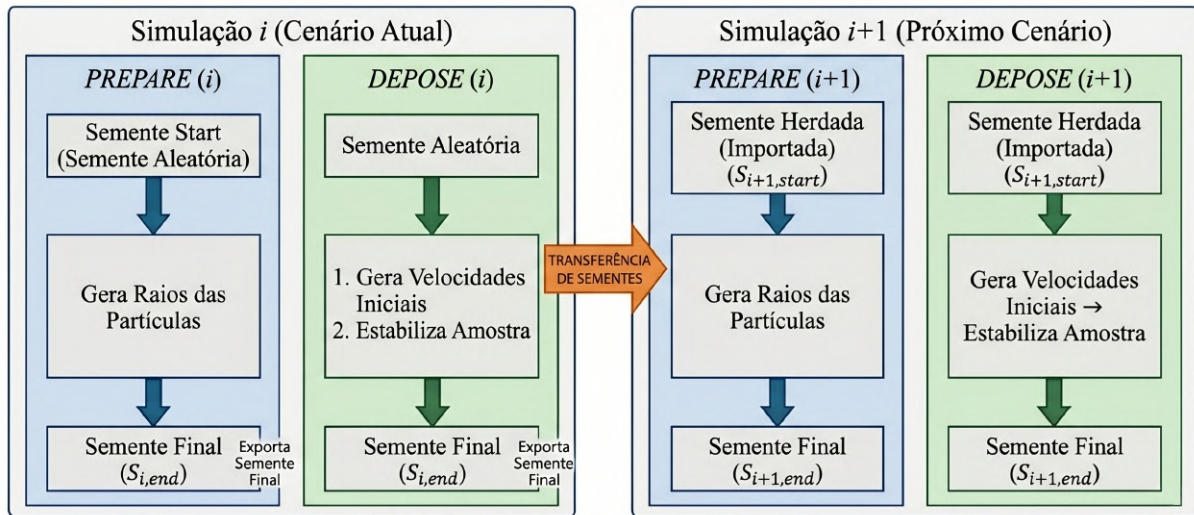
fim

Saída: Imagem PNG.

A geração de raios e condições iniciais depende de geradores de números pseudoaleatórios. Por serem algoritmos puramente determinísticos, a sequência de valores produzida é inteiramente definida por seu estado inicial, conhecido como semente.

Para a obtenção de médias estatísticas representativas a partir de múltiplas simulações, e visando garantir a estrita independência estatística entre os diferentes cenários analisados, fez-se necessário o repasse dos últimos números de sementes numéricas geradas pelas rotinas *Prepare* e *Depose*, conforme ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Fluxo de sementes para independência estatística entre simulações.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

Neste trabalho calculou-se as componentes da σ_{yy} . O eixo y representa a coordenada cartesiana que coincide com a direção normal (vertical) da camada depositada. Além disso, devido ao sistema ser bidimensional e para diminuir os efeitos de ruídos das forças, aplicou-se o tratamento estatístico definido na Equação 35 sobre uma amostragem de 31 simulações independentes.

$$\sigma_{yy}(x) = \left\langle \frac{1}{L} \sum_{x-L/2 \leq \xi < x+L/2} \frac{f_{\xi}^{y,final} - f_{\xi}^{y,inicial}}{f_0} \right\rangle, \quad (35)$$

onde L é a largura do sistema e f_0 é o módulo da sobrecarga. A componente de força f^y corresponde à componente vertical. A variável ξ é o índice que conta os contatos dos grãos, sobre o sensor, usados no cálculo. As palavras sobrescritas "inicial" e "final" se referem aos estados iniciais e finais do sistema, sendo estes os arquivos gerados pelos códigos *Depose* e *Ecrase*, respectivamente.

Por fim, emprega-se uma função de suavização para refinar a descrição dos dados brutos no cálculo da função resposta, a qual depende diretamente da função ϕ , "função de *coarse-graining* (CG)", responsável por transformar as forças de contato microscópicas e discretas dos grãos em um campo de tensão macroscópico e contínuo:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j} f_{ij\alpha} r_{ij\beta} \int_0^1 ds \phi[\vec{r} - \vec{r}_i + s\vec{r}_{ij}]. \quad (36)$$

A Equação 36 serve para fornecer uma expressão exata para o cálculo do tensor de tensão macroscópico ($\sigma_{\alpha\beta}$) em uma posição específica r a partir puramente de quantidades microscópicas. Como o estudo avalia um conjunto estático de grãos, a parte cinética da tensão é igual a zero, de modo que a equação foca exclusivamente nas tensões geradas pelos contatos mecânicos entre os grãos. Nesta expressão, os índices romanos são rótulos dos grãos, enquanto os gregos denotam as coordenadas cartesianas. $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$, onde $\vec{r}_i$ é o centro de massa do grão i , são os *branch vectors* (vetores de ramo, em português), e $\vec{f}_{ij}$ é a força que o grão j aplica sobre o grão i (Atman; Claudin; Combe, 2009).

O termo $\phi(\vec{R})$ é uma função de suavização arbitrária que é normalizada, positiva semidefinida com um único pico em $\vec{R} = 0$, e possui uma largura típica w , a escala de comprimento de CG. $\sigma_{\alpha\beta}$ depende, em geral, da escolha de ϕ e, em particular, da escala de CG. No entanto, segundo Atman, Claudin e Combe (2009), para uma faixa de valores $d < w < 10d$, sendo d é o diâmetro médio do grão, essa dependência é fraca, especialmente após a média de conjunto.

Neste estudo, escolheu-se uma função CG gaussiana, conforme a Equação 37, com uma largura de $w = 6d$, um valor que também é pequeno o suficiente para não ser sensível à espessura finita da camada.

$$s(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}w_F^2 q^2\right). \quad (37)$$

Sendo:

w_F : a largura da função gaussiana. Fisicamente, ela indica o grau de espalhamento da força sobre a superfície da camada; e

q : a variável no domínio de Fourier.

Para tanto, utilizou-se o Algoritmo 6 para gerar os gráficos de perfis de tensão vertical a partir da média das simulações.

Por fim, realizou-se a análise comparativa com o modelo discreto, os cálculos analíticos foram parametrizados exatamente com a mesma carga média do MED. A solução de Boussinesq foi obtida através de sua equação para uma carga pontual em meio semi-infinito. Em contraste, a teoria de Poulos, que incorpora o efeito da base rígida, foi calculada via integração numérica. Por fim, as tensões e profundidades foram rigorosamente adimensionalizadas.

Algoritmo 6: Ajuste *Coarse-Graining* das Tensões

Entrada: Série de arquivos MED pareados (estados *Depose* e *Ecrase*);**início**

Identifica e agrupa todos os pares de arquivos de simulação correspondentes;

para cada par de arquivos na lista faça

Lê vetorialmente os dados de grãos e contatos;

Filtrar os contatos localizados na base do sistema;

Calcula o perfil espacial das tensões e armazena o incremento de força
(deformado subtraído do inicial);**fim**

Calcula a média dos incrementos de tensão de todos os pares e aplica uma suavização;

inícioAvalia iterativamente a *Função de Erro*;

Calcula a tensão teórica integrando as soluções do domínio de Fourier;

Minimiza a diferença (Δ) entre as tensões médias extraídas do MED;**fim**

Calcula as curvas teóricas finais utilizando os melhores parâmetros encontrados;

início

Gera o gráfico de tensão normal;

fim**fim****Saída:** Imagem PNG.

Dessa forma, utilizou-se o Algoritmo 7 para gerar os gráficos de perfis de tensão vertical a partir da média das simulações.

Algoritmo 7: Análise Comparativa de Tensões Verticais

Entrada: Série de arquivos MED pareados (estados *Depose* e *Ecrase*);**início**

- Identifica e agrupa todos os pares de arquivos de simulação correspondentes;
- Inicializa as matrizes para armazenar os perfis de tensão em diversas profundidades (z);

para cada par de arquivos na lista faça

- Lê os dados de partículas, rede de contatos e a carga aplicada no topo;

início

- Discretiza o eixo horizontal em volumes elementares representativos;
 - Calcula o perfil periódico das tensões no MED para os estados *Depose* e *Ecrase*;
 - Subtrai os perfis para obter o incremento de tensão induzido pela carga;

fim**fim**

- Calcula a carga externa média global (F_0) de todos os pares;

para cada profundidade alvo (z) faça

- Calcula a média de conjunto dos incrementos de tensão do MED e identifica o pico máximo;

se pico da tensão > 0 então

- Calcula o pico de tensão teórica de Poulos integrando as soluções no domínio de Fourier;
 - Calcula o pico de tensão teórica de Boussinesq;
 - Aplica a normalização adimensional na profundidade (z/H) e nos picos de tensão ($H \cdot \Delta\sigma_{yy}/F_0$);

fim**fim**

- Gera as curvas teóricas e numéricas utilizando os vetores normalizados;

início

- Plota o gráfico;

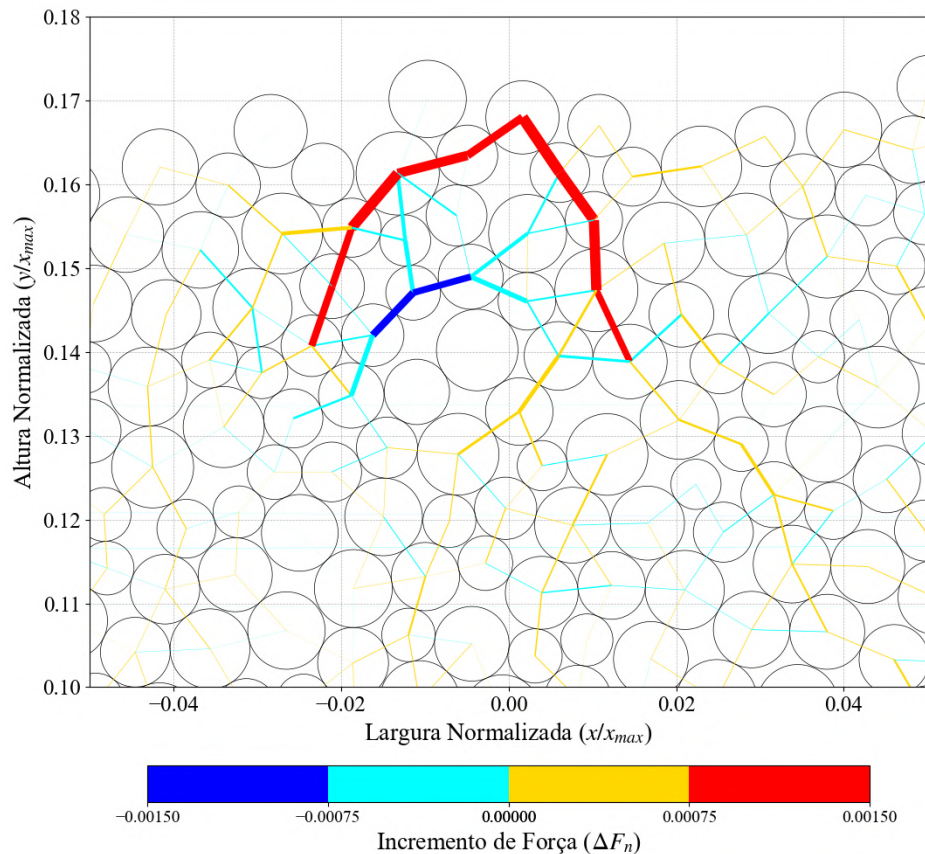
fim**fim****Saída:** Imagem PNG.

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados das simulações computacionais em MED para o estudo do comportamento de um sistema granular submetido a uma carga pontual. O objetivo central é analisar como as tensões se distribuem no interior da camada e comparar esses dados com as previsões da TE. A análise começa pela observação detalhada das interações entre os grãos em escala mesoscópica, onde a natureza descontínua do material se torna evidente. Essa etapa é necessária para entender como pequenos contatos individuais geram o comportamento observado em escalas maiores.

A transmissão de forças em meios granulares não ocorre de forma uniforme, como acontece em materiais contínuos. Em vez disso, a carga aplicada na superfície percorre caminhos de forças pelo conjunto de grãos. Esse fenômeno é a base para a compreensão dos resultados obtidos e mostra a diferença fundamental entre a simulação computacional e os modelos matemáticos ideais. Na Figura 27 apresenta o resultado de uma única simulação que mostra a distribuição de tensão na região superficial da camada.

Figura 27 – Visualização gráfica das forças de contato entre os grãos.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

A figura acima ilustra o comportamento mesoestrutural do sistema granular, detalhando a região imediatamente abaixo do ponto de aplicação da carga pontual. Diferentemente do campo de tensões suave e contínuo previsto pela TE, é possível notar que a tensão não se dissipa de maneira uniforme e isotrópica pelo maciço. Em vez disso, a transferência de carga ramifica-se e segue caminhos preferenciais e irregulares formados pelo contato direto entre os grãos, constituindo as chamadas cadeias de forças.

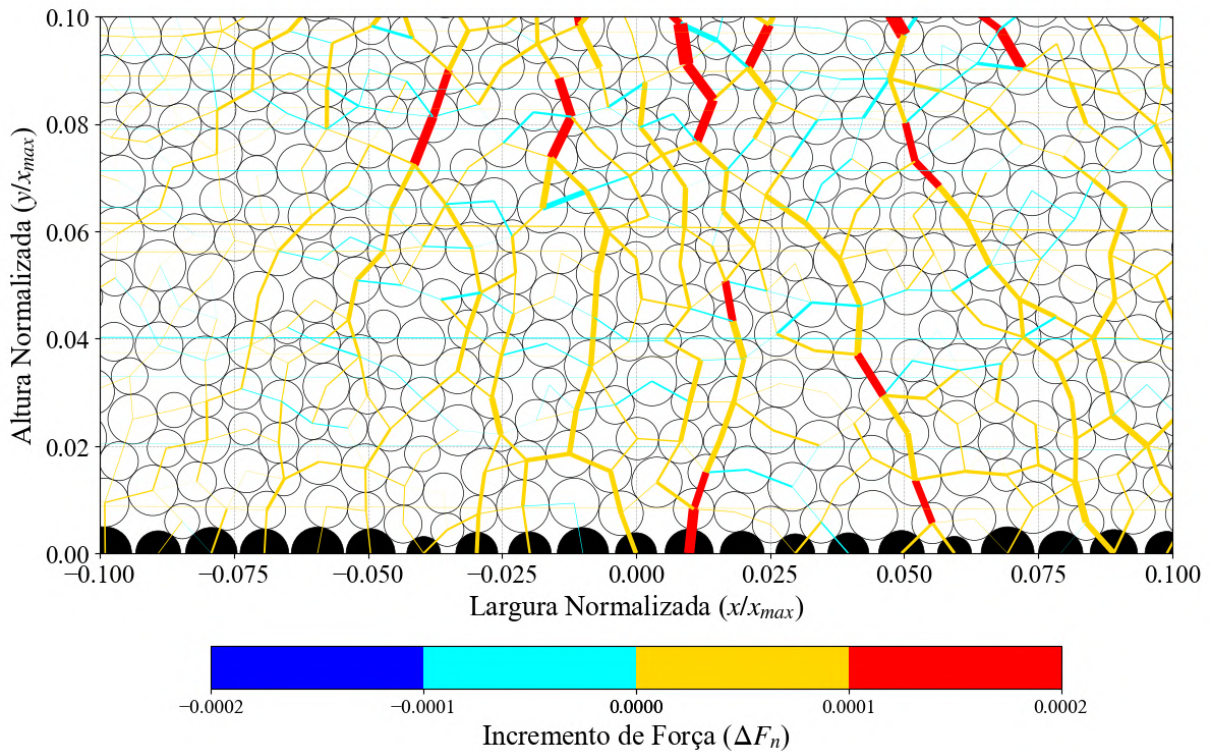
A escala de cores do mapeamento quantifica o incremento de força normal intergranular (ΔF_n). Nesse espectro, os tons mais quentes, tendendo ao vermelho, evidenciam os grãos submetidos às maiores intensidades de compressão. Em contrapartida, os tons de azul indicam as regiões vizinhas que sofreram um alívio de tensão e participam de forma menos ativa na sustentação do esforço principal. Essa representação gráfica confirma visualmente a propriedade heterogênea do meio granular: apenas uma fração dos grãos é responsável por suportar e transmitir a maior parte da sobrecarga até a base, enquanto o arranjo de grãos ao redor atua predominantemente como um confinamento passivo para manter a estabilidade lateral dessas colunas de força.

Ao comparar essa observação com as soluções elásticas, confirma-se o que já se esperava, o modelo elástico tradicional não captura essa fragmentação da carga. Enquanto a teoria prevê um campo de tensões suave, o MED revela um sistema de contatos ruidoso e heterogêneo. Os grãos que não fazem parte das cadeias principais atuam na estabilidade lateral ao conjunto, impedindo que as colunas de força entrem em colapso. Essa estrutura interna desempenha papel fundamental na resistência mecânica do material granular.

Nota-se que a carga aplicada no grão superficial se divide rapidamente entre os grãos vizinhos. Entretanto, essa divisão não é simétrica nem vertical. Os caminhos de força mudam de direção bruscamente devido à organização aleatória dos discos e à diferença nos seus tamanhos. O uso de grãos com tamanhos variados (polidispersão) foi essencial para evitar que o sistema se organizasse em um padrão cristalizado. Se todos os grãos tivessem o mesmo tamanho, as forças seguiriam direções muito rígidas e artificiais.

Na extremidade inferior do sistema, mostrada na Figura 28, observa-se como a carga atinge a base rígida e imóvel. A tensão que chega ao fundo está distribuída por uma área muito maior do que o ponto inicial no topo. Isso acontece porque as cadeias de forças vão se abrindo em formato de cone à medida que percorrem pelo sistema. No entanto, mesmo no fundo, a pressão não é igual em todos os pontos de contato com a base.

Figura 28 – Visualização gráfica das forças de contato com a base rígida.



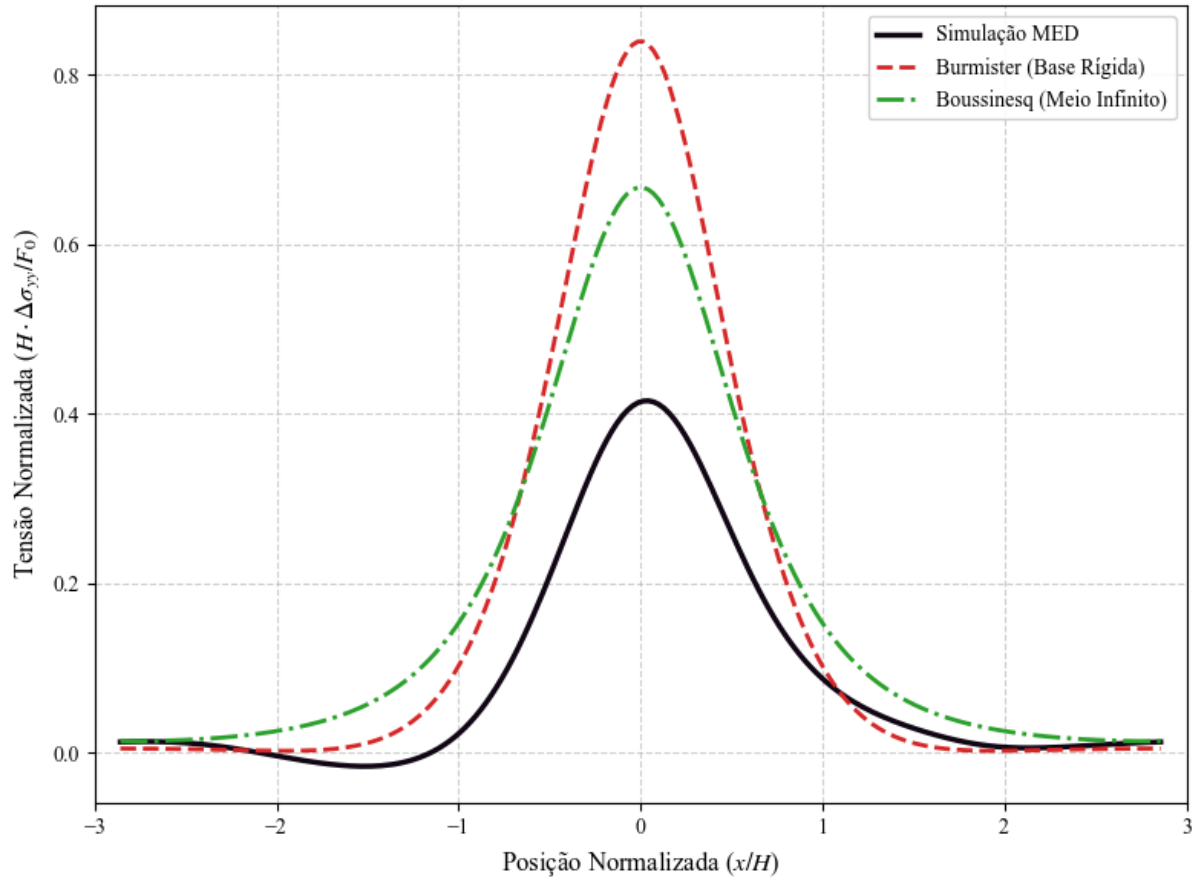
Além disso, ressalta-se o papel mecânico da condição de fronteira imposta: a presença de uma base perfeitamente rígida restringe a deformação vertical da camada granular. Essa restrição induz uma concentração de esforços verticais, um fenômeno de acréscimo de tensão que corrobora diretamente com as previsões estabelecidas no modelo de solos estratificados de Burmister. Todavia, é perceptível a ocorrência de alívios nos grãos próximos à base. Isso ocorre devido ao processo de pequenos arqueamentos que se formam.

Embora a análise de uma única simulação seja útil para ver as cadeias de forças, ela não serve para uma comparação direta com os resultados das formulações matemáticas. Como cada preparação de grãos é diferente, os resultados de uma única simulação são muito variáveis. Por isso, foi necessário realizar o cálculo da média de várias simulações independentes, usando sementes aleatórias diferentes para cada uma. Esse processo permite obter um comportamento médio do sistema, que é mais estável e representativo.

Para transformar as forças individuais dos grãos em um campo de tensão contínuo, utilizou-se a técnica de *coarse-graining*. Foi aplicada uma função de suavização gaussiana com uma largura de $w = 6d$, onde d é o diâmetro médio do grão. Segundo Atman, Claudin e Combe (2009), essa largura é pequena o suficiente para manter os detalhes do sistema, mas grande o bastante para eliminar os ruídos dos grãos individuais.

A Figura 29 apresenta o perfil horizontal do incremento de tensão vertical ($\Delta\sigma_{yy}$) na base da camada. O gráfico compara os dados médios da simulação (linha contínua) com os resultados advindos das equações baseadas na TE (linhas tracejadas).

Figura 29 – Perfil de distribuição de tensões na base.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

A curva do MED isola exclusivamente o efeito de uma força aplicada no sistema. Ele é calculado medindo o perfil de tensões de contato após a aplicação da força no topo do sistema e subtraindo desse valor o perfil de tensões preexistentes devido ao peso próprio dos grãos.

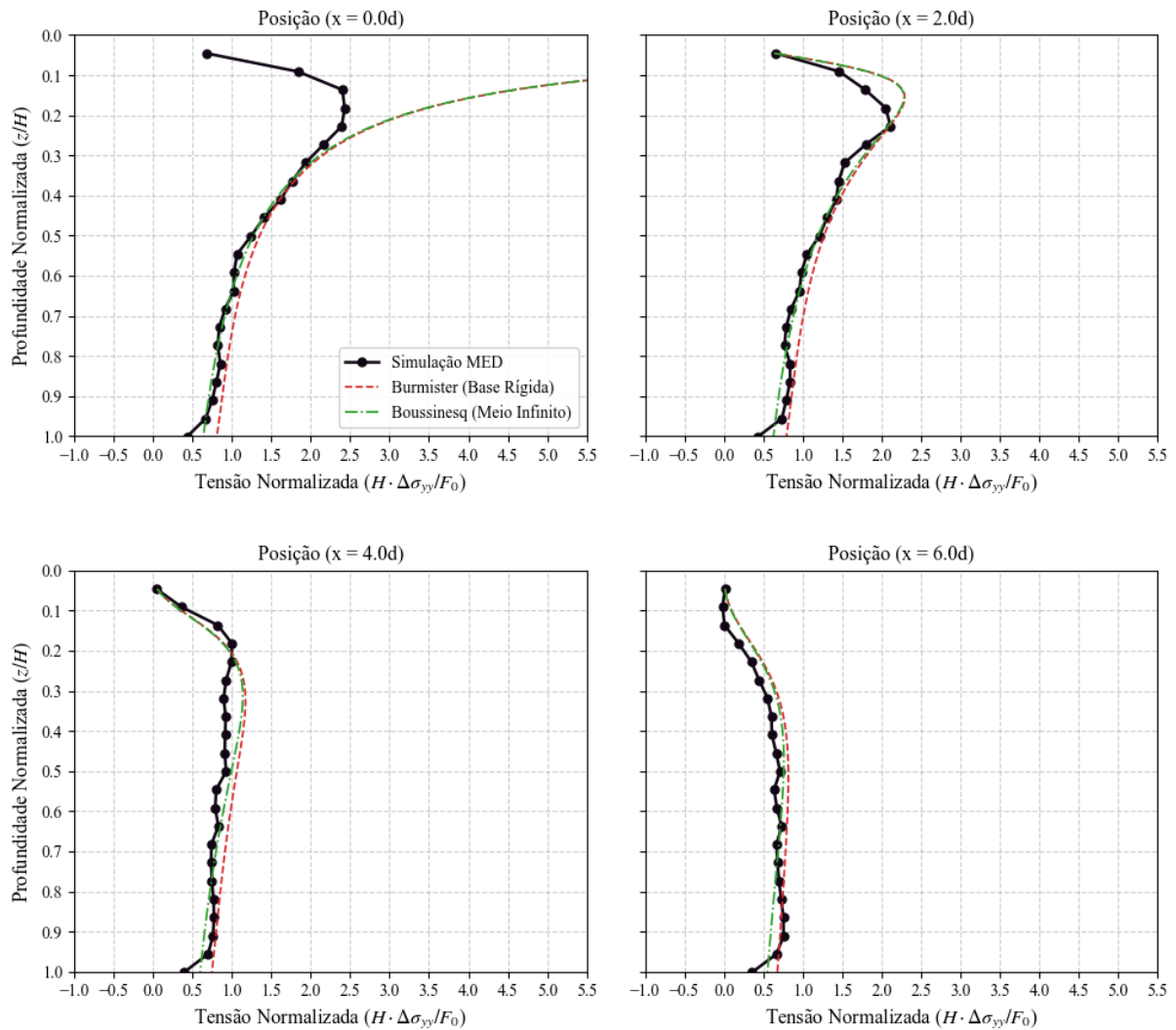
As formulações baseadas na TE, tanto para o meio semi-infinito quanto para a camada finita, definem o campo de tensões como uma função contínua das coordenadas espaciais (x, z). Dessa forma, ao avaliar essas funções fixando a variável de profundidade ($z = \text{const.}$) e parametrizando a distância horizontal (x), é possível traçar a distribuição dos esforços na base.

A curva de Burmister apresenta o pico mais alto, isso é fisicamente consistente com as equações: como a base é rígida, ela impede a deformação vertical e concentra as tensões que, em um meio infinito, se dissipariam. A curva de Boussinesq, por considerar um meio semi-infinito, *i.e.* não ter essa base rígida, permite um espalhamento maior das tensões, resultando em um pico menor. Ao contrário da solução de Burmister, os resultados do sistema granular na base possui

uma "rugosidade" intrínseca. Os grãos na camada limite inferior interagem de forma discreta com essa base, o que pode causar um efeito de alívio local de tensões ou uma redistribuição de forças.

Quanto à propagação ao longo da profundidade, a Figura 30 permite visualizar como a tensão imposta na superfície se dissipa tanto no eixo central quanto em suas adjacências laterais ($x = 2d, 4d$ e $6d$). O gráfico apresenta a profundidade normalizada (z/d) em relação ao incremento de tensão vertical.

Figura 30 – Comparação da distribuição de tensão vertical normalizada ao longo do eixo vertical.



Fonte: elaborado pelo autor (2026).

Com base nos gráficos, nota-se uma diferença entre os resultados das simulações (linha azul com pontos) e os resultados pela TE (linha vermelha e linha verde, ambas tracejadas). Nos primeiros trechos de profundidade, há divergência entre o modelo numérico e as curvas da TE. Esse comportamento curvo ocorre porque, próximo à carga, a natureza discreta das cadeias de forças redistribui as tensões de maneira não uniforme antes que o meio consiga se homogeneizar. No entanto, ao analisar as camadas mais profundas, o resultado granular passa a apresentar

um comportamento semelhante ao contínuo, apresentando boa concordância com as soluções elásticas, principalmente com a condição imposta por Burmister.

Além disso, vale ressaltar que enquanto Boussinesq e Burmister consideram uma carga pontual idealizada aplicada em um meio contínuo, o meio granular limita a magnitude do pico de tensão devido ao diâmetro físico dos grãos. Esse comportamento curvo, diferente da distribuição contínua de tensões prevista pela elasticidade, advém da aplicação da carga em um espaço físico definido na superfície. Dessa forma, a simulação não falha ao não coincidir com a teoria, mas sim demonstra fielmente o processo físico de homogeneização que ocorre à medida que a carga transita da descontinuidade dos grãos para um comportamento de meio contínuo em maiores profundidades.

Com o afastamento do eixo de aplicação da carga, as curvas continuam apresentando comportamentos semelhantes. Ao analisar a região da base, a curva demonstra a influência da condição de fronteira inferior. A presença da base rígida restringe a deformação vertical da camada de solo, induzindo uma concentração de tensões na interface de contato, como mostrado na Figura 28. Todavia, o valor de tensão no resultado das simulações granulares próximo à base perde o comportamento semelhante ao modelo de Burmister, e decai para uma tensão menor que a de Boussinesq devido às redes de contatos.

A distribuição das forças se torna menos eficiente na última camada de grãos do que a TE prevê. Enquanto a teoria assume uma distribuição de tensão perfeita, o modelo granular apresenta uma variação estatística nas cadeias de forças, o que muitas vezes resulta em valores levemente inferiores à predição teórica, principalmente devido à formação de pequenos arqueamentos que distribuem os esforços em áreas maiores, além do que geram alívio nos grãos próximos à base.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo a investigação da distribuição de tensões em um sistema granular bidimensional submetido a uma carga pontual, contrastando os resultados obtidos por simulações, que utilizam a abordagem de Dinâmica Molecular, com as formulações baseadas na Teoria da Elasticidade. A partir do emprego do Método dos Elementos Discretos e do tratamento gráfico, foi possível estabelecer uma análise adequada.

Os resultados evidenciaram que a análise simulacional é essencial para uma compressão mais precisa das tensões, *i.e.*, mesoestrutural do sistema. Bem como, observou-se que as tensões se aproximam dos resultados esperados pelas equações clássicas.

A análise mesoestrutural revelou que a premissa de propagação isotrópica e uniforme, inerente às soluções elásticas clássicas, reflete em partes a dinâmica interna de materiais granulares não coesivos. Constatou-se que a transferência de carga ao longo da camada não ocorre de maneira homogênea, mas sim através de cadeias de força. A introdução da polidispersão no tamanho dos grãos garantiu a desordem estrutural necessária para criar um sistema representativo do solo granular, demonstrando que apenas uma pequena fração dos grãos é responsável por suportar os esforços principais, enquanto o arranjo adjacente atua como confinamento passivo.

Na análise em escala macroscópica, a avaliação dos perfis médios de incremento de tensão vertical evidenciou concordância em relação aos resultados ao longo da profundidade da camada. O sistema granular apresentou tensões na camada superficial logo abaixo da aplicação da carga acentuadamente menores e mais estreitos do que os previstos pelas equações elásticas. Esse fenômeno atesta que o meio particulado possui uma capacidade intrínseca de reter a tensão na direção da aplicação da carga, restringindo a dissipação lateral nesta região.

Adicionalmente, a análise da tensão normal na base da camada confirmou o papel da fronteira na concentração de esforços. A presença da base indeslocável impede a livre deformação da camada, gerando concentrações de carga que corroboram qualitativamente com os acréscimos previstos pelas equações de Burmister para sistemas estratificados. Todavia, observou-se também que as tensões registradas foram menores que as de Boussinesq, o que pode ser explicado pelo alívio das tensões ocasionado pela formação de pequenos arqueamentos que geram alívios e redistribuição dos grãos, diminuindo o pico de tensões.

5.1 Trabalhos Futuros

A despeito dos resultados satisfatórios na correlação entre o MED e as soluções pelo método da elasticidade, o presente estudo abre pressupostos para investigações mais aprofundadas, visando mitigar as limitações computacionais e teóricas inerentes à simplificação do meio granular. Dentre as possibilidades de trabalhos futuros, destacam-se:

- I) **análise da zona superficial.** Devido às oscilações e decaimentos abruptos do incremento de tensão vertical próximos à aplicação da carga, recomenda-se uma investigação exclusiva desta zona de transição. Sugere-se variar a parametrização do sistema, avaliando se o espalhamento inicial converge de forma mais estável com os modelos teóricos;
- II) **variação paramétrica do sistema.** Como o modelo adotou discos com atrito constante, trabalhos futuros devem avaliar a sensibilidade do perfil de tensões frente à variação sistemática da granulometria, coeficiente de atrito e da rigidez tangencial. O objetivo é quantificar como o aumento do intertravamento mecânico afeta o espalhamento lateral das cadeias de forças;
- III) **implemento da análise ortotrópica.** Sugere-se investigar as tensões com incremento de rigidez diferente nas direções principais com base no trabalho apresentado por Atman et al. (2004);
- IV) **implemento de suavização da curva ao longo da profundidade.** Visando mitigar as flutuações e os ruídos numéricos inerentes à natureza discreta do empilhamento granular, recomenda-se a aplicação de filtros matemáticos mais avançados ao longo da profundidade da camada. Esse refinamento no pós-processamento permitirá a extração de um perfil de tensões mais contínuo, aprimorando a quantificação do decaimento da carga.

REFERÊNCIAS

- ALDER, B.; WAINWRIGHT, T. E. Transição de fase para um sistema de esferas rígidas. **The Journal of Chemical Physics**, American Institute of Physics, Maryland (EUA), v. 27, n. 5, p. 1208–1209, novembro 1957. Título original: *Phase transition for a hard sphere system*. DOI: 10.1063/1.1743957. Disponível em: <<<https://www.semanticscholar.org/paper/Phase-Transition-for-a-Hard-Sphere-System-Alder-Wainwright-/e1aa261a4ac52282bc825ae32ac61fe1666eb20e>>>. Acesso em: 10 fev. 2025.
- ALLEN, M. P.; TILDESLEY, D. J. **Simulação Computacional dos Líquidos**. New York: Oxford University Press, 1987. Título original: *Computer Simulation of Liquids*. ISBN 0-19-855375-7.
- ANDREOTTI, B.; FORTERRE, Y.; POULIQUEN, O. **Meio Granular: Entre o Fluido e o Sólido**. New York: Cambridge University Press, 2013. Título original: *Granular Media: Between Fluid and Solid*. DOI: 10.1017/CBO97811395410089. ISBN 978-1-139-54100-8.
- ATMAN, A. et al. Sensibilidade da função resposta ao estresse para preparação da empacotamento. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, Bristol (Inglaterra), v. 17, p. S2391–S2403, novembro 2004. Título original: *Sensitivity of the stress response function to packing preparation*. DOI: 10.1088/0953-8984/17/24/002. Disponível em: <<<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119336419>>>. Acesso em: 13 mar. 2025.
- ATMAN, A.; CLAUDIN, P.; COMBE, G. Desvio da elasticidade em camadas granulares: Investigação de uma força de sobrecarga de crossover. **Computer Physics Communications**, Elsevier, (EUA), v. 180, n. 4, p. 89–94, 2009. Título original: *Departure from elasticity in granular layers: Investigation of a crossover overload force*. DOI: 10.1016/j.cpc.2008.12.017. Disponível em: <<<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0010465508004359>>>. Acesso em: 25 abr. 2026.
- AZEVEDO, I. C. D. **Análise de Tensões e Deformações em Solos**. 2. ed. Viçosa, Minas Gerais: Universidade Federal de Viçosa, 2015. ISBN 978-85-7269-470-4.
- BOAVENTURA, E. C. **Geometria Computacional Aplicada à Mecânica de Materiais Granulares**. Belo Horizonte: Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2020. Disponível em: <<<https://sig.cefetmg.br/sigaa/verArquivo?idArquivo=2730068&key=0b113df4115925e04d1f6a4e5d99626c>>>. Acesso em: 17 fev. 2025.
- BOAVENTURA, E. C.; DUCHA, F. A.; ATMAN, A. P. F. Função resposta ao estresse por meio da tesselação de Voronoi em camadas granulares estáticas. **Granular Matter**, Springer-Verlag, Heidelberg (Alemanha), v. 22, n. 61, junho 2020. Título original: *Stress response function from Voronoi tessellation of static granular layers*. DOI: 10.1007/s10035-020-01026. Disponível em: <<<https://link.springer.com/article/10.1007/s10035-020-01026-w>>>. Acesso em: 20 fev. 2025.
- BOUSSINESQ, J. V. **Aplicação de potenciais ao estudo do equilíbrio e movimento de sólidos elásticos**. Paris: Gauthier-Villars, 1885. Título original: *Application des Potentials a L'Etude de L'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques*. Disponível em: <<<https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ABV5032.0001-.001?rgn=main;view=fulltext>>>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- BROWN, R. L.; RICHARDS, J. C. **Princípios da Mecânica dos Pó: Ensaios sobre o Empacotamento e Fluxo de Pó e Sólidos a Granel**. 1. ed. Oxford: Pergamon Press LTDA, 1970. Título original: *Principles of Powder Mechanics: Essays on the Packing and Flow of Powders and Bulk Solids*. ISBN 978-0-19-956001-1.
- BURMISTER, D. M. A teoria geral de tensões e deslocamentos em sistemas camadas. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, Columbia (EUA), v. 16, n. 4, p. 89–94, 1945. Título original: *The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems*. DOI: 10.1063/1.1707558. Disponível em: <<<https://pubs.aip.org/aip/jap/article-abstract/16/2/89/158215/The-General-Theory-of-Stresses-and-Displacements?redirectedFrom=fulltext>>>. Acesso em: 21 abr. 2026.
- CAMPBELL, C. S. Fluxos de materiais granulares – Uma visão geral. **Powder Technology**, Elsevier BV, Los Angeles (EUA), v. 162, n. 3, p. 208–229, março 2006. ISSN 0032-5910. Título original: *Granular material flows – An overview*. DOI: 10.1016/j.powtec.2005.12.008. Disponível em: <<<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0032591005005486>>>. Acesso em: 12 mar. 2025.

CAPUTO, H. P. **Mecânica dos Solos e suas Aplicações: Fundamentos**. 6. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1988. v. 1. Disponível em: <<<https://engenhariacivilfsp.files.wordpress.com/2015/05/mecanica-solos-fundamentos-vol1-6ed-caputo.pdf>>>. Acesso em: 20 abr. 2025.

CASAGRANDE, A. Testes de compactação e investigações de densidade crítica em materiais sem coesão para a barragem de Franklin Falls. U.S. Engineer Corps, Boston District (EUA), 1938. Título original: *Compaction Tests and Critical Density Investigations in Cohesionless Materials for Franklin Falls dam*.

CINTRA, J. C. A.; AOKI, N.; ALBIERO, J. H. **Fundações direta: Projeto geotécnico**. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2011. E-book. ISBN 978-85-7975-035-9. Disponível em: <<<https://plataforma.bvirtual.com>>>. Acesso em: 27 fev. 2025.

COULOMB, C. A. de. Ensaio sobre uma aplicação de regras de máximo e mínimo a quaisquer problemas de estática, relacionados à arquitetura (1776). **Revue Française de Géotechnique**, EDP Sciences, Les Ulis (França), n. 175, p. 1–43, 2023. Título original: *Essai sur une application des règles de Maximis Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture*. DOI: 10.1051/geotech/2023019. Disponível em: <<<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/abs/2023/02/geotech230019s/geotech230019s.html>>>. Acesso em: 14 mar. 2025.

CUNDALL, P. A. Um modelo de computador para simular movimentos progressivos de larga-escala em sistemas de rochas em blocos. In: ISSMGE (Ed.). **Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics**. Nancy (França): International Society for Rock Mechanics, 1971. v. 8, p. 129–136. Título original: *A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Rock System*. Disponível em: <<<https://scispace.com/papers/a-computer-model-for-simulating-progressive-large-scale-50r9x4wx5q>>>. Acesso em: 10 fev. 2025.

DAINTITH, J. (Ed.). **Um Dicionário de Física**. 5. ed. Oxford: The Macmillan Press Ltd, 2005. E-book. Título original: *A Dictionary of Physics*. ISBN 978-0-192-80628-4. Disponível em: <<<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119067180>>>. Acesso em: 5 mar. 2025.

DAS, B. M. **Fundamentos da Engenharia Geotécnica**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Título original: *Principles of geotechnical engineering*. ISBN 978-85-221-1112-1.

DURAN, J. **Areias, Pós e Grãos: Uma Introdução à Física Granular**. New York: Springer Science Business Media, 2012. E-book. Título original: *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials*. DOI: 10.1007/978-1-4612-0499-2. ISBN 978-1-4612-0499-2. Disponível em: <<<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0499-2>>>. Acesso em: 19 fev. 2025.

ENSSLIN, L. et al. Proknow-c, Knowledge Development Process–Constructivist. **Processo técnico com patente de registro pendente junto ao INPI**, Brasil, v. 10, n. 4, 2010.

GALILEI, G. **O Ensaiaador**. Roma: [s.n], 1623. Título original: *Il Saggiatore*. Disponível em: <<https://matematicaitaliana.sns.it/media/volumi/97/II%20saggiatore_bw.pdf>>. Acesso em: 25 jan. 2025.

GEAR, C. W. A integração numérica de equações diferenciais ordinárias de várias ordens. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society, Providence (EUA), v. 21, n. 98, p. 146–156, 1967. Título original: *The numerical integration of ordinary differential equations of various orders*. DOI: 10.2307/2004155. Disponível em: <<<https://www.jstor.org/stable/2004155>>>. Acesso em: 19 mar. 2025.

GUO, T.; CAMPBELL, C. S. Um estudo experimental da teoria elástica para fluxos granulares. **Physics of Fluids**, American Institute of Physics, New York, v. 28, n. 8, p. 083303, agosto 2016. ISSN 1070-6631. Título original: *An experimental study of the elastic theory for granular flows*. DOI: 10.1063/1.4961096. Disponível em: <<<https://pubs.aip.org/aip/pof/article/28/8/083303/644038/An-experimental-study-of-the-elastic-theory-for>>>. Acesso em: 13 mar. 2025.

HERTZ, H. Sobre o contato de sólidos elásticos. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter GmbH Co. KG, Berlim, v. 92, p. 156–171, janeiro 1881. Título original: *On the Contact of the Elastic Solids*. Disponível em: <<<https://scispace.com/papers/on-the-contact-of-elastic-solids-43jfmxcetu>>>. Acesso em: 10 mar. 2025.

JAEGER, H. M.; NAGEL, S. R.; BEHRINGER, R. P. Sólidos, líquidos e gases granulares. **Reviews of Modern Physics**, The American Physical Society, Washington, v. 68, n. 4, p. 1259–1273, outubro 1996. Título original: *Granular solids, liquids and gases*. DOI: 10.1103/RevModPhys.68.1259. Disponível em: <<<https://typeset.io/pdf/granular-solids-liquids-and-gases-4s2hurss9b.pdf>>>. Acesso em: 19 fev. 2025.

JÚNIOR, L. U. D. T. **Mecânica dos solos avançados e introdução a obras da terra**. 1. ed. Indaial (BRA): UNIASSELVI, 2020. ISBN 978-65-5663-019-9. Disponível em: <<<https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath-/ABV5032.0001.001?rgn=main;view=fulltext>>>. Acesso em: 9 nov. 2025.

LUDING, S. Pós coesivos e friccionais: modelos de contato para tensão. **Granular Matter**, Springer Science & Business Media, Berlim, v. 10, p. 235–246, março 2008. Título original: *Cohesive, frictional powders: contact models for tension*. DOI: 10.1007/s10035-008-0099-x. Disponível em: <<<https://d-nb.info/1193808480/34>>>. Acesso em: 21 fev. 2025.

MAGALHÃES, F. G. R. **Um estudo sobre fluxo de tremonha granular via Simulações Computacionais por Método de Elemento Discreto**. Belo Horizonte: Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2018. Título original: *A Study on Granular Hopper Flow via Discrete Element Method Computational Simulations*. Disponível em: <<<https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/SMRA-BC9NS5>>>. Acesso em: 19 fev. 2025.

MEHTA, A. **Física Granular**. New York: Cambridge University Press, 2007. Título original: *Granular Physics*. ISBN 978-0-521-66078-5.

MOHR, C. O. Qual é o padrão de elasticidade e uso de materiais? **Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure**, Verein Deutscher Ingenieure, Düsseldorf (Alemanha), v. 44, p. 1524–1530, 1900. Título original: *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Disponível em: <<<https://soilmodels.com/soilmodels-publication-database-including-mohr-1900-paper-defining-mohr-coulomb-model/>>>. Acesso em: 14 mar. 2025.

NEDDERMAN, R. M. **Estática e Cinemática dos Materiais Granulares**. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 1992. Título original: *Statics and Kinematics of Granular Materials*. ISBN 978-0-521-40435-8.

ORTIGÃO, J. A. R. **Introdução à Mecânica dos solos dos Estados Críticos**. 3. ed. Rio de Janeiro: LIVROS TECNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S.A., 2007. ISBN 978-8521610311. Disponível em: <<<https://www.terratek.com.br/downloads>>>. Acesso em: 13 nov. 2025.

PINTO, C. de S. **Curso Básico de Mecânica dos Solos**. 3. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2006. E-book. ISBN 978-85-86238-51-2. Disponível em: <<<https://plataforma.bvirtual.com>>>. Acesso em: 10 ago. 2025.

PÖSCHEL, T.; SCHWAGER, T. **Dinâmica Granular Computacional: Modelos e Algoritmos**. Berlim: Springer Science & Business Media, 2005. E-book. Título original: *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms*. DOI: 10.1007/3-540-27720-X. ISBN 978-3-540-27720-0. Disponível em: <<<https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-27720-X>>>. Acesso em: 19 fev. 2025.

POULOS, H. G. Tensões e deslocamentos em uma camada elástica assentada sobre uma base rígida rugosa. **Geotechnique**, Emerald Publishing, Sydney (AUS), v. 17, n. 4, p. 378–410, 1967. Título original: *Stresses and Displacements in an Elastic Layer Underlain by a Rough Rigid Base*. DOI: 10.1680/geot.1967.17.4.3788. Disponível em: <<<https://www.emerald.com/jgeot/article-abstract/17/4/378/392121/Stresses-and-Displacements-in-an-Elastic-Layer?redirectedFrom=fulltext>>>. Acesso em: 21 abr. 2026.

RADJAI, F.; ROUX, S.; MOREAU, J. J. Contato de forças em um empacotamento granular. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, IOP Publishing, Bristol (Inglaterra), v. 9, n. 3, p. 544–550, setembro 1999. Título original: *Contact forces in a granular packing*. DOI: 10.1063/1.166428. Disponível em: <<<https://hal.science/hal-01407368>>>. Acesso em: 14 mar. 2025.

RAO, K. K.; NOTT, P. R. **Introdução ao Fluxo Granular**. New York (EUA): Cambridge University Press, 2008. E-book. Título original: *An Introduction to Granular Flow*. DOI: 10.1017/CBO9780511611513. ISBN 978-0-511-45113-3. Disponível em: <<<https://www.cambridge.org/core/books/an-introduction-to-granular-flow-/A4DE69F597BB42565EE84A0A87DB9B4A>>>. Acesso em: 5 mar. 2025.

REYNOLDS, O. Sobre a dilatação de meios compostos de partículas rígidas em contato. Com ilustrações experimentais. **Journal of Science**, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine, Londres, v. 20, p. 469–481, dezembro 1885. Título original: *On the Dilatancy of Media composed of Rigid Particles in Contact. With Experimental Illustrations*. DOI: 10.1080/14786448508627791. Disponível em: <<<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122376586>>>. Acesso em: 7 mar. 2025.

ROSATO, A. et al. Por que as castanhas-do-pará estão no topo: Escala de segregação de material particulado por agitação. **Physical Review Letters**, American Physical Society, New York(EUA), v. 58, n. 10, p. 1038–1040, março 1987. Título original: *Why the Brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking*. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1038. Disponível em: <<<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.58.1038>>>. Acesso em: 5 mar. 2025.

SCHOFIELD, A. N.; WROTH, C. P. **Estado Crítico da Mecânica dos Solos**. Cambridge: McGraw-Hill Book Company, 1968. Título original: *Critical State Soil Mechanics*. ISBN 978-0641940484. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/275027554_Critical_State_Soil_Mechanics>>. Acesso em: 12 mar. 2025.

SHINBROT, T.; MUZZIO, F. J. Flutuabilidade reversa em leitos granulares agitados. **Physical Review Letters**, American Physical Society, New York(EUA), v. 81, n. 20, p. 4365–4368, novembro 1998. Título original: *Reverse Buoyancy in Shaken Granular Beds*. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.4365. Disponível em: <<<https://link.springer.com/article/10.1007/s10955-006-9078-y>>>. Acesso em: 5 mar. 2025.

SOTERRONI, A. C. **Simulação e Análise da Dinâmica de Fluidos Granulares**. São José dos Campos: Dissertação (Mestrado) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2007. Disponível em: <<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m17@80/2007/05.07.18.32>>>. Acesso em: 10 mar. 2025.

SPERL, M. Experimentos sobre pressão de milho em células de silo – tradução e comentário do artigo de Janssen de 1895. **Granular Matter**, Springer Science & Business Media, Berlim, v. 8, p. 59–65, maio 2006. Título original: *Experiments on corn pressure in silo cells – translation and comment of Janssen’s paper from 1895*. DOI: 10.1007/s10035-005-0224-z. Disponível em: <<<https://link.springer.com/article/10.1007/s10035-005-0224-z#citeas>>>. Acesso em: 5 mar. 2025.

TAYLOR, B. **Métodos Diretos e Indiretos de Incrementação**. Londres: William Innys, 1715. Título original: *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Disponível em: <<https://ia601809.us.archive.org/20/items/UFIE003454_TO0324_PNI-2529_000000/UFIE003454_TO0324_PNI-2529_000000.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2025.

TERZAGHI, K. V. Distribuição de tensões em areia seca e saturada acima de um alçapão. In: ISSMGE (Ed.). **Proceedings of First International Conference on Soil Mechanics**. Cambridge: Harvard University, 1936. v. 1, p. 307–311. E-book. Título original: *Stress distribution in dry and in saturated sand above a yielding trap-door*. Disponível em: <<<https://www.issmge.org/publications/publication/stress-distribution-in-dry-and-in-saturated-sand-above-a-yielding-trap-door>>>. Acesso em: 9 mar. 2025.

TERZAGHI, K. V. **Mecânica Teórica dos Solos**. 1. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1943. E-book. Título original: *Theoretical Soil Mechanics*. DOI: 10.1002/9780470172766. ISBN 978-0-470-17276-6. Disponível em: <<<https://archive.org/details/theoretical-soil-mechanics-1943-by-karl-terzaghi/page/n3/mode/2up>>>. Acesso em: 9 mar. 2025.

TERZAGHI, K. V.; PECK, R. B. **Mecânica dos Solos na Prática da Engenharia**. 2. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1967. Título original: *Soil Mechanics in Engineering Practice*. ISBN 978-0-471-85273-5.

UNGER, T.; KERTÉSZ, J. O método de dinâmica de contato para meios granulares. **AIP Conference Proceedings**, AIP Publishing, Granada (Espanha), v. 661, n. 1, p. 116–138, 2002. Título original: *The contact dynamics method for granular media*. DOI: 10.1063/1.1571300. Disponível em: <<<https://www.semanticscholar.org/reader/d7ba6be9214bf7fea2aed910fc296d588eeb182c>>>. Acesso em: 19 mar. 2025.

VERLET, L. Experimentos computacionais sobre fluidos clássicos. i. propriedades termodinâmicas de moléculas de lennard-jones. **Physical Review**, American Physical Society, Maryland (EUA), v. 159, n. 1, p. 98–103, 1967. Título original: *Computer experiments on classical fluids and thermodynamical properties of lennard-jones molecules*. DOI: 10.1103/PhysRev.159.98. Disponível em: <<<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.159.98>>>. Acesso em: 09 nov. 2025.

WATSON, P.; BONNIEU, S. V.; LAPPA, M. Fluidização e transporte de matéria granular vibrada: Uma revisão das recentes e marcantes contribuições. **Fluid Dynamics and Materials Processing**, Tech Science Press, Henderson (EUA), v. 20, n. 1, p. 1–29, novembro 2023. Título original: *Fluidization and Transport of Vibrated Granular Matter: A Review of Landmark and Recent Contributions*. DOI: 10.32604/fdmp.2023.029280. Disponível em: <<<https://www.sciencedirect.com/org/science/article/pii/S1555256X23000577>>>. Acesso em: 5 mar. 2025.

ANEXO A – VALORES DE INFLUÊNCIA DA TENSÃO VERTICAL

As tabelas fornecem os fatores de influência adimensionais que facilitam o cálculo da tensão vertical em qualquer profundidade e distância radial dentro de uma camada elástica apoiada sobre uma base rígida, através da equação:

$$\sigma_z = I_{\sigma_z} \frac{P}{2\pi h^2}. \quad (38)$$

Tabela 1 – Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,0$).

r/h \ z/h	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0	4,422	4,993	5,779	7,005	9,017	12,5	19,1	33,55	75,11	300
0,1	4,308	4,844	5,571	6,68	8,448	11,37	16,45	25,12	43,04	53,07
0,2	3,989	4,431	5,005	5,826	7,022	8,738	11,05	13,49	13,36	5,4
0,3	3,523	3,842	4,225	4,713	5,316	5,97	6,426	6,067	4,028	0,98
0,4	2,982	3,178	3,386	3,601	3,782	3,827	3,554	2,741	1,419	0,28
0,5	2,432	2,528	2,606	2,642	2,595	2,397	1,677	1,323	0,594	0,112
0,6	1,923	1,947	1,943	1,886	1,747	1,499	1,132	0,69	0,285	0,057
0,7	1,481	1,46	1,412	1,319	1,165	0,944	0,669	0,384	0,155	0,035
0,8	1,114	1,07	1,006	0,91	0,77	0,597	0,404	0,223	0,089	0,023
0,9	0,821	0,768	0,702	0,615	0,504	0,376	0,245	0,131	0,052	0,015
1,0	0,593	0,541	0,481	0,408	0,324	0,233	0,146	0,075	0,029	0,01
1,25	0,238	0,201	0,164	0,127	0,09	0,056	0,028	0,01	0,001	-0,001
1,5	0,074	0,055	0,036	0,02	0,006	-0,006	-0,012	-0,013	-0,01	-0,007
1,75	0,007	-0,003	-0,011	-0,018	-0,021	-0,023	-0,022	-0,018	-0,014	-0,01
2,0	-0,017	-0,02	-0,023	-0,025	-0,025	-0,023	-0,02	-0,017	-0,013	-0,01
2,5	-0,019	-0,018	-0,018	-0,016	-0,015	-0,013	-0,011	-0,009	-0,007	-0,006
3,0	-0,01	-0,009	-0,008	-0,007	-0,006	-0,005	-0,004	-0,003	-0,002	-0,001
3,5	-0,004	-0,003	-0,002	-0,002	-0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001
4,0	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002
6,0	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: retirado de Poulos (1967, p.380).

Tabela 2 – Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,2$).

$\frac{z}{h} \backslash \frac{r}{h}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0	4,358	5,028	5,853	7,089	9,098	12,57	19,15	33,59	75,13	300
0,1	4,243	4,874	5,164	6,761	8,525	11,44	16,51	25,86	43,06	53,08
0,2	3,919	4,448	5,06	5,894	0,089	8,797	11,1	13,52	13,38	5,415
0,3	3,447	3,84	4,259	4,763	5,369	6,018	6,466	6,098	4,05	0,994
0,4	2,902	3,157	3,399	3,63	3,817	3,862	3,585	2,766	1,437	0,293
0,5	2,352	2,49	2,597	2,651	2,613	2,418	1,998	1,341	0,609	0,124
0,6	1,844	1,898	1,918	1,878	0,75	1,507	1,143	0,701	0,298	0,067
0,7	1,407	1,405	1,376	1,298	1,155	0,941	0,671	0,389	0,161	0,041
0,8	1,048	1,015	0,964	0,879	0,752	0,586	0,399	0,222	0,091	0,026
0,9	0,764	0,716	0,659	0,581	0,48	0,36	0,235	0,126	0,051	0,016
1,0	0,545	0,494	0,439	0,374	0,297	0,214	1,33	0,068	0,025	0,008
1,25	0,213	0,172	0,135	0,099	0,066	0,36	0,013	-0,001	-0,007	-0,006
1,5	0,067	0,042	0,021	0,004	-0,01	-0,018	-0,022	-0,021	-0,017	-0,012
1,75	0,01	-0,003	-0,014	-0,022	-0,026	-0,028	-0,026	-0,022	-0,017	-0,012
2,0	-0,008	-0,014	-0,019	-0,022	-0,024	0,023	-0,02	-0,017	-0,013	-0,01
2,5	-0,002	-0,009	-0,009	-0,01	-0,009	-0,009	-0,007	-0,06	-0,005	-0,004
3,0	-0,002	-0,002	-0,002	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	0,000	0,000	0,001
3,5	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
4,0	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
6,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: retirado de Poulos (1967, p.380).

Tabela 3 – Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,4$).

$\frac{r}{h} \backslash \frac{z}{h}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0	4,454	5,259	6,113	7,33	9,297	12,73	19,25	33,64	75,15	300
0,1	4,329	0,091	5,887	6,99	8,717	11,58	16,6	25,92	43,08	53,07
0,2	3,98	4,626	5,27	6,093	7,257	8,926	11,18	13,57	13,04	5,404
0,3	3,472	3,963	4,416	4,917	5,502	6,121	6,536	6,135	4,058	0,981
0,4	2,89	3,221	3,496	3,734	3,91	3,936	3,634	2,791	1,44	0,279
0,5	2,306	2,5	2,639	2,705	2,665	2,461	2,026	1,353	0,605	0,108
0,6	1,775	1,865	1,912	1,888	1,767	1,523	1,153	0,702	0,29	0,051
0,7	1,323	1,343	1,336	1,276	1,143	0,935	0,666	0,381	0,15	0,027
0,8	0,959	0,936	0,902	0,833	0,72	0,563	0,382	0,209	0,079	0,014
0,9	0,671	0,632	0,587	0,523	0,436	0,327	0,212	0,109	0,039	0,007
1,0	0,466	0,412	0,365	0,312	0,248	0,177	0,107	0,05	0,015	0,002
1,25	0,163	0,116	0,08	0,05	0,025	0,007	-0,007	-0,012	-0,01	-0,003
1,5	0,045	0,016	-0,007	-0,022	-0,031	-0,034	-0,031	-0,023	-0,013	-0,004
1,75	0,009	-0,007	-0,02	-0,028	-0,031	-0,03	-0,025	-0,017	-0,009	-0,002
2,0	0,003	-0,006	-0,013	-0,017	-0,018	-0,017	-0,014	-0,009	-0,005	0,001
2,5	0,007	0,005	0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002
3,0	0,008	0,007	0,006	0,005	0,005	0,004	0,003	0,003	0,003	0,002
3,5	0,006	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002
4,0	0,004	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001
6,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: retirado de Poulos (1967, p.380).

Tabela 4 – Fatores de Influência para a Tensão Vertical em Carga Pontual ($\nu = 0,5$).

$\frac{r}{h} \backslash \frac{z}{h}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0	4,695	5,603	6,457	7,631	9,542	12,91	19,39	33,75	75,26	300
0,1	4,556	5,417	6,215	7,279	8,951	11,76	16,73	26,01	43,17	53,17
0,2	4,171	4,905	5,554	6,345	7,463	9,080	11,29	13,64	13,44	5,438
0,3	3,612	4,175	4,638	5,118	5,666	6,241	6,610	6,167	4,053	0,947
0,4	2,974	3,359	3,649	3,876	4,027	4,019	3,679	2,795	1,403	0,205
0,5	2,341	2,571	2,726	2,791	2,738	2,512	2,049	1,344	0,561	0,032
0,6	1,770	1,882	1,945	1,927	1,803	1,549	1,162	0,692	0,257	-0,001
0,7	1,291	1,321	1,329	1,279	1,152	0,943	0,669	0,378	0,139	0,010
0,8	0,911	0,891	0,869	0,813	0,710	0,561	0,385	0,215	0,089	0,029
0,9	0,623	0,576	0,540	0,490	0,415	0,319	0,216	0,124	0,064	0,042
1,0	0,412	0,355	0,314	0,272	0,223	0,166	0,111	0,069	0,047	0,046
1,25	0,123	0,072	0,037	0,015	0,000	-0,007	-0,007	0,000	0,014	0,029
1,5	0,023	-0,011	-0,034	-0,048	-0,052	-0,048	-0,039	-0,025	-0,010	0,003
1,75	-0,003	-0,023	-0,037	-0,046	-0,048	-0,046	-0,039	0,030	-0,021	-0,013
2,0	-0,005	-0,016	-0,024	-0,030	-0,032	-0,033	-0,030	-0,026	-0,021	-0,018
2,5	0,004	-0,012	-0,002	-0,005	-0,007	-0,008	-0,009	-0,010	-0,010	-0,011
3,0	0,008	0,007	0,005	-0,003	0,002	0,001	-0,001	-0,002	-0,003	-0,003
3,5	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000
4,0	0,006	0,006	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002
6,0	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
8,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: retirado de Poulos (1967, p.380).