CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



WANDERSON ALVES DA CRUZ JUNIOR

ENTRE CÍRCULOS E CIRCUNFERÊNCIAS: DEMONSTRAÇÕES E PROVAS DE TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Belo Horizonte
2026

WANDERSON ALVES DA CRUZ JUNIOR

ENTRE CÍRCULOS E CIRCUNFERÊNCIAS: DEMONSTRAÇÕES E PROVAS DE TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora:
Érica Marlucia Leite Pagani

Coorientador:
Davidson Paulo Azevedo Oliveira

Banca Examinadora:
André Augusto Deodato
Kelly Maria de Campos Fornero Abreu de Lima Melillo
Valéria Guimarães Moreira

Belo Horizonte
2026

Cruz Junior, Wanderson Alves da
C957e Entre círculos e circunferências: demonstrações e provas de tópicos de geometria plana através da resolução e proposição de problemas no 9º ano do ensino fundamental / Wanderson Alves da Cruz Junior. – 2026.
173 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Érica Marlucia Leite Pagani.
Coorientador: Davidson Paulo Azevedo Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática (Ensino fundamental) – Teses. 2. Resolução de problemas – Teses. 3. Proposição (Lógica) – Teses. 4. Teoria da demonstração – Teses. 5. Círculo – Teses. 6. Geometria plana – Teses. I. Pagani, Érica Marlucia Leite. II. Oliveira, Davidson Paulo Azevedo. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 516.22

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

WANDERSON ALVES DA CRUZ JUNIOR

ENTRE CÍRCULOS E CIRCUNFERÊNCIAS: DEMONSTRAÇÕES E PROVAS DE TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado Profissional em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Data da defesa: 11/09/2026
Data de aprovação: 11/09/2026

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
ERICA MARLUCIA LEITE PAGANI
Data: 05/11/2026 13:42:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Erica Marlúcia Leite Pagani
Presidente da banca examinadora - CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
DAVIDSON PAULO AZEVEDO OLIVEIRA
Data: 05/11/2026 13:59:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Vice-presidente da banca examinadora- CEFET-MG

gov.br Documento assinado digitalmente
ANDRE AUGUSTO DEODATO
Data: 05/11/2026 21:46:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Augusto Deodato
Membro da banca examinadora - UFOP

gov.br Documento assinado digitalmente
KELLY MARIA DE CAMPOS FORNERO ABREU DE
Data: 05/11/2026 19:49:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Kelly Maria de Campos Fornero Abreu de Lima Melillo
Membro da banca examinadora - UFMG – COLTEC

gov.br Documento assinado digitalmente
VALERIA GUIMARAES MOREIRA
Data: 05/11/2026 15:52:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Valéria Guimarães Moreira
Membro da banca examinadora - CEFET-MG

A todos que com o ensino seguram nossas mãos e nos erguem sob seus ombros, para que possamos avistar muito mais longe. Gratidão!

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me mostrar que a vida é muito mais bonita quando se acredita, por isso sigo acreditando.

A minha família, pois sem eles eu nada seria, principalmente meus pais, Emília e Wanderson. Vocês são os exemplos do amor e da vida que escolhi para mim. Aos meus irmãos João Pedro e José Lucas, ser irmão de vocês é maravilhoso (não se acostumem comigo falando isso, rs).

A família que escolhi formar e espero guardar pra sempre: Bárbara, Michelle, Hanna, Lucas, Mari, Matheus, Itamar ... O amor e o cuidado de vocês me motivam e me salvam todos os dias. Amo vocês!

Aos amigos que o PROFMAT me trouxe: Kyara, Matheus, Marcos, Daniel... as tardes e noites com vocês foram muito mais leves e felizes. Obrigado!

A todos os meus alunos, ser professor de vocês é um misto de alegrias e preocupações diárias. Obrigado por acreditarem em mim, e por me tornarem diariamente uma pessoa melhor. Torço muito por vocês!

À minha orientadora Érica Pagani e ao meu coorientador Davidson Azevedo, por embarcarem nessa aventura comigo, nas diversas revisões noturnas e no empenho em compreender minhas maluquices. Muito obrigado!

Agradeço também às professoras Kelly Melillo e Valéria Guimarães e ao professor André Deodato, por aceitarem compor a banca de avaliação desta dissertação e contribuírem para o aprimoramento deste trabalho. Muito obrigado!

Deixo registrado aqui um agradecimento a todas as professoras e professores que me inspiraram e me motivaram a entrar nesse caminho. Não consigo citar todas(os), mas gostaria de deixar registrado alguns nomes: Emília (mãe), Ana Paula (tia), Maria Beatriz, Helenice, Allan, Sulamita, Gabrielle, Marcos, Paula, Carlos, Érica, Valéria, Sandra... enfim, muito obrigado por me mostrarem que o caminho para um mundo melhor começa pela educação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A Geometria Plana é uma das áreas da Matemática que carrega inúmeras propriedades e belezas a serem discutidas. Em sala de aula, essas propriedades podem ser trabalhadas, não como regras impostas, mas como demonstrações e provas que são construídas coletivamente junto aos estudantes. A partir dessa perspectiva, apresenta-se essa pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), norteada pela seguinte questão: Como o processo de Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências articulados com provas e demonstrações feitas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental? Para tanto, elaborou-se uma sequência didática à luz dos trabalhos de Allevato e Onuchic (2021), norteadores da pesquisa. Os referenciais teóricos a respeito de Provas e Demonstrações em Matemática abrangeram os trabalhos de Balacheff (2000), Hanna e De Villiers (2008) e Nasser e Tinoco (2003). A sequência didática foi aplicada em uma escola municipal, com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa realizada é de natureza qualitativa e pedagógica, e inclui a análise dos dados coletados durante a aplicação das atividades, bem como as discussões feitas durante as dez etapas sugeridas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP). Os dados analisados sugerem que as etapas da MEAAMaRP, sobretudo as etapas da busca pela resolução dos problemas em duplas, a etapa da plenária, e a etapa de formalização dos conceitos após as discussões, favoreceram o desenvolvimento e a compreensão das demonstrações entre os estudantes. Além disso, ficou evidenciado que o desenvolvimento da sequência didática em sala de aula à luz da MEAAMaRP, favoreceu o protagonismo e o desenvolvimento dos estudantes em relação a compreensão do "fazer matemática", contribuindo para a transformação das perspectivas do professor-pesquisador sobre o ensino. Esta dissertação apresenta um Produto Educacional destinado a professores que ensinam Matemática, construído a partir das atividades utilizadas na sequência didática aplicada durante a pesquisa.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resolução e Proposição de Problemas. Demonstrações. Círculos e Circunferências. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Plane geometry is a branch of mathematics rich in properties and beauty worthy of discussion. In the classroom, these properties should be explored not as imposed rules, but through proofs and demonstrations constructed collectively with students. Guided by this conviction, this research was developed within the Professional Master's Program in Mathematics (PROFMAT) and addresses the following question: How can the process of problem-solving and problem-posing foster the construction of knowledge regarding circles and circumferences, integrated with proofs and demonstrations created by 9th-grade students? To this end, a teaching sequence was designed based on the work of Allevato and Onuchic (2021), who guided the research. The theoretical framework regarding mathematical proofs and demonstrations drew upon the work of Balacheff (2000), Hanna and De Villiers (2008), and Nasser and Tinoco (2003). The teaching sequence was implemented at a municipal school with 9th-grade students. This qualitative, pedagogical study analyzes data collected during the activities and discussions held across the ten stages of the Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem-Solving (MEAAMaRP) methodology. The analysis suggests that the MEAAMaRP stages—particularly the pair-based problem-solving, the plenary session, and the post-discussion concept formalization—facilitated the students development and understanding of mathematical demonstrations. Furthermore, the study demonstrates that implementing the teaching sequence in the classroom via MEAAMaRP fostered student agency and a deeper understanding of the practice of doing mathematics. This dissertation also presents an educational product developed from the activities used in the teaching sequence.

Keywords: Mathematics Education. Problem Solving and Posing. Proofs. Circles and Circumferences. Elementary and Middle School Education.

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT – Associação de Normas Técnicas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

MEAAMaRP – Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Bloco de conteúdos dos PCNS (1998) 25
Figura 2 – Código Alfanumérico das habilidades da BNCC 27
Figura 3 – Etapas sugeridas da MEAAMaRP 38
Figura 4 – Proposição de Problemas associada a Resolução de Problemas 41
Figura 5 – Tábula de Plimpton 322 47
Figura 6 – Símbolos Comuns 48
Figura 7 – Proposições Compostas 48
Figura 8 – Teorema de Pitágoras (A) 50
Figura 9 – Princípio da Indução Matemática 52
Figura 10 – Teorema de Pitágoras (B) 56
Figura 11 – Soma Dos n Primeiros Ímpares 60
Figura 12 – Níveis de Prova (Balacheff, 2000) 60
Figura 13 – Exemplo dos Níveis de Prova (Balacheff, 2000) 62
Figura 14 – Soma dos n Primeiros Inteiros Positivos Consecutivos 64
Figura 15 – Problema da soma dos ângulos internos da estrela 66
Figura 16 – Demonstração Quadrado da Soma de dois termos 67
Figura 17 – Lugar Geométrico 70
Figura 18 – Circunferência com raio de medida r e Centro C 71
Figura 19 – Posições Relativas entre um Ponto e a Circunferência 72
Figura 20 – Círculo de Centro C e Raio *r* 72
Figura 21 – Elementos da Circunferência 73
Figura 22 – Demonstração que o Diâmetro é a maior corda 74
Figura 23 – Posições relativas da reta *t* à Circunferência 75
Figura 24 – Distância da reta t ao Ponto C (Centro da Circunferência) 76
Figura 25 – Polígono regular inscrito na Circunferência 79
Figura 26 – Polígono regular circunscrito à Circunferência 80
Figura 27 – Método da Exaustão 81
Figura 28 – Área do Círculo pelo Método da Exaustão 84
Figura 29 – Etapa de Resolução do Problema em grupo da MEAAMaRP 93
Figura 30 – Resposta do estudante E13 para a pergunta 3 (PARTE 1) 94
Figura 31 – Resposta do estudante E17 para a pergunta 3 (PARTE 1) 94
Figura 32 – Resposta do estudante E1 para a pergunta 3 (PARTE 1) 95
Figura 33 – Nuvem de palavras gerada com os dados do item 4 do Questionário de Sondagem 95
Figura 34 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 8 (PARTE 1) - Estudante E11 96
Figura 35 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 8 (PARTE 1) - Estudante E14 96
Figura 36 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 8 (PARTE 1) - Estudante E4 96
Figura 37 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 11 (PARTE 2) - Estudante E12 97
Figura 38 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 11 (PARTE 2) - Estudante E23 97
Figura 39 – Respostas da Dupla D9 para o Problema 1 102
Figura 40 – Resposta das duplas D3 e D8 para o Problema 1 103
Figura 41 – Respostas das duplas D5, D11, D8 e D1 para o Problema 2 105
Figura 42 – Resposta da dupla D7 para o Problema 2 106
Figura 43 – Resposta da Dupla D8 para o Problema 2 107
Figura 44 – Diâmetro como a maior corda 108
Figura 45 – Investigação Matemática – Problema 1 – Atividade 2 111

Figura 46 – Respostas do Quadro 1– Problema 1 – Atividade 2 112
Figura 47 – Resposta da Dupla D8 para o Problema 1 – Atividade 2 112
Figura 48 – Resposta da Dupla D9 para Problema 1 – Atividade 2 113
Figura 49 – Problema 3 elaborado pela Dupla D3 115
Figura 50 – Problema 3 elaborado pela Dupla D9 116
Figura 51 – Problema 3 elaborado por D11 117
Figura 52 – Problema 3 elaborado por D5 117
Figura 53 – Problema 1 resolvido pela dupla D10 – Atividade 3 120
Figura 54 – Problema 1 resolvido pela dupla D5 – Atividade 3 121
Figura 55 – Problema 1 resolvido pela dupla D1 – Atividade 3 121
Figura 56 – Solução de E4 – Problema 2 – Atividade 3 124
Figura 57 – Problema elaborado por E17 – Problema 2 – Atividade 3 124
Figura 58 – Problema proposto por E20 – Problema 2 – Atividade 3 125
Figura 59 – Resposta da dupla D11 – Problema 1 – Atividade 4 128
Figura 60 – Resposta da Dupla D1 – Problema 1 – Atividade 4 128
Figura 61 – Busca pelo consenso – Atividade 4 130
Figura 62 – Busca pelo consenso – Atividade 4 130
Figura 63 – Resposta da Dupla D11 – Problema 2 – Atividade 4 131
Figura 64 – Resposta da Dupla D5 – Problema 2 – Atividade 4 132
Figura 65 – Respostas da Dupla D10 – Problema 1 – Atividade 5 135
Figura 66 – Resposta da dupla D10 ao item (I) – Problema 1 – Atividade 5 136
Figura 67 – Respostas da dupla D9 – Problema 1 – Atividade 5 136
Figura 68 – Respostas da dupla D6 – Problema 1 – Atividade 5 137
Figura 69 – Resposta da dupla D7 – Problema 1 – Atividade 1 137
Figura 70 – Polígonos regulares inscritos na Circunferência – *GeoGebra* (1) 139
Figura 71 – Polígonos regulares inscritos na Circunferência – *GeoGebra* (2) 139
Figura 72 – Resposta da dupla D5 – Problema 2 – Atividade 5 140
Figura 73 – Resposta da dupla D11 – Problema 2 – Atividade 5 141
Figura 74 – Demonstrações encontradas nas Atividades Elaboradas 142
Figura 75 – Gráfico com a resposta das etapas mais importantes da MEAAMaRP na perspectiva dos estudantes 143
Figura 76 – Resposta do estudante E20 ao Item 5 do Questionário de *Feedback* 144
Figura 77 – Resposta do estudante E7 ao item 8 145
Figura 78 – Resposta do estudante E17 ao item 8 145
Figura 79 – Resposta do estudante E20 ao item 8 145
Figura 80 – Capa do Produto Educacional 147

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Recorte de Habilidades da BNCC 29
Quadro 2 – Relação entre a Resolução de Problemas e as Demonstrações em Matemática ... 55
Quadro 3 – Cronograma de Realização das Atividades 81

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 UM PANORAMA DO ENSINO DE GEOMETRIA 19

2.1 Um breve resumo das várias faces da Geometria ao longo da história 19
2.2 O Movimento de Matemática Moderna no Brasil 21
2.3 Orientações oficiais para o ensino de Geometria no Brasil 23

3 RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS 30

3.1 O que é um problema? 30
3.2 O que é a Resolução de Problemas? Um pouco da história 32
3.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) 34
3.4 Proposição de Problemas 41
3.5 A Resolução de Problemas e os documentos oficiais que orientam o Ensino no Brasil 43

4 DEMONSTRAÇÕES E PROVAS EM MATEMÁTICA 46

4.1 Fundamentos da Lógica Matemática: um breve recorte 47
4.1.1 Demonstração Direta 50
4.1.2 Demonstração por Contraexemplo 51
4.1.3 Demonstração pelo Princípio da Indução Matemática 51
4.1.4 Demonstração por absurdo (contradição) 54
4.1.5 Demonstração pela contrapositiva 55
4.1.6 Demonstração Visual (Demonstrações sem palavras) 56
4.1.7 Demonstração por Argumento Combinatório 57
4.2 As Demonstrações e Provas na Educação Básica 58
4.2.1 Nicolas Balacheff 58
4.2.2 Hanna e De Villiers 63
4.2.3 Lilian Nasser e Lucia Tinoco 65
4.2.4 O que a BNCC diz sobre as Demonstrações? 68

5 UM RECORTE DA GEOMETRIA PLANA: FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA 70

5.1 Lugar Geométrico 70
5.2 Circunferência: definição, elementos e propriedades 71
5.2.1 Posições relativas entre um ponto P e uma circunferência no mesmo plano 72
5.2.2 Propriedades da Circunferência 74
5.2.3 Posições relativas entre uma reta e uma Circunferência 75
5.2.4 Polígonos Regulares 77
5.3 O número $\boldsymbol{\pi}$ e o Método da Exaustão 80
5.4 Área de um polígono regular 82

5.5 Área do círculo 83

6 METODOLOGIA DA PESQUISA 87

6.1 Preparando para ir a campo 87
6.2 Tópicos da pesquisa qualitativa 87
6.3 Contexto e desenvolvimento da pesquisa 89
6.4 Sequência didática 89

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS DA PESQUISA 91

7.1 Questionário Inicial de Sondagem 93
7.2 Atividade 1 98
7.2.1 Análise dos dados do Problema 1 102
7.2.2 Análise dos dados do Problema 2 104
7.3 Atividade 2 109
7.3.1 Análise dos dados coletados no Problema 1 111
7.3.2 Análise dos dados do Problema 2 114
7.3.3 Análise dos dados do Problema 3 114
7.4 Atividade 3 118
7.4.1 Análise dos dados do Problema 1 119
7.4.2 Análise dos dados do Problema 2 123
7.5 Atividade 4 126
7.5.1 Análise dos dados do Problema 1 127
7.5.2 Análise dos dados do Problema 2 129
7.6 Atividade 5 133
7.6.1 Análise dos dados do Problema 1 135
7.6.2 Análise dos dados do Problema 2 140
7.7 Questionário de *feedback* 143

8 PRODUTO EDUCACIONAL 147

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS 148

REFERÊNCIAS 153
APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO E ASSENTIMENTO 159
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL DE SONDAGEM 160
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL DE *FEEDBACK* 165
APÊNDICE D – LINK PARA ACESSO AO PRODUTO EDUCACIONAL 171

1 INTRODUÇÃO

O Ensino de Matemática pode ser conduzido através de várias estratégias de ensino tais como: Gamificação, Investigação Matemática, História da Matemática, Resolução e Proposição de Problemas, entre outras. Independentemente de qual(is) seja(m) a(s) escolha(s) e o percurso adotado para conduzir esse ensino, todos carregam um desafio em comum: a constante necessidade de superar a ideia que fazer Matemática se resume à mera memorização e aplicação de fórmulas, buscando a construção de um pensamento crítico e dedutivo. Soma-se a isso, a tarefa de motivar os estudantes para serem protagonistas da construção do próprio conhecimento.

Parte de mim talvez sempre soube que seria professor. Filho de professora, sempre vi nos olhos da minha mãe o orgulho e o amor que tinha por ensinar, mesmo diante de tantos desafios. Ainda criança, me recordo que, por vezes, brincava de escolinha com minha prima, sendo que ela muitas vezes assumia o papel de professora na brincadeira, até que certo dia decidi: “hoje eu vou ser o professor”. Um fato curioso desse dia é que não foi uma aula de Matemática que tivemos, mas uma aula de Análise Sintática – sobre sujeito, verbo, predicado – que tinha acabado de aprender na escola. Vale dizer que minha prima, dois anos mais nova que eu, ainda não tinha conhecimento sobre aquele conteúdo. Dois anos mais tarde, estava na casa de minha avó, quando minha prima chegou da escola toda animada, gritando: “Júnior, você não vai acreditar! Hoje, na escola, aprendemos sobre sujeito, verbos, tipos de sujeito... e eu já sabia de tudo porque você me ensinou”. Naquele momento, algo em mim se encheu de alegria por ver que, de alguma forma, consegui ajudar minha prima com a construção de seu conhecimento. Foi ali que tive uma das primeiras certezas: quero ser professor.

A Matemática sempre me fascinou, e em grande parte das suas áreas, a Geometria Plana por vezes me encantava. Enquanto estudante sempre gostei quando meus professores de Matemática faziam demonstrações em sala de aula, fosse a famosa demonstração de como encontrar as soluções de uma equação polinomial do 2º grau, as relações métricas no triângulo retângulo, ou mostrassem por que a Lei dos Cossenos era válida em qualquer triângulo. Durante o Ensino Médio, no IFMG – Santa Luzia, tive uma formação matemática crítica privilegiada, pois meus professores sempre nos incentivaram a escrever e explicar todas as etapas de resoluções que encontrávamos em sala, e ao final justificar o porquê nossas soluções faziam sentido. Em 2017, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da UFMG, e lá tive a oportunidade de, novamente, me encantar e compreender a beleza da Matemática através das demonstrações. Durante essa trajetória, toda relação que era demonstrada construía em mim a ideia de que a Matemática não se baseava apenas em aplicações de fórmulas prontas, mas ela era composta de raciocínio e de uma escrita que precisavam fazer sentido para todos que a quisessem compreender.

Desde o segundo semestre de graduação tive a oportunidade de estagiar como monitor de Matemática em uma escola particular na região de Belo Horizonte. Nesse período, por diversas vezes defendi, e ainda defendo, a importância de que esta disciplina seja ensinada a partir do pensamento reflexivo, da construção lógica de argumentos, ideias e hipóteses, em coletivo com os estudantes, de forma que eles possam se apropriar e se empoderar do conhecimento que eles mesmos participaram da construção. Atualmente, em sala de aula, atuando principalmente na rede municipal de Santa Luzia com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, percebo por diversas vezes, que a Geometria Plana foi colocada nesse lugar de memorização, aplicação de propriedades, sem que haja algum questionamento, ou mesmo algum tipo de indagação por parte dos estudantes como: "por que tal propriedade está correta?", ou até mesmo, se o professor instiga a essa reflexão, as respostas dos estudantes geralmente são: "por que é assim mesmo", "uai, no livro diz que é assim". Isso me inquietou bastante, uma vez que não é a concepção de Matemática que acredito, e além disso, entendo, corroborando com vários outros pesquisadores em Educação Matemática, que a Geometria Plana, ainda que não seja o único, é um campo fértil para o desenvolvimento do raciocínio, da argumentação, e da construção da importância do desenvolvimento das demonstrações em toda a Matemática.

Diante desse cenário, surgem, então, as primeiras motivações para essa pesquisa. Inicialmente, era preciso pensar o tipo de metodologia que gostaríamos de investigar que pudesse favorecer/evidenciar a importância das demonstrações para a Matemática. Além disso, era preciso que durante o processo de ensino-aprendizagem os estudantes compreendessem que eram responsáveis e protagonistas da construção do próprio conhecimento. Por isso, a busca por metodologias e abordagens alternativas que subvertam a passividade em sala de aula tornou-se para nós algo fundamentalmente importante. É nesse sentido que nos propusemos a investigar: ***Como o processo de Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências articulados com provas e demonstrações feitas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?***

Essa proposta se apresentou como um caminho viável para ressignificar a prática docente, prometendo ferramentas que pretendiam conectar a abstração, a validação e a compreensão de propriedades da Geometria Plana, de forma acessível, participativa e crítica por todos os estudantes. A relevância de investigar essa abordagem residia na necessidade de proporcionar aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental uma imersão no fazer matemático, onde provas e demonstrações pudessem fazer parte de uma investigação que, mediada pelo professor, construiria nos estudantes a consciência da necessidade da presença das demonstrações na Matemática.

Deste modo, entendemos como objetivo geral desse trabalho:

- Analisar o processo de resolução e proposição de problemas desenvolvido por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental durante a implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), visando identificar as especificidades manifestadas ao longo de suas dez etapas, e as suas contribuições para a construção de conhecimentos geométricos relativos a círculos e circunferências, a partir das provas e demonstrações realizadas nesse processo.

A partir do objetivo geral, delimitamos como os objetivos específicos dessa pesquisa:

- realizar uma revisão teórica a respeito dos documentos oficiais de ensino, além dos referenciais bibliográficos sobre Geometria, Resolução de Problemas, e Provas e Demonstrações;
- relacionar as orientações dos documentos oficiais de ensino com o referencial bibliográfico estudado de Geometria, Resolução de Problemas, e Provas e Demonstrações;
- elaborar e aplicar questionários de sondagem e de *feedback;*
- elaborar uma sequência de atividades, sob a ótica da MEAAMaRP, que investigue e instigue a realização de provas e demonstrações de tópicos de Geometria Plana;
- analisar os dados coletados no desenvolvimento das atividades realizadas e nas respostas encontradas nos questionários e verificar, a partir das atividades desenvolvidas e das análises, quais são as contribuições da utilização da MEAAMaRP na compreensão das provas e demonstrações no ensino de Matemática;
- elaborar um Produto Educacional destinado a professores que apresente uma sequência didática com atividades que favoreçam o ensino-aprendizagem-avaliação de demonstrações no ensino de Matemática à luz da MEAAMaRP.

Este trabalho está organizado em nove capítulos descritos a seguir. Inicialmente, foi realizado um mapeamento no repositório do PROFMAT a respeito das pesquisas que utilizaram a MEAAMaRP para o ensino de Geometria Plana no período de 2010 até 2024. Essa pesquisa culminou na produção de um artigo científico, apresentado no VI Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática (ENOPEM), revelando que o tema ainda carece da realização de novos trabalhos que abordem essa metodologia como contribuição do ensino de

tópicos de Geometria (Cruz Junior, *et al.* 2025), justificando assim a necessidade da pesquisa aqui descrita, bem como as contribuições para o ensino por ela reveladas.

Para compor o referencial teórico de nossa pesquisa, no Capítulo 2 dessa dissertação, apresentamos um panorama a respeito do ensino de Geometria no Brasil, bem como um breve contexto histórico, e as orientações definidas pelos documentos oficiais de ensino. Em seguida, exploramos, no Capítulo 3, os referenciais teóricos a respeito da Resolução e Proposição de Problemas, sendo nossas principais referências Allevato e Onuchic (2021). No Capítulo 4, abordamos os referenciais teóricos relativos as demonstrações e provas matemáticas, optando por analisar as pesquisas de Nicholas Balacheff (2000), Gila Hanna (1995), Michael De Villiers (2001) e Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2003). No Capítulo 5, abordamos o referencial teórico de Geometria Plana que norteou a concepção e a aplicação das atividades desenvolvidas nesta pesquisa.

No Capítulo 6, abordamos os procedimentos metodológicos da pesquisa, bem como a contextualização do lócus e do desenvolvimento da pesquisa e no Capítulo 7 analisamos e discutimos nossos dados, relacionando-os tanto em relação ao referencial sobre a Resolução e Proposição de Problemas, quanto aos referenciais de demonstrações em matemáticas discutidos em capítulos anteriores.

Por fim, no Capítulo 8, discorremos sobre o Produto Educacional dessa pesquisa, um material composto por uma sequência de atividades didáticas elaboradas a partir dos referenciais de Resolução e Proposição de Problemas e demonstrações no Ensino de Matemática, e encerramos com nossas Considerações Finais.

2 UM PANORAMA DO ENSINO DE GEOMETRIA

2.1 Um breve resumo das várias faces da Geometria ao longo da história

Etimologicamente, a palavra *Geometria* é composta pelas raízes *geo* (terra) e *metria* (oriunda de *metron*, que significa medir). Nesse sentido, uma das concepções primordiais da Geometria é a de "medir a terra" (Machado, 2024), constituindo um de seus primeiros registros históricos em diversas civilizações. A sociedade egípcia, por exemplo, empregava essa prática para delimitar propriedades rurais após as enchentes anuais do rio Nilo, além de utilizar o cálculo de áreas para parametrizar a cobrança de impostos (Boyer, 2010; Eves, 1997; Mlodinow, 2005). Cabe destacar que registros dessa Geometria empírica, voltada à medição de terras e à agricultura, também são encontrados em outras civilizações antigas, como a Babilônia e a China (Eves, 1997).

A partir de Tales de Mileto, a Geometria ganha outro aspecto além da concepção empírica, passando a ter um caráter de um raciocínio dedutivo, sendo este considerado um dos primeiros a tratar a Geometria nessa perspectiva (Eves, 1997). Anos mais tarde, na Grécia Antiga, a Geometria ganha com Euclides uma organização sistemática e axiomática, descrita em seu livro *Os Elementos*, nascendo assim o que foi denominado como Geometria Euclidiana (Pavanello, 1989). Nessa concepção, a Geometria não está mais enraizada ao modelo empírico de medições e objetos físicos, mas sim fortemente ligada a um método-dedutivo abstrato, no qual a partir de postulados (axiomas)[1], todos os conceitos geométricos são desenvolvidos e compreendidos.

Em 1637, René Descartes publica *A Geometria*, apêndice de sua obra *Discurso sobre o Método*, estabelecendo as bases para a associação entre a álgebra e a geometria, movimento que deu origem ao que denominamos hoje como Geometria Analítica (Boyer, 2009). Em seguida, na primeira metade do século XIX, o mundo conhece uma das primeiras Geometrias não euclidianas, a Geometria Hiperbólica. Ela surge principalmente, depois de incansáveis tentativas de matemáticos ao longo da história tentarem comprovar o quinto postulado de Euclides[2]. A partir dos estudos de Carl Friedrich Gauss, Nikolai Ivanovich Lobachevsky e János Bolyai, essa Geometria tem como hipótese a negativa do quinto postulado de Euclides, que, inicialmente difundida por Lobachevsky, teve como um de seus pilares mais conhecidos o que foi denominado

[1] No capítulo 4 discorremos um pouco mais a respeito do significado matemático dos termos *postulado* e *axioma*. Por ora, tratamos estes termos como sinônimos cujo significado diz respeito a uma afirmativa matemática aceita que não carece de uma justificativa para ser considerada como verdade.

[2] O quinto postulado de Euclides afirma que: "caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores de que dois retos" (Euclides, 2009, p. 98). Anos mais tarde surgiu a versão equivalente mais conhecida deste postulado que "dado um ponto P tomado fora de uma reta r, podemos traçar uma única reta paralela a r" conhecido também como Axioma de Playfar (Ferreira; Santos; Barros, 2025).

como axioma hiperbólico: dada uma reta e um ponto externo a essa reta, existem pelo menos duas retas que passam por esse ponto e não encontram a reta dada (Gomes; Araman, 2024).

Na década de 1970, o matemático polonês Benoit Mandelbrot traz contribuições do que conhecemos atualmente como a Geometria Fractal[3]. Segundo Moura (2016), que em sua pesquisa se propôs a realizar uma introdução dessa Geometria descrevendo suas principais características e propriedades,

> Fractal é uma forma na qual as partes se assemelham ao todo sob alguns aspectos, ou seja, é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida que a escala na qual é analisado, é alterada, mantendo-se a forma idêntica a original. Essa propriedade é conhecida como autossemelhança. (MOURA, 2016, p.13).

Assim o estudo dos fractais tenta explicar objetos complexos derivados da imprevisibilidade dos fenômenos naturais como o crescimento das plantas, os padrões das ondas do mar, o comportamento do clima, entre outros fenômenos, e desempenham importante papel em áreas bem distintas da Matemática, como a topologia, os sistemas dinâmicos e a teoria dos números (Moura, 2016).

Nesses, e em vários outros momentos da história, percebemos as diversas formas de "fazer Geometria" que surgiram e vêm surgindo ao longo de nossa civilização. Ainda assim, não há como ignorar as vastas contribuições que o desenvolvimento de tal área da Matemática corrobora para a manutenção e o funcionamento da nossa sociedade em diferentes esferas, tais como: a arquitetura, a construção civil, a criação de novas tecnologias, os mecanismos de localização geográficos, os avanços científicos nas áreas da saúde, e as várias outras contribuições que seu desenvolvimento auxilia e favorece na manutenção de nossa sociedade.

Tendo em vista o contexto da Educação Básica, este estudo está inserido no âmbito da Geometria Euclidiana, direcionando o foco aos conceitos e elementos fundamentais relacionados a círculos e circunferências.

Dito isso, e indo ao encontro da questão geral de nossa pesquisa, qual seja: ***Como o processo de Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências articulados com provas e demonstrações feitas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental*****,** nos debruçamos nas próximas seções a entender como se desenvolveu o ensino da Geometria ao longo da história, sobretudo no Brasil.

[3] Fractal deriva do latim *fractus*, adjetivo do verbo *frangere*, e significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar.

2.2 O Movimento de Matemática Moderna no Brasil

Conforme aponta Guimarães (2007), o fim da Segunda Guerra Mundial provocou e impulsionou em diversos países da Europa e nos Estados Unidos, a necessidade urgente de uma reforma nos currículos de Ensino de Matemática e Ciências. Desse modo, o Movimento de Matemática Moderna (MMM) é um movimento que surge, mundialmente, entre as décadas de 1950 e 1960, sob a alegação de um discurso da modernização do ensino, num contexto de acelerada inovação tecnológica e de demanda de formação de cientistas e técnicos (Valente; Oliveira; Silva, 2011).

Considerado um dos grandes eventos que influenciaram o ensino de Matemática, o MMM tem em sua característica a utilização da Teoria de Conjuntos como norteadora no foco de ensino de Matemática. Em diversos países, inclusive no Brasil, o MMM fez com que o ensino de Geometria perdesse espaço nas salas de aula de Matemática, dando lugar, tempo e destaque para priorizar um simbolismo e uma terminologia excessiva, frequentemente ligada a uma algebrização da Geometria (Nunes, 2010).

A pesquisadora Regina Maria Pavanello (1989), por sua vez, destaca em sua pesquisa que, assim como em outros países, no Brasil a orientação era de se trabalhar o ensino da Geometria a partir de Transformações, assunto este que não era dominado pela maioria dos docentes. Ela retrata a realidade da época durante o MMM no Brasil a respeito do ensino de Geometria, destacando que grande parte dos estudantes tiveram prejuízos em relação a este ensino, ao afirmar que

> nas escolas para a elite, busca-se o desenvolvimento das capacidades intelectuais, o que leva, na Geometria, à enfatização dos processos dedutivos, através dos quais se pretende conseguir o desenvolvimento do raciocínio lógico. As escolas para as camadas inferiores são orientadas a preparar os estudantes para o trabalho, por isso a ênfase nas aplicações práticas dos princípios das ciências e, o que interessa a este trabalho, particularmente nos princípios da Geometria. (Pavanello, 1989, p.87)

Essa realidade trazida pelo MMM não aconteceu apenas no Brasil, como já destacado anteriormente, mas observava-se um cenário similar em outros países na mesma época, como afirma Van de Walle,

> A Geometria costumava ser o capítulo descartado ou empurrado para o final do ano letivo. Muitos professores não se sentiam à vontade com a Geometria, associando-a com o ensino médio (EM), provas e demonstrações. A Geometria também não era considerada importante porque era muito pouco visada nos testes padronizados americanos (Van de Walle, 2009. p.48).

Pavanello (1989) também argumenta que o MMM, aliado ao sentimento dos professores de não capacitação para o ensino da Geometria, contribuiu bastante para a precarização e

distanciamento das práticas de ensino nas escolas secundárias. A pesquisadora também faz uma crítica a este tipo de educação ao refletir a distinção entre o ensino de Geometria nas instituições consideradas "escolas de elite", e nas escolas frequentadas por estudantes de classes sociais mais baixas, evidenciando um interesse político:

> a relação entre a ampliação da escola secundária, a pouca ênfase à Geometria e a preponderância da álgebra causa menos estranheza - principalmente quando se considera que nas escolas ou cursos reservados aos segmentos mais privilegiados da sociedade, o ensino da Geometria continua a ser ministrado, sob a forma tradicional ou utilizando-se novos métodos. Do que foi aqui exposto, pode-se concluir que como nas épocas anteriores, a Geometria continua sendo privilégio da elite. A grande massa não tem acesso a ela a não ser no que ela tem de prático, de útil, no que se refere diretamente às profissões - e até mesmo isso lhe é negado, à medida que se "ampliam" as oportunidades educacionais das classes inferiores da sociedade, e se reduz o caráter diretamente profissional da educação (Pavanello, 1989, p.100).

A pesquisadora Ferreira (2008), em sua dissertação, investigou as técnicas de demonstrações no Ensino de Geometria Euclidiana envolvendo estudantes de um curso de formação de professores de Matemática, também analisou o MMM sob a perspectiva do trabalho de Pavanello. Ela destaca que o abandono do Ensino de Geometria apontado por Pavanello, advém tanto de razões científicas, uma vez posta a dicotomia entre a visualização e o rigor, presentes na teorização da geometria euclidiana, quanto também do aspecto educacional, em que o educador matemático não compreende as demonstrações algébricas realizadas nos cursos de formação em Geometria, sentindo-se despreparado para o ensino desta (Ferreira, 2008).

Devido à grande dificuldade enfrentada tanto por parte dos professores, quanto dos estudantes em relação as propostas do MMM em sala de aula, surge, nos anos de 1980, nos Estados Unidos, uma resposta ao MMM, vinda do *National Council of Teachers of Mathematics* [4] (NCTM) com a publicação do livro: *A Resolução de Problemas da Matemática Escolar*, junto a publicação dos documentos *An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980's*[5] (Uma agenda para ação: Recomendações para Matemática escolar dos anos 1980) e *Principles and standards for school mathematics*[6] (Princípios e padrões para a matemática escolar) de 2000, trazem como principal foco o ensino da Matemática a partir da Resolução de Problemas.

Segundo as professoras e pesquisadoras brasileiras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato (2011), esses documentos propunham seis princípios para a Educação Matemática, sendo eles: ***Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia***, criando também cinco padrões de conteúdos, sendo estes: ***Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de dados e Probabilidade***. Além disso, as publicações dos *Stantards*

[4] Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos (tradução nossa).
[5] Uma agenda para ação: Recomendações para Matemática escolar dos anos 1980
[6] Princípios e padrões para a matemática escolar

2000 (NCTM, 2000) também propuseram os chamados cinco padrões de procedimento, sendo o primeiro deles a **Resolução de Problemas**, seguidos por **Provas e Raciocínio**, Comunicação, Conexão e Representações.

Mesmo com todos estes esforços feitos pelo NCTM, o Movimento Matemática Moderna ainda deixou rastros de sua presença nos livros e nas formas de ensino de Matemática em diversos países, inclusive no Brasil. A pesquisadora Marisa Carlovich (2005), sob a orientação do professor Dr. Saddo Ag Almouloud, concluiu após uma análise de coletâneas de livros didáticos das escolas públicas do estado de São Paulo, no período de 1990 até o início dos 2000, que o conteúdo de Geometria ainda era destinado às últimas páginas e continuava sob o enfoque dedutivista, sendo as demonstrações simplesmente apresentadas aos estudantes, seguidas de listas de exercícios de aplicação dos teoremas e das propriedades demonstradas (Carlovich, 2005). Já para os livros analisados a partir do início dos anos 2000, a conclusão era um pouco mais otimista, visto que as demonstrações referentes a Geometria eram abordadas de forma heurística, isto é, traziam consigo abordagens que incentivassem, ainda que timidamente, instigando o estudante a conjecturar e construir provas geométricas.

A partir deste cenário é possível compreender o contexto no qual foi se construindo a atual situação do ensino de Geometria em nosso país. Na seção a seguir, discorremos sobre a perspectiva do modelo atual de ensino de Geometria no Brasil sob a luz dos documentos orientadores oficiais de ensino: os PCNs[7] e a BNCC[8].

2.3 Orientações oficiais para o ensino de Geometria no Brasil

A elaboração da Constituição de 1988 foi considerada uma das que mais versava a respeito da educação, até aquele momento, trazendo em sua totalidade dez artigos específicos sobre a educação (Brasil, 1988). Em seguida, em 1996, ocorre a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei 9.394/96, na qual o artigo 26 já apontava a criação de uma base comum curricular, quando estabelece que:

> Os currículos da educação infantil, do Ensino Fundamental e do ensino médio **devem ter base nacional comum**, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (Brasil, 1996, art.26, grifo dos autores).

[7] Parâmetros Curriculares Nacionais.
[8] Base Nacional Comum Curricular.

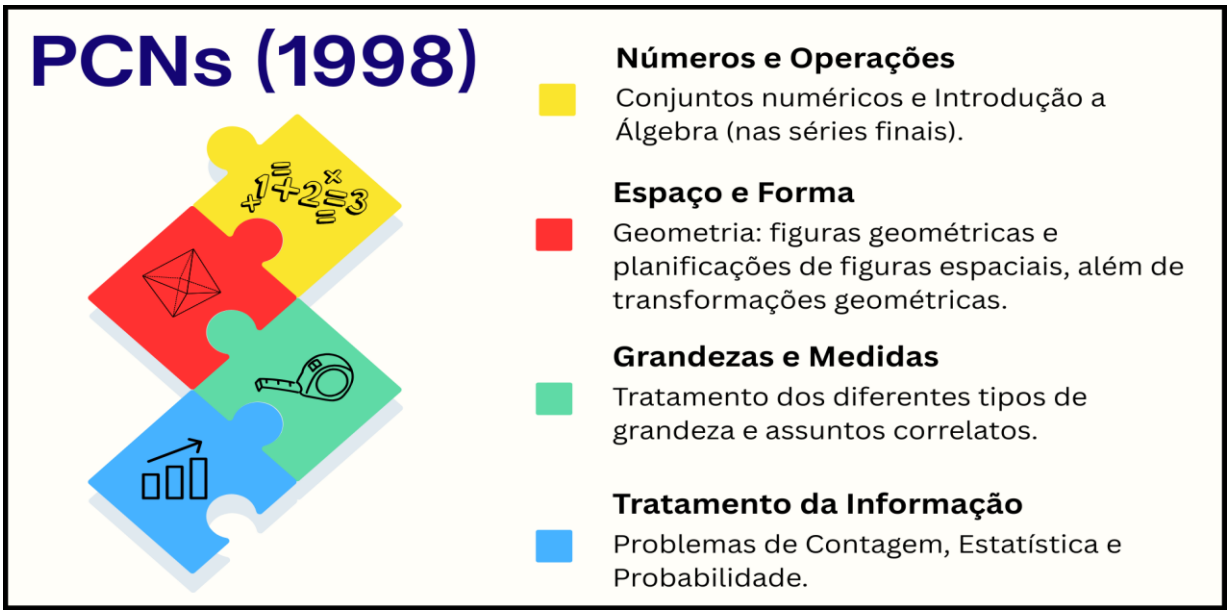
Diante dessa proposta, em 1997, o Ministério da Educação (MEC) aprova os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs (Brasil, 1997), inicialmente destinados ao Ensino Fundamental I, correspondendo as etapas de ensino do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. No ano seguinte, são elaborados e publicados os parâmetros para o Ensino Fundamental II (Brasil, 1998), que compreendiam do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, e sequencialmente os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio, PCNEM. Motivados pelas reformas produzidas pelo NCTM, e em relação ao ensino de Matemática, os PCNs trouxeram em seus documentos os chamados *Alguns caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula*, utilizando como estratégias alguns recursos, sendo um dos primeiros citados: a *Resolução de Problemas*, seguida pela *História da Matemática, pelas Tecnologias da Informação* e pelo *Recurso aos Jogos*.

Vale destacar que a Resolução de Problemas é a primeira metodologia citada pelos PCNs, corroborando com o tema da pesquisa aqui desenvolvida, uma vez que é a partir da utilização dessa que pretendemos investigar, elaborar e analisar as atividades que incentivem as demonstrações de tópicos de Geometria Plana. É importante sinalizar que a discussão teórica e bibliográfica a respeito da Resolução de Problemas está devidamente detalhada no Capítulo 3 deste trabalho. Em suma, ressaltamos que os PCNs protagonizaram uma nova forma de ensino de Matemática, aliada às diretrizes dos documentos do NCTM, na expectativa de que os estudantes aprendam matemática participando ativamente da construção de conceitos e habilidades, ao afirmarem que

> - a atividade matemática escolar **não é olhar para coisas prontas e definitivas**, mas **a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno**, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade;
> - o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), **argumentação** e **validação de processos** e o estímulo às formas de raciocínio como **intuição, indução, dedução, analogia, estimativa**;
> - o ensino-aprendizagem de Matemática tem como **ponto de partida a resolução de problemas** (Brasil, 1998, p.56, grifo dos autores)

Os PCNs organizaram os conteúdos a serem desenvolvidos ao longo de todo o Ensino Fundamental no ensino de Matemática em quatro blocos de conteúdos mostrados na Figura 1.

Figura 1 – Bloco de conteúdos dos PCNS (1998)



Fonte: elaborado pelos autores, com base em Brasil (1998).

Para cada um desses blocos, são descritas as estratégias e os objetivos de aprendizagem a serem alcançados. Em relação aos blocos que trabalham diretamente com Geometria, elencamos os de *Espaço e Forma* e *Grandezas e Medidas.* Destacamos que uma das orientações deste documento é que o docente aproveite a oportunidade dos tópicos de Geometria para que o estudante realize demonstrações e provas ao enfatizar que

> as atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas (Brasil, 1998, p.126).

De acordo com Ferreira (2008), são nos problemas de Geometria que os estudantes começam a perceber a necessidade e as exigências que são estabelecidas por um raciocínio dedutivo, ainda que isso não signifique, conforme as orientações curriculares, que este estudo seja tratado de forma rigorosa e axiomática.

Com a promulgação do Plano Nacional de Educação (PNE), pela Lei 13.005/2014, houve a reiteração da necessidade de se implementar diante de uma cooperação interfederativa (União, Estados, Distrito Federal e Municípios), diretrizes pedagógicas para a Educação Básica e um currículo que tivesse uma base nacional comum, respeitando as pluralidades e as características regionais, estaduais e locais (Brasil, 2014). Assim, em 2018, é estabelecida a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo este o documento normativo que definiria o conjunto orgânico

e progressivo das aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas nas três etapas da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e o Ensino Médio (Brasil, 2018).

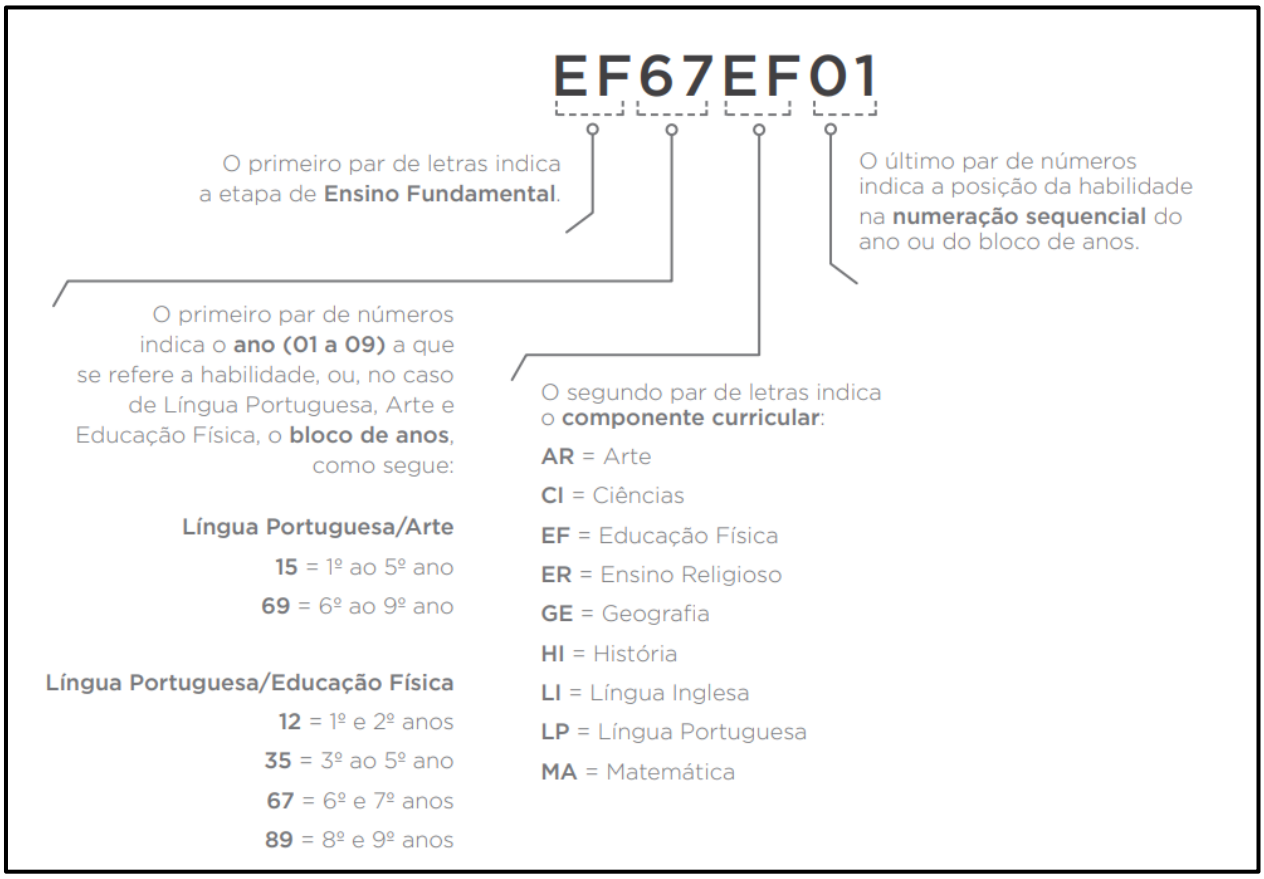
Desta forma, a BNCC surge como uma resposta ao artigo 26 da LDB 9.394/96 citado anteriormente, na tentativa de mitigar as desigualdades e diferenças curriculares, além do compromisso de elencar os conhecimentos, habilidades e competências essenciais para a Educação Básica. A definição de competência, conforme a BNCC, consiste na mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores favorecendo assim ações que contribuam para a construção de uma sociedade mais humana, socialmente justa e consciente ecologicamente (Brasil, 2018). Nesse sentido, o documento apresenta a seguinte estrutura:

- ***Textos introdutórios:*** textos gerais, por etapa e por área de conhecimento;
- ***Competências gerais:*** que serão desenvolvidas pelos estudantes durante todas as etapas da Educação Básica;
- ***Competências específicas:*** definidas para cada uma das áreas de conhecimento e para suas componentes curriculares;
- ***Habilidades/Direitos de aprendizagem***: conteúdos, conceitos e processos, que devem ser desenvolvidos nos estudantes em cada uma das etapas da Educação Básica.

No que se refere segunda etapa da Educação Básica (Ensino Fundamental), o documento o subdivide em dois grupos: o Ensino Fundamental anos iniciais, compreendendo a fase do 1º ao 5º ano escolar, e o Ensino Fundamental anos finais, que compreende a partir do 6º ano até o 9º ano escolar. A BNCC estabelece, para o Ensino Fundamental, cinco áreas de conhecimento sendo elas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. Em relação à Matemática, para esta área do conhecimento, a BNCC (Brasil, 2018) define cinco unidades temáticas de ensino para desenvolver as competências e habilidades pretendidas, sendo estas unidades temáticas intituladas: *Números; Álgebra*; *Geometria; Grandezas e medidas; e Probabilidade e Estatística.*

Tais unidades são compostas por habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, podendo receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização. Estas habilidades estão associadas a códigos alfanuméricos e correspondem, cada uma, a um objeto de conhecimento específico que compõem aquela unidade temática, como mostrado na Figura 2 a seguir.

Figura 2 – Código Alfanumérico das habilidades da BNCC



Fonte: Brasil, 2018.

A BNCC também orienta que a forma como as habilidades são organizadas não implicam uma padronização de modelo de currículo obrigatório, mas uma sugestão de um possível agrupamento e organização entre eles (Brasil, 2018).

Em nossa pesquisa estamos interessados em investigar como a metodologia de Resolução de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências através de demonstrações no 9º ano do Ensino Fundamental,

De acordo com a BNCC,

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como **consolidação e ampliação** das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam **aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples**, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o **raciocínio hipotético-dedutivo** (Brasil, 2018, p. 274, grifos dos autores).

Diante disso, entendemos que a Geometria deve ser ensinada de modo a permitir que o aluno construa seu conhecimento e seja capaz de realizar demonstrações, conjecturar hipóteses individuais e coletivamente, de modo a favorecer o desenvolvimento de seu raciocínio e sua argumentação. A seguir, no Quadro 1, apresentamos um recorte de algumas competências específicas em relação às unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas previstas na BNCC (Brasil, 2018) para o Ensino Fundamental – Anos Finais que serão abordadas no decorrer desta dissertação.

Quadro 1 – Recorte de Habilidades da BNCC

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
GEOMETRIA	A circunferência como lugar geométrico	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
	Polígonos regulares: quadrado e triângulo Equilátero	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
		(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
GRANDEZAS E MEDIDAS	Medida de comprimento da circunferência	(EF07MA33) Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
GEOMETRIA	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
GRANDEZAS E MEDIDAS	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

GEOMETRIA	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Fonte: Brasil, 2018.

A BNCC estabelece as habilidades a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica, como exemplificado as habilidades definidas nos códigos (EF07MA22), (EF07MA27), (EF07MA28), (EF07MA33), (EF08MA17), (EF08MA19) e (EF09MA15), destacados no Quadro 1. No entanto, o documento não explicita as metodologias ou estratégias de ensino-aprendizagem-avaliação a serem adotadas pelo docente para subsidiar a construção e a compreensão dessas habilidades no contexto de sala de aula.

Dessa forma, consideramos fundamental refletir sobre as estratégias pedagógicas que possam favorecer efetivamente a construção e aprendizagem desses conhecimentos. Assim, optamos por investigar o aporte teórico da Resolução e Proposição de Problemas, por compreendê-la como uma alternativa metodológica adequada para o alcance das aprendizagens pretendidas. O capítulo a seguir dedica-se à reflexão acerca desse referencial teórico.

3 RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Historicamente devemos compreender o grande potencial que a Proposição e a Resolução de Problemas carregaram, e ainda carregam, para o desenvolvimento das tecnologias, das ciências, dos conhecimentos, e sobretudo, da Matemática. O Último Teorema de Fermat[9] é um exemplo disso, uma vez que foram necessários mais de 350 anos para a resolução desse problema e assim ser consolidada e aceita sua solução. Por isso, a argumentação final da solução desse problema carregava técnicas e conhecimentos matemáticos que não havia nem sido estudados ou construídos na época de sua proposição (Singh, 2014). Esse tipo de desenvolvimento da Matemática, a partir da resolução e proposição de problemas, é muito comum na história da nossa sociedade, e nos mostra como ela é uma ciência dinâmica, viva, e construída a partir do conhecimento coletivo.

Nesta seção iremos abordar brevemente a perspectiva histórica a respeito da Resolução de Problemas, tais como seu desenvolvimento, suas diferentes formas de concepção, até a sua compreensão como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, a MEAAMaRP [10] (Allevato; Onuchic, 2021), eleita por nós como norteadora de nossa pesquisa. Destacamos que há uma distinção quando escrevemos *resolução de problemas* e *Resolução de Problemas*. Ao empregarmos a primeira forma, referimo-nos ao processo prático de resolver problemas, e ao utilizarmos o termo Resolução de Problemas, nos referimos à teoria científica e ao aporte metodológico que fundamenta essa abordagem.

3.1 O que é um problema?

Ao iniciarmos a discussão sobre a Resolução de Problemas, faz-se necessário compreendermos o que seria um problema. Diante disso, recorremos à literatura na busca pela compreensão das concepções que definem e caracterizam o que seria um problema, sobretudo no contexto da Matemática.

Marineck e Cavalcanti (2000, p.151) descrevem que um problema é "toda situação que os alunos necessitam por em jogo tudo que sabem, mas que contém, também, algo novo para o qual ainda não têm resposta e que exige a busca de soluções".

Hiebert *et al*. (1997 apud Van de Walle, 2009, p. 57) definem um problema como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método correto específico de solução".

---

[9] O último Teorema de Fermat, enunciado em 1637, buscava demonstrar que não há sempre três números inteiros positivos, *a, b* e *c*, que satisfaçam a equação: $a^n + b^n = c^n$, para *n* inteiro e maior que 2.

[10] Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

Jinfa Cai e Frank Lester (2012) também destacam que só existe problema quando aquele(a) que se propõe a resolvê-lo não conhece a sua resolução, ou não tem memorizado os métodos para assim o resolver.

Tal pensamento também é concebido por outros autores, como Dante (2009) que entende que um problema é qualquer circunstância que exige que o indivíduo pense para resolvê-la. Também é possível encontrar essa mesma linha de raciocínio nos PCNs (Brasil,1997), ao descreverem que

> [...]**o problema** certamente **não é um exercício** em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. **Só há problema** se o aluno for levado a **interpretar** o enunciado da questão que lhe é posta e a **estruturar** a situação que lhe é apresentada. (Brasil, 1997, p.32, grifo nosso).

Em sua dissertação, Martins (2024, p. 27) destaca que um problema também está relacionado à forma como ele é apresentado, ressaltando a diferença entre problema e exercício,

> uma vez que ambos têm sua importância no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, mas não podem ser confundidos com a ação e o esforço necessário para se resolver um problema, os quais perpassam por etapas, tais como: leitura; reflexão; elaboração de estratégias; enumeração de conceitos importantes para a resolução; validação da resposta e análise desta, bem como a construção de novos conhecimentos ou a incorporação de novos problemas a partir do problema inicial. Por outro lado, a ação de resolver um exercício, não raras vezes, está associada apenas ao uso de técnicas de repetição e de algoritmos pré-estabelecidos.

Vale ressaltar que, desde o final da década de 1990, Onuchic já defendia que, se o foco é a Resolução de Problemas, "[..] o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória" (Onuchic, 1999, p. 215).

A partir dessas concepções, compreendemos que um problema matemático se diferencia de um simples exercício por não se limitar à aplicação mecânica e repetitiva de algoritmos previamente estabelecidos. Em vez disso, caracteriza-se como uma situação geradora e desafiadora que exige do estudante um papel ativo, reflexivo e investigativo na busca voluntária por sua resolução. Nesse sentido, assumimos nessa pesquisa a concepção de Onuchic e Allevato (2011, p. 81), para as quais um problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer". Sob essa perspectiva, conduzimos nossa prática em sala de aula compreendendo que a partir da mobilização de seus conhecimentos prévios durante a busca pelas soluções, os estudantes puderam construir novos conhecimentos e desenvolver habilidades matemáticas através dos processos de resoluções dos problemas.

3.2 O que é a Resolução de Problemas? Um pouco da história

Não há como abordar a Resolução de Problemas sem recordar que inicialmente ela ganha destaque com o matemático húngaro George Polya, a partir da divulgação de seus trabalhos em 1940, e com a publicação de seu livro*: A arte de resolver problemas* [11] (1995). Em sua obra, Polya já defendia que a resolução de problemas era essencial à prática docente, sugerindo que

> [...] o professor que deseja desenvolver nos estudantes **a capacidade de resolver problemas** deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e praticar. (Polya, 1995, p.4, grifo nosso).

Deste modo, Polya advogava que o professor deve despertar e incutir na mente dos estudantes certo interesse para conhecer e resolver problemas. Nesta perspectiva, ele defendia que o problema deve envolver de alguma forma quem o deseja resolver, despertando a curiosidade e o interesse em resolver outros problemas. Em sua obra, Polya (1995) apresenta quatro passos como caminho para a resolução de um problema, sendo eles:

1º Compreensão do problema: nesta etapa há o reforço na importância do estudante compreender e desejar resolver o problema. Para isso, indica que o problema deve ser bem escolhido, com enunciado claro, devendo o estudante estar atento(a) às partes principais do problema a partir de vários pontos de vista.

2º Estabelecer um plano: esta etapa é compreendida pelo autor como um dos principais feitos na resolução de um problema. Ele destaca que esse estabelecimento pode ou não vir de maneira rápida, cabendo ao professor refletir a partir das suas próprias dificuldades em resolver o problema para se colocar na posição do estudante que irá resolver. Polya sugere que o professor incentive os estudantes a refletirem se "há algum problema correlato já resolvido antes, e se é possível utilizar o raciocínio conhecido?".

3º Execução do plano: Polya considera esta etapa mais simples que a anterior, no entanto adverte que ela requer cuidado, atenção e paciência para que sejam executados todos os passos do plano, cabendo ao professor o incentivo de que o(a) estudante verifique se cada um dos passos obtidos é coerente.

[11] Título original: *How to Solve It*, cuja primeira edição data de 1944, e a versão em português utilizada nessa pesquisa publicada em 1995.

4º Examinar a solução obtida: nesta última etapa, Polya recomenda que todos os estudantes, inclusive os bons em resolver problemas, revejam todo o caminho percorrido para resolução, para consolidar o conhecimento e aperfeiçoar as técnicas de resolver problemas, além da verificação da solução encontrada para o problema. Também recomenda que os professores incentivem os alunos a refletir se existiria outro caminho para a solução do problema e se esse caminho se aplicaria à solução de outros problemas.

No caminhar da Resolução de Problemas, a partir dos anos 1980, o documento *Uma Agenda para Ação - recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980*[12]*,* publicado pelo NCTM, propôs que a Resolução de Problemas fosse o foco da Matemática escolar naquele ano (Morais; Onuchic, 2021). Conforme relata Pagani (2016), o desenvolvimento dessa teoria, trouxe ao final daquela década intensas discussões e mudanças curriculares, no que diz respeito aos métodos de ensino e aprendizagem, destacando esse período como a emersão da Resolução de Problemas na Educação Matemática, o que acarretou em um protagonismo maior dos estudantes na construção do próprio conhecimento. Daquele momento em diante, várias pesquisas foram se desenvolvendo ao redor da Resolução de Problemas, nas quais, Schroeder e Lester (1989) *apud*. Morais e Onuchic (2021), baseados nas concepções de Hatfield (1978), destacam que existem três abordagens para o ensino de Resolução de Problemas:

(1) *Ensino **sobre** resolução de problemas:* este estilo de ensino está aliado às ideias propostas por Polya(1995) no sentido de fornecer estratégias e métodos para resolver problemas.

(2) *Ensino **para** resolução de problemas:* na qual o professor ensina um conteúdo de Matemática para resolver um problema específico, isto é, o problema funciona como um exercício de fixação do conteúdo aprendido anteriormente, sendo o conteúdo mais importante que o problema.

(3) *Ensino **através/via** da resolução de problemas:* os problemas ou situações problemas são apresentados para os estudantes antes do conteúdo matemático, e a partir das respostas e resoluções destes problemas são ensinados os tópicos e novos conceitos matemáticos.

As publicações do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), com destaque para os *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), consolidaram o debate sobre a

[12] Como resposta ao Movimento de Matemática Moderna (MMM), o NCTM publicou o "*An Agenda for Action - Recommendations for school mathematics of the 1980s*" (Uma Agenda para Ação - Recomendações para a Matemática escolar dos anos 80") apresentando várias recomendações para o ensino de Matemática da época sendo a primeira delas a utilização da resolução de problemas no ensino de Matemática.

Resolução de Problemas e, no contexto do cenário brasileiro, as publicações dos documentos oficiais orientadores de ensino, na época, os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs, (Brasil, 1997) e anos mais tarde a Base Nacional Comum Curricular, BNCC (Brasil, 2018) trouxeram o destaque e a importância da resolução de problemas no ensino de Matemática, defendendo que o ensino de Matemática deveria ter como eixo central a resolução de problemas.

Diante desse contexto que se apresentava, as professoras Drª. Lourdes de La Rosa Onuchic e Drª. Norma Suely Gomes Allevato foram de fundamental importância para a divulgação e a discussão da Resolução de Problemas, através de pesquisas junto ao Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) da UNESP de Rio Claro, e o Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Matemática (GPEAM), vinculado à Universidade Federal do Paraná. Allevato e Onuchic desenvolveram juntas o que ficou conhecida como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), na qual "o problema é um ponto de partida e de orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos" (Allevato; Onuchic, 2019, p.3).

Ademais, é preciso reiterar que esse ensino através da Resolução e Proposição de Problemas, conforme orientam Allevato e Onuchic (2021), é aquele em que o conteúdo matemático se desenvolve a partir da resolução do problema. Sendo assim, o professor que deseja trabalhar com este tipo de metodologia, deve compreender que a resolução do problema se torna o veículo no qual ele e os estudantes percorrem o processo de ensino-aprendizagem-avaliação contínuo, desenvolvendo habilidades tanto matemáticas, quanto de resolução de problemas, sendo o destino a aprendizagem de um novo conteúdo matemático. Na próxima seção, discorreremos um pouco mais a respeito dessa metodologia.

3.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP)

A utilização de metodologias e estratégias de ensino estão cada vez mais presentes no cotidiano escolar fazendo com que os professores também estejam sempre à procura daquelas que melhor favoreçam o caminho para o ensino de um determinado objeto de conhecimento.

Nesse sentido, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas consolida-se como uma perspectiva pedagógica fundamentada no tripé ensino-aprendizagem-avaliação. Nessa metodologia o problema atua como elemento central no processo de construção do conhecimento matemático, favorecendo a aprendizagem, a compreensão e o significado por parte do estudante. Segundo Pagani (2016), essa abordagem passou a ser investigada de forma sistemática, a partir de 1992, pelo Grupo de Trabalho e Estudos em

Resolução de Problemas (GTERP), inicialmente vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP (campus de Rio Claro), cujas produções científicas abrangem da Educação Básica ao Ensino Superior.

Nesse contexto, os estudos de Pironel (2002) alinham-se a essa perspectiva ao conceberem a avaliação como elemento integrado aos processos de ensino e de aprendizagem. Segundo esse autor,

> com a crescente preocupação sobre a avaliação no processo de ensino-aprendizagem, a ponto de inseri-la como parte intrínseca a este processo, estendemos nosso conceito da metodologia e passamos a pensar na Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação via Resolução de Problemas (Pironel, 2002, p. 62).

Compartilhando dos ideais expressos por Paulo Freire (1996), segundo os quais ensinar não se reduz a transferir conhecimento, mas a criar possibilidades para que o estudante desenvolva sua própria autonomia, e em consonância com os documentos curriculares oficiais (PCNs e BNCC), compreendemos que a Metodologia a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), propostas por Allevato e Onuchic (2019), é um dos caminhos para isso uma vez que,

> Atualmente, há um consenso quanto à orientação de que a **aprendizagem matemática** deve ocorrer por um **processo ativo** e **construtivo** em que os estudantes realizam as atividades de sala de aula **à luz de suas crenças** e assimilam as informações dentro de suas **estruturas de conhecimento pré-existentes** (Allevato; Onuchic, 2019, p. 2, grifo nosso).

Nessa perspectiva, tal metodologia de ensino torna-se uma aliada ao professor que ensina Matemática, podendo promover um ambiente de ensino democrático e de valorização da participação efetiva dos estudantes. Essa metodologia se esquiva do que então conhecemos como "ensino tradicional" no qual primeiro se ensina um conteúdo e depois apresentam-se problemas, como uma simples forma de aplicação do que foi transmitido, muita das vezes em uma estrutura de sistema de educação bancária (Freire, 1996).

Tendo como ponto de partida a proposição de um problema, cujos conteúdos e habilidades matemáticas ainda não foram previamente formalizados, as autoras sustentam que essa abordagem metodológica favorece o ensino da Matemática. Isso ocorre porque, ao buscarem a solução, os estudantes não apenas constroem conhecimento matemático com significado, mas também reconstroem conceitos e apropriam-se de novos conceitos matemáticos ao longo do processo (Allevato; Onuchic, 2019).

> [...] **os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução** que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o **ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [problema gerador]** que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado.

> **A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema** (Allevato; Onuchic, 2021, p. 53, grifo nosso).

Visto que os estudantes ainda não possuem o conhecimento do(s) conteúdo(s) matemático(s) necessário(s) ou mais adequado(s) à sua resolução, o problema inicial, também chamado de problema gerador, é o ponto de partida para a aprendizagem e para a construção do conhecimento nessa metodologia.

Cai e Lester sugerem, em seu trabalho, alguns critérios para que os docentes consigam compreender se um problema gerador faz parte do grupo denominado por eles de "problemas que valem a pena", isto é, problemas intrigantes e que contenham um nível de desafio que convide os estudantes a desenvolver suas habilidades de maneira árdua (Cai; Lester, 2012). Eles alertam que um único problema não conseguirá atender a todos os critérios descritos, mas que o docente deve utilizar tais critérios para a tomada de decisão sobre como tornar a resolução de problemas um aspecto central na sua prática de ensino, sendo eles

> 1. O problema envolve matemática útil e importante.
> 2. O problema exige níveis mais altos de pensamento e resolução de problemas.
> 3. O problema contribui para o desenvolvimento conceitual dos alunos.
> 4. O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar o que seus alunos estão aprendendo e onde eles estão enfrentando dificuldades.
> 5. O problema pode ser abordado por estudantes de múltiplas maneiras usando diferentes estratégias de resolução.
> 6. O problema tem várias soluções ou permite diferentes decisões ou posições a serem tomadas e defendidas.
> 7. O problema encoraja o envolvimento e o discurso dos alunos.
> 8. O problema se liga a outras importantes ideias matemáticas.
> 9. O problema promove o uso habilidoso da matemática.
> 10. O problema proporciona uma oportunidade de praticar habilidades importantes (Cai; Lester, 2012, p.149).

Van de Walle (2009) também ressalta que os problemas são o veículo necessário pelo qual se pode desenvolver os conceitos e conteúdos desejados, sugerindo que um problema voltado para aprendizagem de matemática deve possuir as seguintes características:

> - **O problema deve começar onde os alunos estão**. O projeto ou seleção de tarefas deve levar em consideração a compreensão atual dos estudantes. [...] Os estudantes devem considerar a tarefa algo que faça sentido.
> - **O aspecto matemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender.** Ao resolver ou fazer a atividade, os alunos

> devem estar preocupados principalmente em dar significado à matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre as ideias. [...]
>
> - **A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e métodos.** Os estudantes devem compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e por que elas estão corretas também é deles. A justificativa deve ser parte integrante de suas soluções (Van de Walle, 2009, p.57-58, grifos do autor).

De forma semelhante, os pesquisadores espanhóis Antoni Vila e Maria Luiz Callejo (2006) destacam que a resolução de problemas contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos e para o desenvolvimento dos estudantes, ao afirmarem que:

> Os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos, capazes de se perguntar pelos fatos, suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios, modificando-os, se for necessário, e de propor soluções (Vila; Callejo, 2006, p. 29).

A respeito da palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, Allevato e Onuchic compreendem que a MEAAMaRP integra simultaneamente estas etapas (ensino, aprendizagem e avaliação) durante todo o processo de construção do conhecimento pelos estudantes, uma vez que esta metodologia não promove apenas a reflexão da compreensão e avaliação do conhecimento pelos estudantes durante o processo de resolução, mas o docente ao utilizá-la também consegue (re)avaliar o processo de ensino-aprendizagem durante toda a busca pela resolução do problema (Allevato; Onuchic, 2021). Nessa perspectiva, para implementar essa metodologia em sala de aula, as pesquisadoras, juntamente com o GTERP, sugerem dez etapas de desenvolvimentos discorridas a seguir.

Figura 3 – Etapas sugeridas da MEAAMaRP



Fonte: elaborada pelos autores (2026).

1ª etapa: ***Proposição de um problema gerador*** – este problema pode ser sugerido tanto pelo estudante, quanto pelo professor. Conforme Allevato e Onuchic (2021), os estudantes não podem ter o conhecimento prévio da resolução deste problema, sendo necessário que o problema seja desafiador para os estudantes, de modo que estes se sintam motivados e influenciados a encontrar a solução.

2ª etapa: ***Leitura individual*** – cada estudante recebe o problema e é solicitado que seja feita a leitura individual na tentativa de compreendê-lo.

3ª etapa: ***Leitura em grupo*** – os estudantes são reunidos em pequenos grupos e é solicitada que seja feita novamente a leitura e que se inicie a discussão em cada grupo para a compreensão do problema.

4ª etapa: ***Resolução do problema*** – após compreenderem o problema, os estudantes procuram, em conjunto, a solução para o problema, baseados em seus conhecimentos prévios. Durante esse processo de busca pela solução que os novos conteúdos e conhecimentos são construídos a partir do conhecimento prévio dos estudantes.

5ª etapa: ***Observar e Incentivar*** – nesta etapa, enquanto os estudantes buscam resolver o problema, o professor analisa o desenvolvimento dos grupos e os incentiva, mediando todo o processo, contudo sem fornecer nenhuma informação que resolva diretamente o problema, promovendo o diálogo e auxiliando nas indagações e dúvidas dos estudantes, além de instigá-los sobre a coerência dos procedimentos adotados para encontrar a solução.

6ª etapa: ***Registro das soluções no quadro*** – nesta etapa representantes dos grupos são convidados a socializarem as soluções encontradas, corretas ou não, registrando-as no quadro. Allevato e Onuchic (2021) compreendem que esse é um momento crucial no qual os estudantes precisam defender suas ideias, avaliar as soluções encontradas por outros grupos para aceitá-las ou refutá-las, além de uma oportunidade excelente para que eles (re)aprendam conceitos, estratégias de resoluções e aprimorem a escrita matemática.

7ª etapa: ***Plenária*** – o professor incentiva que todos os estudantes discutam as soluções encontradas pelos colegas, instigando a argumentação, ajudando na solução de possíveis dúvidas, e na construção do conhecimento a partir da defesa dos argumentos apresentados pelos grupos.

8ª etapa: ***Busca do consenso*** – após as discussões feitas na etapa de plenária, o professor busca, junto a classe, chegar um consenso a partir dos debates e argumentações feitas pelas soluções apresentadas.

9ª etapa: ***Formalização do conteúdo*** – nesta etapa ocorre a "formalização", isto é, o professor registra no quadro a solução correta para o problema, de forma organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.

10ª etapa: ***Proposição de novos problemas*** - após a formalização, novos problemas podem ser propostos, tanto pelo professor quanto pelos estudantes, na intenção de verificação do conhecimento construído ou na proposta de aprofundamento e generalização de outros conceitos a partir de novos problemas.

Cai e Lester (2012) ressaltam em suas pesquisas que os professores devem criar uma cultura de resolução de problemas em sala de aula, para que assim a resolução de problemas se torne uma prática consciente dos estudantes. Os pesquisadores ainda destacam que a habilidade de resolver problemas por parte dos estudantes muitas das vezes é um processo lento e que por isso deve-se ter atenção, a longo prazo, por parte dos docentes.

Diante disso, cria-se a expectativa de que as etapas da MEAAMaRP corroborem para o desenvolvimento do Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula, bem como o estímulo da construção do conhecimento pelos próprios estudantes, mediados pelo professor durante a utilização dessa metodologia. Por serem estimulados a uma busca, individual e coletiva, por uma solução em conjunto a partir de seus conhecimentos prévios, espera-se que essa busca construa e favoreça o desenvolvimento da capacidade de argumentação e das habilidades de letramento matemático, visto que nas etapas da plenária e na busca pelo consenso, os estudantes são instigados, novamente pela mediação e intervenção do professor, a discutirem suas soluções e (re)pensarem as ideias encontradas coletivamente para o problema. Essa percepção, novamente, justifica a concepção das pesquisadoras em retratar essa metodologia como ensino-aprendizagem-avaliação, uma vez que a todo momento estas três ocorrem simultaneamente durante o desenvolvimento das etapas da MEAAMaRP. Nesse sentido, Pironel e Vallilo afirmam que:

> A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas traz, em sua gênese, o **compromisso com o desenvolvimento do estudante**. Coloca a aprendizagem no **centro do processo** e compreende a necessidade de **integração desse processo com os processos de ensino e de avaliação**. Avaliar é preciso, principalmente porque a aprendizagem é imprecisa, mesmo quando o ensino é bem orientado. (Pironel; Vallilo, 2017, p. 302, grifo nosso)

Allevato e Onuchic (2021) também concordam que durante o desenvolvimento das etapas da MEAAMaRP, a avaliação do processo de ensino-aprendizagem ocorre continuamente, sendo a décima etapa uma ótima oportunidade em que se trabalham simultaneamente as três concepções já apresentadas da Resolução de Problemas. Desta forma, as autoras enfatizam que não há empecilho em se trabalhar também com a concepção de ensino ***para*** e ***sobre*** Resolução de Problemas, mas defendem que o ensino ***através*** da Resolução de Problemas já inclui essas duas concepções (Allevato; Onuchic, 2021). Ademais, ainda sobre a última etapa da MEAAMaRP, a proposição de novos problemas, as pesquisadoras defendem que esta é uma ótima etapa para os estudantes verificarem os conhecimentos adquiridos e vivenciados nas etapas anteriores. Além disso, a prática de elaboração e proposição de problemas se alinha com as orientações previstas na BNCC. Na seção a seguir discutiremos a respeito desta última etapa.

3.4 Proposição de Problemas

A proposição de novos problemas corresponde a uma das últimas etapas sugeridas da MEAAMaRP por Allevato e Onuchic (2021). Nela, tanto o estudante quanto o professor podem realizar a proposição de novos problemas, sejam estes problemas relacionados ao problema inicial proposto, ou problemas que apresentem novos conteúdos ainda não estudados. Possamai e Allevato explicitam em seus trabalhos que há uma distinção a respeito dos termos proposição, formulação e elaboração de um problema ao afirmarem que:

> estamos utilizando a expressão **proposição de problemas** para denotar todo o conjunto de ideias que constitui os processos envolvendo a criação de problemas, que inicia com a organização e construção das primeiras ideias matemáticas e da estrutura de constituição do problema – **formulação**; e avança para a sua expressão, na qual se estabelece o enunciado, associando as linguagens materna e matemática – **elaboração**. (Allevato; Possamai, 2022, p.156, grifos nossos)

Nessa perspectiva, as autoras defendem que a proposição de problemas está associada ao processo de criação de problemas, sendo a formulação o início em que se organizam as primeiras ideias matemáticas e a estrutura para o problema. Em seguida, a expressão do enunciado do problema de forma escrita constitui a etapa de elaboração. Por fim, a proposição do problema avança para a etapa de apresentação do problema para que, em seguida, ocorra a resolução, como mostra a Figura 4 a seguir.

Figura 4 – Proposição de Problemas associada a Resolução de Problemas



Fonte: Allevato; Possamai (2022, p. 156)

Cai e Leikin (2020, apud Vieira; Possamai; Allevato, 2023, p.4) afirmam que a proposição e a resolução de problemas são atividades complementares, intimamente relacionadas, mas que apresentam naturezas diferentes. Ademais, as atividades de Proposição de Problemas são

constituídas de elementos disparadores que incluem o contexto e os dados a serem considerados na criação do problema (por exemplo uma figura), e um *prompt* indicando o comando e o que é esperado pelo propositor do problema. Desta forma, as atividades de Proposição de Problemas podem ser consideradas como livres[13], semiestruturadas[14] e estruturadas[15] (Stoyanova; Ellertons, 1996 apud Vieira; Possamai; Allevato, 2023).

Em sua dissertação, Martins (2024) investigou o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Geometria Analítica por meio da Resolução de Problemas com uma turma da 3ª série do Ensino Médio. Ao conduzir a décima etapa da metodologia, referente à proposição de novas situações-problema, o autor denominou os problemas propostos nesta etapa de *Problemas de Aprofundamento*. Elaborados e apresentados pelo pesquisador, tais problemas visavam verificar, consolidar e ampliar as habilidades desenvolvidas a partir do problema gerador, além de oportunizar aos estudantes a percepção das relações conceituais consolidadas ao longo do processo.

> Dessa forma, os estudantes foram motivados a compartilhar os movimentos de resolução propostas e encorajados a reconhecerem suas tentativas de acerto, sempre prezando pela autonomia. Apesar das frustrações nos momentos de erros, o reconhecimento de que este mesmo erro nos ajuda a identificar como poderíamos refazer o raciocínio e quais seriam as retomadas foram importantes ao longo do processo da resolução de um problema (Martins, 2024, p. 35).

Segundo Onuchic e Allevato (2021, p.50):

> Após a etapa de formalização, novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos estudantes. Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.

Vieira, Possamai e Allevato (2023) corroboram com as ideias expressas que a proposição de problemas é uma etapa importante para o ensino de Matemática e destacam que:

> no contexto educacional, a dimensão do pensamento criativo desempenha um papel fundamental, transcendendo as fronteiras convencionais do ensino e da aprendizagem. Ao se promover a criatividade no âmbito escolar, os professores oportunizam que os estudantes avancem na formação como pensadores críticos e autônomos, capazes de construir e utilizar conhecimentos de maneira flexível e adaptável a situações variadas (Vieira; Possamai; Allevato, 2023, p. 6).

---

[13] O estudante cria seus problemas sem nenhuma restrição, como por exemplo a partir de uma imagem fornecida devendo ser gerado um problema matemático para ela.

[14] É fornecida uma situação aos estudantes que são convidados a completá-la a partir das suas habilidades, conceitos e experiências matemáticas anteriores.

[15] Os estudantes irão criar problemas a partir de problemas já conhecidos e resolvidos por eles.

Em nossa pesquisa, quando desenvolvemos as etapas da MEAAMaRP, incluímos ao final das atividades a Proposição de novos Problemas, ora sugeridos pelos pesquisadores, ora idealizados pelos estudantes. Nosso objetivo com isso era o da verificação do desenvolvimento das habilidades pretendidas a partir do problema gerador (proposto no início de cada atividade), bem como favorecer e incentivar a criatividade, a conexão e o aprofundamento de outras habilidades que poderiam ser propostas a partir da elaboração de problemas pelos próprios estudantes, corroborando com a visão de Vieira, Possamai e Allevato (2023).

É importante destacar que todas as atividades, procedimentos e análises dos dados de nossa pesquisa estão detalhadamente relatados nos capítulos cinco e seis dessa dissertação. Na seção a seguir, discorremos um pouco sobre a Resolução e a Proposição de Problemas em conformidade aos documentos orientadores oficiais para o ensino no Brasil.

3.5 A Resolução de Problemas e os documentos oficiais que orientam o Ensino no Brasil

A publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, (Brasil, 1997) alinhou-se no ensino de Matemática com as perspectivas levantadas pelas publicações dos documentos do NCTM a respeito da utilização da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, estabelecendo o entendimento de que esse ensino deveria ter como eixo central a resolução de problemas, sugerindo que:

> • **o ponto de partida da atividade matemática** não é a definição, mas **o problema**. No processo de ensino e aprendizagem, **conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas**, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> [...]
>
> • aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno **utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas**, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;
>
> • o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas **constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas**. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
>
> • **a resolução de problemas** não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas **uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas** (Brasil, 1997, p.33, grifos nossos).

Anos mais tarde, a publicação da Base Nacional Comum Curricular, BNCC (Brasil, 2018) reitera para a Educação Básica, que a resolução de problemas pode contribuir de forma eficaz para o desenvolvimento de habilidades e a compreensão dos conteúdos pelos estudantes, enfatizando que:

> Os processos matemáticos de **resolução de problemas,** de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem **podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática**, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são **potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático** (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266, grifos nossos).

Nessa perspectiva, a BNCC compreende que a resolução de problemas é uma estratégia de ensino para a Educação Básica, pois contribui para o desenvolvimento do processo de aprendizagem, bem como o desenvolvimento de habilidades de comunicação e argumentação.

O documento destaca a importância da resolução de problemas, sugerindo que o estudante seja inserido em um contexto que promova o raciocínio em situações reais na busca por soluções, a partir de diversas estratégias e formas de representação, elaborando conjecturas e desenvolvendo a criatividade. Assim, a BNCC compreende que a resolução de problemas vai além de práticas rotineiras caracterizadas pela memorização e a repetição de algoritmos, mas que deve favorecer a oportunidade do estudante refletir criticamente e compreender o que está aprendendo.

O documento também destaca a relevância da Proposição de Problemas a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, afirmando a importância de que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à Resolução de Problemas, constam também a elaboração de problemas (Brasil, 2018). Para a etapa do Ensino Médio, o documento ainda enfatiza que a elaboração de problemas

> pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (Brasil, 2018, p. 536).

A Base ressalta então que, a partir da elaboração e da resolução de outros problemas, os estudantes podem verificar os conceitos matemáticos abordados nos problemas elaborados, além de desenvolver a criatividade para conjecturar e refletir a respeito da generalidade das hipóteses estabelecidas, bem como desenvolver problemas relacionando-os com outras áreas de conhecimento. Tais perspectivas nos parece muito semelhantes a metodologia proposta por Allevato e Onuchic (2021), a MEAAMaRP, no entendimento de que a partir da busca pelas soluções dos problemas os estudantes constroem, junto ao processo de mediação do professor, novos conhecimentos e têm a oportunidade de (re)avaliarem habilidades e conceitos já discutidos anteriormente.

Dessa forma, compreendemos o destaque e a relevância conferidos pela BNCC à importância da Resolução de Problemas no ensino de Matemática. Contudo, há que se ponderar

que mesmo orientando e incentivando a realização da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, não há nesses documentos uma metodologia estruturada, com etapas e sugestões sobre como realizar essa implementação na sala de aula, relacionando às habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica.

Diante dessa lacuna, a pesquisa aqui desenvolvida buscou analisar como o processo de resolução e proposição de problemas, desenvolvido por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, sob a implementação da MEAAMaRP, pode contribuir para a construção de conhecimentos relativos a tópicos de Geometria Plana, especificamente a respeito de círculos e circunferências, articulados a provas e demonstrações. No capítulo a seguir, discorremos sobre o referencial bibliográfico estudado a respeito das demonstrações e provas matemáticas, bem como sua fundamentação matemática para a compreensão dos tópicos que estamos interessados em investigar.

4 DEMONSTRAÇÕES E PROVAS EM MATEMÁTICA

O dicionário *Oxford Languages* define como ciência*:* "o corpo de conhecimentos sistematizados adquiridos via observação, identificação, pesquisa e explicação de determinadas categorias de fenômenos e fatos, e formulados metódica e racionalmente" (Oxford, 2025). A Matemática é classificada como ciência exata, e por isso, possui conhecimentos adquiridos e organizados metodicamente a partir de reflexões e processos racionais. Um desses processos é a demonstração. Mas por que se precisa de demonstração? Antes de compreender a resposta para esse questionamento julgamos pertinente definir alguns conceitos específicos da Matemática como: axioma/postulado e teorema/proposição.

A comunidade matemática atualmente entende por axioma ou postulado uma sentença lógica ou ideia aceita como verdade e que dispensa uma verificação (Impa, 2019). Como exemplo, podemos citar um dos primeiros grandes postulados da Geometria: *"dados dois pontos distintos, A e B, há uma única reta que passa por eles, sendo todas as outras retas coincidentes"*. Ainda que seja plenamente aceitável essa ideia, não há uma demonstração formal para esse fato. Portanto, a comunidade matemática o classifica como um axioma. Em contrapartida, quando temos o encadeamento de várias sentenças lógicas conectadas, formando assim um conjunto de hipóteses, e a partir delas concluirmos um fato, isto é, validamos, demonstramos, provamos uma tese, temos assim o nascimento do que a comunidade matemática indica como teorema/proposição.

Em seu trabalho a respeito das demonstrações matemáticas o pesquisador Irineu Bicudo apresenta uma distinção para o que seriam os axiomas e os teoremas, ao dizer que:

> De fato, parece um fato notório que o matemático, quando expõe uma teoria, em sua área de interesse, a seus pares, preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais: DEFINIR seus conceitos e DEMONSTRAR as propriedades desses conceitos.
>
> Em um sentido muito geral, um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos, anteriormente definidos. Similarmente, demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Sem recorrer, como fazem os dicionários, ao círculo vicioso, sabemos que é impossível definir todas as noções matemáticas. Do mesmo modo, não alcançamos demonstrar todas as proposições necessárias, na caminhada retrocessiva, exigida por uma demonstração. Assim, lança-se mão de alguns conceitos, tomados sem definição, e de algumas proposições, aceitas sem demonstração, e estabelece-se, por assim dizer, a arquitetura das teorias matemáticas: conceitos primitivos e conceitos derivados; axiomas e teoremas (Bicudo, 2001, p. 80).

Feitosa e Locci também argumentam em seu trabalho, que a Matemática atualmente não faz distinção entre as palavras axioma e postulado, mas afirmam que historicamente estes termos se distinguiram, uma vez que aos "para os gregos, axiomas eram afirmações tais que todos os seres pensantes deveriam admitir como verdadeiras, como, por exemplo, a soma das partes coincide

com o todo; enquanto postulados eram verdades particulares da geometria [...]" (Feitosa; Locci, 2001, p. 65).

Historicamente, muitos pesquisadores (Boyer, 2010; Eves 2004) defendem que as demonstrações em Matemática surgiram com os gregos, em meados do século IV, junto com o método axiomático de Euclides. Ainda assim, há vários registros de outras civilizações que conheciam aplicações de teoremas e proposições em seu cotidiano, mesmo sem apresentar registros formais, isto é, sem o registro de uma escrita axiomática e hipotético-dedutiva, como explicitou Bicudo (2002), do conhecimento da validação ou da demonstração de tais propriedades. A exemplo disto, citamos a **Tábula Plimpton 322**, datada de 1900 - 1600 a.C, encontrada na Mesopotâmia, atual Iraque, na qual os babilônios deixaram registrado o conhecimento de ternas pitagóricas dez mil anos antes do aparecimento do próprio Teorema de Pitágoras (Calabria, 2013).

Figura 5 – Tábula de Plimpton 322



Fonte: https://share.google/U4J91843DF7qJqEdi. Acesso: 07 de jun. de 2026.

4.1 Fundamentos da Lógica Matemática: um breve recorte

Nesta seção discorremos um pouco sobre os fundamentos da Lógica Matemática que servirão para pavimentar o caminho da compreensão das demonstrações em Matemática. Diante disso, baseamos nossos referenciais em Mazzi (2018), Morais Filho (2006), Oliveira e Fernandez (2012), e Córes (2025).

Mazzi (2018), que em sua tese investigou a presença de demonstrações de geometria em livros de Matemática do Ensino Médio, afirma que a Matemática é uma linguagem própria, constituída da linguagem materna e da linguagem simbólica. O pesquisador apresenta em seu trabalho o quadro que é mostrado na figura a seguir com os símbolos utilizados mais frequentes durante a escrita matemática.

Figura 6 – Símbolos Comuns

Símbolo	Como se lê
→	Implica. Acarreta.
↔	Equivalente. Se, e somente, se
∧	e
∨	ou
~	Negação. Não.
∀	Para todos. Qualquer. Para qualquer que seja
∃	Existe. Existe pelo menos um
≡	Congruente
■	Como queríamos demonstrar

Fonte: Mazzi (2018, p. 57)

Morais Filho (2006) define que toda sentença (proposição) matemática é uma frase, que inclusive pode incluir apenas símbolos matemáticos, tendo como principais características:

> 1. Apresenta-se de forma estruturada como uma oração, com sujeito, verbo e predicado;
> 2. É afirmativa declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa);
> 3. Satisfaz o **Princípio do Terceiro Excluído**, que garante que uma sentença ou é falsa ou é verdadeira, não havendo uma terceira alternativa; e o **Princípio da Não-contradição**, que assegura que uma sentença não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo (Morais Filho, 2006, p. 23, grifos do autor).

Nessa perspectiva, Morais Filho ressalta que toda proposição ou sentença matemática sempre irá ou ser verdadeira ou falsa, não podendo ser simultaneamente verdadeira e falsa. As proposições podem ser representadas por letras maiúsculas e estarem relacionadas tanto em linguagem simbólica, quanto em linguagem materna. Mazzi (2018), apresenta em seu trabalho o seguinte exemplo relacionando as proposições mostradas na Figura 7 a seguir.

Figura 7 – Proposições Compostas

Proposição conjuntiva: $A \wedge B$, lê-se: A **e** B

Proposição disjuntiva: $A \vee B$, lê-se: A **ou** B

Proposição condicional: $A \rightarrow B$, lê-se: A implica B

Proposição bicondicional: $A \leftrightarrow B$, lê-se: A se, e somente se, B

Fonte: Mazzi (2018, p. 59)

Nessa perspectiva, o pesquisador defende que uma **proposição conjuntiva** ($A \wedge B$) apresenta valor lógico verdadeiro se cada uma das proposições A e B também apresentarem valores lógicos verdadeiros. Em seguida, afirma que uma **proposição disjuntiva** ($A \vee B$) possuirá valor lógico verdadeiro se, pelo menos, uma de suas proposições A e B tiver valor lógico verdadeiro. A **proposição condicional** (ou implicativa) será uma sentença composta, formada por duas proposições A, B, ligadas pelos conectivos "Se... então...", de forma que se lê: "Se A, então B" ($A \rightarrow B$), e assim só será entendida como verdadeira, quando a sentença B puder ser deduzida a partir da sentença A, sendo esse procedimento entendido como método dedutivo. O pesquisador destaca também que mesmo a proposição $A \rightarrow B$ tenha valor lógico verdadeiro, não necessariamente significa dizer que a sua recíproca, $B \rightarrow A$, também terá valor lógico verdadeiro. Caso isso de fato aconteça, então estaremos com uma **proposição bicondicional**, o que significa dizer que A **é equivalente a** B, ou de outra forma, A é verdadeira **se, e somente se,** B também for verdadeira ($A \leftrightarrow B$).

A partir destes conceitos, conseguimos compreender sob a perspectiva de Morais Filho uma explicitação para o processo de demonstrações matemáticas, quando este afirma que:

> uma **demonstração** de que uma proposição T é deduzida de uma outra proposição H é uma cadeia de argumentações lógicas válidas que usam H para concluir os resultados apresentados em T. Neste processo, H é chamada **hipótese(s)** e T chama-se **tese**. Numa demonstração, prova-se que todo objeto matemático que satisfaz as condições das hipóteses, cumpre necessariamente o que afirma a tese[...] esse fato garante a validade de uma proposição implicativa '$H \rightarrow T$'.
> Cada passo de uma demonstração é provado por meio de argumentações válidas, usando-se hipóteses, axiomas, definições, outros resultados anteriormente provados e os passos precedentes, formando uma cadeia dedutiva de raciocínio. (2006, p. 94, grifos do autor).

Mazzi (2018, p. 63) explicita em sua pesquisa que uma demonstração, em um sistema axiomático[16] é, então, "a derivação de um teorema a partir de axiomas, de forma direta ou a partir de outros teoremas [...]". Além disso, o pesquisador deixa claro que não existe uma regra pré-definida para realizar demonstrações matemáticas. Como exemplo disso, pode-se citar o teorema de Pitágoras, com cerca de 370 demonstrações conhecidas, cada uma com suas particularidades, e utilizando argumentos distintos (Morais Filho, 2006). No entanto, existem técnicas de demonstrações matemáticas conhecidas e frequentemente utilizadas. Na seção a seguir discorremos um pouco sobre elas.

[16] Chama-se modelo axiomático a um conjunto finito de axiomas, de noções primitivas e de regras de inferência. Um modelo axiomático fornece bases lógicas sólidas para desenvolvermos uma teoria matemática, ou seja, apresentarmos certos objetos que nos interessam e deduzirmos alguns fatos sobre eles (MORAIS FILHO, 2010, p. 95)

4.1.1 Demonstração Direta

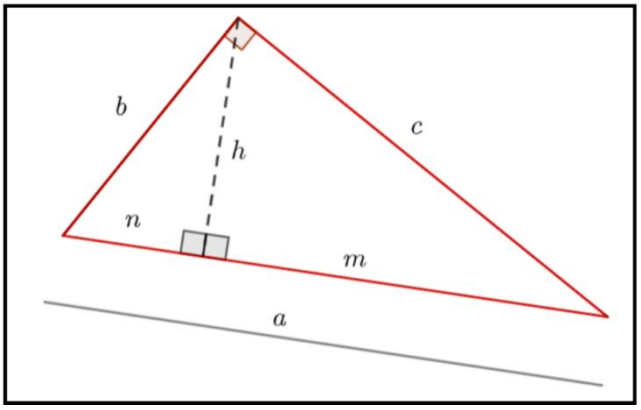
A *Demonstração Direta* de uma proposição $A \rightarrow B$ consiste num encadeamento de sentenças lógicas que, ao supor que a sentença A seja verdadeira, a partir de um processo envolvendo manipulações algébricas, geométricas, entre outras, e argumentações coerentes, tenta-se verificar a validade da tese B. Vamos utilizá-la como exemplo para validar a primeira parte da demonstração do Teorema de Pitágoras.

Enunciado: *em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos corresponde ao quadrado da hipotenusa. Considere os catetos de medidas b e c, e a hipotenusa de medida a, isto é:*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dem.: Observe, sem perda de generalidade, o triângulo retângulo mostrado na Figura 8 abaixo.

Figura 8 – Teorema de Pitágoras (A)



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Assim, sejam m e n as medidas das projeções dos catetos de medida b, c sobre a hipotenusa, respectivamente. Logo, por semelhança de triângulos, encontramos as seguintes relações métricas:

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = a \cdot n$$

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a\,(m + n)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

como queríamos mostrar.

4.1.2 Demonstração por Contraexemplo

Uma das funções das demonstrações que será discutida nas próximas seções de nossa pesquisa é a função da verificação de uma propriedade (De Villiers, 2001). Inclusive, a partir de uma proposição válida para algum caso específico, pode-se observar a curiosidade de verificar se há possibilidade da generalização da proposição citada. Em algumas situações, o processo da demonstração direta dessa proposição pode ser bastante trabalhoso, sobretudo se deseja-se verificar que a generalização ou até mesmo que a proposição não é válida. Por isso, a verificação da *não validade* da proposição pode ser por vezes, mais simples, do que a própria verificação direta. De forma geral, basta encontrar ao menos um exemplo em que a proposição não seja válida que obtemos uma forma de demonstrar a sua não validade. Elucidamos a situação descrita com o exemplo abaixo:

Exemplo: *O teorema de Pitágoras é válido para qualquer tipo de triângulo.*

Dem.: Para verificar que a afirmação é falsa, considere sem perda de generalidade o triângulo com lados de medidas: 6cm, 7cm e 8cm. Note que:

$$8^2 \neq 7^2 + 6^2$$

por isso, o teorema de Pitágoras não é válido para qualquer tipo de triângulo. Logo, fica demonstrado que a proposição é falsa.

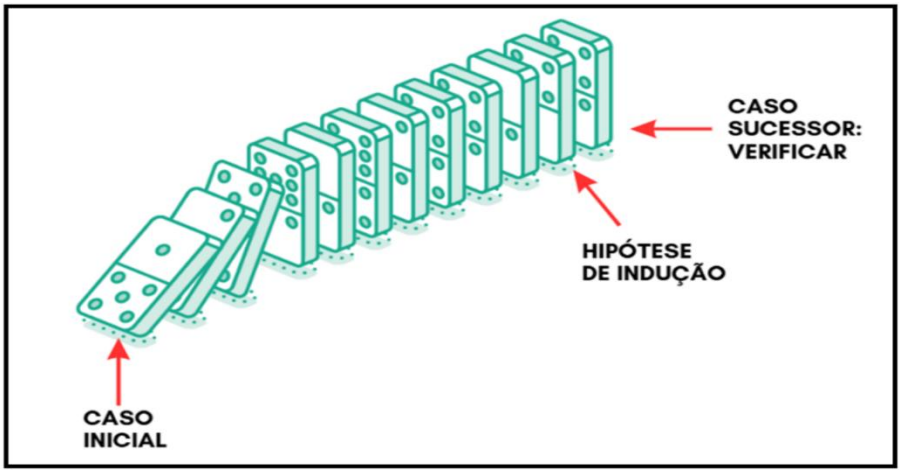
4.1.3 Demonstração pelo Princípio da Indução Matemática

O Princípio de Indução Finita (PIM) é uma estratégia de demonstrar propriedades válidas para sequências numéricas ou sequências recursivas. A partir da construção dos Axiomas de Peano[17], que originam as bases formais e sólidas para a descrição do conjunto dos números naturais, podemos assumir que o PIM é uma ferramenta útil para demonstrações de hipóteses a respeito de propriedades destes conjuntos e subconjuntos numéricos (Morgado; Carvalho, 2023).

[17] Os Axiomas de Peano, propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), são um conjunto de cinco axiomas que definem as propriedades fundamentais dos números Naturais. Entre os cinco axiomas descritos por ele, o último é entendido como uma versão do Princípio da Indução Matemática.

Metaforicamente utilizar o PIM corresponderia a verificar se em uma fileira de peças de dominós colocados na posição vertical, quando um deles for derrubado, sequencialmente todos os outros deverão cair, conforme indicado na figura abaixo.

Figura 9 – Princípio da Indução Matemática



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Portanto, ao se verificar se uma proposição é válida utilizando o PIM, é necessário observar inicialmente se a proposição é válida para algum caso inicial, o que na metáfora corresponde a verificarmos se o primeiro dominó da fileira que irá cair. Caso isso ocorra, podemos supor que esta propriedade será verdadeira até um caso genérico $n = k$, ou seja, a partir da primeira peça que caiu, todas as próximas *k* peças de dominó da fileira também cairão. A isto denomina-se o nome de *hipótese de indução*. Logo, se conseguirmos concluir que o caso sucessor também está válido, $n = k + 1$, ou seja, se garantirmos a próxima peça também será derrubada, o PIM garante a validade da proposição investigada. Podemos estruturar o PIM da seguinte forma:

1º) ***Caso inicial:*** verifique se sua proposição é válida para algum caso inicial;
2º) ***Passo indutivo:*** suponha que a proposição seja válida para algum n = k, sendo k um número inteiro. Essa é a hipótese de indução;
3º) ***Verificação do caso imediatamente sucessor:*** Agora mostre que, a partir da hipótese de indução, para n = k+1, a proposição também é válida.
Uma vez concluído esses três passos, a proposição estará demonstrada.
Vamos fazer um exemplo disso demonstrando a seguinte propriedade abaixo.
Enunciado: *Mostre que:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$$

Dem.: Vamos demonstrar essa propriedade utilizando o PIM.

Passo 1) Veja que para o caso inicial n = 1, temos:

$$1^3 = \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right]^2$$

$$1 = 1, \quad \textit{logo o caso inicial está válido.}$$

Passo 2) Supomos que esta propriedade também é válida até n = k, com k > 1 (hipótese de indução).

Passo 3) A partir da hipótese de indução tentamos verificar se a tese também é válida para n = k+1. Dessa forma, queremos verificar se:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1) \cdot [(k+1)+1]}{2}\right]^2$$

Logo, considere:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 \ + (k+1)^3$$
$$= (1^3 + 2^3 + \cdots + k^3) \ + (k+1)^3$$

Utilizando a *hipótese de indução* obtemos que:

$$= \left[\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right]^2 \ + \ (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \ \cdot \ \frac{4(k+1) + k^2}{4}$$

$$= (k+1)^2 \ \cdot \ \frac{k^2 + 4k + 4}{4}$$

$$= (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1) \cdot \big((k+1)+1\big)}{2} \right]^2$$

Com isso, temos que:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1) \cdot \big((k+1)+1\big)}{2} \right]^2$$

como queríamos mostrar. Portanto, pelo PIM fica mostrado que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2$$

para todo n ≥ 1.

4.1.4 Demonstração por absurdo (contradição)

Para demonstrar uma sentença "Se A, então B" por absurdo, admite-se que A e $\sim B$ (não B) ocorram. Com essa suposição, entende-se uma sentença contraditória qualquer $P \wedge (\sim P)$, chamada absurdo ou contradição (Mazzi, 2018). A hipótese adicional $\sim B$ é chamada de hipótese de contradição ou hipótese de absurdo. A justificativa lógica para esse tipo de demonstração pode ser explicitada da seguinte maneira:

P pode representar qualquer sentença. Como o valor lógico de uma sentença $P \wedge (\sim P)$ é falso, pois não é possível que uma sentença P e sua negação $\sim P$ sejam verdadeiras ao mesmo tempo , tem-se a seguinte equivalência, pelo princípio da não-contradição:

$$(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \leftrightarrow ((\mathrm{A} \wedge \sim \mathrm{B}) \rightarrow (\mathrm{P} \wedge \sim \mathrm{P}))$$

Em outras palavras, para provar a validade da sentença $A \rightarrow B$, supõe-se que a hipótese A ocorra, mas que a tese B não ocorra, ou seja, temos que $A \wedge \sim B$ ocorre (é verdadeira). Partindo-se dessa última proposição, deve-se deduzir uma sentença contraditória $P \wedge \sim P$, que é falsa. Ora, mas não se pode deduzir uma sentença falsa de uma verdadeira. Logo, a suposição inicial $A \wedge \sim B$ não pode ocorrer, ou seja, $A \rightarrow B$ deve ocorrer. Como exemplo, vamos pensar na seguinte situação:

Enunciado: *Se o quadrado de um número inteiro é ímpar, então esse número também é ímpar.*

Dem.: Para demonstrarmos por absurdo, note que precisamos considerar verdadeira a hipótese (*A*): *O quadrado de um número inteiro é ímpar,* e agora ao mesmo tempo assumir que a negativa da tese *(B*) seja verdade, ou seja, por absurdo, *vamos considerar que esse número inteiro seja par(~B).* Logo:

$$Se\ n\ \text{é}\ par\ , então:$$
$$n\ =\ 2k,\ com\ k\ \in\ \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow n^2\ =\ (2k)^2$$
$$\Longrightarrow n^2 =\ 4\,k^2$$
$$\Longrightarrow n^2 =\ 2\cdot(2k^2)$$
$$\therefore\ n^2\ \text{é}\ par\ \ (absurdo!)$$

Note que, ao supormos por absurdo, que *n* fosse par, chegamos em uma contradição com nossa hipótese inicial, pois a princípio tínhamos que *n² é ímpar.* Assim, fica demonstrado por absurdo que é verdadeira a proposição.

4.1.5 Demonstração pela contrapositiva

Dada uma proposição implicativa $A \rightarrow B$, optar por demonstrar essa sentença pela contrapositiva, significa mostrar que $\sim B \rightarrow \sim A$. Para elucidar a compreensão podemos pensar na seguinte proposição:

$$As\ quartas\ estou\ na\ praia.$$

Logo, sabemos que se hoje não estou na praia, com certeza não há chances de hoje ser quarta-feira. Na linguagem da lógica, tem-se:

$$A \longrightarrow B\ \leftrightarrow\ \sim B\ \longrightarrow\ \sim\text{A}$$

A sentença $\sim B \rightarrow \sim A$ é chamada contrapositiva da sentença $A \rightarrow B$. Uma diferença entre esse método e o método por absurdo se dá que, neste último, tem-se o intuito de concluir uma contradição qualquer $P \wedge \sim P$, sem saber ao certo que contradição é essa. Já no caso da contrapositiva, tem-se ao certo que se quer provar a negação da hipótese A (Mazzi, 2018). Vamos utilizar o mesmo exemplo anterior, contudo utilizando a contrapositiva.

Enunciado: *Se o quadrado de um número inteiro é ímpar, então esse número também é ímpar.*

Dem.: Para demonstrarmos pela contrapostiva, note que agora vamos mostrar que ~*B* → ~*A*, isto é: *seja um número inteiro par (~B), o quadrado desse número será um número inteiro par(~A).* Logo:

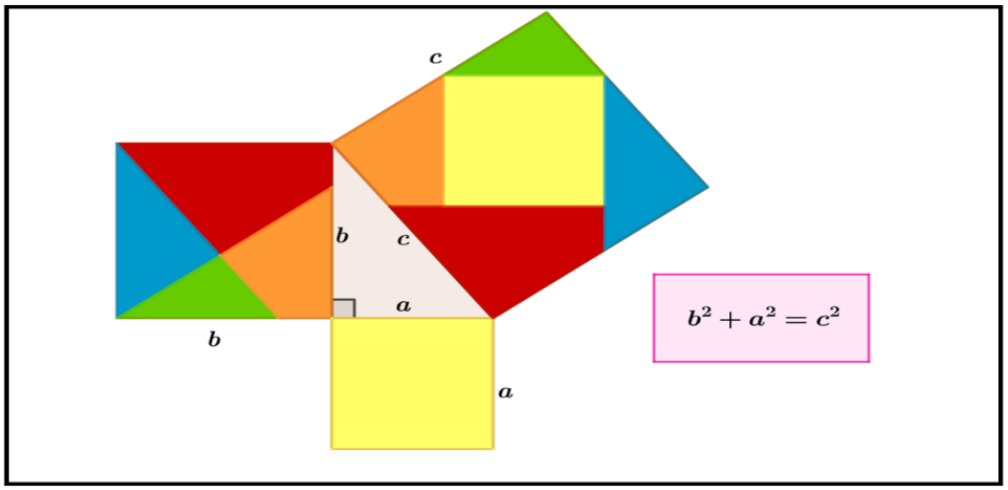
$$Se\ n\ \text{é}\ par\ , então:$$
$$n\ =\ 2k,\ com\ k\ \in\ \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow n^2\ =\ (2k)^2$$
$$\Longrightarrow n^2 =\ 4\,k^2$$
$$\Longrightarrow n^2 =\ 2\cdot(2k^2)$$
$$\therefore\ n^2\ \text{é}\ par$$

Assim, pela contrapositiva, conseguimos mostrar que se o quadrado de um número inteiro é ímpar, então esse número também é ímpar.

4.1.6 Demonstração Visual (Demonstrações sem palavras)

A *Demonstração Visual* (demonstração sem palavras) ainda gera um debate na comunidade matemática a respeito de sua validação. No entanto, para alguns pesquisadores, como por exemplo Casselman (2000) a utilização de imagens desempenha papel importantíssimo durante a dedução lógica, pois ele defende que esse tipo de demonstração pode se apropriar de outras representações visuais para a compreensão de equações, teoremas e proposições matemáticas. Como exemplo, temos a seguir, na Figura 10, novamente o Teorema de Pitágoras a partir de uma demonstração visual.

Figura 10 – Teorema de Pitágoras (B)



Fonte: elaborada pelos autores (2026).

4.1.7 Demonstração por Argumento Combinatório

A demonstração por Argumento Combinatório consiste em apresentar argumentos válidos que mostrem que os dois lados de uma igualdade contam a mesma coisa (Corés, 2014). Desta forma, a partir de um exemplo ou situação consegue-se convencer que o resultado encontrado no lado esquerdo da equação é equivalente ao lado direito da equação. Como exemplo, vamos mostrar a *Relação de Stifel*.

Enunciado (Relação de Stifel):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dem.: Precisamos mostrar que o lado esquerdo da igualdade resulta no mesmo número que o lado direito da igualdade. Para isso, considere a seguinte situação: *Uma empresa tem no total n funcionários, entre eles o funcionário X. Essa empresa planeja montar um grupo com k pessoas.*

Contando o lado direito: Observe que uma forma de pensar em o número de maneiras possíveis de montar esse grupo seria:

$$\binom{n}{k}$$

Contando o lado esquerdo: Note que agora a empresa poderia pensar na formação do grupo em dois casos: (i) o funcionário X está no grupo, ou (ii) o funcionário X não está no grupo. Para o caso (i) observe que temos:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

pois, o funcionário X já está no grupo, então é necessário escolher k-1 pessoas dos outros n -1 funcionários.

Para o caso (ii), é preciso escolher k pessoas, entre os n-1 funcionários, já que o funcionário X não está no grupo. Assim, observe que temos que temos um total de:

$$\binom{n-1}{k}$$

Note que tanto o lado esquerdo, quanto o lado direito da equação são contados o mesmo número, isto é, a quantidade de maneiras de se formar um grupo de k pessoas tendo n pessoas disponíveis. Logo, por Argumento Combinatório, fica mostrado que:

$$Relação\ de\ Stifel: \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

4.2 As Demonstrações e Provas na Educação Básica

Por um longo período de pesquisa, a comunidade matemática também se debruçou a respeito dos papeis de demonstrar em Matemática na sala de aula (Boavida; Gomes; Machado, 2002). Nosso trabalho está orientado com as ideias encontradas por Balcheff (2000), Hanna e De Villiers (2008), e Lilian Nasser e Tinoco (2003) que serão discutidas nas próximas seções.

4.2.1 Nicolas Balacheff

Nicolas Balacheff (2000), pesquisador matemático francês, diferencia em sua pesquisa, três conceitos que permitem compreender sua perspectiva a respeito do processo de demonstrações matemáticas dos estudantes, sendo esses conceitos: a ***explicação***, a ***prova*** e a ***demonstração***.

Em sua perspectiva, o primeiro conceito tem a função apenas de explicar, comunicar e discutir com uma outra pessoa ou grupo sobre a veracidade ou não de uma proposição matemática enunciada. Dessa forma, a ***explicação*** de uma proposição não necessariamente precisa ter uma cadeia dedutiva, mas sim uma comunicação na língua natural para a compreensão e a validação pelo grupo ou indivíduo ao qual se está comunicando.

Caso o grupo aceite como verdade a explicação da proposição enunciada, então esta explicação passa a ser entendida como uma ***prova*** da propriedade matemática citada. Assim, o conceito de ***prova***, segundo Balacheff, está relacionado a um processo social, no qual, ainda que aceita por uma comunidade, pode não ser considerada definitiva, podendo ser esta rejeitada por outro grupo.

> A transição da ***explicação*** para a ***prova*** refere-se a um processo social pelo qual um discurso que afirma a validade de uma proposição muda de posição e é aceito por uma comunidade. Essa posição não é definitiva; ao longo do tempo, ela pode evoluir em conjunto com o avanço do conhecimento em que se baseia. Além disso, uma evidência pode ser aceita por uma comunidade, mas rejeitada por outra. (Balacheff, 2000, p.12, tradução e grifos nossos).

Por fim, Balacheff define que a ***demonstração*** é um tipo de prova matemática, caracterizada por uma linguagem específica, além de uma série de enunciados e encadeamentos

pré-estabelecidos que devem ser aceitos pela comunidade matemática. Em sua obra, ele descreve que o processo de demonstração e validação de uma propriedade também tem relação com a forma que o indivíduo, no caso o estudante, avalia a necessidade da demonstração, ao exemplificar que:

> Quando compro um livro e recebo vinte centavos de troco, sempre tenho 'muita certeza' de que as moedas que recebo são verdadeiras. [...] Se alguém me perguntasse: 'Tem certeza de que as moedas que você está segurando não são falsas?', eu verificaria novamente e diria: 'Sim'. No entanto, se algo realmente importante dependesse da certeza absoluta da minha avaliação, acho que ousaria ir ao banco e pedir ao caixa para verificar as moedas; e se a vida de alguém dependesse disso, eu seria capaz de consultar o chefe de caixa de todos os bancos ingleses para certificar sua autenticidade. [...] A 'certeza' de uma crença reside não tanto em sua natureza, mas na 'situação': que nos permite prever certas consequências possíveis (Popper, 1972, apud Balacheff, 2000, p.14, tradução nossa).

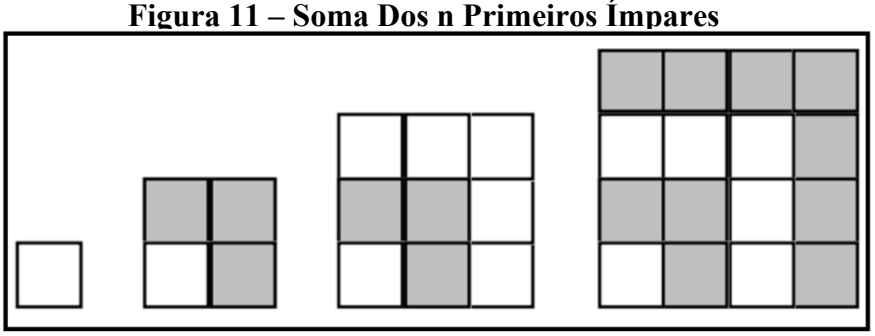
Esta perspectiva de Balacheff se alinha bastante as ideias de Polya (1995) e as de Allevato e Onuchic (2021), no que diz respeito a importância do estudante estar interessado em resolver um problema, destacando a relevância dos problemas propostos para motivar a curiosidade e o interesse dos estudantes (Balacheff, 2000). Este cuidado em relação aos problemas, nos parece muito semelhante ao cuidado orientado por Allevato e Onuchic (2021) a respeito dos problemas geradores nas etapas da MEAAMaRP.

Nesta perspectiva, Balacheff está reafirmando que o processo de demonstração deve partir e ser compreendido num contexto social e relativo ao indivíduo, o que nos significa compreender que, para que seja feita a demonstração e a validação de um processo matemático, o indivíduo precisa ver a necessidade e a importância da realização de tal processo.

Balacheff também percebe em sua pesquisa que o processo de demonstração desenvolvido pelos estudantes, encadeiam dois tipos de provas, que por sua vez são subdivididos em níveis. Esses dois tipos são descritos e definidos logo a seguir, sendo elas as *provas pragmáticas* e as *provas conceituais*.

- ***Provas pragmáticas:*** conforme Balacheff, as provas pragmáticas são aquelas que necessitam de uma ação, desenho, ou um caso particular, para que possam ser compreendidas. Durante o desenvolvimento de uma prova pragmática os estudantes não necessitam de um encadeamento dedutivo, ou uma linguagem técnica, mas apenas da língua natural para validar sua demonstração. Como exemplo ele cita a clássica visualização da demonstração da soma dos n primeiros ímpares resultando em n^2, como exemplifica a Figura 11 mostrada abaixo.

Figura 11 – Soma Dos n Primeiros Ímpares

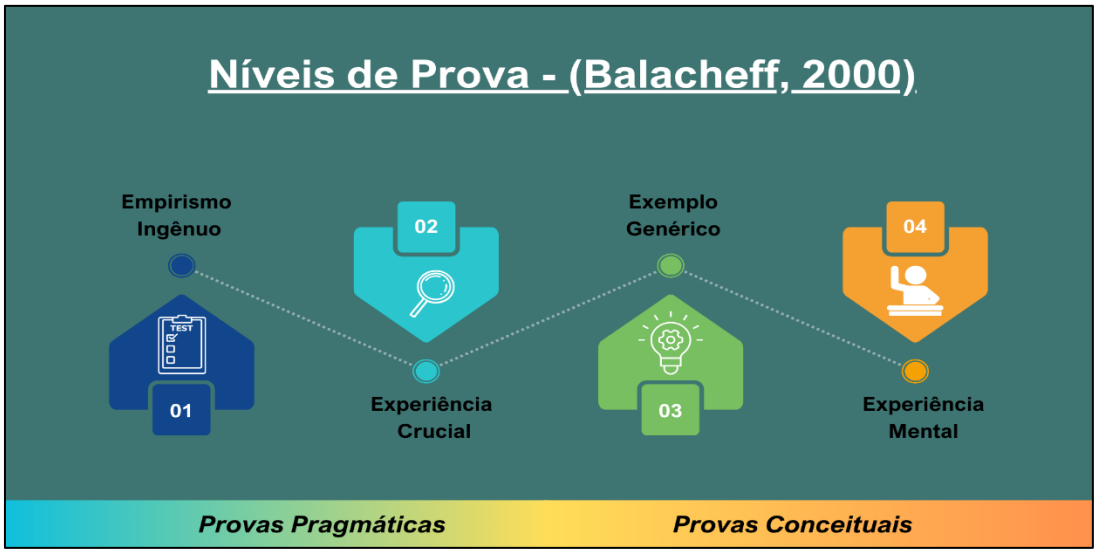


Fonte: Balacheff (2000, p.21)

- ***Provas conceituais:*** neste tipo de prova a ação, os desenhos e o empirismo começam a ser abandonados pelo estudante que passa utilizar argumentos e explicações matemáticas que se aproximam de demonstrações formais, ainda que não utilizem nenhuma estrutura lógica-dedutiva.

Em seu trabalho, ele subdivide esses dois tipos de prova em quatro níveis, entendendo que o estudante pode, a partir de *provas pragmáticas*, percorrer estes níveis até alcançar o estilo de *provas conceituais*. Os níveis são discutidos e apresentados a seguir juntamente com a Figura 12.

Figura 12 – Níveis de Prova (Balacheff, 2000)



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

(1) Empirismo ingênuo*:* este nível de prova indica que o estudante faz apenas alguns testes na expectativa da validação da propriedade matemática, sem qualquer pensamento crítico ou conjectura, apenas no intuito de verificação da proposição. Assim, a partir desses casos

particulares, o estudante assume a veracidade da proposição, sem efetivamente demonstrá-la, o que Balacheff considera uma validação fraca e rudimentar do processo de prova.

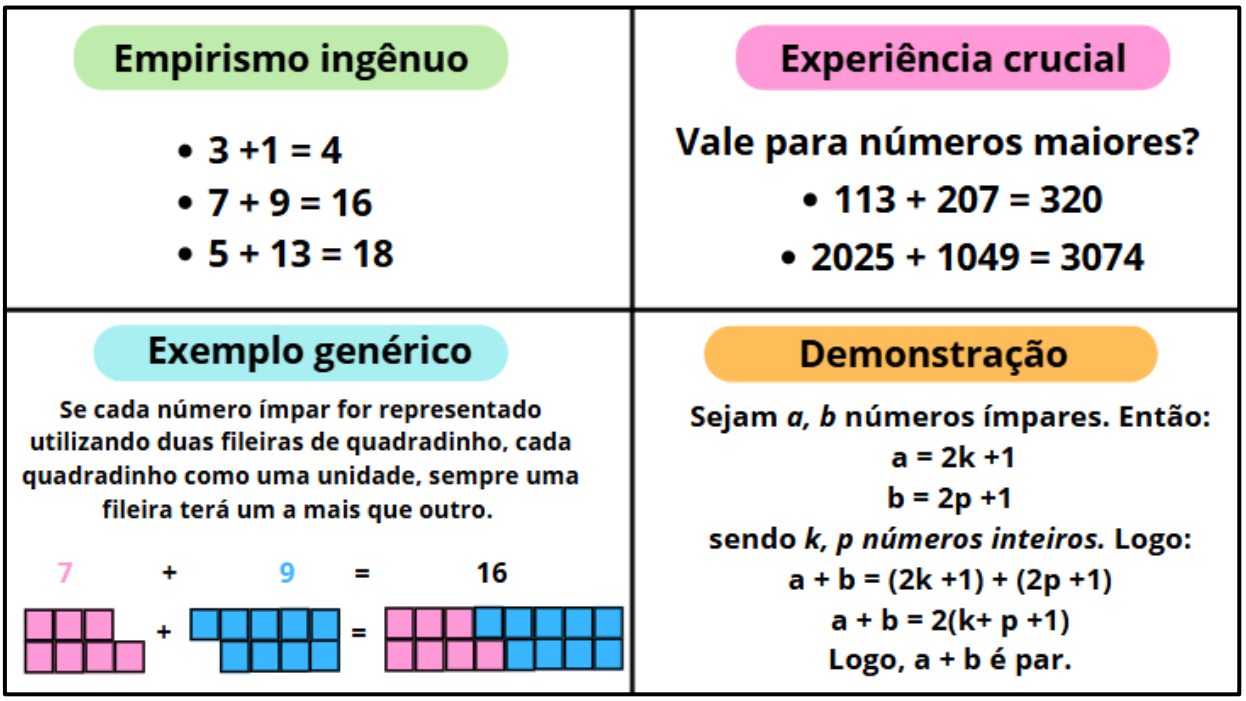
(2) ***Experiência crucial:*** neste nível de prova, o estudante também analisa empiricamente a proposição enunciada, escolhendo agora casos particulares ou não-comuns para verificar e assim concluir, ainda empiricamente, se a proposição investigada é válida.

(3) ***Exemplo genérico:*** considerado o nível de transição entre os tipos de provas pragmáticas e as provas conceituais, neste nível o estudante utiliza um exemplo que generaliza uma propriedade, operação, transformação, a partir da manipulação de desenhos, objetos, para compreender e justificar a sua prova.

(4) ***Experiência mental:*** este é um dos níveis que mais se aproxima do que seria entendido como a demonstração formal (prova matemática). Neste nível o estudante já não recorre mais a manipulação de objetos ou desenhos para compreender e justificar sua demonstração, mas utiliza argumentos e raciocínios para essa validação, ainda que não estruturados no sistema esperado para uma demonstração formal (axiomático-dedutivo).

Como forma de elucidar ainda mais esses níveis de prova descritos por Balacheff, apresentamos na Figura 13 exemplos de possíveis respostas de estudantes, e seus respectivos níveis de prova, baseados no referencial de Balacheff, ao buscar-se a demonstração que: **a soma de dois números ímpares sempre resulta em um número par**.

Figura 13 – Exemplo dos Níveis de Prova (Balacheff, 2000)



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

No nível de empirismo ingênuo, o estudante realiza o teste de poucos casos e com a verificação, ou não, destes casos baseia-se para discernir se a proposição é de fato verdadeira. Já na experiência crucial, o estudante indaga se aquela proposição é válida para alguns casos particulares, pouco comuns, no exemplo utilizando números maiores, e assim conclui novamente empiricamente sobre o status da proposição. No exemplo genérico o estudante está no processo que Balacheff considerou de a transição entre as provas pragmáticas e provas conceituais, ocorrendo aqui uma ideia, um exemplo de generalização, como a ideia no exemplo de representar os números por duas fileiras de quadradinhos. Assim, neste nível o estudante recorre a desenhos ou a objetos para construir seu convencimento. Já a experiência mental corresponde ao nível em que o estudante não precisa mais do objeto ou do desenho para explicar seu raciocínio, fazendo isso mentalmente, ainda que sem uma escrita formal esperada pela comunidade matemática para uma demonstração formal.

Neste trabalho, tais conceitos foram empregados para fundamentar a análise dos tipos de demonstrações e das soluções elaboradas pelos estudantes em sala de aula, em que a MEAAMaRP foi a estratégia que estruturou o processo demonstrativo realizado pelos estudantes.

A pesquisa do professor Mário Barbosa da Silva (2025) investigou o processo de demonstrações em sala de aula através da Resolução e Proposição de Problemas. Silva (2025) constata, em sua tese, que os estudantes desenvolveram habilidades de argumentação e validação de demonstrações, bem como autonomia e criticidade no desenvolvimento da matemática a partir

da utilização da MEAAMaRP como metodologia de ensino, no contexto da Geometria Analítica. Além disso, em sua pesquisa há uma explicitação dos pontos comuns entre a Resolução de Problemas e as demonstrações em Matemática, mostrados no quadro abaixo.

Quadro 2 – Relação entre a Resolução de Problemas e as Demonstrações em Matemática

Aspectos	Criatividade
	Protagonismo
	Elaboração: de estratégia de resolução; de argumentação
	Investigação
	Conexões de conceitos e conteúdos internos à Matemática com outras áreas do saber
	Compreensão de conceitos e conteúdos
	Pensamento crítico
	Explicação da resolução
	Elaboração de conjecturas
	Desenvolvimento de diferentes formas de pensamentos: matemático; metacognitivo e de ordem superior
	Desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo
	Dimensão social
	Autonomia
	Múltiplas representações

Fonte: Silva (2025)

Ademais, também compomos nosso referencial teórico a partir das ideias de Hanna (1995), De Villiers (2008), e Nasser e Tinoco (2003), que serão discutidas na seção a seguir. Cabe ressaltar que outros pesquisadores da Educação Matemática, como Duval (2009) no âmbito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, também investigam o ensino de provas e demonstrações, porém sob o prisma dos processos semióticos e representacionais.

4.2.2 Hanna e De Villiers

A pesquisadora Gila Hanna e o pesquisador Michael De Villiers advogam que a utilização de demonstrações no ensino de Matemática ganhou uma posição de destaque, principalmente com as orientações do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM). Nesta perspectiva, os pesquisadores concluem que essa utilização deve ser incentivada desde o início das etapas escolares visto que, para os pesquisadores, as demonstrações fornecem um vínculo de longo prazo entre a disciplina e a demonstração, além de aprofundarem a forma de pensar e compreender matemática, ao mesmo passo que são fundamentais e complexas devendo ser desenvolvidas de forma gradual na prática docente (Hanna; De Villiers, 2008).

Para Hanna (1995), existem dois tipos de demonstrações: as **demonstrações que provam** e as **demonstrações que explicam**. Uma demonstração que prova mostra que um teorema é

verdadeiro. Uma demonstração que explica também faz isso, mas as evidências que apresenta derivam do próprio fenômeno. Para evidenciar esta distinção a pesquisadora cita como exemplo as diferentes formas de mostrar que a soma dos "n" primeiros números inteiros positivos consecutivos. Como sabemos, é possível mostrar tal propriedade pelo Princípio da Indução Matemática[18]. Contudo, essa é considerada pela pesquisadora uma demonstração que apenas prova, pois tal demonstração tem pouco valor explicativo, não permitindo que o aluno desenvolva algum raciocínio que o faça compreender algo novo ou mesmo compreender o porquê esta demonstração é verdadeira. No entanto, um exemplo de demonstração que explica a veracidade deste teorema pode ser a que se baseia na simetria das duas representações da soma proposta, como mostrado na Figura 14 a seguir.

Figura 14 – Soma dos n Primeiros Inteiros Positivos Consecutivos

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + \dots + n \\
S &= n + (n-1) + \dots + 1 \\
2S &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \\
&= n(n+1) \\
S &= n(n+1)/2
\end{aligned}
$$

Fonte: Hanna (1995)

Nessa perspectiva, a pesquisadora defende que as demonstrações em sala de aula devem ter como principal função explicar uma propriedade ou teorema, e não simplesmente comprovar sua validade. Em seu trabalho, Hanna (1995) argumenta, junto a ideia de outros pesquisadores, que "a melhor demonstração é aquela que também ajuda os matemáticos a compreender o significado do teorema que está sendo demonstrado: perceber não apenas que ele é verdadeiro, mas também por que é verdadeiro" (Hanna, 1995, p.47, tradução nossa). Além disso, a pesquisadora entende que:

> Embora na prática matemática a função principal da demonstração seja a justificação e a verificação, sua **função principal na Educação Matemática é**, certamente, **a de explicação**. (Por essa mesma razão, a demonstração não deve ser realizada em sala de aula como um ritual, visando vagamente refletir a prática matemática, mas sim como **uma atividade de ensino significativa.**)
> Dizer que uma demonstração deve ser explicativa **não significa que ela não possa assumir diferentes formas**. Pode tratar-se de um cálculo, de uma demonstração visual, de uma discussão orientada que observe as regras adequadas de argumentação, de uma prova pré-formal, de uma prova informal ou até mesmo de uma prova que cumpra normas rigorosas de formalidade — tudo isso dependendo do nível de escolaridade e do contexto de ensino. O que é comum a todos os níveis e contextos, no entanto, é que **os alunos estão**

[18] Explicitamos esse método de demonstração na subseção 4.1.3.

> **aprendendo uma matemática que é nova para eles, mas que consiste em resultados já conhecidos** (Hanna, 1995, p.47, tradução e grifos nossos).

Encontramos assim, semelhanças da proposta defendida por Gila Hanna no que diz respeito ao ensino de demonstrações como uma prática que deve ser protagonizada pelos estudantes e as etapas da MEAAMaRP. Nessa abordagem, a partir de problemas geradores (como a própria necessidade de formular uma demonstração), os discentes mobilizam e constroem novas habilidades matemáticas ao longo do processo de resolução. Além disso, Hanna (1995) defende o importante papel do professor no processo de demonstrações com os estudantes, criticando as ideias de que o docente deveria ser omisso nesse processo. Tal apontamento, nos remete ao processo de mediação realizado pelo professor nas etapas de MEAAMaRP, instigando e auxiliando os estudantes durante toda a busca pela solução do problema. Novamente, percebemos como a MEAAMaRP se apresenta como uma metodologia interessante para o desenvolvimento de atividades que envolvam demonstrações no Ensino de Matemática.

O pesquisador Michael de Villiers (2001, p.32) defende que um dos papéis das demonstrações em sala de aula é o de eliminar as dúvidas durante o processo de ensino. Em seu trabalho, caracteriza também algumas funções das demonstrações em sala de aula, sendo elas:

- ***Verificação:*** nesta perspectiva a função da demonstração é de simplesmente mostrar a veracidade de uma conjetura.
- ***Explicação:*** esta função da demonstração se alinha com o que Hanna (1995) compreende também como um dos papéis da demonstração, no intuito de fornecer um motivo para o qual aquela propriedade a ser demonstrada é verdadeira.
- ***Sistematização:*** a demonstração assume um caráter mais genérico, sem a necessidade de testes empíricos ou intuitivos.
- ***Descoberta:*** entende-se que a demonstração funciona com um meio criativo de explorar processos, analisá-los e até mesmo descobri-los.
- ***Comunicação:*** nessa perspectiva o autor cita que a demonstração é um tipo de comunicação entre pessoas que estão fazendo Matemática.
- ***Desafio intelectual:*** essa perspectiva está ligada ao prazer e interesse do estudante em conseguir realizar a demonstração.

4.2.3 Lilian Nasser e Lucia Tinoco

As pesquisadoras da UFRJ, Lilian Nasser e Lúcia Tinoco integram o *Projeto Fundão* que desde 1984 desenvolve atividades a respeito da Educação Matemática e o Ensino de Ciências com os objetivos de: estimular e estender a interação entre a UFRJ e o sistema de Educação Básica, e

apoiar os professores das redes públicas e privadas de ensino no sentido do aprimoramento da sua prática pedagógica, e como consequência disto uma melhoria no ensino de Matemática e Ciências.

Em um dos trabalhos desenvolvidos, as pesquisadoras refletiram sobre as funções da prova em Matemática, constatando que a mais utilizada é a de ***validar*** um resultado ou uma proposição. No entanto, elas afirmam que esta função não é a que verdadeiramente motiva os estudantes a realizarem uma demonstração em Matemática.

> [...] Essa função é, sem dúvida alguma, fundamental na Matemática, mas nem sempre é motivadora para alunos da escola básica. Muitas vezes, o resultado é óbvio para eles, que não veem necessidade alguma de verificar sua veracidade[...] (Nasser; Tinoco, 2003, p.3)

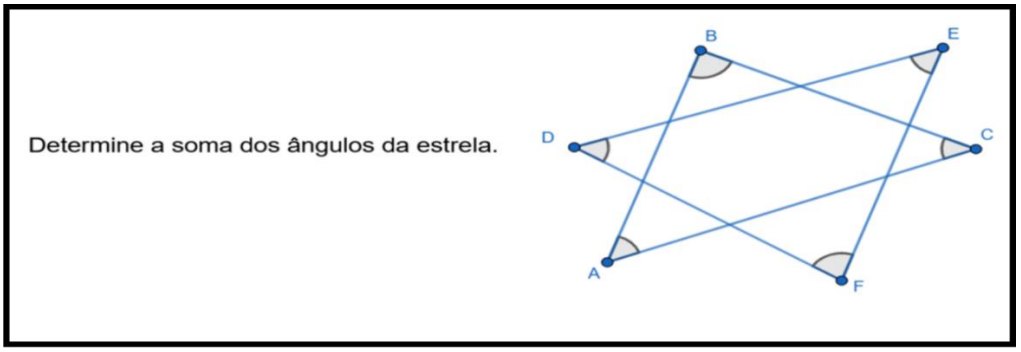
As pesquisadoras descrevem então outras funções das provas, baseadas nas ideias de Hanna e Jahnke(1996); Bell (1976) e De Villiers (1991). Como exemplo, elas citam:

> [...] em vez enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de **explicação** deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos. (De Villiers, 1991, p.261 apud Nasser; Tinoco, 2003, p.3, grifo das pesquisadoras)

Diante do exposto, as pesquisadoras realizaram uma pesquisa com calouros do curso de matemática da UFRJ a respeito do conhecimento de provas em Matemática (Nasser; Tinoco, 2003). Nessa pesquisa, elas identificaram alguns tipos de provas, semelhantes às provas pragmáticas defendidas por Balacheff (2000), na construção de raciocínio dos estudantes, sendo elas: raciocínio inconsistente, justificativa empírica, explicação gráfica, referência a uma autoridade, justificativa aceitável e prova formal. A seguir, discutiremos algumas delas.

- ***Justificativa empírica:*** o estudante conclui uma tese a partir de alguns casos particulares. Como exemplo, as pesquisadoras ilustram com o seguinte problema da Figura 15.

Figura 15 – Problema da soma dos ângulos internos da estrela



Fonte: Nasser; Tinoco (2003).

Justificativa empírica do estudante: Cada ângulo mede 60°, por isso:

$$A + B + C + D + E + F = 360°.$$

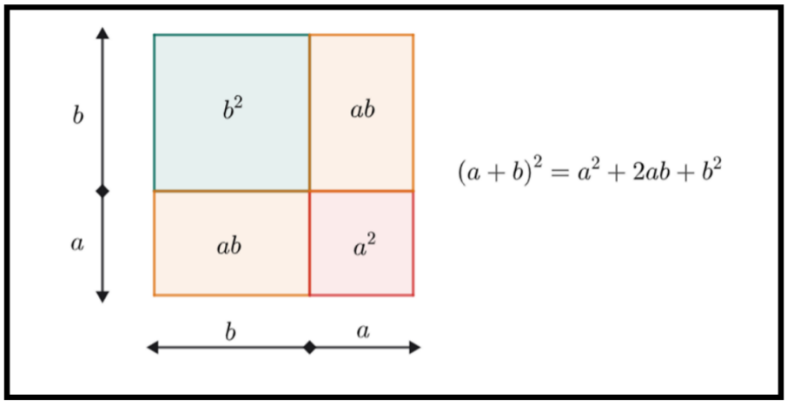
Note que o estudante partiu de um caso particular (acreditando que ambos os triângulos eram equiláteros), e concluiu que a soma dos ângulos da estrela corresponde a 360°. Este tipo de justificativa se assemelha bastante à que Balacheff (2000) defende como *empirismo ingênuo.*

- ***Recorrência a uma autoridade:*** nesta justificativa o aluno simplesmente valida uma proposição matemática porque ela está presente no livro ou porque o professor a escreveu, sem sentir a necessidade de que tenha sido feita uma justificativa que demonstre a sua validade.

- ***Exemplo crucial:*** diferente da justificativa pragmática, nesse tipo de justificativa o estudante poderia fazer uma generalização, mas consegue concluir corretamente a partir de exemplos particulares. Essa justificativa se alinha bastante ao conceito proposto por Balacheff no nível de prova de *Exemplo genérico.*

- ***Justificativa gráfica:*** o estudante utiliza uma figura como justificativa para resolver o problema. Como discutido na sessão anterior, este tipo de justificativa também corresponde a uma *Demonstração Visual (Demonstração sem Palavras).* As autoras citam como exemplo a demonstração do quadrado da soma, como mostrado na figura abaixo.

Figura 16 – Demonstração Quadrado da Soma de dois termos



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

4.2.4 O que a BNCC diz sobre as Demonstrações?

Para a BNCC, o ensino de Matemática está atrelado a um conjunto hipotético-dedutivo no qual as demonstrações se apoiam em um sistema de axiomas e postulados bem estruturados e interligados, ponderando também o importante papel da heurística e das experimentações em sala de aula (Brasil, 2018). Para os Anos Finais do Ensino Fundamental inclusive, orienta que o ensino de Geometria deve ser visto com objetivo de consolidação e ampliação das atividades e habilidades orientadas desenvolvidas para cada ano, bem como a utilização de conceitos como por exemplo os de triângulos congruentes ou semelhantes, transformações geométricas, entre outros, pelos estudantes a fim de que a compreensão de tais conceitos possam contribuir para a construção e fortalecimento de seus raciocínios hipotético-dedutivo, isto é, a realização de demonstrações construídas pelos próprios estudantes (Brasil, 2018).

Diante desse cenário, o professor que ensina Matemática precisa conscientizar a si mesmo e a seus estudantes tanto da necessidade das demonstrações nos processos de validação e explicação da Matemática, como também precisa enfatizar nesse processo que demonstrar não é uma tarefa fácil. Por isso, acreditamos que construir com os estudantes a ideia de que as demonstrações em Matemática não ocorram de forma imediata, espontânea, e sem muitas dificuldades ainda seja um dos processos mais difíceis deixados nas mãos das professoras e professores que ensinam matemática. Assumimos essa ideia, baseados na pesquisa de mestrado realizada por Rosale (2018), na qual seus referenciais teóricos exploram as ideias de Pietropaolo (2005, *apud.* Rosale, 2018) discutindo a forma que o professor trata o processo de demonstração, afirmando que se esta forma estiver associada a apenas um processo lógico dedutivo, sem tomar o cuidado de apresentar as dificuldades no processo, o professor corre o risco de estar sempre expondo a demonstração como um produto, e não como um processo, uma vez que:

> Produtos e processos matemáticos distinguem-se indubitavelmente, sendo esta diferenciação uma realidade defendida por diversos educadores e matemáticos de renome, como Polya e Lakatos. A Matemática é, certamente uma ciência dedutiva, mas suas demonstrações surgem da combinação de observações, do emprego de analogias e experimentações variadas, envolvendo um óbvio processo especulativo denominado por Polya de inferência plausível.
> Assim, é compreensível que a análise tão somente do produto matemático final iluda o observador, ocultando a natureza dos processos empregados para obtenção deste produto. Partindo de um conjunto de axiomas de definições complexas e com tantas condições que fica difícil imaginar que, em algum momento passado, foram concebidas de alguma forma - e inferências reputadas válidas, atingem-se verdades dogmáticas, inquestionáveis. (Pietropaolo, 2005, p.77 *apud* Rosale, 2018, p.30)

Desta forma, Rosale (2018) nos lembra em sua pesquisa, o quão importante é para o processo de ensino-aprendizagem que as demonstrações em sala de aula não sejam meramente exposições feitas na lousa pelo professor, mas que elas surjam a partir de processos e formas que

envolvam, motivem e façam o aluno: experimentar ideias, criar hipóteses, conjecturar, para que assim sejam desenvolvidos os conhecimentos matemáticos e a criatividade destes estudantes. Mas como realizar esse processo em sala de aula? As pesquisadoras Lilian Nasser e Lucia Tinoco, envolvidas no Projeto Fundão - UFRJ, citam em sua obra *Argumentação e Provas:* no ensino de Matemática (2003) uma lista baseada no trabalho de Galbraith (1981) dos motivos para se desenvolver atividades de argumentações em sala de aula, sendo eles:

> a) entender e ser capaz de checar a veracidade de casos particulares;
> b) detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação;
> c) utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado a ser alcançado;
> d) reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
> e) interpretar corretamente condições e afirmativas;
> f) apreciar e perceber distinção entre implicação e equivalência;
> g) reconhecer a arbitrariedade e propriedades de uma definição;
> h) ser capaz de analisar uma prova como meio de expor detalhes de um argumento (Nasser; Tinoco, 2003, p.7).

Assim, as autoras reforçam em sua obra a importância do ensino de argumentos e demonstrações nas aulas de Matemática ocorrendo de maneira que respeite os processos e dificuldades inerentes ao exercício de demonstrar, permitindo assim que o estudante explore e reflita criticamente sobre aquilo que está sendo demonstrado e construído. Dito isto, devemos fazer uma observação importante de como tal prática se assemelha a metodologia de Resolução de Problemas descrita no capítulo 3 dessa pesquisa, a MEAAMaRP, pois entre seus principais objetivos estão uma participação mais efetiva e crítica dos estudantes na busca e construção do seu conhecimento a partir da procura pela solução dos problemas, bem como a discussão coletiva e a ponderação das hipóteses e teorias feitas em grupo (Allevato; Onuchic, 2021). Assim, mais uma vez ressaltamos a importância do ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, o que nos conduziu para a elaboração das atividades utilizadas em nossa pesquisa descritas e discutidas nos capítulos 6 e 7 dessa dissertação.

Nessas perspectivas, salientamos que no capítulo 5 a seguir, no qual abordamos uma revisão da fundamentação teórica matemática utilizada na elaboração das atividades de Geometria Plana, estaremos utilizando o termo **demonstração** para nos referirmos a tipos de demonstrações formais em Matemática já explicitados nas seções anteriores. A partir dos capítulos 6, 7 e 8, cujo contexto é a pesquisa no ensino de Matemática, a análise dos dados e nossas considerações, utilizaremos os termos **demonstrar** e **demonstrações** nas perspectivas de Balacheff (2000), Gila Hanna (1995), De Villiers (2001) e Nasser e Tinoco (2003) a respeito das principais funções das provas e demonstrações para o ensino de Matemática, isto é, a explicação e a compreensão.

5 UM RECORTE DA GEOMETRIA PLANA: FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Na presente seção vamos fundamentar os tópicos que foram escolhidos para serem desenvolvidos nas atividades de nossa pesquisa, sendo eles:

- Compreensão da circunferência como Lugar Geométrico;
- Compreender e determinar aproximações para o número π;
- Demonstração da relação para o cálculo do comprimento da circunferência;
- Demonstração da relação para o cálculo da medida de áreas de polígonos regulares;
- Demonstração da relação para o cálculo da medida da área de um círculo.

Para que a leitura deste capítulo se torne mais fluida e direta, salientamos aqui que a fundamentação dos conceitos utilizados nas seções a seguir teve como referenciais teóricos os trabalhos de Muniz Neto (2013); Muniz Neto (2015); Iezzi, Dolce e Machado (2022).

5.1 Lugar Geométrico

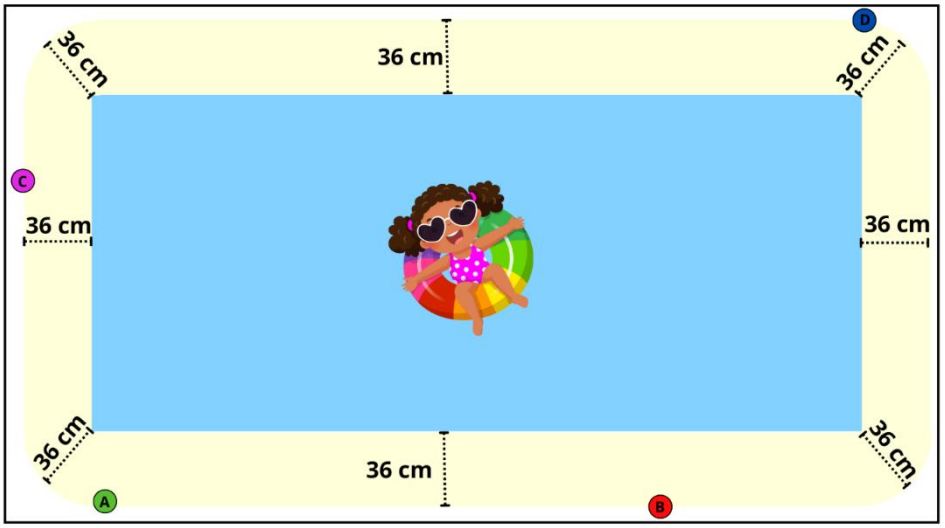
Definição: Dada uma propriedade *P* relativa a pontos do plano, o lugar geométrico (LG) dos pontos que possuem a propriedade *P* é o subconjunto *A* do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

a) Todo ponto de *A* possui a propriedade *P;*

b) Todo ponto que possui a propriedade *P* pertence ao subconjunto *A*.

Exemplo: Observe a imagem abaixo.

Figura 17 – Lugar Geométrico



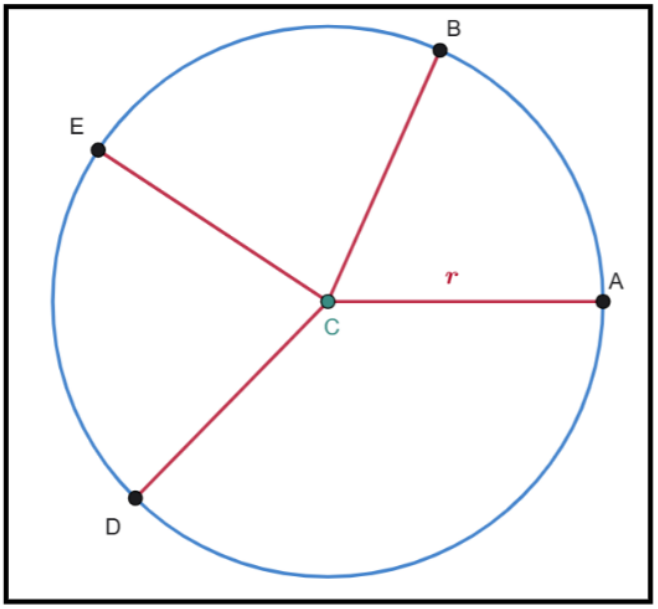
Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Note que os pontos *A, B, C e D* que estão sobre a borda da calçada da piscina estão a 36 cm de distância da piscina. Sendo assim, o lugar geométrico dos pontos que estão a 36 cm da piscina é composto por esses quatro pontos (A, B, C e D) e, além deles, por todos, e somente por esses outros pontos que também estão sobre a borda da calçada.

5.2 Circunferência: definição, elementos e propriedades

Definição *(Circunferência):* A circunferência é o lugar geométrico dos pontos no plano que estão a uma mesma distância fixa de medida r (**raio**), com $r > 0$, de um ponto fixo dado C (**centro**) no mesmo plano.

Figura 18 – Circunferência com raio de medida r e Centro C



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Na imagem acima temos uma circunferência de centro C, raio de medida r e quatro pontos pertencentes a esta circunferência representados pelas letras: *A, B, D e E.* Diante disso, temos que:

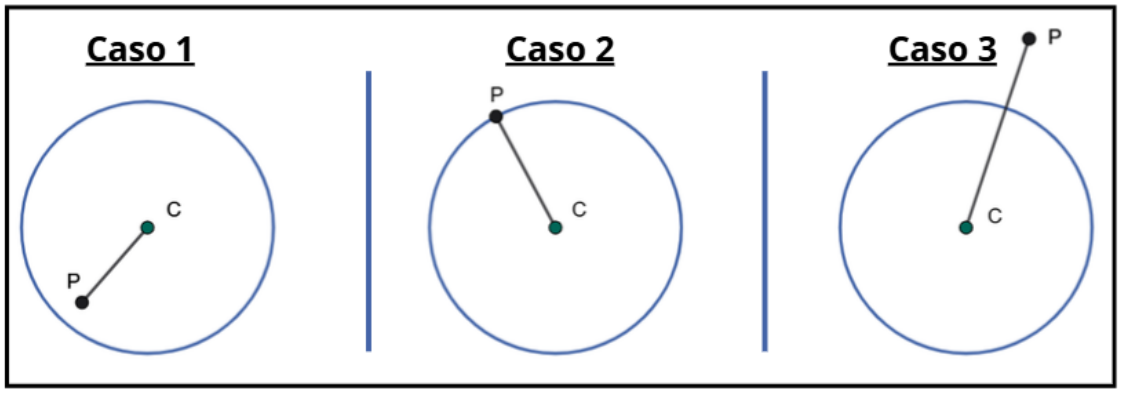
$$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{DC} = \overline{EC} = r$$

Ressaltamos que estamos utilizando a letra C para indicar o ponto que representa o centro da circunferência, contudo qualquer outra letra pode ser utilizada para isso. Além disso, deve-se destacar que o centro não é um ponto que pertence a circunferência, já que a distância até si mesmo é zero, por isso menor que r.

5.2.1 Posições relativas entre um ponto P e uma circunferência no mesmo plano

Definição: Seja P um ponto e uma circunferência de centro C e raio de medida r, em um mesmo plano. Temos três possibilidades ilustradas pela figura a seguir:

Figura 19 – Posições Relativas entre um Ponto e a Circunferência



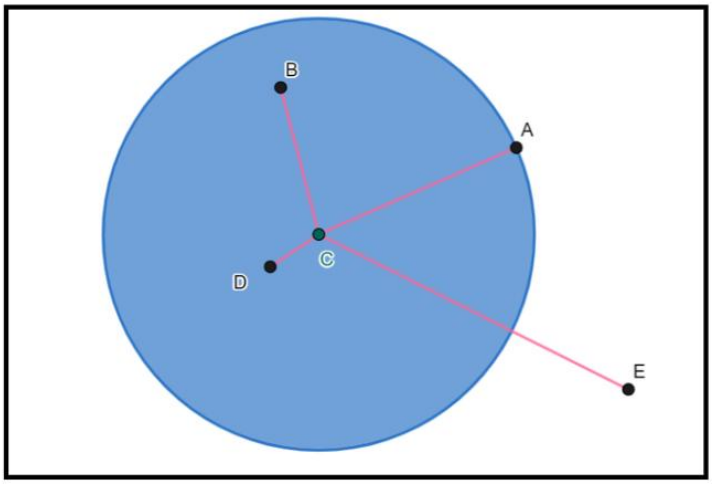
Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Caso 1: *Se* $\overline{CP} < r$, *então P é um ponto* **interno** a circunferência.
Caso 2: *Se* $\overline{CP} = r$, *então P é um ponto* **que pertence** a circunferência.
Caso 3: *Se* $\overline{CP} > r$, *então P é um ponto* **externo** a circunferência.

Destacamos aqui, que se o ponto P se enquadra nos casos 1 ou 2, então ele não pertence à circunferência.

Definição: *(Círculo)* O círculo é o lugar geométrico dos pontos no plano que estão a uma distância menor ou igual a r (raio), com r > 0, de um ponto fixo C (centro) no mesmo plano.

Figura 20 – Círculo de Centro C e Raio *r*



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Na figura abaixo temos que os pontos A, B e D pertencem ao círculo, pois $\overline{AC} = r$, $\overline{BC} < r$ e $\overline{DC} < r$. Já o ponto E não pertence ao círculo, pois $\overline{EC} > r$. Note que, diferente da circunferência, o centro C pertence ao círculo.

5.2.2 Elementos da Circunferência

Corda

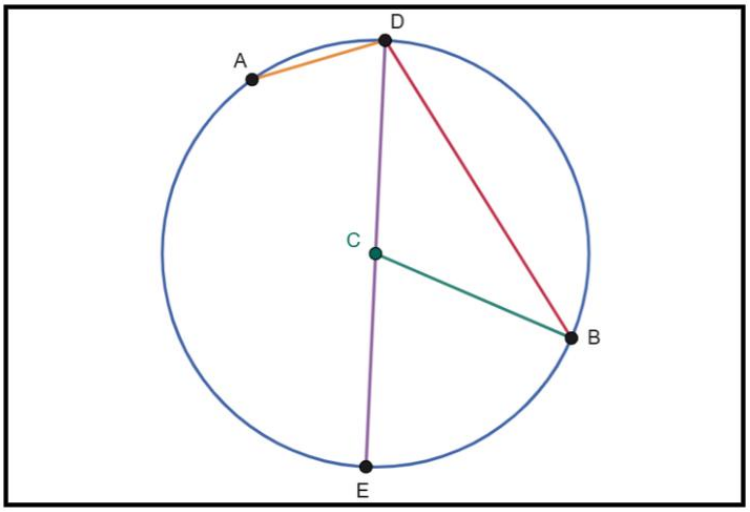
Definição: Dados dois pontos distintos em uma circunferência, o segmento de reta que os une é definido como corda.

Diâmetro

Definição: A corda que passa pelo centro da circunferência é definida como diâmetro.

Na imagem abaixo exemplificamos as definições dadas.

Figura 21 – Elementos da Circunferência



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Note que AD, BD e DE são cordas. Vale ressaltar que DE também é um diâmetro, pois é uma corda que passa pelo centro C. Além disso, aproveitamos para recordar que CB, CD e CE não são cordas.

5.2.2 Propriedades da Circunferência

Propriedade 1: *(Medida do diâmetro)* A medida de qualquer diâmetro de uma circunferência corresponde ao dobro da medida do raio da circunferência.

Demonstração: Considere uma circunferência qualquer de centro C e raio de medida r. Considere um diâmetro AB na circunferência. Como C pertence ao segmento *AB*, então temos que

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

Além disso, como *AB* é uma corda, então os pontos A e B pertencem à circunferência, e por isso $\overline{AC} = \overline{CB} = r$. Assim:

$$\overline{AB} = r + r$$

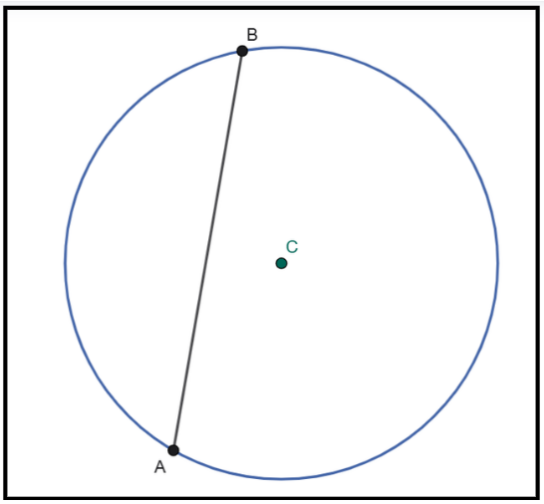
$$\overline{AB} = 2r$$

como queríamos mostrar.

Propriedade 2 *(Diâmetro como maior corda):* O diâmetro de uma circunferência é a maior corda.

Demonstração: Para mostrar essa propriedade utilizaremos a *condição de existência de triângulos*[19]. Considere uma circunferência de centro C e raio de medida r. Tome dois pontos quaisquer, A e B que formem uma corda que não é o diâmetro, como por exemplo a configuração mostrada na figura abaixo.

Figura 22 – Demonstração que o Diâmetro é a maior corda



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

[19] Condição de existência de triângulos: seja um triângulo qualquer ABC. Então temos que:

$$\begin{cases} \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{CA} > |\overline{AB} - \overline{BC}| \\ \overline{AB} + \overline{CA} > \overline{BC} > |\overline{AB} - \overline{CA}| \\ \overline{BC} + \overline{CA} > \overline{AB} > |\overline{BC} - \overline{CA}| \end{cases}$$

Desta forma, os pontos A, B e C não estão sobre a mesma reta, por isso não estão alinhados, então é possível que se construa um triângulo. Sendo assim, pela condição de existência de um triângulo, garantimos que:

$$\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$$
$$r + r > \overline{AB}$$
$$2r > \overline{AB}$$

Pela *Propriedade 1* mostrada acima, todo diâmetro tem medida igual a 2r, então temos que:

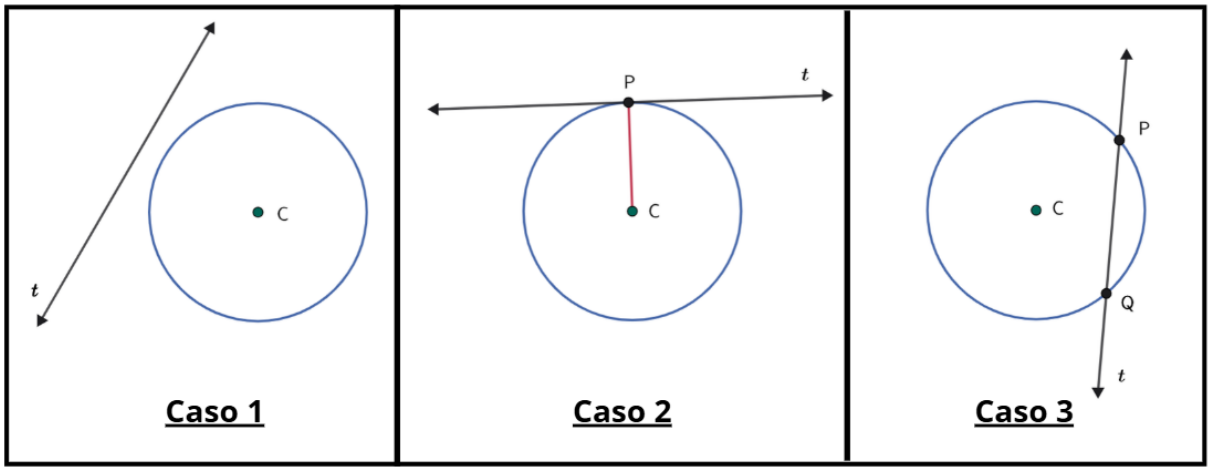
$$Diâmetro > \overline{AB}$$

isto é, qualquer diâmetro será maior que qualquer outra corda que não seja o diâmetro, como queríamos mostrar.

5.2.3 Posições relativas entre uma reta e uma Circunferência

Dada uma reta *t* qualquer e uma circunferência de centro C e raio de medida r, em um mesmo plano, há três posições relativas possíveis como mostrado na figura abaixo.

Figura 23 – Posições relativas da reta *t* à Circunferência



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Caso 1: Se não há interseção entre a reta *t* e a circunferência, então definimos que a reta *t* é **externa** à circunferência.

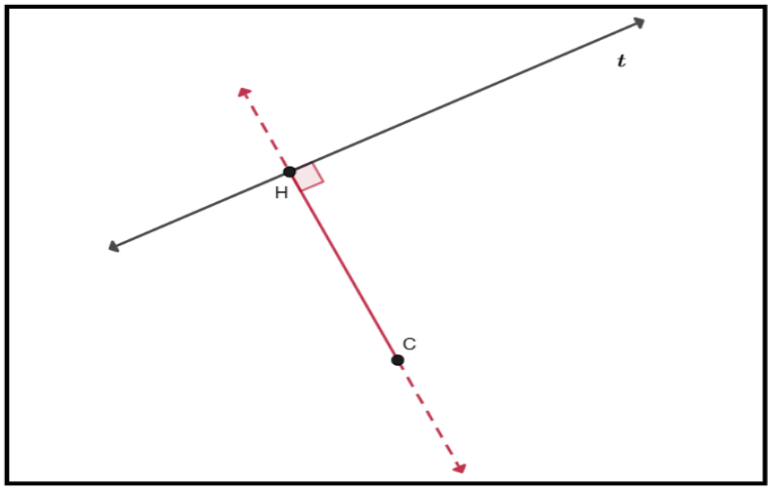
Caso 2: Se a reta *t* intercepta a circunferência em um único ponto (Ponto P), então definimos que a reta *t* é **tangente**[20] à circunferência. O ponto P nesse caso é chamado de ponto de tangência

Caso 3: Se a reta *t* intercepta a circunferência em dois pontos (Ponto P e Ponto Q), então definimos que a reta t é **secante** à circunferência.

Note que é possível classificar a posição da reta *t* em relação à circunferência se conhecemos a distância dessa reta até o centro C da circunferência de raio de medida *r*.

Demonstração: Considere a reta *t* uma reta qualquer e a circunferência de centro C e raio de medida *r*. Para investigar a distância do ponto C até a reta *t*, trace a reta perpendicular a *t* que passa pelo ponto C. Chame o ponto de interseção da reta *t* com a reta perpendicular de H, como indicado na figura abaixo.

Figura 24 – Distância da reta t ao Ponto C (Centro da Circunferência)



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Assim, note que a medida de HC corresponde a distância do centro C até a reta, pelo teorema de Pitágoras, qualquer outro ponto sobre a reta *t,* que não seja o ponto H terá uma distância até o ponto C maior que esta medida[21].

[20] É preciso fazer uma ressalva importante: uma reta é tangente a uma curva em ponto, se naquele ponto de interseção entre a curva e a reta (ponto de tangencia), esta reta possuir mesma direção e sentido que a curva naquele ponto. Em particular, para a circunferência, isso implica que a reta tangente terá um único ponto de interseção com ela.

[21] Considere um ponto P diferente de H sobre a reta *t*. O triângulo CHP é retângulo em H, e por isso temos:

$$\overline{CH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{CP}^2 \quad (1)$$

Como $\overline{HP} > 0, então$:

$$\overline{CP}^2 > \overline{CH}^2 \Rightarrow \overline{CP} > \overline{CH}, já\ que\ \overline{CP}, \overline{CH} > 0.$$

Pelas definições feitas anteriormente, temos que:

- Se $\overline{HC} > r$, então H é um ponto externo à circunferência. Além disso, pelo teorema de Pitágoras, qualquer outro ponto que pertence a reta *t* terá distância até o centro C maior que r. Por isso, todos os pontos da reta *t* são pontos externos à circunferência, e assim a reta *t* é **externa** à circunferência.

- Se $\overline{HC} = r$, então o ponto H pertence a circunferência. Além disso, pelo teorema de Pitágoras, qualquer outro ponto que pertence a reta *t* terá distância até o centro C maior que r. Por isso, todos os outros pontos da reta *t*, exceto o ponto H, não pertencem a circunferência, sendo o H o ponto de tangencia da reta *t* à circunferência. Portanto, a reta *t* é **tangente** à circunferência.

- Se $\overline{HC} < r$, então o ponto H é um ponto interno à circunferência. Logo, pela propriedade de lugar geométrico da mediatriz existem dois pontos da reta *t* cuja distância do centro C até esses pontos é igual, e nesse caso igual a r, sendo esses dois pontos os pontos da reta secante à circunferência. A partir desses pontos, pelo teorema de Pitágoras, qualquer ponto na reta terá distância até o ponto C maior que r, e por isso será externo a circunferência. Portanto, a reta *t* é **secante** à circunferência

5.2.4 Polígonos Regulares

Definição *(Polígono regular):* Um polígono é definido como regular quando todos os seus lados têm a mesma medida e todos os seus ângulos também possuem mesma medida.

Definição *(Centro de polígono regular):* O centro de um polígono regular é o ponto C, ponto de encontro das mediatrizes dos lados do polígono regular.

Definição *(Apótema de um polígono regular):* O apótema de um polígono regular corresponde a distância do centro C do polígono regular até um dos lados do polígono.

Definição *(Inscrição):* Um polígono é considerado inscrito quando todos os seus vértices são pontos que pertencem a uma circunferência.

Definição *(Circunscrição):* Um polígono é considerado circunscrito quando uma circunferência tangencia todos os seus lados.

Propriedade 3 *(Inscrição e Circunscrição):* Todo polígono regular pode inscrever e circunscrever uma circunferência.

<u>Demonstração</u>: Para provarmos essa propriedade vamos dividir em duas etapas.

Etapa 1: Todo polígono regular é inscritível.

Seja um polígono regular qualquer, $A_1A_2A_3\ldots A_n$, de n lados e centro C. Como o ponto C é o ponto de encontro das mediatrizes, pela propriedade de lugar geométrico das mediatrizes[22] temos que

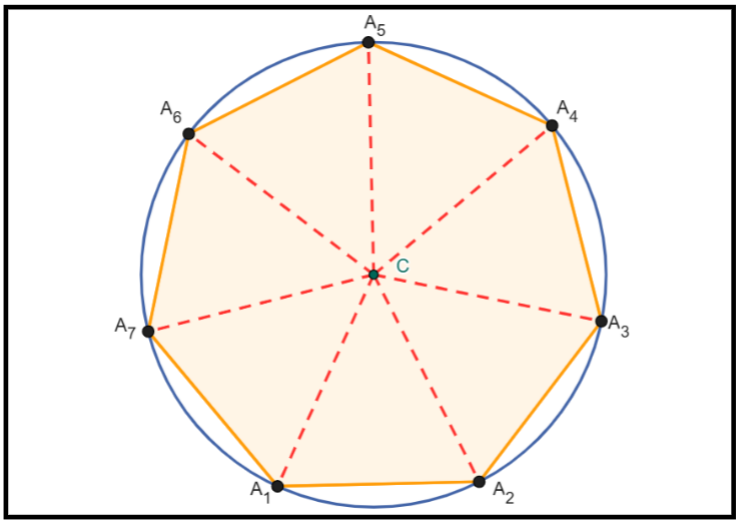
$$\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = \overline{A_3C} = \cdots = \overline{A_nC} = r$$

Desta forma, sempre é possível construir a circunferência que terá como centro o ponto C (centro do polígono regular) e os vértices como pontos dessa circunferência. Logo, provamos que todo polígono regular é inscritível.

A título de visualização deixamos ilustrado na figura a seguir o caso particular de quando n = 7.

[22] A mediatriz de um segmento é também o Lugar Geométrico dos pontos que estão a mesma distância dos extremos desse segmento.

Figura 25 – Polígono regular inscrito na Circunferência



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Etapa 2: Todo polígono regular é circunscritível.

Seja um polígono regular qualquer, $A_1A_2A_3\ldots A_n$, de n lados e centro C. Note que como C é o ponto de encontro das mediatrizes:

$$\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = \overline{A_3C} = \cdots = \overline{A_nC}$$

Além disso, a medida do ângulo de central será a mesma, isto é:

$$m(A_1\hat{C}\,A_2) = m(A_2\hat{C}\,A_3) = \cdots = m(A_n\hat{C}\,A_1)$$

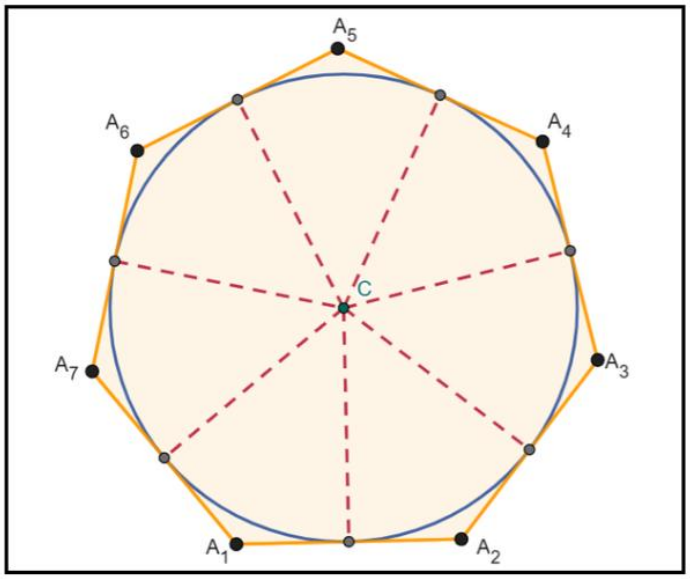
Por isso, os triângulos $A_1A_2C, A_2A_3C, \cdots, A_nA_1C$ são congruentes, pelo caso de congruência L.A.L[23]. Assim, ao traçarmos uma das alturas (apótema do polígono) estamos encontrando justamente a medida do raio, pois como os triângulos são congruentes, temos alturas congruentes, sendo justamente este o ponto de tangência entre cada lado do polígono e à circunferência.

Além disso, uma vez que o apótema é a distância do ponto até o lado do polígono garantimos que a circunferência inscrita nesse polígono tangencia cada um dos lados nos seus respectivos pontos médios. Portanto, fica mostrado que todo polígono regular pode circunscrever uma circunferência que tem como centro o centro do polígono regular e raio a medida do apótema

[23] O caso de congruência Lado – Ângulo – Lado (L.A.L) garante que em dois ou mais triângulos, se há uma correspondência de dois de seus lados e o ângulo formado por esses lados também corresponde, então esses triângulos são congruentes.

do polígono. A título de visualização deixamos ilustrado na figura a seguir o caso particular de quando n = 7.

Figura 26 – Polígono regular circunscrito à Circunferência



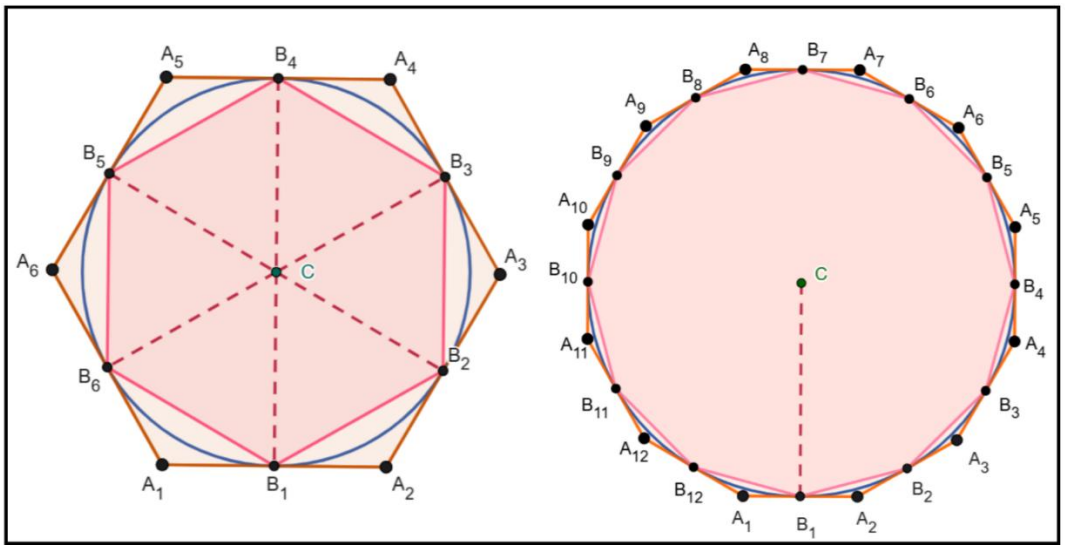
Fonte: elaborado pelos autores (2026).

5.3 O número π e o Método da Exaustão

Boyer (2010) afirma em sua obra que o número π é uma das constantes mais antigas das civilizações, cuja definição já era especulada há muito tempo, sendo compreendido pela razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do seu diâmetro. Boyer (2010) afirma que, de maneira indireta, os chineses, cerca de 250 a.C, já tinham ideia de que o número correspondia a aproximadamente 3.

Arquimedes foi um dos matemáticos a utilizar esse processo, encontrando assim aproximações para o número π. A partir da utilização de polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência, como indica a figura abaixo, e dobrando o número de lados a cada figura: hexágonos, dodecágonos, polígonos de vinte e quatro lados, e em seguida polígonos de noventa e seis lados, ele obteve boas aproximações para essa constante.

Figura 27 – Método da Exaustão



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

A Figura 27 acima ilustra casos particulares que Arquimedes idealizou para tentar determinar aproximações para o número π, considerando um círculo cujo diâmetro media 1 u.c (unidade de comprimento). Assim, notando a medida do lado polígono regular que circunscreve o círculo por *L,* a medida do lado do polígono regular inscrito de *l*, a medida do ângulo central por α, e usando trigonometria, podemos concluir que:

$$\frac{L/_2}{r} = \text{tag}(\alpha/2)$$

$$\frac{L/_2}{1/_2} = \text{tag}(\alpha/2)$$

$$L = \text{tag}(\alpha/2)$$

Também concluímos que:

$$\frac{l/_2}{r} = sen(\alpha/2)$$

$$\frac{l/_2}{1/_2} = sen(\alpha/2)$$

$$l = sen(\alpha/2)$$

Assim, conseguimos estabelecer uma possível aproximação para o número π, uma vez que:

$$Perímetro\ Hexágono\ inscrito\ \leq\ Comp.\ Circunf. \leq Perímetro\ Hexágono\ circunscrito$$

$$n\ \cdot\ sen(\alpha/2)\ \leq\ 1 \cdot \pi\ \leq\ n \cdot\ tag\ (\alpha/2)$$

$$n\ \cdot\ sen(\alpha/2)\ \leq\ \pi\ \leq\ n \cdot\ tag\ (\alpha/2)$$

Utilizando polígonos de noventa e seis lados, Arquimedes conseguiu uma ótima aproximação para duas casas decimais, sendo:

$$3{,}141024 \leq\ \pi \leq\ 3{,}142858$$

A partir disso, o método da exaustão estabelece aproximações para o número π, sendo este número irracional[24] e compreendido como a razão entre o comprimento *C* da circunferência e a medida de seu diâmetro *D.* Logo, é possível compreender então que:

$$C\ =\ \pi \cdot\ D, \qquad ou \quad C\ =\ 2\pi r$$

5.4 Área de um polígono regular

Seja um polígono regular de n lados, com lado de medida *L e* apótema de medida *a.* A área desse polígono pode ser calculada como:

$$\boxed{Área\ =\ p\ \cdot\ a}$$

em que *p* é o semiperímetro do polígono.

<u>Demonstração</u>: Seja um polígono regular qualquer, $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, com n lados, e centro C. Podemos dividir esse polígono em n triângulos centrais congruentes, sendo eles: $A_1A_2C,\ A_2A_3C, \cdots, A_nA_1C$. Assim, para calcularmos a área do polígono regular podemos fazer:

$$Área_{polígono}\ =\ n\ \cdot\ Área_{triângulo\ central}\quad (i)$$

[24] Destacamos que o Método da Exaustão não garante formalmente que o número π é irracional, uma vez que nesse processo são encontradas aproximações para o valor desse número. A formalização da irracionalidade do número π deve-se ao matemático Johann H. Lambert (1728 -1777) (Souza, 2026).

E note que:

$$\text{Área}_{\text{triângulo central}} = \frac{a \cdot L}{2} \qquad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i), temos:

$$\text{Área}_{\text{polígono}} = n \cdot \frac{a \cdot L}{2}$$

$$\text{Área}_{\text{polígono}} = \frac{n \cdot L}{2} \cdot a$$

$$\boxed{\text{Área}_{\text{polígono}} = p \cdot a}$$

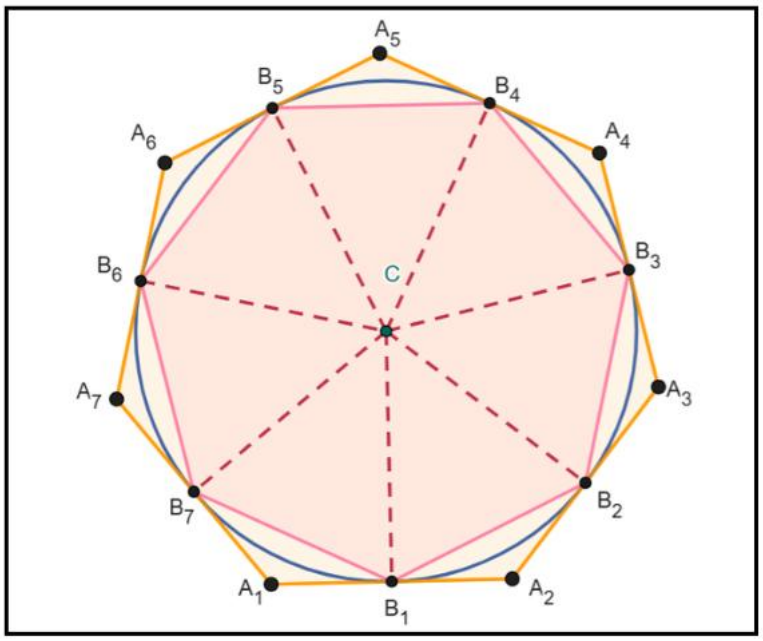
como queríamos mostrar.

5.5 Área do círculo

Enunciado: Dado um círculo de raio de medida r, então a medida de sua área é πr^2.

Demonstração: Vamos utilizar o método de exaustão novamente para compreender o que está acontecendo. Sem perda de generalidade, considere a imagem abaixo apenas para uma melhor visualização de como estamos pensando. Considere p_1 a medida do semiperímetro do polígono inscrito, a_1 a medida do apótema do polígono inscrito, p_2 a medida do semiperímetro do polígono circunscrito e a_2 a medida do apótema do polígono circunscrito.

Figura 28 – Área do Círculo pelo Método da Exaustão



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

$$A_{polígono\ inscrito} \leq A_{círculo} \leq A_{polígono\ circunscrito}$$

Utilizando a relação estabelecida para área de polígonos regulares temos:

$$\boxed{p_1 \cdot a_1 \leq A_{círculo} \leq p_2 \cdot a_2}$$

Por trigonometria, conseguimos concluir que:

$$a_1 = r\ cos\ (\alpha/2)$$
$$l_1 = 2r\ sen\ (\alpha/2)$$
$$a_2 = r$$
$$l_2 = 2r\ tag(\alpha/2)$$

sendo:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

a medida do ângulo central. Assim, substituindo α, l_1 , l_2 , a_1 e a_2 na inequação inicial, teremos:

$$r^2 \cdot n \cdot sen(\alpha/2)cos(\alpha/2) \leq A_{círculo} \leq r^2 \cdot n \cdot tag(\alpha/2)$$
$$r^2 \cdot n \cdot \frac{sen(\alpha)}{2} \leq A_{círculo} \leq r^2 \cdot n \cdot tag(\alpha/2)$$

$$\boxed{r^2 \cdot n \cdot \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{2} \leq A_{círculo} \leq r^2 \cdot n \cdot tag\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Utilizando limites para calcular o lado esquerdo da desigualdade acima, percebemos que, ao fazermos $n \to \infty$, temos que:

$\lim_{n\to\infty} r^2 \cdot n \cdot \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{\frac{1}{2 \cdot r^2 \cdot n}}$, por *L'Hopital*[25] *temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{1}{2 \cdot r^2 \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{(-1)}{n^2}}{\frac{1}{2 \cdot r^2} \cdot \frac{(-1)}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot \pi \cdot r^2 = 1 \cdot \pi \cdot r^2 =$$

$$= \boxed{\pi r^2}$$

De forma análoga, ao calcularmos o lado direito da desigualdade, percebemos que:

$\lim_{n\to\infty} r^2 \cdot n \cdot tag(\frac{\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{tag(\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{r^2 \cdot n}}$, *aplicando L'Hopital novamente temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{tag\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{r^2 \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \pi \cdot \frac{(-1)}{n^2}}{\frac{1}{r^2} \cdot \frac{(-1)}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \pi \cdot r^2 = 1 \cdot \pi \cdot r^2 =$$

$$= \boxed{\pi r^2}$$

Portanto, concluímos que

---

[25] *Regra de L'Hôpital:* Sejam f e g duas funções deriváveis tais que $g'(x) \neq 0$, para x próximo de a, exceto possivelmente em a. Dessa forma, se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0, \quad ou$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

Em outras palavras, se as hipóteses são satisfeitas e há a indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{se o limite da direita existir (ou for } \pm\infty).$$

O mesmo resultado acontece se, respeitada as condições iniciais, tivermos: $x \to a^+, x \to a^-, x \to +\infty, x \to -\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} r^2 \cdot n \cdot \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{2} \leq A_{círculo} \leq \lim_{n\to+\infty} r^2 \cdot n \cdot tag(\frac{\pi}{n})$$

$$\pi r^2 \leq A_{círculo} \leq \pi r^2$$

$$\boxed{A_{círculo} = \pi r^2}$$

como queríamos mostrar.

Uma vez fundamentados nossos referenciais teóricos de pesquisa, damos início a próxima seção intitulada “Preparando para ir à campo”. Nela, discorremos sobre a metodologia adotada nessa pesquisa, bem como o seu *lócus* e o contexto em que esta foi aplicada.

6 METODOLOGIA DA PESQUISA

6.1 Preparando para ir a campo

Iniciamos esta seção utilizando uma citação do livro *A arte de pesquisar*, da professora, antropóloga e pesquisadora brasileira, Mirian Goldenberg, que nos adverte:

> A pesquisa científica exige criatividade, disciplina, organização e modéstia, baseando-se no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância. Nenhuma pesquisa é totalmente controlável, com início, meio e fim previsíveis. A pesquisa é um processo em que é impossível prever todas as etapas. O pesquisador está sempre em estado de tensão porque sabe que seu conhecimento é parcial e limitado – o "possível" para ele (Goldenberg, 2004, p. 13).

Ela ainda adverte que "[...] o pesquisador deve estar preparado para lidar com uma grande variedade de problemas teóricos e com descobertas inesperadas, e, também para reorientar seu estudo" (Goldemberg,2004, p.35).

Assim, nos propusemos a investigar ***Como o processo de Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências articulados com provas e demonstrações feitas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?*** sendo essa a questão geral da pesquisa. Dessa forma, acreditamos que a pesquisa de natureza qualitativa correspondia a abordagem necessária, uma vez que, na visão de Goldenberg (2004), permite ao pesquisador analisar não somente os dados, mas também o ambiente, a instituição, o grupo social pesquisado de maneira profunda, enfatizando as particularidades de um fenômeno e os seus significados. A seguir, descrevemos um pouco sobre os tópicos da pesquisa qualitativa, o contexto e o desenvolvimento da pesquisa.

6.2 Tópicos da pesquisa qualitativa

A pesquisa desenvolvida neste trabalho teve como ambiente referencial a sala de aula e as experiências e trocas vividas nesse ambiente, em que o professor-pesquisador anotava em um diário de bordo os dados e experiências vividas, enquanto sua prática docente acontecia. A partir das realizações das atividades elaboradas pelos autores da pesquisa, todas pensadas sob a ótica da utilização da MEAAMaRP, foram feitas as análises e interpretações dos dados obtidos.

O pesquisador brasileiro Sérgio Vasconcelos Luna (2011), estabelece que qualquer que seja o referencial teórico ou a metodologia aplicada, uma pesquisa precisa implicar o preenchimento dos seguintes requisitos:

1) a formulação de um problema de pesquisa;

2) a determinação das informações necessárias para encaminhar as respostas às perguntas feitas;

3) a seleção das melhores fontes das informações a serem coletadas;

4) a definição de um conjunto de ações que produzam tais informações;

5) a seleção de um sistema para tratamento das informações;

6) o uso de um sistema teórico para interpretação das informações;

7) a produção de respostas às perguntas formuladas pelo problema da pesquisa;

8) a indicação do grau de confiabilidade das respostas obtidas;

9) a indicação da generalidade dos resultados.

Assim, Luna afirma que:

> Se o problema que gera a pesquisa não pode ser respondido diretamente, (caso contrário não teríamos um problema!), isso significa que a realidade não pode ser apreendida diretamente, mas depende de um recorte dela que faça sentido. Esse recorte é garantido pelo procedimento que seleciona as informações necessárias para uma leitura pelo pesquisador. Diferentes tendências farão recortes diferentes, mas não poderão prescindir de procedimentos de coleta de informações. Os critérios 5 e 6 justificam-se pela noção de recorte da realidade, mencionada onde respostas a um questionário, transcrições de entrevistas, documentos, registros de observação representam observações à espera de um tratamento que lhe dê um sentido que permita que se produza um conhecimento até então não disponível (Luna, 2011, p.19).

Neste contexto, a coleta de dados dessa pesquisa ocorreu seguindo as inspirações dos requisitos citados por Luna, a partir de: um questionário inicial de sondagem; problemas geradores em cada atividade elaborada; proposição e elaboração de problemas durante as atividades; utilização de slides, software digitais (GeoGebra); e um questionário de *feedback* final a respeito da utilização da MEAAMaRP.

É importante destacar que essa pesquisa também se alinha à perspectiva de Fiorentini e Lorenzato uma vez que enquanto professor-pesquisador foram realizadas reflexões durante a prática docente no intuito de desenvolver "conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor" (Fiorentini; Lorenzato, 2012).

Destacamos também, que durante a coleta dos dados da pesquisa foi utilizado um diário de bordo, bem como gravações e transcrições do diálogo entre o professor-pesquisador e os participantes. A seguir descrevemos um pouco sobre o contexto da pesquisa e o modo como foi desenvolvida.

6.3 Contexto e desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola municipal, do município de Santa Luzia/ Minas Gerais, com estudantes de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 24 estudantes. A idade dos estudantes dessa turma varia entre 14 e 16 anos. É importante destacar que o pesquisador dessa dissertação é professor na escola, sendo essa turma, uma das turmas em que leciona os conteúdos de Matemática. Assim, durante pesquisa, assumi[26] o papel de professor-pesquisador, sendo inicialmente solicitada à gestão escolar a aprovação da realização da pesquisa. Após a aprovação, foi solicitado aos estudantes e seus respectivos responsáveis a anuência para participação na pesquisa.

Destacamos que a pesquisa ocorreu durante as aulas cursadas pelos estudantes no próprio turno de aula regular. É importante destacar também que as atividades realizadas já estavam alinhadas ao conteúdo programático dos estudantes a ser ministrado nas aulas pelo professor-pesquisador.

6.4 Sequência didática

Para desenvolver nossa pesquisa em sala de aula, elaboramos uma sequência de cinco atividades contendo problemas geradores que promoviam o ensino-aprendizagem de Matemática a partir das resoluções desses problemas, seguindo as dez etapas da MEAAMaRP, como orientam Allevato e Onuchic (2021).

Para isso, durante a elaboração das atividades estabelecemos que os tópicos de demonstrações abordados seriam caracterizados em cada uma das atividades a seguir:

- **Atividade 1:** A circunferência como lugar geométrico e o diâmetro da circunferência como a maior corda;
- **Atividade 2:** O número π e o comprimento da circunferência;
- **Atividade 3:** Centro, apótema e Área de um polígono regular;
- **Atividade 4:** Área do dodecágono regular e a generalização da área de um polígono regular;
- **Atividade 5:** Demonstração da área do círculo.

[26] Algumas vezes, o verbo da frase é utilizado na primeira pessoa do singular, por se tratar de vivências ou concepções do mestrando. Nas demais situações, o verbo é utilizado na primeira pessoa do plural, por entender que este é um trabalho construído em conjunto pelo trio orientador-coorientador-orientando.

Essas atividades foram elaboradas como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos” (Zabala, 1998, p. 18) e por isso compõe uma sequência didática.

Pais (2002) afirma que “uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática” (p. 102).

É importante salientar que a escolha destes tópicos aconteceu através de um mapeamento realizado durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, no curso de mestrado, em que foram mapeadas dissertações no repositório do PROFMAT que versavam sobre a utilização da MEAAMaRP no ensino de Geometria. Esse mapeamento influenciou a escrita e a publicação de um artigo (Cruz Junior, *et al.,* 2024), que indicou a necessidade de pesquisas e trabalhos que versem a respeito da utilização da MEAAMaRP, aliada ao ensino de demonstrações destes tópicos de Geometria Plana nos anos finais do Ensino Fundamental. Ainda sobre a necessidade da pesquisa, já discorremos aqui os documentos orientadores oficiais para o ensino, os PCNs e a BNCC, sugerem a utilização da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, contudo não há nestes documentos uma descrição do como e de quais formas essa metodologia pode ser utilizada nas salas de aula.

A seguir, descrevemos com detalhes a realização das cinco atividades da pesquisa, bem como a utilização das etapas da MEAAMaRP percorridas, além do processo da coleta, da análise e da seleção dos dados das atividades, que junto à aplicação, culminaram na elaboração de um material, Produto Educacional dessa pesquisa, contendo uma sequência de atividades didáticas destinadas a professores que desejam utilizar as atividades e a metodologia aqui desenvolvida em suas práticas docentes.

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS DA PESQUISA

Nesta seção descrevemos as análises dos dados da pesquisa em cada uma das atividades, bem como a descrição de como ocorreram as realizações das dez etapas de MEAAMaRP.

A pesquisa ocorreu em uma escola municipal, do município de Santa Luzia/ Minas Gerais, com estudantes de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 24 estudantes, com idades entre 14 e 16 anos. As atividades ocorreram durante as aulas regulares dos estudantes, no período compreendido entre 16 de março de 2026 a 18 de maio de 2026, totalizando um total 19 aulas de 50 minutos, conforme o cronograma apresentado no quadro abaixo.

Quadro 3 – Cronograma de realização das Atividades

Ordem de Aplicação	Atividade	Conteúdo	Habilidade da BNCC	Data de Aplicação	Qtd. de Aulas (50 min)
1º	**Questionário de Diagnóstico** - Sondagem	Sondagem	-	16/03 e 17/03	2
2°	**Atividade 1 (Parte I):** Circunferência como Lugar Geométrico	Compreensão da circunferência como lugar geométrico	EF07MA22	19/03, 20/03 e 25/03	3
3º	**Atividade 1 (Parte II):** Maior corda da circunferência	Compreensão do diâmetro como maior corda da circunferência	EF07MA22	26/03 e 27/03	2
4º	**Atividade 2 (Parte I):** Determinação aproximada do número **π**	Compreender a origem do número **π** na perspectiva histórica, como razão entre a medida direta (experimental) do comprimento da circunferência e o diâmetro	EF07MA33	30/03 e 31/03	2

5º	**Atividade 2 (Parte II) :** Comprimento da Circunferência	A partir da última atividade compreender que a relação entre o diâmetro, o **π**, e o comprimento da circunferência		09/04 e 10/04	2
6º	**Atividade 3:** Determinação do centro de um polígono regular e do apótema	Encontrar experimentalmente o centro de um polígono regular e o apótema utilizando: régua, esquadro e lápis	EF07MA27 EF07MA28 EF08MA17	22/04, 23/04 e 24/04	3
7º	**Atividade 4:** Área de um dodecágono regular/ Determinação da relação da área de um polígono regular de n lados	A partir do exemplo particular da área do dodecágono regular e da Resolução de Problemas encontrar a generalização da área de polígono regular qualquer	EF07MA27 EF07MA28 EF08MA19	26/04 e 27/04	2
8º	**Atividade 5:** Método da Exaustão - Demonstração da área do círculo	Demonstrar a partir de uma versão do método de exaustão de Eudoxo - Arquimedes que a área do círculo pode determinada por $\pi x r^2$	EF07MA27 EF07MA28 EF08MA19 EF09MA15	29/04 e 30/04	2
9°	**Questionário de *Feedback* -** Avaliação da pesquisa	Feedback por parte dos estudantes a respeito das atividades aplicadas	-	18/05	1

Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Para garantir o anonimato dos participantes da pesquisa, nomeamos os 24 estudantes por **E1, E2, ..., E24**, sendo essa nomeação aleatória e não necessariamente condizente com a ordem

do diário escolar da turma. Para a realização das atividades, os estudantes foram organizados em duplas, utilizando assim pequenos grupos, conforme orientam Allevato e Onuchic (2021), senso estas duplas nomeadas neste trabalho como **D1, D2, ..., D12**. A escolha das duplas foi feita exclusivamente entre os próprios estudantes, sem intervenção direta do professor, sendo a configuração dessas duplas mantidas durante toda a realização das atividades dessa pesquisa, salvo os dias em que algum integrante não estava presente na aula, havendo assim a intervenção do professor-pesquisador para redistribuir e reagrupar as duplas que estavam em desfalque.

Figura 29 – Etapa de Resolução do Problema em grupo da MEAAMaRP



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Também é importante dizer que inicialmente os estudantes foram convidados a responder individualmente o Questionário inicial de Sondagem[27] para que conseguíssemos compreender seus conhecimentos prévios a respeito dos temas a serem investigados na pesquisa, de maneira geral. Na sequência, eles foram subdivididos nas duplas para realização das atividades, culminando na aplicação do questionário de *feedback* a respeito da utilização da MEAAMaRP como ferramenta para aprendizagem das demonstrações dos tópicos elencados da Geometria Plana.

7.1 Questionário Inicial de Sondagem

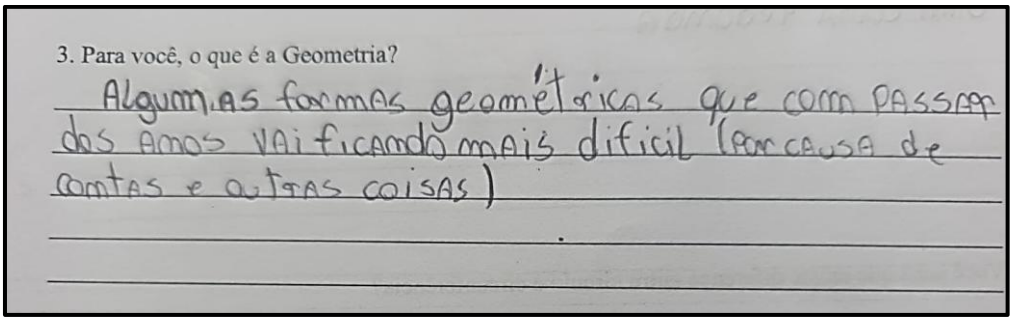
O questionário de sondagem foi aplicado a cada um dos participantes individualmente. Elaboramos o questionário com 17 perguntas distribuídas em duas partes: *Parte 1* composta por dez perguntas, objetivando conhecer melhor o perfil, as ideias e noções prévias dos estudantes a respeito da Geometria, de forma geral; e a *Parte 2* composta por sete perguntas específicas objetivando compreender as noções dos estudantes a respeito do conhecimento de círculos e

[27] Apêndice B.

circunferências. A partir das análises das respostas deste questionário conseguimos compreender um pouco sobre seus conhecimentos prévios, expectativas e pensamentos dos estudantes para iniciarmos a nossa pesquisa. O questionário foi respondido por 20 estudantes, com idades entre 14 e 16 anos.

Desses estudantes, 95% havia feito praticamente todo o Ensino Fundamental nessa escola municipal, tendo apenas um estudante informado que havia estudado em outra escola, localizada na cidade de Lagoa Santa, mas não recordava se era municipal ou particular. Em relação a pergunta 3 da *Parte 1*, percebemos que muitos estudantes entendem a Geometria como uma disciplina que estuda: desenhos; formas geométricas como triângulos, quadrados, etc; medir ângulos, e até um tipo de matemática mais difícil como podemos perceber nas respostas apresentadas nas figuras 30, 31 e 32.

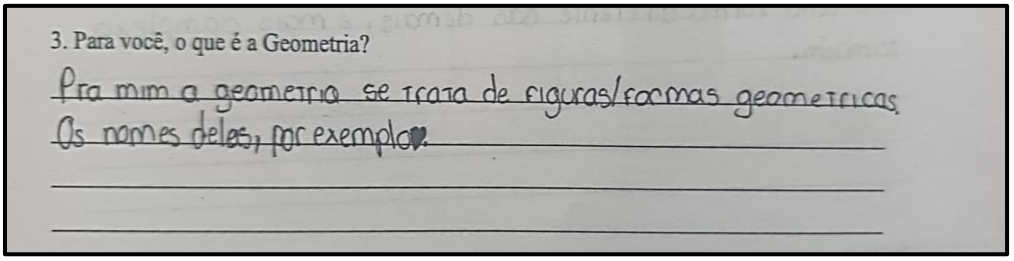
Figura 30 – Resposta do estudante E13 para a pergunta 3 (PARTE 1)



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Algumas formas geométricas que com o passar dos anos vão ficando mais difíceis (por causa de contas e outras coisas).

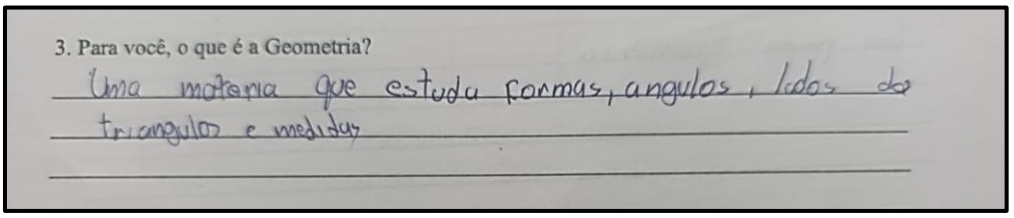
Figura 31 – Resposta do estudante E17 para a pergunta 3 (PARTE 1)



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Para mim a geometria se trata de figuras/formas geométricas. Os nomes deles, por exemplo.

Figura 32 – Resposta do estudante E1 para a pergunta 3 (PARTE 1)



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Uma matéria que estuda formas, ângulos, lados de triângulos e medidas.

Além disso, percebemos nas respostas a pergunta 4, qual seja: *Você considera importante estudar Geometria? Por quê?* que a maioria dos estudantes respondeu que sim, citando exemplos de que a Geometria é importante na construção civil, para realizar medições e até mesmo como forma de arte. Percebemos a partir dessas respostas que os estudantes incialmente apresentam a ideia de uma Geometria mais direcionada para medições, aplicações, não apresentando muitas evidências de raciocínio ou hipóteses.

Ao serem perguntados sobre quais tópicos de Geometria já haviam estudado, os participantes recordaram de alguns conteúdos vistos, e suas respostas foram transformadas na nuvem de palavras mostrada na Figura 33 a seguir.

Figura 33 – Nuvem de palavras gerada com os dados do item 4 do Questionário de Sondagem



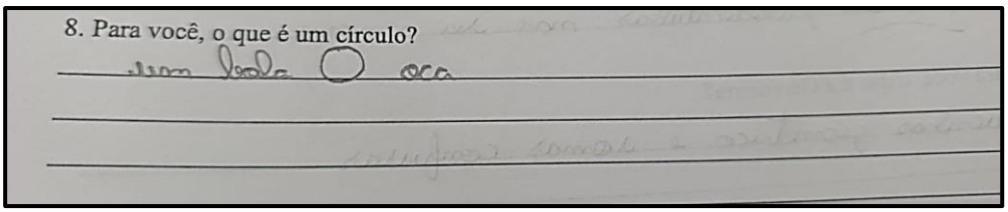
Fonte: os autores, (2026).

Observamos que a maioria dos estudantes resgatava conhecimentos prévios de Geometria associados à medição de grandezas (como áreas e ângulos) e a conteúdos relativos aos triângulos. Inferimos que, ao fazerem referência aos triângulos, os estudantes englobavam não apenas suas classificações, mas também os critérios de congruência, conteúdos previamente estudados, além

da propriedade da soma dos ângulos internos de polígonos. Tais evidências nos indicaram alguns dos conhecimentos prévios mobilizados pelos alunos no início do processo. Notamos também que ao responderem sobre "transformações" estavam na verdade se referindo ao processo de conversões (transformações) de unidades de medida.

A próxima pergunta desejava entender se os estudantes já haviam estudado sobre círculos ou circunferências, sendo a maioria das respostas "não" e "não sei". Percebemos também que muitos dos estudantes acreditavam saber o que era um círculo definindo-o como uma "bola" ou uma "forma redonda", como mostra algumas respostas mostradas nas figuras 34, 35 e 36. Constatamos, a partir destas respostas que os estudantes não sabiam a definição de círculo ou circunferência como lugares geométricos, inclusive estavam relacionando essas figuras planas a figuras espaciais, como exemplo a bola, vista na Geometria Espacial como uma esfera.

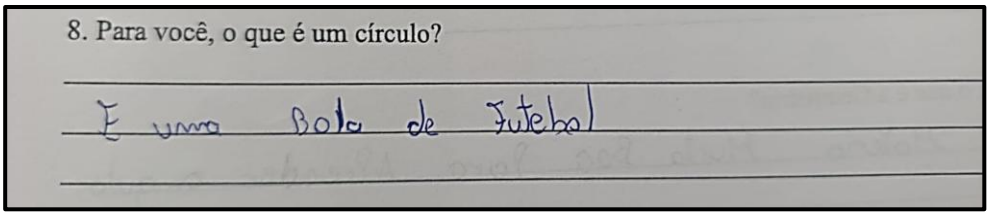
Figura 34 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 8 (PARTE 1) - Estudante E11



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Uma bola oca.

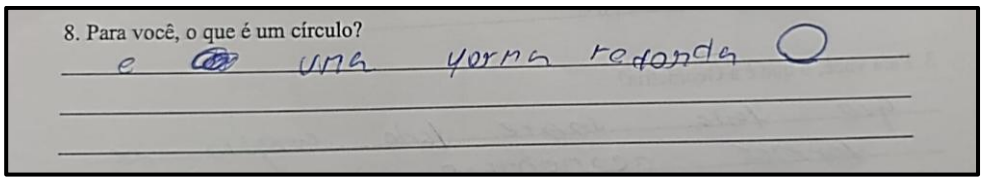
Figura 35 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 8 (PARTE 1) - Estudante E14



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: É uma bola de Futebol.

Figura 36 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 8 (PARTE 1) - Estudante E4

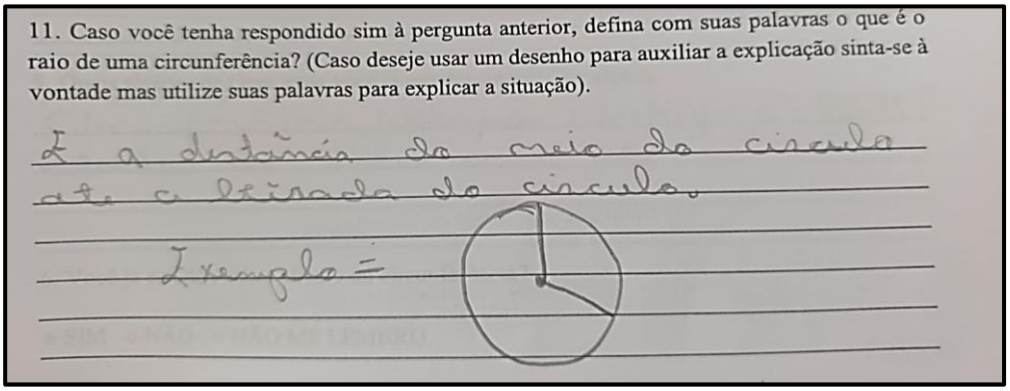


Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: É uma forma redonda.

Diante disso, nossa primeira atividade (Atividade 1) teve como objetivo a definição de circunferência e círculo como Lugares Geométricos, bem como explicitar que essas figuras eram figuras planas, não espaciais. Além disso, ao perguntarmos no questionário se os estudantes recordavam de ter estudado sobre circunferência e círculo, a maioria dos participantes informou que "não se lembrava" (50%) ou que "não havia estudado" (15%). Isso refletiu na coleta dos dados da *Parte 2* de nosso questionário, uma vez que ao serem perguntados no item 11 se saberiam definir o que é o raio de uma circunferência, apenas 15% dos participantes conseguiram explicitar o que acreditavam ser o raio, como mostra o relato dos estudantes **E12** e **E23,** nas figuras a seguir.

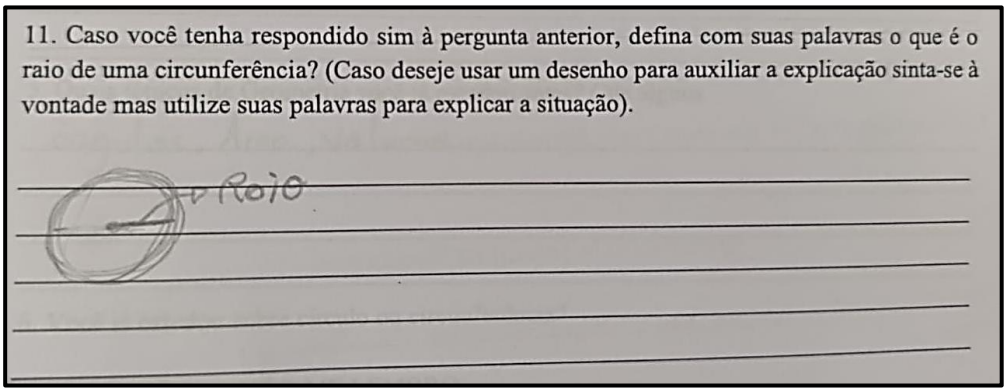
Figura 37 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 11 (PARTE 2) - Estudante E12



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: É a distância do meio do círculo até a beirada do círculo.

Figura 38 – Resposta do Questionário de Sondagem - Item 11 (PARTE 2) - Estudante E23



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

O questionário também nos mostrou que os estudantes não recordavam e não sabiam qual a relação entre o número π e o comprimento da circunferência ou a área do círculo. Isso nos motivou a elaborar atividades, como a Atividade 2 que, a partir das etapas da MEAAMaRP,

utilizassem também como fundo outras metodologias, como a Investigação Matemática e a História da Matemática, para contextualizar e criar problemas que favorecessem a construção desse conhecimento. Tal estratégia, se alinha com a orientação presente na BNCC, a partir do momento que ela considera:

> importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (Brasil, 2018, p.298).

No item 15 da *Parte 2* desse questionário, decidimos perguntar aos estudantes o que seria "fazer Matemática" para cada um deles. Analisando os dados constatamos que muitos estudantes definiram o "fazer Matemática" a apenas a realização de contas, realizar medições e resolver problemas, sem nenhuma menção associação aos conceitos de compreender, verificar, explicar porque uma propriedade é válida ou verdadeira. Tal constatação se alinha a um dos objetivos específicos dessa pesquisa, quando nos propomos a investigar, a partir das atividades desenvolvidas, quais são as percepções dos estudantes, antes e após as atividades, a respeito da necessidade e da compreensão das demonstrações para a Matemática.

Após a investigação feita por meio do *Questionário Inicial de Sondagem*, elaboramos a sequência didática a ser desenvolvida em sala de aula utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP). Essa sequência é composta de cinco atividades, cada uma delas apresentando problemas geradores, que objetivam a construção de novos conceitos pelos estudantes a partir da busca pela solução de cada um deles.

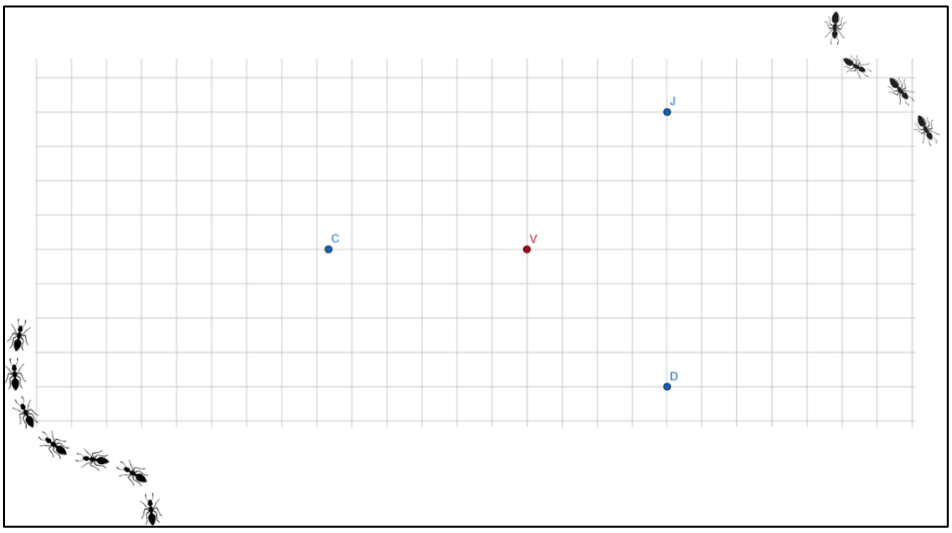
Nas seções a seguir fazemos as análises e as descrições detalhadas a respeito de cada uma das cinco atividades desenvolvidas nessa pesquisa. Com o objetivo de facilitar a leitura e a compreensão da análise dos dados, descrevemos as etapas escolares, o objetivo esperado para essa atividade, as habilidades desenvolvidas conforme a BNCC, bem como a formalização da solução do problema apenas para a Atividade 1, salientando que todas as outras atividades têm suas respectivas descrições e detalhamentos disponibilizados no Produto Educacional.

Os dados trazidos e analisados aqui são recortes feitos com intuito de responder nossa questão de pesquisa: ***Como o processo de Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências articulados com provas e demonstrações feitas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?***

7.2 Atividade 1

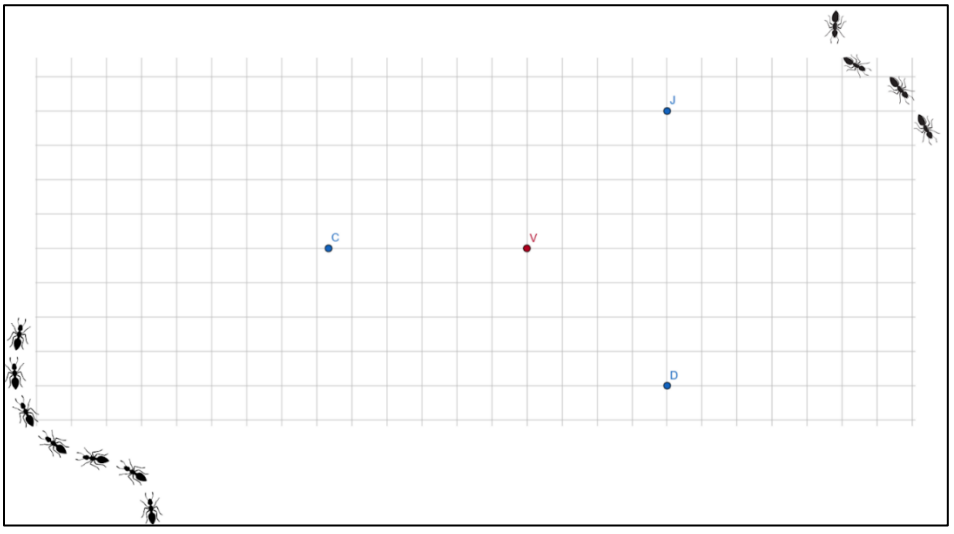
PROBLEMA 1

A imagem abaixo representa a localização de quatro formigas, *Virgínia, José, Carlos e Duda*, numa malha quadriculada, representadas respectivamente pelos pontos *V, J, C* e *D.*



Utilizando apenas a régua, respondam:

A. QUAL a distância, em centímetro, entre Virgínia e José?
B. QUAL a distância, em centímetro, entre Virgínia e Carlos?
C. QUAL a distância, em centímetro, entre Virgínia e Duda?
D. Chegaram outras três formigas: *Bernardo, Telúnia e Sofista*, que devem ser representadas na malha quadriculada, respectivamente, pelos pontos *B, T* e *S.* A distância de cada uma delas até Virgínia é a mesma distância encontrada entre as formigas José e Virgínia. Represente esses pontos na malha quadriculada da imagem abaixo.



E. Agora suponham que chegaram várias formigas, tantas que não conseguimos contar. Elas se posicionaram nesta malha de forma que a distância de cada uma delas até a formiga

Virgínia é sempre a mesma e, igual a distância entre José e Virgínia. Que figura é formada quando as formigas se posicionam? Faça um desenho que represente essa situação.

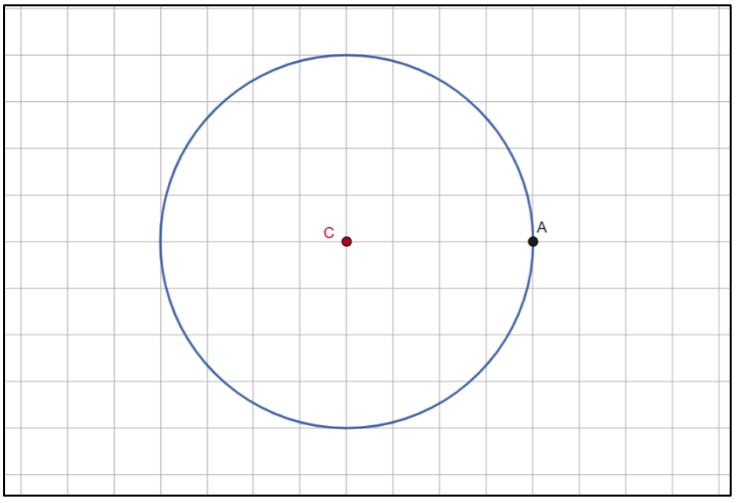
F. É possível que as formigas se organizem de outra maneira (outra disposição) respeitando as mesmas condições, isto é todas com a distância até Virgínia igual a distância entre Virgínia e José? Justifique.

Ano escolar recomendado: a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.
Objetivo: reconhecer a circunferência como o Lugar Geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância fixa de um certo ponto, chamado centro da circunferência.
Habilidade da BNCC: EF07MA22 [28].

Formalização: Circunferência: *o lugar geométrico dos infinitos pontos em um plano, que estão a uma mesma distância fixa 'r' (raio) de um ponto fixo C (centro) naquele mesmo plano.*
Círculo: *o lugar geométrico dos infinitos pontos em um plano, que estão a uma distância menor ou igual a uma distância fixa 'r' (raio) de um ponto fixo C (centro) naquele mesmo plano.*
Corda: segmento que une dois pontos de uma circunferência.
Raio: distância entre um ponto da circunferência até o seu centro.

PROBLEMA 2

A imagem abaixo mostra uma circunferência de centro C, e um ponto A que pertence a circunferência.



[28] "EF07MA22: Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes" (Brasil, 2018, p.309).

Utilizando a régua:

A. Qual a medida do raio da circunferência?

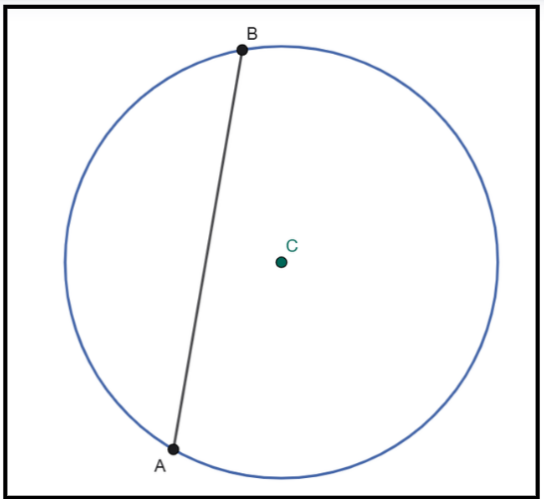
B. Marque um ponto B qualquer na circunferência que não esteja alinhado com os pontos A e C. Agora meça o tamanho da corda AB e informe o tamanho encontrado.

C. Marque outros seis pontos sobre a circunferência: *D, E, F, G, H* e *I* que não estejam alinhados com os pontos A e C, e um ponto *J* na circunferência que esteja alinhado com os pontos A e C. Com a régua, meça o tamanho de cada corda que começa no ponto A e liga cada um desses pontos e informe a medida.

D. Qual é a medida da maior corda dessa circunferência?

E. Por que essa é a medida da maior corda da circunferência?

Ano escolar recomendado: a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.
Objetivo: Reconhecer a circunferência como o Lugar Geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância fixa de um certo ponto, chamado centro da circunferência.
Habilidade da BNCC: EF07MA33[29]
Formalização: deixamos como sugestão a seguinte fundamentação teórica:
considere uma circunferência de centro C e raio de medida r. Tome dois pontos quaisquer, A e B que formem uma corda que não é o diâmetro, como por exemplo a configuração mostrada na figura abaixo.



[29] "EF07MA33: Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica" (Brasil, 2018, p. 309).

Desta forma, os pontos A, B e C não estão sobre a mesma reta, então é possível construir um triângulo com vértices A, B e C. Sendo assim, pela condição de existência de um triângulo (desigualdade triangular), garantimos que:

$$\overline{AC} + \overline{\mathrm{BC}} > \overline{AB}$$

$$r + r > \overline{AB}$$

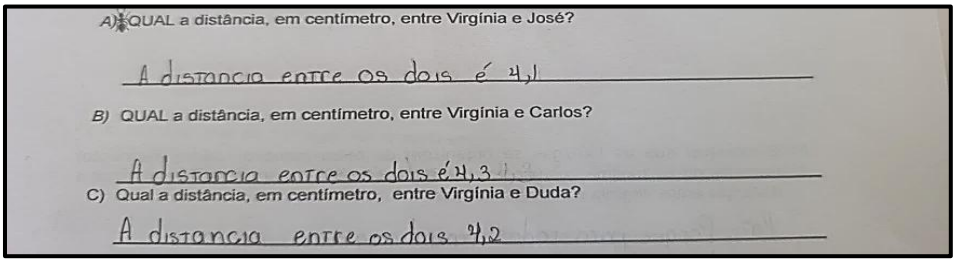
$$2r > \overline{AB}$$

$$Diâmetro > \overline{AB}$$

7.2.1 Análise dos dados do Problema 1

Para o primeiro problema, nosso objetivo era que os estudantes compreendessem a definição da circunferência como o lugar geométrico dos pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo no mesmo plano, sendo esse ponto chamado de centro da circunferência, e a distância citada o raio da circunferência. Utilizando como contexto as ideias de formigas dispostas na malha quadriculada, constatamos que as duplas conseguiram responder coerentemente às perguntas solicitadas. Abaixo mostramos os resultados encontrados pela dupla **D9**.

Figura 39 – Respostas da Dupla D9 para o Problema 1



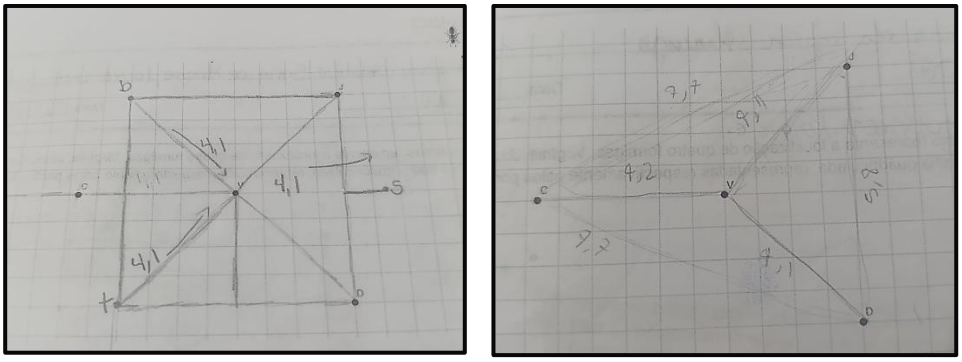
Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Mesmo que a dupla **D9** não tenha concluído que a distância entre o ponto central, representado pela letra V, e o os outros pontos era a mesma, durante a etapa de exposição de soluções essa dupla explicitou, na resolução do item (D), que ao disporem as formigas como pontos, na forma solicitada, isto é, com a mesma distância entre *Virgínia* e *José*, perceberam que a imagem que se formava "era de um círculo", e, nas palavras deles, concluíram que a figura formada era um círculo, como também indicaram na solução apresentada.

É importante destacar que neste momento, como evidenciou o questionário de sondagem, os estudantes ainda não conheciam a diferença entre círculo e circunferência. Duas duplas

apresentaram como soluções um quadrado e um triângulo equilátero, como mostra a seguir a Figura 40.

Figura 40 – Resposta das duplas D3 e D8 para o Problema 1



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Durante as etapas da plenária e da busca pelo consenso, discutimos o porquê dessas últimas figuras citadas não resolverem a condição imposta pelo problema, uma vez que nem todos os pontos sob essas figuras teriam a mesma distância até o ponto central V. Dessa forma, concluiu-se coletivamente que a única figura que poderia respeitar essa propriedade era a circunferência.

Nessa perspectiva, destacamos o quão importante são, nas etapas da MEAAMaRP, a plenária e a busca pelo consenso, uma vez que a partir delas os estudantes tiveram a oportunidade de participarem ativamente da construção do próprio conhecimento, bem como desenvolverem a capacidade de avaliação crítica, tanto das suas conclusões, como em relação as que foram apresentadas pelos demais colegas. Destaca-se ainda o papel do professor em levar os estudantes a essa avaliação crítica para validar ou invalidar as soluções apresentadas. Além disso, tais práticas estão alinhadas ao que é sugerido na BNCC (2018), principalmente no que diz respeito as competências específicas para o ensino de Matemática, sendo uma delas:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018).

Após as etapas da plenária e da busca pelo consenso, foi feito em conjunto com estudantes, a formalização da circunferência como lugar geométrico, fazendo a distinção das definições entre: *circunferência e círculo*. Ressalta-se a importância desse problema, na perspectiva de Balacheff, em que a figura construída pelos estudantes, ao tentarem responder os itens (D) e (E), evidenciam a etapa de *Empirismo ingênuo*, na qual os estudantes por meio de exemplos tentaram encontrar a solução para a condição imposta, e a partir do momento que discutem e procuram o consenso na

plenária, surge, nas perspectivas de Nasser e Tinoco (2003), a caracterização da *Justificativa gráfica*, em que utilizaram a figura como forma de concluir que a solução seria um círculo.

Ainda sobre essa discussão, percebemos, nas perspectivas de Hanna e De Villiers (2008), a função da prova e da demonstração sob o significado de *explicação* e *compreensão*, pois ao final da formalização os estudantes tiveram a oportunidade de compreender a circunferência sob a perspectiva do conceito de lugar geométrico.

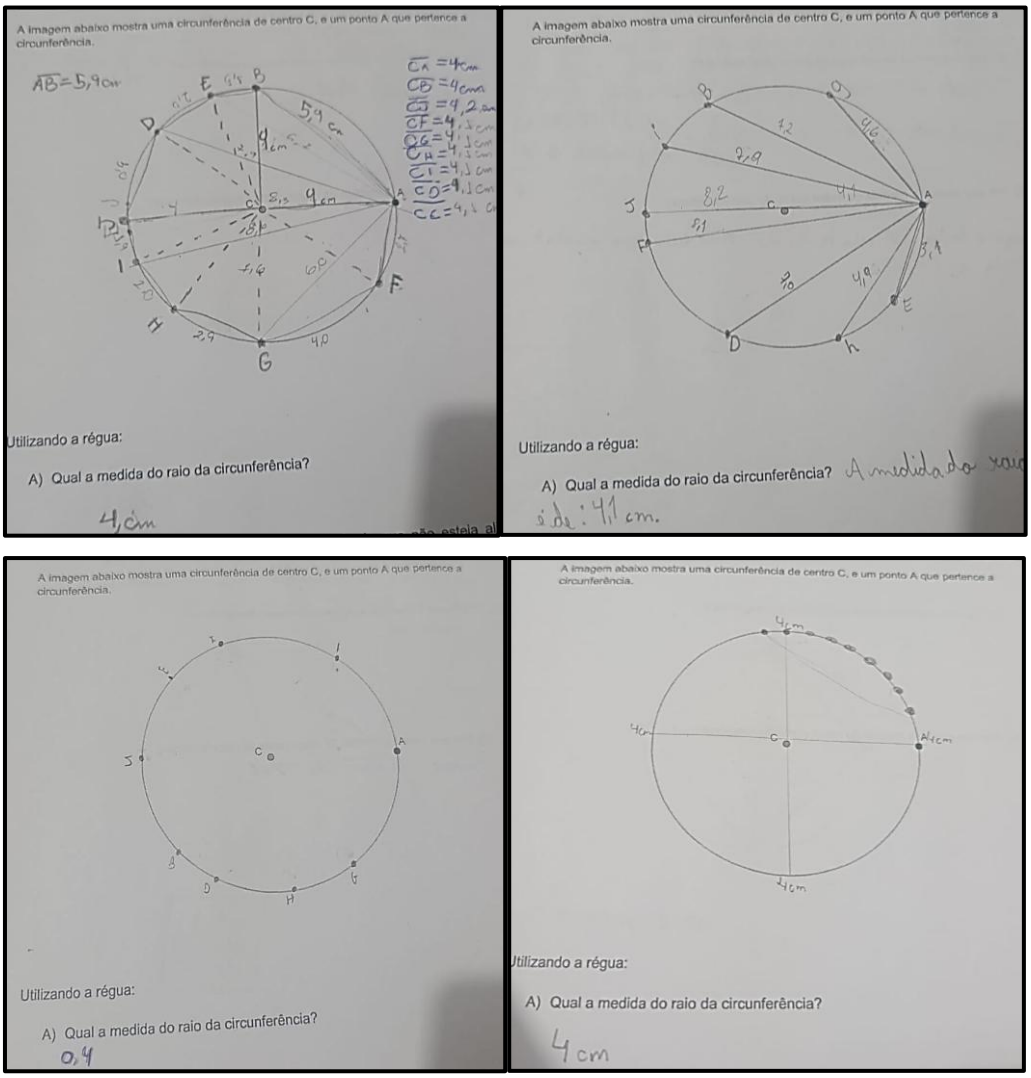
Diante disso, conseguimos avançar na nossa questão de pesquisa, uma vez que começamos a perceber **como a MEAAMaRP pode favorecer o desenvolvimento de provas e demonstrações de conteúdos relacionados a Círculos e Circunferências pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental**.

Em seguida, foram realizados com os estudantes o Problema 2 desta atividade. Para este problema, nosso objetivo era que os alunos conseguissem perceber e demonstrar que o diâmetro é a maior corda de uma circunferência, sendo essa medida o dobro do raio. Esse objetivo está alinhado as habilidades EF07MA22 e EF07MA33 (Brasil, 2018), que dizem respeito tanto sobre compreensão da circunferência como lugar geométrico, quanto ao entendimento do diâmetro como como elemento importante da circunferência, respectivamente.

7.2.2 Análise dos dados do Problema 2

Durante a realização do Problema 2 nosso objetivo era que os estudantes percebessem e compreendessem porque o diâmetro é a maior corda da circunferência. Inicialmente, conseguimos compreender, pela análise dos dados, que o conceito de raio, formalizado na etapa anterior, para a grande maioria das duplas havia sido compreendido, como indicado na figura abaixo.

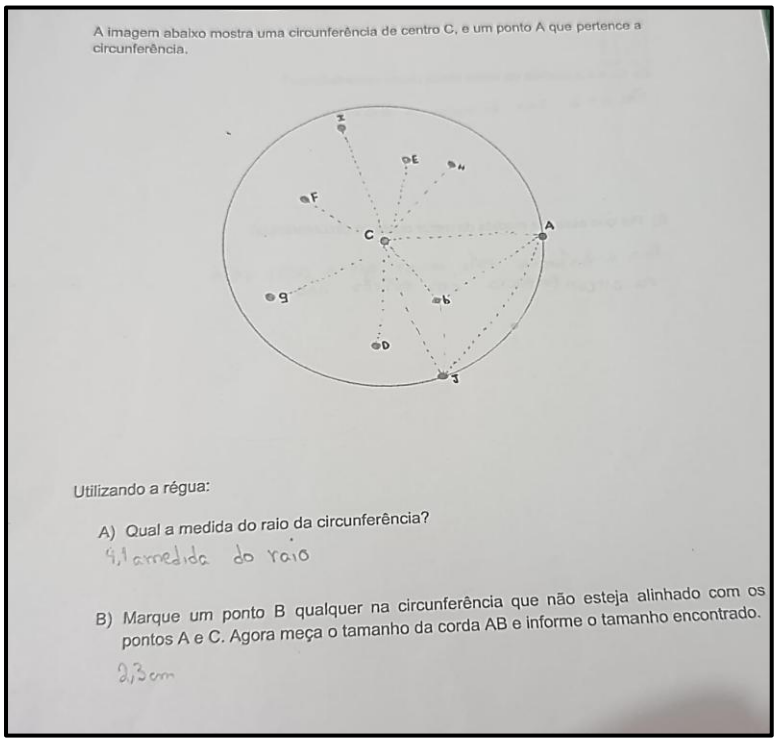
Figura 41 – Respostas das duplas D5, D11, D8 e D1 para o Problema 2



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Neste momento, conseguimos observar a integração do tripé ensino-aprendizagem-avaliação proposto pela metodologia. A avaliação ocorre de forma contínua e formativa durante a execução das tarefas, permitindo ao professor-pesquisador avaliar e mediar a compreensão dos estudantes durante as resoluções dos problemas. Como apontam Allevato e Onuchic (2021), os elementos desse tripé nem sempre ocorrem simultaneamente, reforçando a importância de conceber a avaliação como um processo contínuo. A partir das respostas mostradas no recorte acima, percebemos que os conceitos construídos no problema anterior a respeito do raio e do diâmetro da circunferência foram compreendidos. A análise das resoluções nos revelou além dos avanços as dificuldades dos estudantes. Um exemplo desse momento de "avaliação" foi a constatação de que a diferença entre círculo e circunferência ainda gerava dúvidas, como demonstrado pela dupla D7 ao posicionar pontos no interior da circunferência durante a resolução.

Figura 42 – Resposta da dupla D7 para o Problema 2



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem:

A) 4,1 a medida do raio.

B) 2,3 cm.

Por isso, na etapa da plenária, aproveitamos para discutir e relembrar as definições de círculo e circunferência, resolvendo as possíveis dúvidas a respeito desses conceitos. Também nos surpreendemos, quando durante a execução do problema 2, a dupla **D8** chamou o professor e perguntou:

E8: Professor, essa medição está certa?

Professor-pesquisador: Como vocês estão fazendo?

D3: Para medir do centro até o ponto eu coloco a régua no zero, e estou vendo que está parando no quatro. Por isso o valor é 0,4.

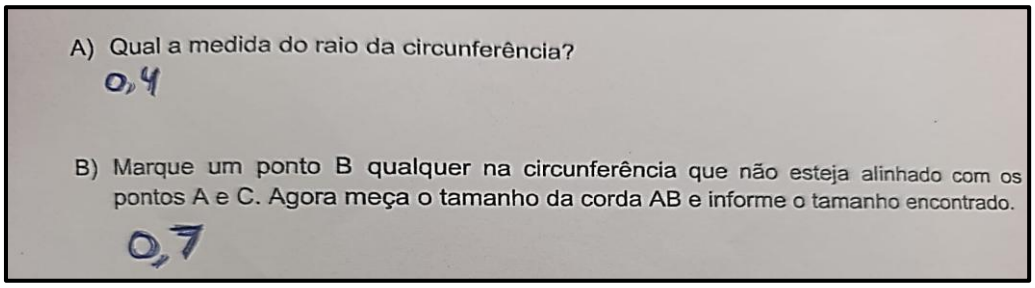
Professor-pesquisador: Entendi, como vocês estão fazendo. Você também está medindo assim E15?

E15: Não, para mim isso que ele mediu quer dizer que é só 4 cm. Não precisa colocar o zero.

Professor-pesquisador: Vocês precisam discutir e entrar em um consenso sobre isso.

Novamente, a aplicação da MEAAMaRP possibilitou identificar uma lacuna de aprendizagem relativa à habilidade EF03MA19 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que se refere a: *"Estimar, medir e comparar comprimentos, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (metro, centímetro e milímetro) e diversos instrumentos de medida*" (Brasil, 2018, p. 289). Diante disso, durante as etapas de **plenária** e **busca pelo consenso**, o uso adequado da régua para a medição de comprimentos foi retomado, visando à consolidação desse conhecimento por toda a turma.

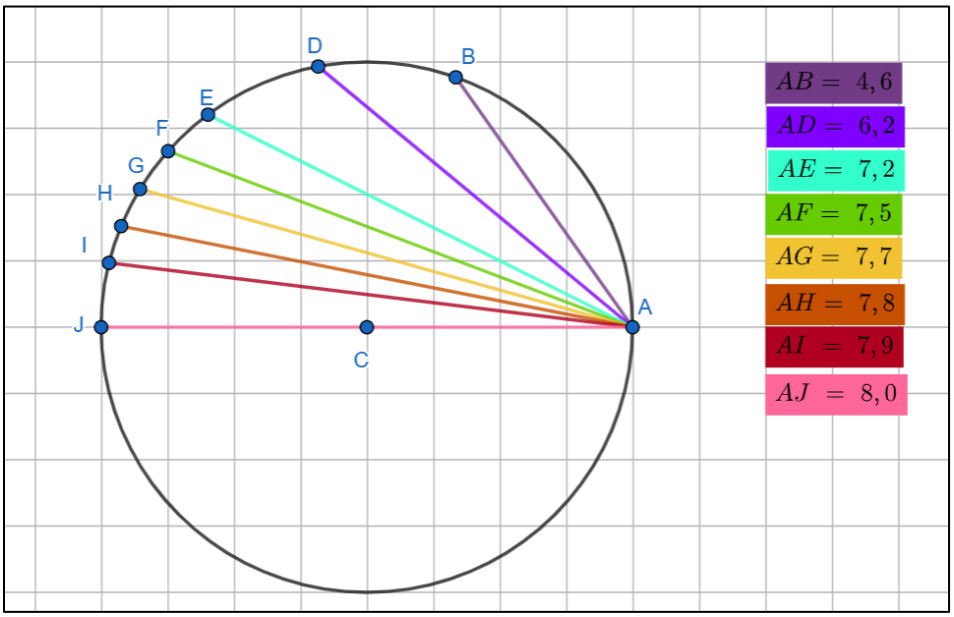
Figura 43 – Resposta da Dupla D8 para o Problema 2



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Durante as etapas de realização da atividade, os estudantes aparentemente compreenderam que cada vez que a corda estava mais próxima de passar pelo centro, maior ela seria, como foi evidenciado na Figura 44. Na etapa da formalização, utilizamos o *GeoGebra,* a partir da marcação dos pontos indicados com os estudantes na intenção de que eles compreendessem que a maior corda era a que passava pelo centro, como mostrado no recorte abaixo.

Figura 44 – Diâmetro como a maior corda



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Na plenária e na busca pelo consenso as duplas foram perceberam que a maior corda da circunferência deveria passar pelo centro. A partir disso, indagamos aos estudantes como poderíamos provar que isso era verdade? Esta situação se tornou um momento ímpar na sala, pois ali discutimos o que seria comprovar uma afirmação em matemática. Algumas duplas disseram que como foi mostrado pelo aplicativo: "a maior corda só aparece quando passa pelo centro". Ainda assim, os estimulamos a refletirem se apenas porque fizemos estes movimentos isso já deveria ser dado como válido? O tipo de raciocínio apresentado por eles, em pensar que apenas com as medições e movimentações feitas no aplicativo indicariam que temos uma demonstração, caracteriza novamente o que Balacheff (2000) entende como *Empirismo Ingênuo* e *Experimento Crucial*, visto que para os estudantes a propriedade já estava validada e justificada por causa dos testes observados no aplicativo. Além disso, pela ótica Hanna e De Villiers (2008) a visualização através do *GeoGebra* configurou para os estudantes a função da demonstração como um tipo de *verificação*.

Assim, apresentamos para eles durante a etapa de formalização a demonstração formal, o que Balacheff (2000) descreve como *prova matemática*, se enquadrando no nível de *Experiência Mental.* Tal prática mostrou-se bastante proveitosa, pois além da formalização e da generalização da propriedade, acreditamos que os estudantes compreenderam o motivo de que, para qualquer circunferência, a maior corda sempre será o diâmetro, cuja medida é igual ao dobro do raio daquela circunferência. Este também foi um excelente momento para revisitar propriedades já estudadas, como a condição de existência para triângulos (desigualdade triangular). Assim, percebemos que a partir da busca pela solução, da experimentação na procura por justificar porque o diâmetro é a

maior corda da circunferência, vimos que as discussões em grupo, a etapa de plenária junto a busca pelo consenso, e em seguida a formalização corroboraram para compreensão e a explicação da demonstração desta propriedade. Além disso, a realização das etapas nos permitiu (re)pensar e (re) avaliar conhecimentos e habilidades matemáticas que acreditávamos estarem consolidados, sendo este também um dos objetivos específicos dessa pesquisa. A seguir analisamos os dados coletados na Atividade 2.

7.3 Atividade 2

PROBLEMA 1

Identifique, nos objetos trazidos por vocês ou entregues pelo professor, o contorno de uma circunferência. Utilizando o barbante e a régua, realizem as medições necessárias e preencham as informações solicitadas no QUADRO 1 abaixo.

QUADRO 1

Nome do Objeto	**Comprimento da Circunferência (C)**	**Diâmetro (D)**	$\frac{C}{D}$

1. Ao observar os dados do QUADRO 1, a razão entre o comprimento e o diâmetro dos diferentes objetos se aproxima de um número?
2. Se sim, qual é esse número?

PROBLEMA 2

Agora que vocês já sabem que o número π é um número irracional, use o número 3,14 como uma aproximação para esse número na atividade proposta abaixo. Utilizando os mesmos objetos e medições do problema anterior, preencham o QUADRO 2.

QUADRO 2

Nome do Objeto	**Diâmetro (D)**	**Comprimento da circunferência (C)**	$\boldsymbol{D \times \pi}$

O que vocês podem observar a partir dos dados encontrados e registrados no QUADRO 2?

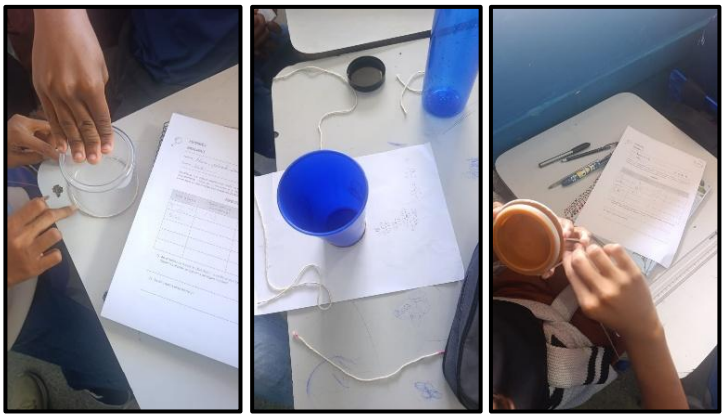
PROBLEMA 3

Criem um problema envolvendo o comprimento de uma circunferência e outros conceitos aprendidos nas aulas anteriores. Em seguida, resolvam o problema e digam qual o nível de dificuldade do problema criado (fácil, médio ou difícil).

7.3.1 Análise dos dados coletados no Problema 1

O objetivo deste problema é que os estudantes compreendam o conceito do número π, a partir da Investigação Matemática[30]. Solicitamos aos estudantes que trouxessem para aula daquele dia objetos que apresentassem formas que lembrassem alguma circunferência. A partir disso, o professor pesquisador forneceu um barbante para os estudantes, e a partir disso cada dupla realizou medições no intuito de preencher o QUADRO 1.

Figura 45 – Investigação Matemática – Problema 1 – Atividade 2



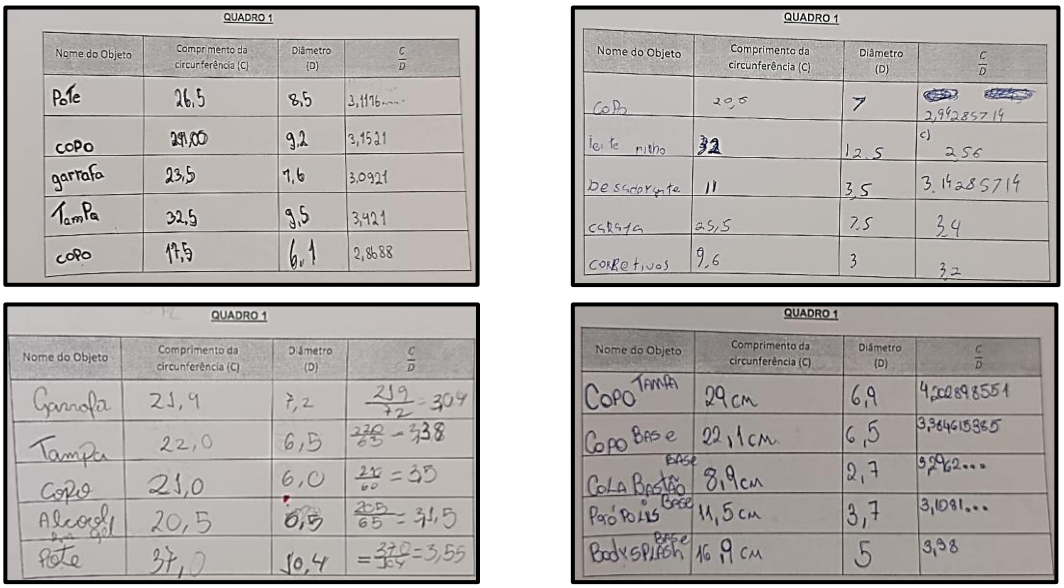
Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

A resolução dessa situação-problema deixou os estudantes animados e engajados no processo de medição. Destacamos esse aspecto como um ponto positivo, pois, em conformidade com as ideias de Polya (1995), um problema só existe de fato se o estudante tem vontade de encontrar sua solução. Nessa perspectiva, cabe ao professor, além de atuar como mediador do processo de ensino-aprendizagem-avaliação ao longo das etapas da MEAAMaRP, propor problemas que instiguem a curiosidade e o interesse da turma (Allevato; Onuchic, 2021). Acreditamos, assim, que a abordagem adotada pode contribuir não apenas para o aprimoramento da prática docente, mas também para a motivação, o protagonismo e a autonomia dos estudantes no trabalho colaborativo.

As duplas encontraram para a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro o valor próximo de 3, aparecendo algumas variações como mostrado nas imagens das figuras seguintes.

[30] Estamos nos referindo ao conceito de Investigação Matemática defendido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 25) ao descreverem que: "uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado".

Figura 46 – Respostas do Quadro 1– Problema 1 – Atividade 2



QUADRO 1

Nome do Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
Pote	26,5	8,5	3,1176...
copo	29,00	9,2	3,1521
garrafa	23,5	7,6	3,0921
Tampa	32,5	9,5	3,421
copo	17,5	6,1	2,8688

QUADRO 1

Nome do Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
Copo	20,5	7	2,992857 14
Ioiô mitho	32	12,5	c) 2,56
Descartável	11	3,5	3,14285714
caneta	25,5	7,5	3,4
corretivos	9,6	3	3,2

QUADRO 1

Nome do Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
Garrafa	21,9	7,2	$\frac{219}{72}$ = 304
Tampa	22,0	6,5	$\frac{220}{65}$ = 3,38
Copo	21,0	6,0	$\frac{210}{60}$ = 35
Alcool	20,5	6,5	$\frac{205}{65}$ = 31,5
Pote	37,0	10,4	= $\frac{370}{104}$ = 3,55

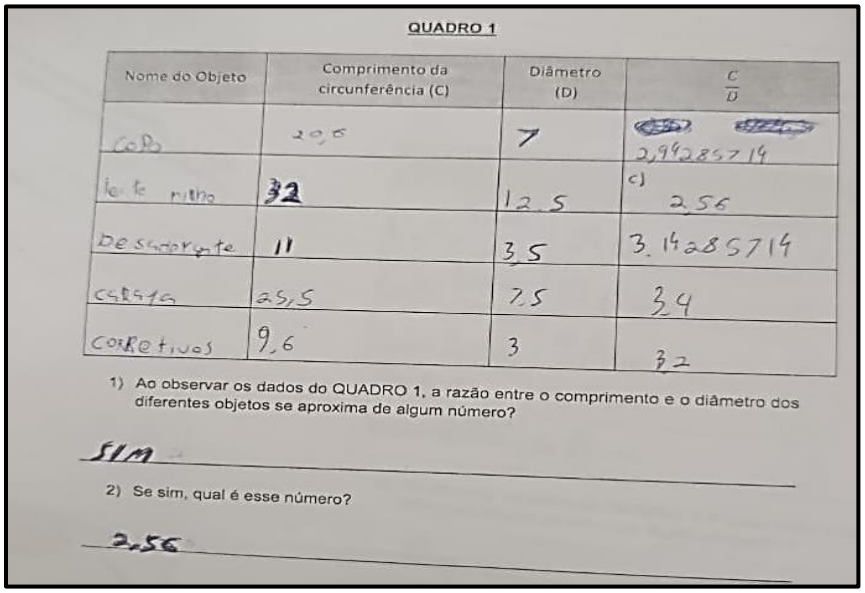
QUADRO 1

Nome do Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
Copo TAMPA	29cm	6,9	4,20289551
Copo BASE	22,1cm	6,5	3,3461538 5
Cola Bastão BASE	8,9cm	2,7	3,2962...
Pão Pote BASE	11,5cm	3,7	3,1081...
Body Splash BASE	16,9cm	5	3,38

Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

É importante dizer que foi permitida a utilização, no momento da resolução, de calculadoras digitais para que os estudantes fizessem os cálculos da razão. Todas as duplas conseguiram constatar que a razão se aproximava de algum número, e grande maioria respondeu que esse número ou era 3 ou algo próximo de 3. Apenas as duplas **D8** e **D9** tiveram dificuldade em responder para qual número a razão estava se aproximando.

Figura 47 – Resposta da Dupla D8 para o Problema 1 – Atividade 2



QUADRO 1

Nome do Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
Copo	20,5	7	2,992857 14
Ioiô mitho	32	12,5	c) 2,56
Descartável	11	3,5	3,14285714
caneta	25,5	7,5	3,4
corretivos	9,6	3	3,2

1) Ao observar os dados do QUADRO 1, a razão entre o comprimento e o diâmetro dos diferentes objetos se aproxima de algum número?

SIM

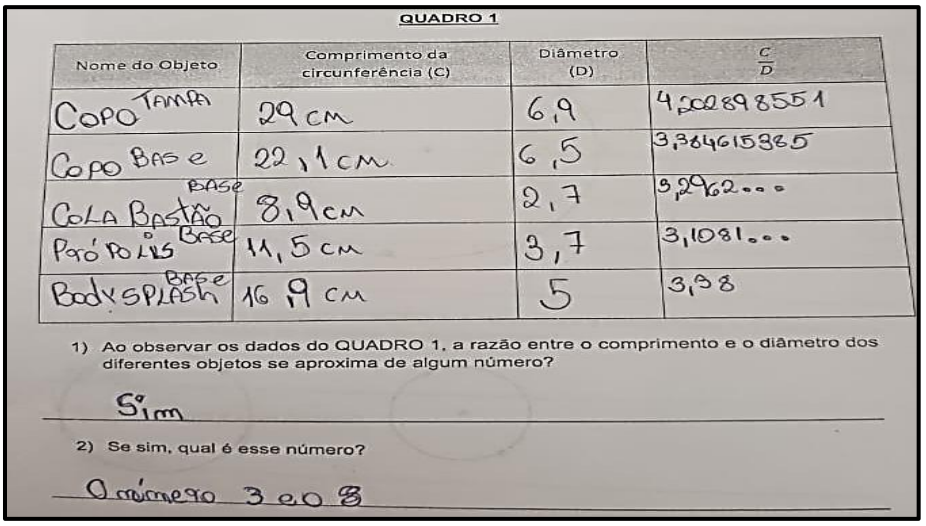
2) Se sim, qual é esse número?

2,56

Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Ao analisarmos a solução apresentada pela dupla **D8** notamos que mesmo informando que a razão se aproximava de um número, eles acreditaram que deveriam informar a menor das razões obtidas, por isso escreveram 2,56.

Figura 48 – Resposta da Dupla D9 para Problema 1 – Atividade 2



QUADRO 1

Nome do Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
COPO TAMPA	29 cm	6,9	4,202898551
COPO BASE	22,1 cm	6,5	3,384615385
COLA BASTÃO BASE	8,9 cm	2,7	3,2962...
PÓ PO LIS BASE	11,5 cm	3,7	3,1081...
BODY SPLASH BASE	16,9 cm	5	3,38

1) Ao observar os dados do QUADRO 1, a razão entre o comprimento e o diâmetro dos diferentes objetos se aproxima de algum número?

Sim

2) Se sim, qual é esse número?

O número 3 e o 8

Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

A dupla **D9** observou os números que mais se repetiam na razão, por isso colocaram como resposta que a razão se aproximava de 3 e 8. A compreensão disso nos mostrou que era preciso recordar com os estudantes o conceito de aproximações, bem como (re)consolidar habilidades relativas à aproximação de medidas como a EF07MA29[31]. Novamente percebemos como a MEAAMaRP precisa ser entendida como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, uma vez que, a partir das respostas debatidas pelos próprios estudantes podemos avaliar e retomar conceitos que antes julgávamos já estarem consolidados (Allevato; Onuchic, 2021).

A partir das discussões que surgiram durante as etapas da plenária e do consenso, os estudantes tiveram a oportunidade de compreender o número π como um número irracional, cujo valor era próximo de 3,14 e independia da circunferência que estávamos analisando, isto é, seja uma circunferência qualquer que eles encontraram numa lata de leite ninho, ou a circunferência de uma tampinha de garrafa pet, eles compreenderam que a razão entre o comprimento e o diâmetro dessa circunferência sempre seria um número próximo de π. Percebemos assim que a atividade pensada a partir da MEAAMaRP pode favorecer a compreensão e explicação aos estudantes do que seria o número π, sendo a explicação uma das funções estabelecidas para a demonstração em matemática (Nasser; Tinoco, 2003).

[31] A habilidade EF07MA29 diz respeito: "resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada" (Brasil, 2018).

Durante a etapa de formalização, discorremos com os estudantes que muitas civilizações antigas, como os babilônios e os egípcios, já haviam percebido as aproximações para o número π, sendo 3,125 e 3,16, respectivamente, trazendo uma contextualização histórica a respeito das origens desse número. Além disso, o estudante **E20**, durante esta etapa formalização, percebeu que a partir da definição do número π, o comprimento de qualquer circunferência, antes medido empiricamente, agora poderia ter sua medida aproximada como sendo o produto entre diâmetro da circunferência e o número π.

7.3.2 Análise dos dados do Problema 2

O objetivo do *Problema 2* era justamente que os estudantes compreendessem que o comprimento da circunferência poderia ser determinado pelo produto entre o diâmetro da circunferência e o número π. Assim, após a fala do estudante **E20**, julgamos que não seria necessário a realização do *Problema 2* já que aparentemente a turma havia concordado e compreendido o que foi exposto.

7.3.3 Análise dos dados do Problema 3

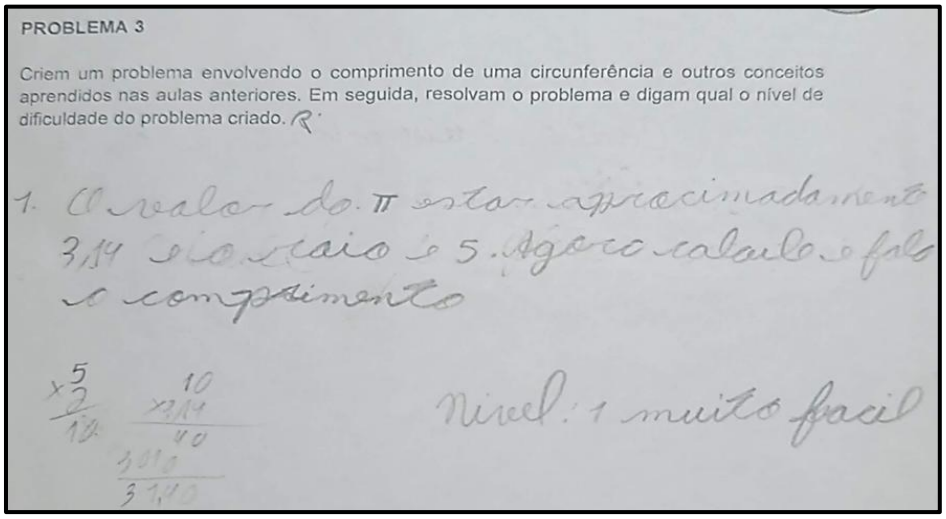
O Problema 3 corresponde a décima etapa da MEAAMaRP, a Proposição de Problemas. Ao solicitarmos que os estudantes resolvessem os problemas propostos por eles, percebemos que a maioria das duplas não havia compreendido o que foi exposto pelo estudante **E20**, sendo necessário então retomar e formalizar o conteúdo novamente junto aos estudantes. Este momento se mostrou muito importante em nossa pesquisa, permitindo ao professor-pesquisador reavaliar sua prática, e assim buscar estratégias que favorecessem a construção do conhecimento dos estudantes.

Destacamos aqui que este tipo de situação é comum durante as realizações da MEAAMaRP, e como asseguram as pesquisadoras Allevato e Onuchic (2021), o professor precisa ser o mediador na construção de conhecimento de seus estudantes, exigindo envolvimento, preparação, responsabilidade e disposição por parte do professor e dos estudantes. Nesse sentido, Pironel (2019, p. 281) afirma que

> o feedback realizado pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema é sempre no sentido de incentivar o aluno a resolver o problema, num esforço conjunto, com todos os elementos de cada um dos grupos, a fim de resultar a construção de um determinado conceito matemático. Ficou evidente que essa metodologia não procura destacar fracassos, mas realçar a força que o estudante possui e que toda ideia pode ser importante na resolução de um problema.

Após a formalização do conteúdo, a turma pode compreender como e porque era possível determinar o comprimento de uma circunferência a partir do produto entre seu diâmetro e o número π. Percebemos com atividade proposta pelo Problema 3 que muitos estudantes puderam compreender e propuseram problemas interessantes a respeito do conteúdo abordado, como mostrado nas imagens a seguir.

Figura 49 – Problema 3 elaborado pela Dupla D3

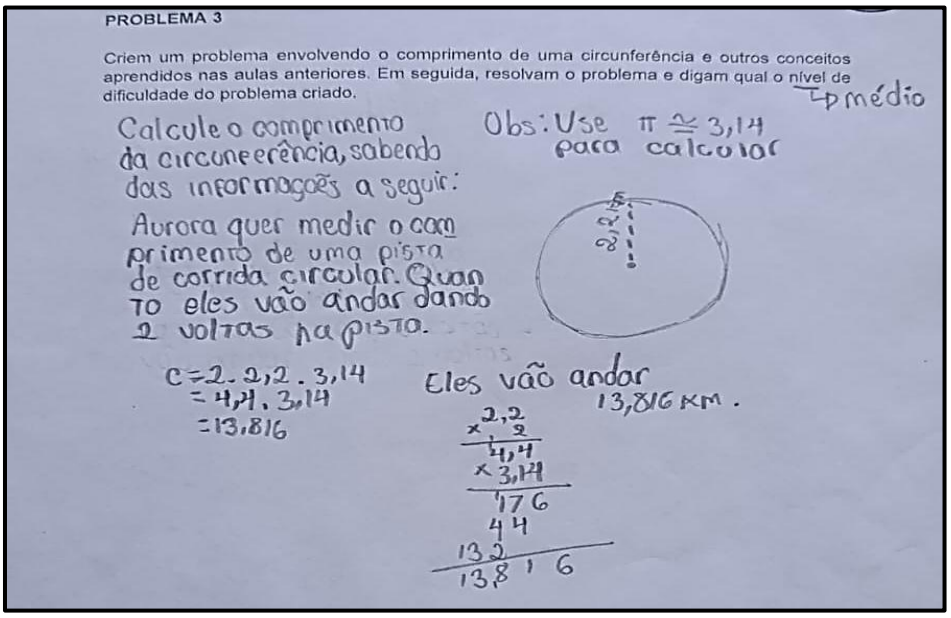


Fonte: arquivos da pesquisa (2026)

Transcrição do problema apresentado na imagem: O valor do π é aproximadamente 3,14 e o raio é 5. Agora calcule e fale o comprimento.

No *prompt* para o problema, solicitamos que os estudantes criassem um problema que envolvesse o comprimento da circunferência e o resolve-se. Além disso, solicitamos que os estudantes indicassem qual o nível do problema criado. Alguns estudantes criaram problemas interessantes como a dupla **D9**. Diferente da dupla **D3**, eles apresentaram um problema contextualizado.

Figura 50 – Problema 3 elaborado pela Dupla D9



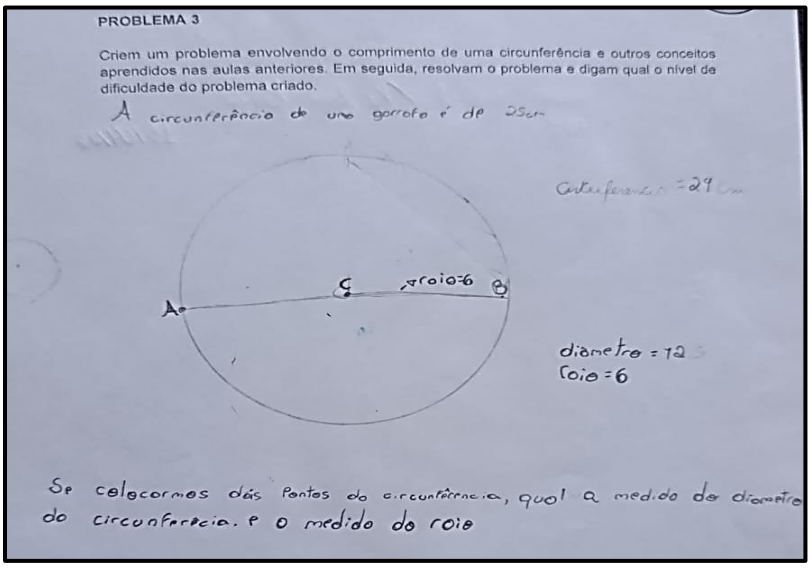
Fonte: arquivo da pesquisa (2026).

Transcrição do problema apresentado na imagem: Calcule o comprimento da circunferência, sabendo das informações a seguir:
Aurora quer medir o comprimento de uma pista de corrida circular. Quanto eles vão andar dando duas voltas na pista?

A resolução encontrada pela dupla foi equivocada, uma vez que no enunciado do problema solicitaram o comprimento relativo a duas voltas na pista, e durante a resolução apresentaram o comprimento de apenas uma volta. Ainda assim, a dupla conseguiu criar um problema interessante que, de acordo com eles, correspondia a um nível de dificuldade médio.

A dupla **D11** também cometeu um equívoco durante a solução do problema que elaboraram. Entendemos que eles realizaram a medição empiricamente com um barbante e de forma bastante imprecisa, encontrando assim uma medida aproximada para o comprimento da circunferência equivocada. Ainda assim, a elaboração do problema pelos estudantes nos mostrou que o conceito de diâmetro estava consolidado para eles, como indicado na figura abaixo.

Figura 51 – Problema 3 elaborado por D11

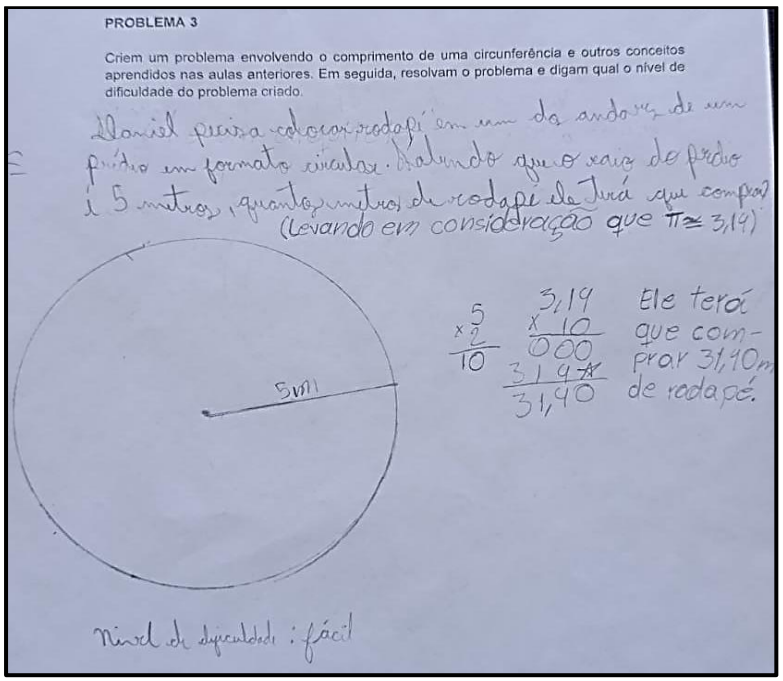


Fonte: arquivos da pesquisa (2026)

Transcrição do problema apresentado na imagem: A circunferência de uma garrafa é de 25 cm. Se colocarmos dois pontos na circunferência, qual a medida do diâmetro da circunferência e a medida do raio?

Outras duplas também tiveram dificuldade na criação de um problema específico envolvendo o comprimento da circunferência. Contudo, a dupla **D5** conseguiu criar e resolver um problema de forma contextualizada, nivelando o problema criado como fácil.

Figura 52 – Problema 3 elaborado por D5



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

> **Transcrição do enunciado da imagem:** Daniel precisa colocar rodapé em um dos andares de um prédio em formato circular. Sabendo que o raio do prédio é 5 metros, quantos metros de rodapé ele terá que comprar? (Levando em consideração que $\pi \cong 3$).

A partir da análise dos problemas elaborados pelas duplas, concordamos com Vieira, Possamai e Allevato (2023) quando afirmam que:

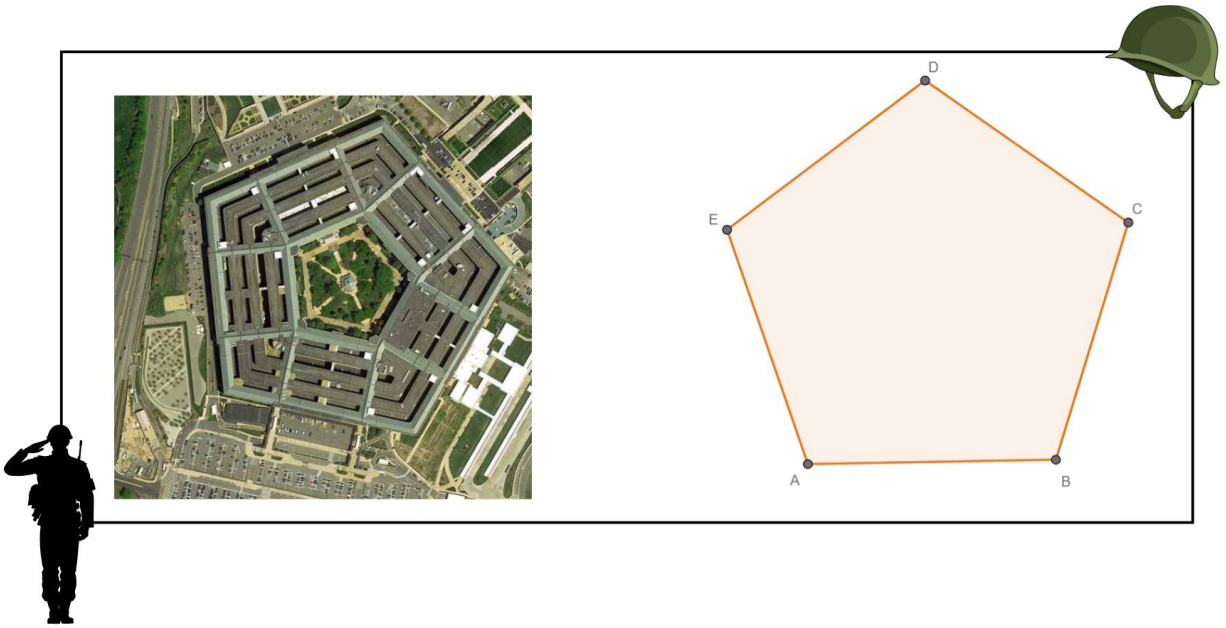
> A proposição de problemas tem potencial para o desenvolvimento da criatividade, possibilitando que os estudantes atribuam significado e analisem criticamente os dados, relacionando suas experiências, seus conhecimentos e interesses, sem limites à inventividade, favorecendo, assim, o desenvolvimento de habilidades que envolvem pensamentos de ordem superior (Viera; Possamai; Allevato, 2023, p.12).

Ademais, percebemos também que a elaboração de problemas por parte dos estudantes favoreceu a busca pela contextualização do conteúdo matemático aprendido, bem como a apropriação dos estudantes por esse conhecimento, uma vez que eles tinham a autonomia para criar e decidir como resolver os problemas. Corroborando com Silva, a proposição de novos problemas nesse contexto cria oportunidades para retomar e aprender conceitos e habilidades em demonstrações matemáticas (Silva, 2025).

A seguir apresentamos a *ATIVIDADE 3* que foi proposta aos estudantes. Ela é composta por dois problemas, sendo o *Problema 1* o problema gerador e o *Problema 2* a etapa de Proposição e Elaboração de Problemas feita pelos estudantes.

7.4 Atividade 3

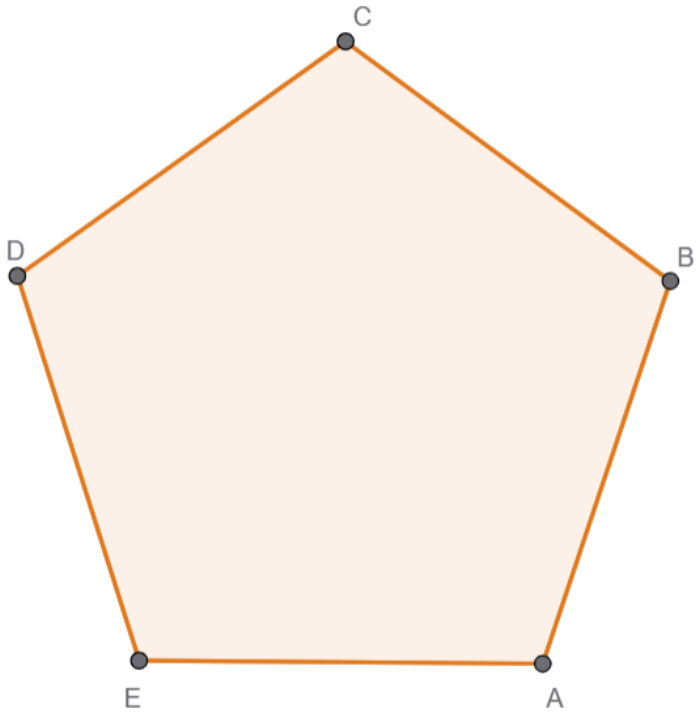
As imagens abaixo mostram (da esquerda para a direita) o edifício intitulado *PENTÁGONO,* prédio militar dos Estados Unidos, e uma representação de sua área ocupada em uma região plana.



PROBLEMA 1

Um sensor de movimentos precisará ser instalado exatamente no centro do terreno.

1) Utilizando régua, esquadro e lápis marque exatamente o centro nomeando-o como *Ponto O* do pentágono regular em que será instalado o sensor.



2) Com a régua, encontre a medida do apótema desse pentágono. QUAL o valor dessa medida? (LEMBRETE: o apótema de um polígono regular corresponde à distância do centro do polígono até o ponto médio de um de seus lados).
3) Com a régua, informem a medida de cada lado do pentágono regular mostrado.
4) QUAL a medida da área do triângulo *OEA*? Como você pensou nela?
5) Encontre a medida da área do pentágono *ABCDE* explicando como vocês obtiveram essa área.

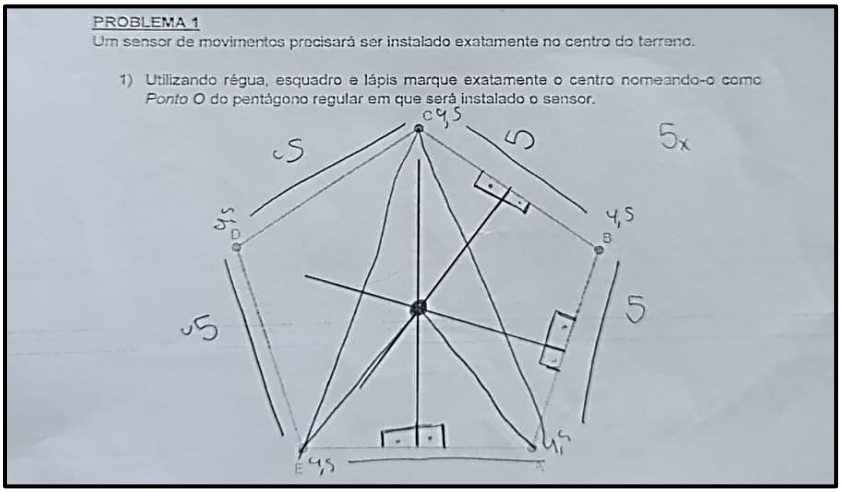
PROBLEMA 2

Pensem em um problema que envolva outro polígono regular e o resolvam. Em seguida, digam qual o nível de dificuldade deste problema.

7.4.1 Análise dos dados do Problema 1

Precisamos destacar que antes da realização das atividades do Problema 1, o professor-pesquisador retomou com os estudantes as definições de polígono regular e centro de um polígono regular, na aula do dia anterior. Entendemos que era necessário relembrar os estudantes a respeito destes conceitos, uma vez que os problemas propostos nessa atividade exigiriam a articulação desses conhecimentos estudados por eles no ano passado (8º ano do Ensino Fundamental). Sendo assim, as duplas conseguiram encontrar o centro do polígono regular utilizando o encontro das mediatrizes dos lados do polígono. Na Figura 53, apresentamos a resolução de uma das duplas para este problema.

Figura 53 – Problema 1 resolvido pela dupla D10 – Atividade 3

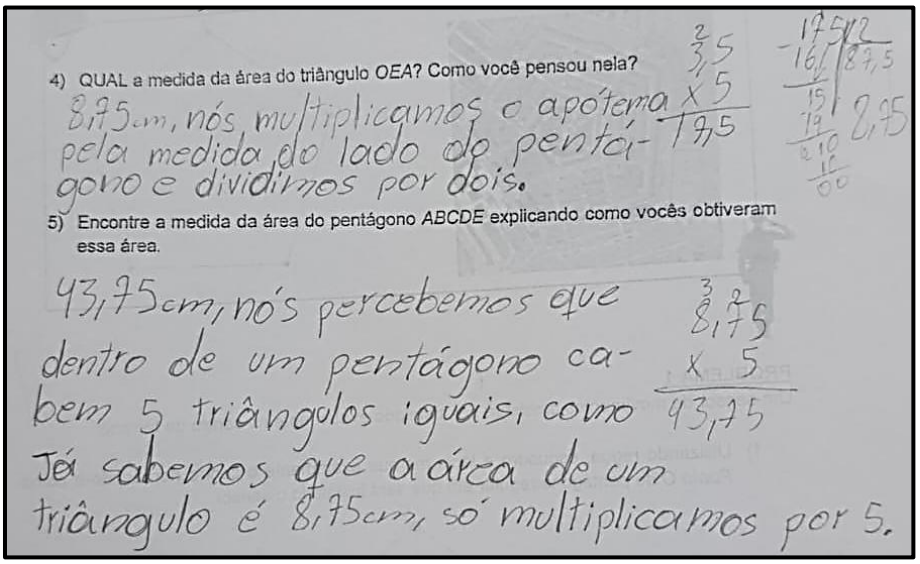


Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Observamos também, durante o processo de mediação, que a proposição desse problema aos estudantes permitiu que, durante a etapa de resolução, os conceitos a respeito de polígonos regulares fossem resgatados, compreendidos, e (re)avaliados pelo professor.

Além disso, observamos que alguns grupos conseguiram compreender um caminho para encontrar tanto a área do triângulo AOE, solicitada no item 4 do problema, como a área do pentágono *ABCDE,* solicitada no item 5 do mesmo problema, conforme podemos perceber nas respostas apresentadas nas figuras 54 e 55.

Figura 54 – Problema 1 resolvido pela dupla D5 – Atividade 3



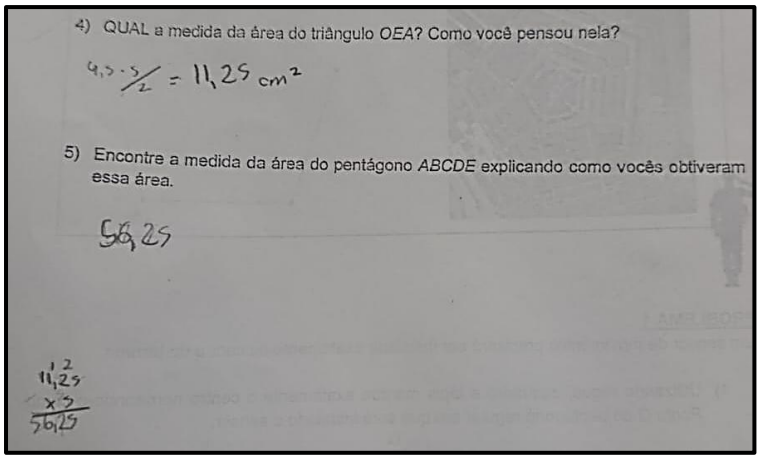
Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição das respostas apresentadas na imagem:

4) 8,75 cm, nós multiplicamos o apótema pela medida do lado pentágono e dividimos por dois.

5) 43,75 cm, nós percebemos que dentro de um pentágono cabem 5 triângulos iguais, como já sabemos que a área de um triângulo é 8,75 cm, só multiplicamos por 5.

Figura 55 – Problema 1 resolvido pela dupla D1 – Atividade 3



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Na plenária, as duplas expuseram a forma como encontraram os resultados, e a turma discutiu em grupo na busca pelo consenso. Ambas as duplas, D1 e D5, afirmaram que realizaram o mesmo procedimento, isto é, que encontraram a área do triângulo AOE e em seguida, multiplicaram por cinco, ao perceberem que o pentágono regular era composto por cinco triângulos iguais (congruentes). A conclusão de que os triângulos eram “iguais”, apenas devido ao desenho,

como foi exposto pelas duplas, nos permitiu compreender esse raciocínio como um tipo de prova caracterizada, conforme Balacheff (2000), no nível de exemplo genérico, uma vez que eles sabiam que os triângulos eram congruentes sem conseguir justificar o motivo para isso. Durante essa etapa a mediação do professor-pesquisador mostrou-se importante, na função de instigar a turma sobre as seguintes reflexões:

- "Se o procedimento era o mesmo, por que então as duplas encontraram respostas diferentes"?
- "Por que ambas as duplas puderam multiplicar por cinco a área do triângulo AOE e concluir que esta, então, seria a medida da área do pentágono"?
- "O que garante que os cinco triângulos centrais do pentágono regular são congruentes"?

Diante dessas mediações, os estudantes refletiram a respeito das práticas apresentadas pelas duplas **D5** e **D1**, e perceberam que os valores encontrados divergiam devido as imprecisões nas medições. Assim, na busca pelo consenso, a mediação do professor-pesquisador julgamos importante indagar:

Professor-pesquisador: O que podemos observar de comum ao analisarmos dois dos triângulos centrais?
Dupla D5: eles têm dois lados iguais... e o lado do polígono também.
Professor-pesquisador: E o ângulo central formado entre esses dois lados, é o mesmo?
Dupla D5: sim!
Professor-pesquisador: Vocês se recordam dos casos de congruência de triângulos? Existe algum caso que isso acontece?
Dupla D5: não lembramos...

Ao retomar os casos de congruência de triângulos com a turma, o professor-pesquisador observa que, naquele momento, a conclusão dos estudantes passa de uma *prova pragmática* para uma *prova conceitual*, conforme as perspectivas de Balacheff (2000). Este processo é muito rico e válido, uma vez que permitiu não só a revisão de outros conceitos, como também caracterizou uma oportunidade para melhorar a compreensão e a argumentação dos estudantes em relação a justificativa do porque os triângulos seriam congruentes, e assim teriam a mesma área. Cabe destacar que a avaliação perpassa todas as etapas do processo de ensino-aprendizagem na MEAAMaRP, promovendo a avaliação entre os pares (alunos/alunos, alunos/professor) na busca

pelo consenso quanto às estratégias de resolução do problema (Pironel; Onuchic, 2021). Conforme ressalta Martins (2024) em sua pesquisa:

> [...]quando há lacunas no processo de ensino-aprendizagem, a avaliação passa a ter um papel importante nesse processo e deve servir como um momento de sensibilidade do professor, na tomada de decisões, que poderá rever como serão as retomadas nos pontos em que existiu tal demanda [...] (Martins, 2024, p.145).

Desta forma, o professor-pesquisador viu uma oportunidade, na etapa da busca pelo consenso, de verificar se os estudantes compreenderam que as diferentes medições feitas pelas duplas foi o motivo que as levaram a encontrar valores diferentes para área do triângulo AOE e, consequentemente, do pentágono regular, ainda que utilizando a mesma estratégia. Vale dizer que o professor-pesquisador realizou mediações, durante a apresentação das respostas dos estudantes, junto à turma, para pensarem como poderiam complementar a resposta apresentada pela dupla **D1**, utilizando a justificativa de que os triângulos eram congruentes pelo caso de congruência de triângulos *LAL*, além de estimular a lembrarem do cuidado em relação às unidades de medida, como por exemplo na resolução da dupla **D5**.

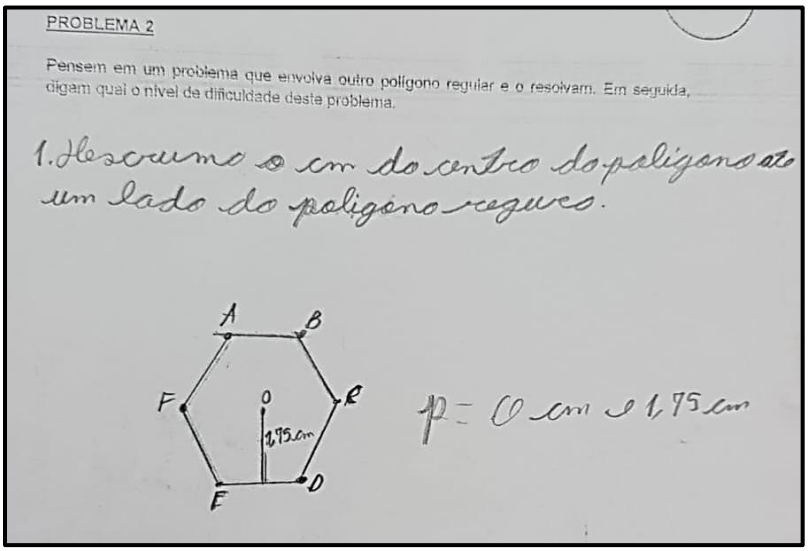
Novamente, vemos como o desenvolvimento destas atividades auxiliadas pelas etapas da MEAAMaRP favorecem a compreensão da importância da demonstração de tópicos, como a área de polígonos regulares.

7.4.2 Análise dos dados do Problema 2

O *Problema 2* foi entendido nessa atividade como a décima etapa da MEAAMaRP, no caso a Proposição de Problemas, e neste contexto, os problemas foram propostos pelos estudantes. Após formalizarmos a resposta do Problema 1, entregamos para cada estudante uma folha contendo o *prompt* do Problema 2 e pedimos para que eles levassem o problema para casa e no dia seguinte trouxessem a suas proposições.

Isso foi bastante interessante, pois revelou na nossa pesquisa que o *prompt* solicitado na atividade não estava de acordo com o que gostaríamos, uma vez que nosso objetivo era que os estudantes trouxessem problemas que envolvessem o cálculo da medida da área de um polígono regular, enquanto no *prompt* solicitava-se que a elaboração fosse "um problema que envolva outro polígono regular", sem mencionar que o problema deveria envolver o cálculo da medida da área de outro polígono regular. Por isso, tivemos alunos como os estudantes **E4** e **E17** que propuseram problemas que não envolviam o cálculo da medida da área de um polígono regular.

Figura 56 – Solução de E4 – Problema 2 – Atividade 3

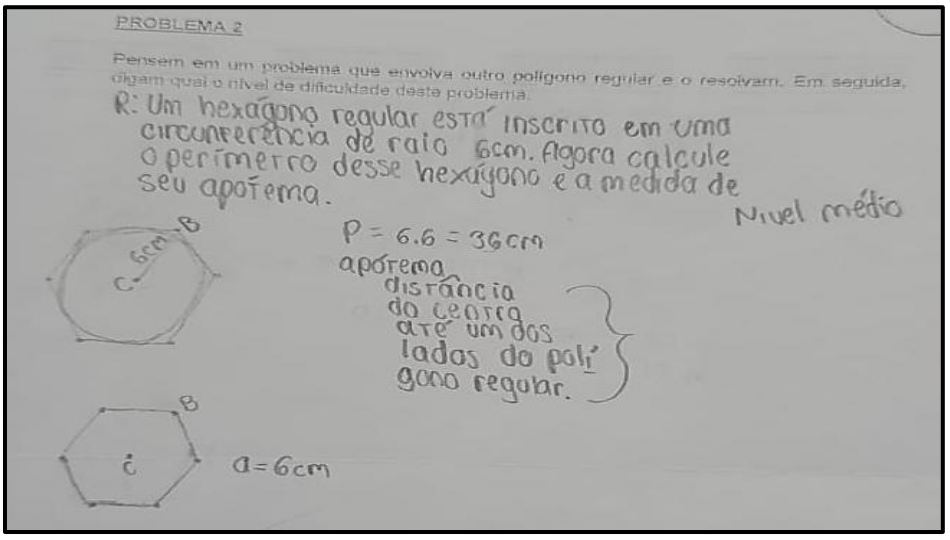


Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição do problema apresentado na imagem: Descubra o cm (a dupla referia-se a "distância") do centro do polígono até um lado do polígono regular.

O problema proposto pelo estudante **E17**, ainda que corresponda a expectativa solicitada no *prompt*, apresenta uma divergência entre sua enunciação e sua resolução.

Figura 57 – Problema elaborado por E17 – Problema 2 – Atividade 3



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

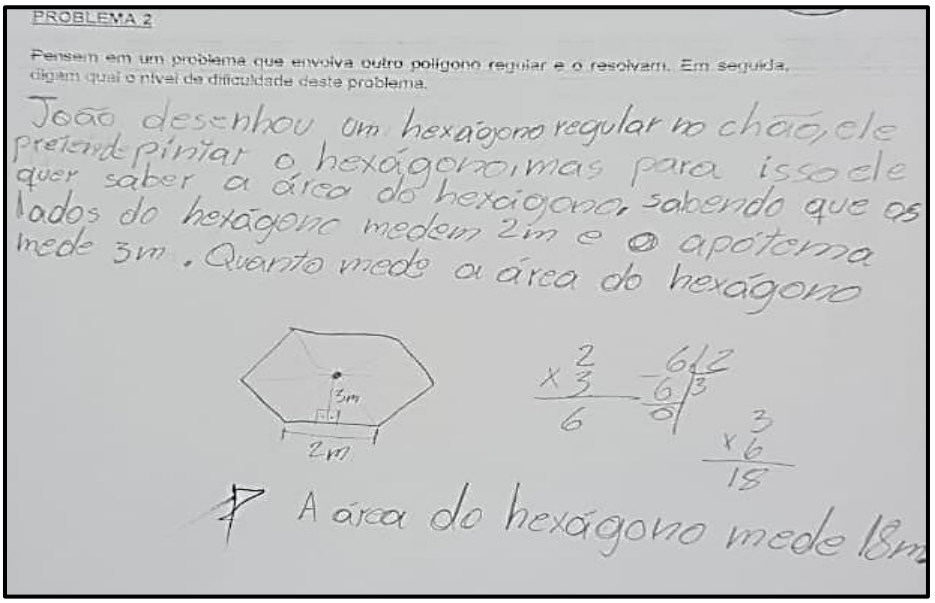
Transcrição do problema apresentado na imagem:

Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de raio 6 cm. Agora calcule o perímetro desse hexágono e a medida de seu apótema.

Podemos perceber que houve um equívoco em relação ao enunciado do problema e o desenho feito, uma vez que o desenho mostra um hexágono circunscrito e não inscrito na circunferência, como sugere o enunciado. Uma alternativa seria então outro desenho, que explicitasse o hexágono inscrito em uma circunferência e, a partir de argumentos e justificativas, concluir que o lado do hexágono também mediria 6 cm e assim seu perímetro teria medida igual à 36 cm. Além disso, destacamos que neste momento de realização das atividades os estudantes não tinham ainda os conhecimentos a respeito do teorema de Pitágoras ou trigonometria no triângulo retângulo, o que impedia que fosse encontrada a medida do apótema de forma indireta (sem realizar medições).

Ainda assim, a maioria dos estudantes apresentou um problema que envolvia o cálculo da medida área de outro polígono regular, e curiosamente, esse polígono regular era um hexágono regular, como por exemplo o problema proposto pelo estudante **E20**.

Figura 58 – Problema proposto por E20 – Problema 2 – Atividade 3



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição do problema apresentado na imagem:

João desenhou um hexágono regular no chão, ele pretende pintar o hexágono, mas para isso ele quer saber a área do hexágono. Sabendo que os lados do hexágono medem 2m e o apótema mede 3m, quanto mede a área do hexágono?

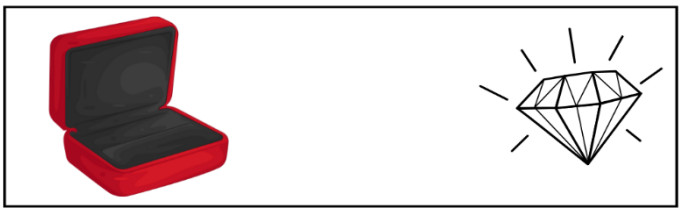
Destacamos a relevância da elaboração e proposição de novos problemas, etapa final da MEAAMaRP, como uma oportunidade ímpar de avaliação, para o professor, uma vez que permite ao docente compreender como e de que forma os estudantes estão compreendendo e relacionando o conhecimento desenvolvido; e autoavaliação, para os estudantes, proporcionando aos discentes

um momento de reflexão sobre sua própria aprendizagem, articulando-a a saberes prévios, curiosidades e reflexões criativas emergentes no processo de formulação e resolução de suas produções. Essa prática alinha-se às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a qual orienta que:

> é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (Brasil, 2018, p.299).

Na seção a seguir, discutimos sobre a Atividade 4, composta por dois problemas, sendo o *Problema 1* o nosso problema gerador, e o *Problema 2* uma etapa de formalização da área de um polígono regular.

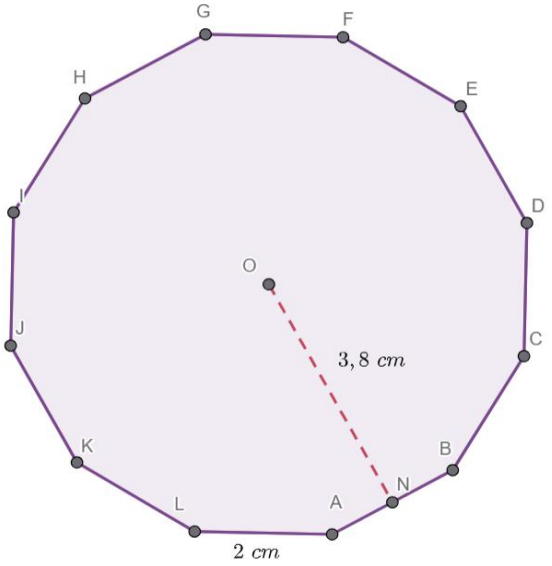
7.5 Atividade 4



PROBLEMA 1

Fermat quer presentear seu grande amor com um diamante, e para isso ele planeja construir uma caixa perfeita para o presente! Como a parte de cima do diamante se assemelha a um polígono regular de doze lados (dodecágono regular), ele gostaria de construir essa caixa com a base equivalente a essa parte de cima do diamante.

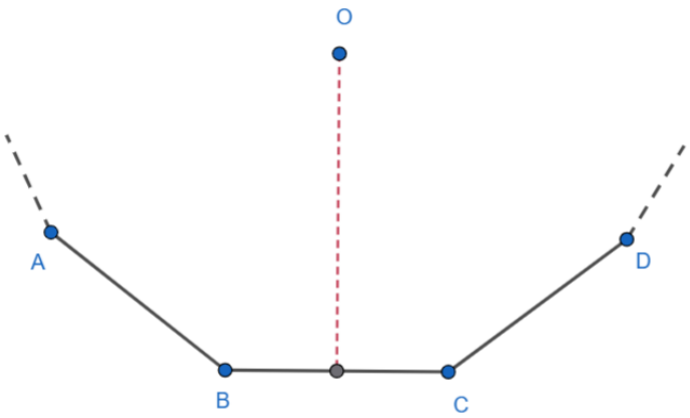
Na imagem mostrada abaixo temos o polígono *ABCDEFGHIJKL,* um dodecágono regular com centro O, e que representa a base da caixa de Fermat. Sabemos que a medida do apótema desse polígono é de 3,8 cm e a medida de cada lado dele é 2 cm.



DESCUBRAM qual a medida da área que a base da caixa de Fermat precisa ter, explicando como vocês encontraram esse valor.

PROBLEMA 2

Observem um recorte de um polígono regular com *n* lados (não sabemos quantos, apenas que $n \geq 3$).



Sabendo a medida do apótema desse polígono, o tamanho de um de seus lados, e a quantidade *n* de lados, COMO vocês poderiam calcular a área desse polígono?

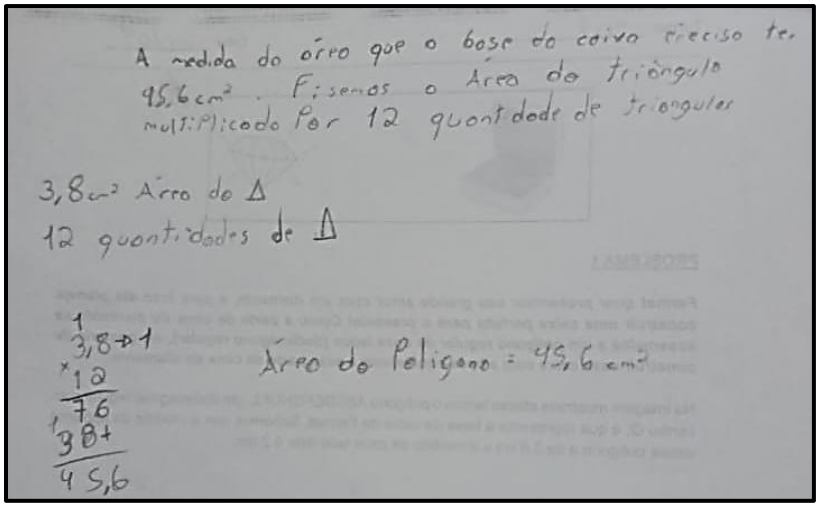
7.5.1 Análise dos dados do Problema 1

Nesta atividade as duplas apresentaram dificuldade no início, alegando que desconheciam qualquer relação que ajudasse a calcular a medida da área de polígonos com tantos lados como este. Novamente destacamos aqui o importante papel do professor como mediador no processo de construção do conhecimento pelos próprios estudantes, em que durante essas indagações, instigou as seguintes reflexões:

- “Mas utilizamos alguma relação/fórmula para calcular a área dos últimos polígonos?”
- “Como fizemos?”
- “Será que é possível aplicar o mesmo raciocínio? Como?”

Esta mediação também está baseada no que Polya (1995) já descreveu como estratégias para resolver um problema, além de colaborar com as ideias discutidas por Allevato e Onuchic (2021) de que o professor deve incentivar e favorecer o processo de ensino-aprendizagem e a construção do conhecimento pelos estudantes, a partir de intervenções que os auxiliem a resolver os problemas. Diante disso, os estudantes conseguiram resolver o problema, como mostramos abaixo as soluções encontradas pelas duplas **D11** e **D1**, respectivamente.

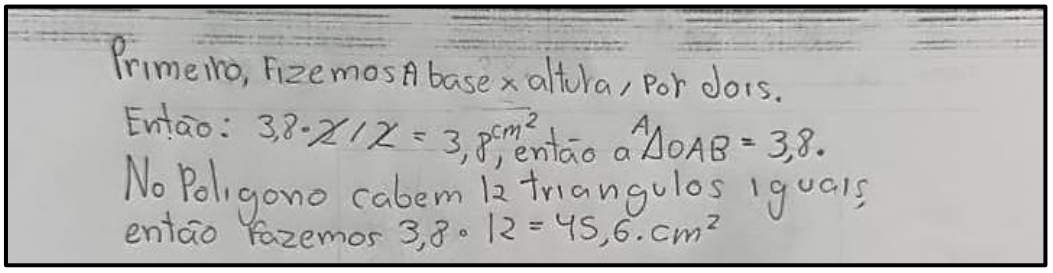
Figura 59 – Resposta da dupla D11 – Problema 1 – Atividade 4



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: A medida da área que é a base da caixa precisa ter 45,6 cm². Fizemos a área do triângulo, multiplicado por 12 quantidades de triângulos.

Figura 60 – Resposta da Dupla D1 – Problema 1 – Atividade 4



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

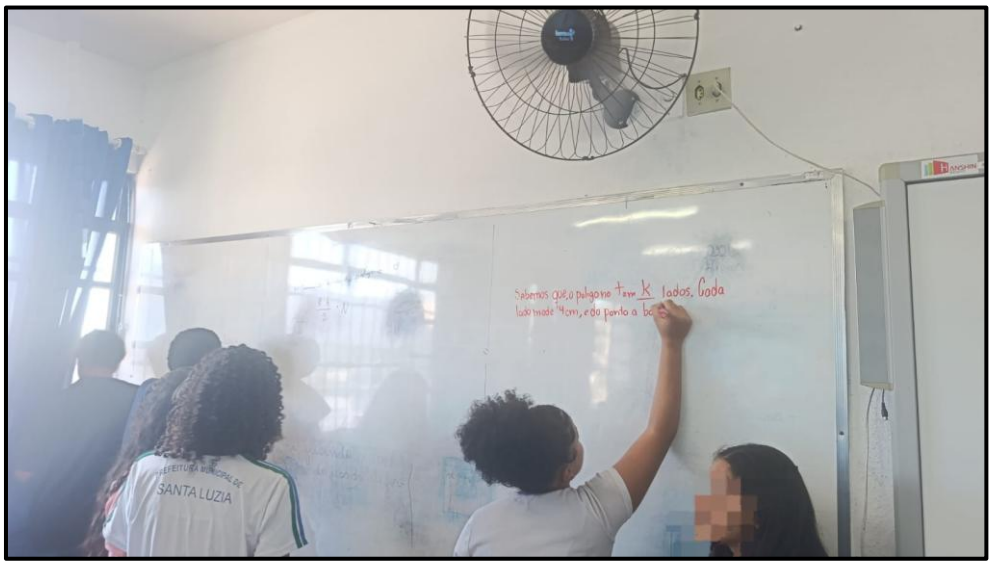
7.5.2 Análise dos dados do Problema 2

Ao analisarmos o desenvolvimento das etapas da MEAAMaRP, como a resolução em grupo, a busca pelo consenso e a plenária, não apenas engajaram os estudantes anteriormente retraídos, mas também aprimoraram de forma significativa tanto a comunicação escrita, quanto a comunicação oral dos estudantes. Embora ainda persista a presença de eventuais equívocos, a evolução na capacidade de explicitar o raciocínio é fundamental para que os alunos compreendam as estratégias próprias e de seus pares. Compreendemos que este avanço é extremamente importante para que eles possam compreender os próprios métodos e caminhos escolhidos por eles e pelos colegas para encontrar a solução, além de favorecer o processo de letramento matemático, sendo este um dos compromissos na etapa do Ensino Fundamental, conforme orienta a BNCC, que entende esse processo:

> como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (Brasil, 2018, p.266).

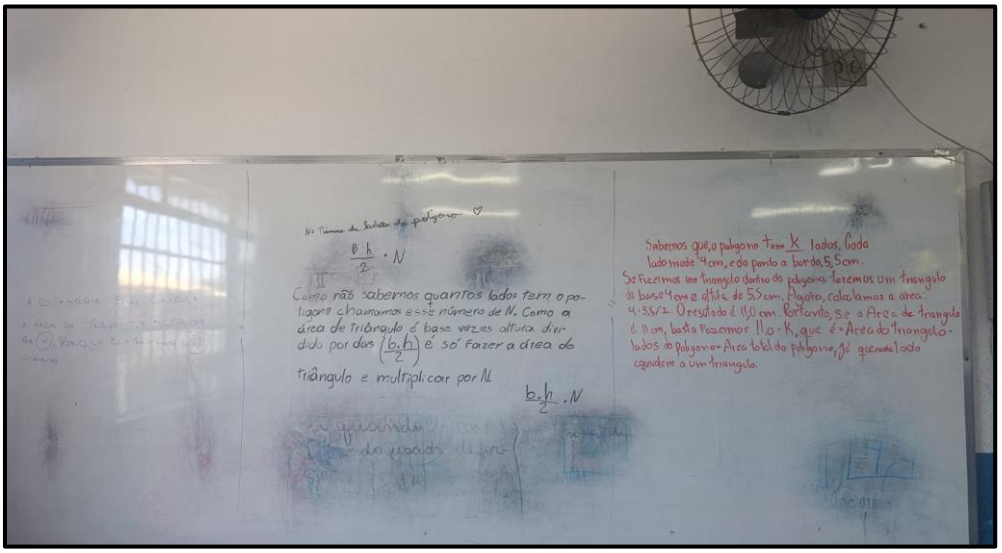
Observamos também que uma das formas que contribuiu para o avanço da escrita na resolução dos problemas, foi a etapa da busca pelo consenso, na qual selecionamos, em cada atividade, duas ou três duplas para escreverem suas respostas no quadro, e em seguida discutirem em plenária junto aos colegas. Salientamos que, inicialmente, os estudantes mostravam-se tímidos e temerosos em ir ao quadro escrever suas resoluções. No entanto, no decorrer das atividades notamos que esta estratégia favoreceu, não apenas o desenvolvimento da escrita e do letramento matemático deles (Brasil, 2018), mas também notamos uma postura mais participativa por parte de alguns, que em aulas comuns não participavam ou se mostravam até mesmo apáticos em relação as aulas de Matemática. A seguir apresentamos as imagens coletadas durante a solução desse problema.

Figura 61 – Busca pelo consenso – Atividade 4



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Figura 62 – Busca pelo consenso – Atividade 4



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição das respostas apresentadas na imagem:

D11: A estratégia seria calcular a área do triângulo e multiplicar por **n**, porque ele [polígono] tem n lados e **n** triângulos.

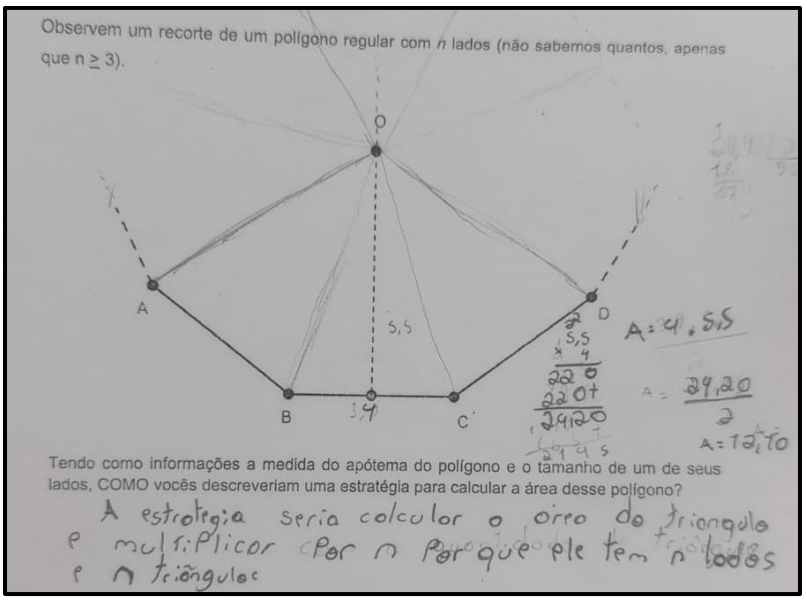
D5: Como não sabemos quantos lados tem o polígono chamamos esse número de N. Como a área do triângulo é base vezes altura divido por dois é só fazer a área do triângulo multiplicado por N ($\frac{b \cdot h}{2} \cdot N$).

D10: Sabemos que o polígono tem K lados. Cada lado mede 4 cm, e do ponto [centro] a borda é 5,5 cm. Se fizermos um triângulo dentro do polígono, teremos um triângulo de base 4 cm e altura 5,5cm. Então calculamos a área: $4 \cdot 5{,}5/2$. O resultado é 11,0 cm. Portanto, se a Área do triângulo é 11cm, basta fazermos

11,0 · K, que é = (Área de um triângulo) · lados do polígono = Área total do polígono, já que cada lado corresponde a um triângulo.

Destacamos os registros feitos pelas duplas **D11, D5** e **D10** em que eles conseguiram entender como resolver o problema, ainda que de formas diferentes. As duplas **D11** e **D10** tiveram raciocínio inicial semelhante, fazendo medições na figura, o que não foi solicitado para o problema, uma vez que eles precisavam descrever como calculariam a área desse polígono regular qualquer. Ainda assim, o processo que indicaram através do texto correspondia a um processo coerente para determinar a área de um polígono regular qualquer.

Figura 63 – Resposta da Dupla D11 – Problema 2 – Atividade 4

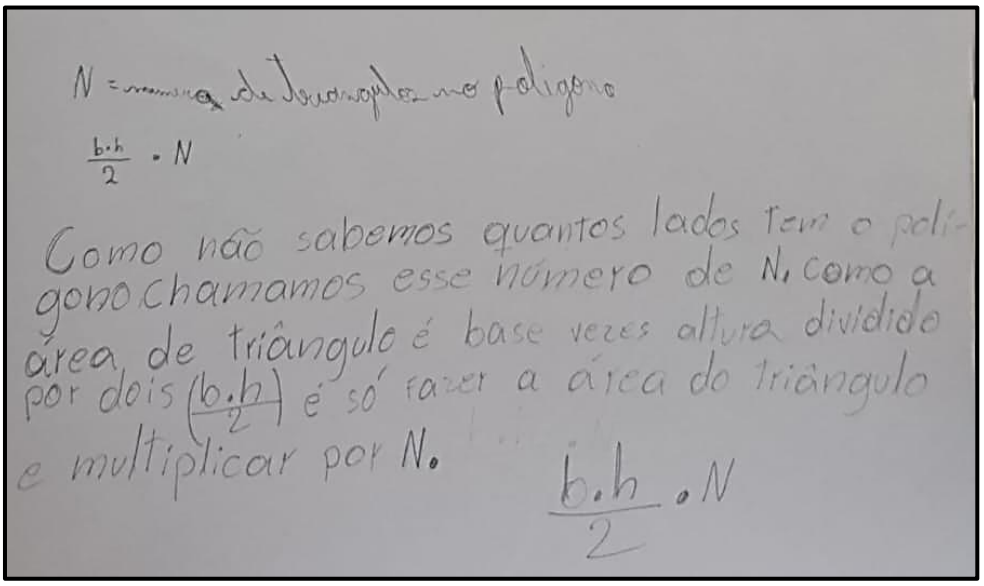


Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: A estratégia seria calcular a área do triângulo e multiplicar por *n* porque ele tem *n* lados e *n* triângulos.

Compreendemos que a solução encontrada pela dupla **D11** corresponde a etapa do *Exemplo Genérico* descrito por Balacheff (2000) em que eles, a partir dos exemplos já realizados nas outras atividades, conseguem generalizar a ideia do que pode ser feito para determinar a área desse polígono. Já a dupla **D5** conseguiu escrever uma expressão que generalizaria a área do polígono regular, utilizando as mesmas ideias das duplas **D11** e **D10,** mas sem necessariamente recorrer a realização de medições na figura.

Figura 64 – Resposta da Dupla D5 – Problema 2 – Atividade 4



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Como não sabemos quantos lados tem o polígono, chamamos esse número de N. Como a área de triângulo é base vezes altura dividido por dois, é só fazer a área do triângulo e multiplicar por N.

Durante a plenária, o professor-pesquisador solicitou que a dupla explicitasse quais elementos correspondiam à base e à altura do triângulo em questão. Em resposta, os discentes identificaram a base como o lado de medida L do polígono regular e a altura como o apótema de medida a. Essas mediações e discussões conduzidas nesta etapa, colaboraram bastante para que durante a formalização a turma conseguisse compreender a relação para o cálculo da área de polígonos regulares[32], que mais tarde seria importante para compreender a demonstração para o cálculo da área do círculo, que discutiremos na próxima seção. Dessa forma, a partir das análises das resoluções feitas pelos estudantes, conseguimos identificar indícios da transição entre os tipos de provas, explicitada por Balacheff (2000), das *provas pragmáticas* para as *provas concetuais*, ao observarmos a evolução das resoluções e soluções apresentas nas atividades dos estudantes, o que mais uma vez mostra como a realização destas atividades utilizando a MEAAMaRP aliada a atividades que promovam provas e demonstrações podem favorecer a compreensão e o ensino-aprendizagem de Matemática. Tal fato fica evidenciado quando compreendemos que o processo percorrido pelos estudantes para a demonstração da relação encontrada para área de polígonos regulares corresponde ao que Gila Hanna (1995) caracteriza como um tipo de *prova que explica*, pois este processo possibilitou a explicação e compreensão da relação encontrada para o cálculo

[32] Área de um polígono regular pode ser obtida entre o produto do semiperímetro e o apótema do polígono.

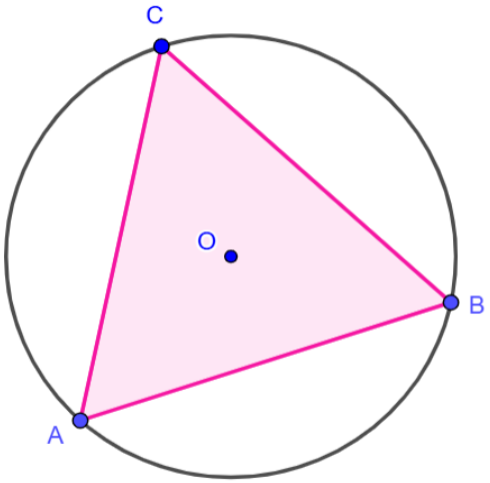
da medida da área dos polígonos regulares. Na sequência, apresentamos e analisamos os dados relativos à Atividade 5.

7.6 Atividade 5

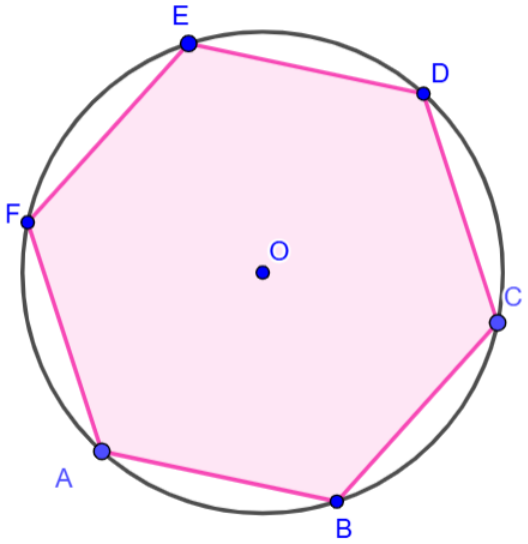
A Atividade 5 é composta por dois problemas, sendo o objetivo do *Problema 1* que os estudantes percebam que à medida que aumentamos o número de lados de um polígono regular inscrito sua área ocupa cada vez mais a área do círculo em que está inscrito. Já no *Problema 2* nosso objetivo é mostrar, a partir do método da exaustão de Arquimedes, uma relação para determinar a medida da área do círculo.

PROBLEMA 1

Observem o triângulo equilátero ABC, inscrito na circunferência de centro O, mostrado na figura a seguir.

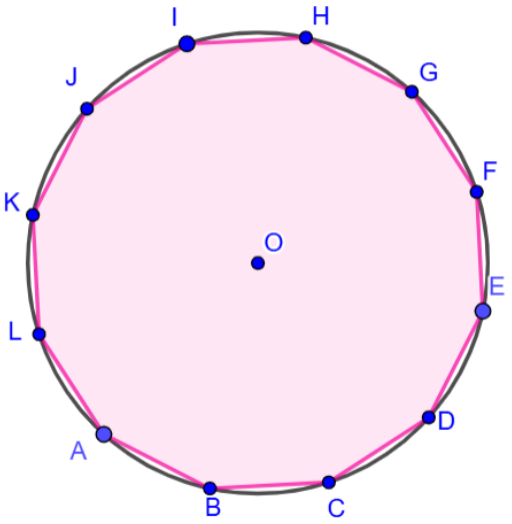


A) Encontrem a medida do raio dessa circunferência.
B) Utilizando o compasso, régua e esquadro, encontre o hexágono regular *ADBECF* inscrito nessa mesma circunferência. Em seguida tracem o apótema desse hexágono.
C) Agora desenhem o polígono regular de doze lados inscrito na mesma circunferência de forma que seis dos seus vértices sejam os pontos: *A, B, C, D, E e F*.



D) Em seguida tracem o apótema desse polígono.

E) Agora, desenhem o polígono regular de vinte e quatro lados inscrito na mesma circunferência de centro O, a partir do dodecágono mostrado abaixo.



F) Tracem o apótema do polígono encontrado.

G) O que vocês podem perceber após desenhar os três polígonos?

H) Se começarmos a aumentar o número de lados de um polígono sem parar — passando de 6 para 12, de 12 para 24, e assim por diante, até um número muito grande de lados, o que vocês acham que aconteceria com o formato dele? Com qual figura geométrica ele acabaria se parecendo?

I) E em relação ao apótema, com qual elemento da circunferência ele está parecendo.

PROBLEMA 2

No *Problema 1* desta atividade concluímos que a representação visual de um polígono regular que tem uma quantidade de lados tão grande que não conseguimos contar pode ser próxima da representação de um círculo. Utilizando a relação encontrada para calcular a área de um polígono regular, ou seja,

$$Área\ polígono\ regular = p \times a,$$

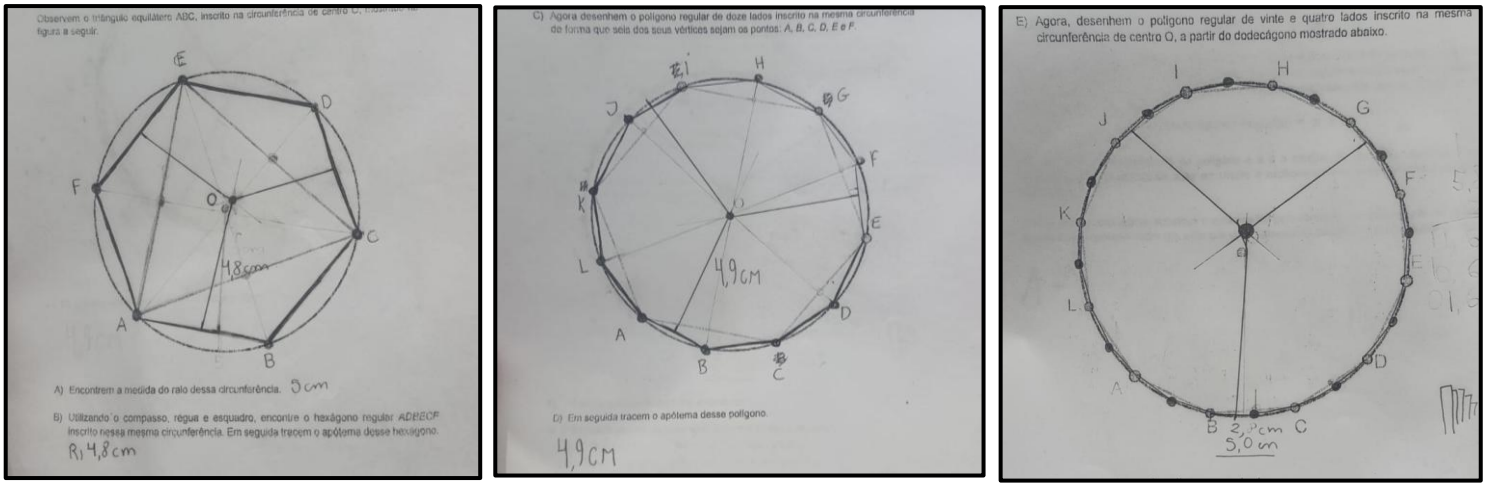
em que ***p*** é o semiperímetro do polígono e ***a*** é a medida do apótema, escrevam uma expressão para o cálculo da área do círculo e expliquem como vocês encontraram essa expressão.

DICA: Na fórmula acima, substitua o apótema (***a***) pelo elemento correspondente no círculo, e substitua o semiperímetro (***p***), pelo que seria equivalente ao semiperímetro desse círculo.

7.6.1 Análise dos dados do Problema 1

Assim como no desenvolvimento das atividades anteriores, durante a realização desse problema, o professor-pesquisador foi mediando as etapas de construção do polígono regular junto aos estudantes. Nesse contexto, a maioria das duplas, ainda que com as dificuldades de utilizar a régua e demarcar as mediatrizes, conseguiram construir os polígonos regulares solicitados. Destacamos as soluções apresentadas pela dupla **D10** nas imagens abaixo.

Figura 65 – Respostas da Dupla D10 – Problema 1 – Atividade 5

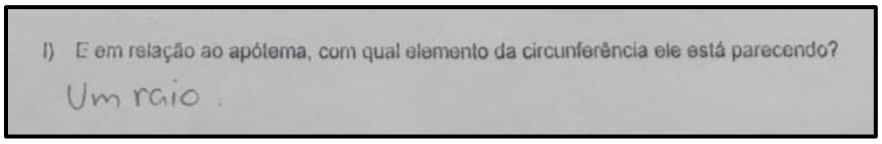


Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Essa dupla percebeu, durante a resolução, que ao aumentarmos a quantidade de lados do polígono regular, a medida do apótema indicado em cada uma das imagens ficava cada vez mais

próximo da medida do raio, como pode ser evidenciado pelas imagens mostradas, além de responderem ao item (i) deste problema com esta constatação.

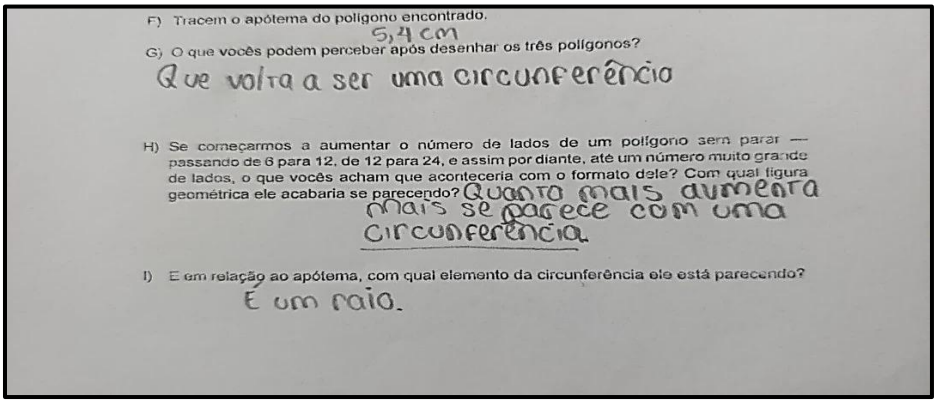
Figura 66 – Resposta da dupla D10 ao item (I) – Problema 1 – Atividade 5



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

As duplas conseguiram compreender que à medida que o número de lados do nosso polígono crescia, cada vez mais ele se parecia com a circunferência na qual estava inscrito, e assim conseguiram imaginar que para um número de lados tão grande quanto quisermos, o polígono ficava quase indistinguível da circunferência, como reforçam as respostas dadas pelos estudantes mostradas abaixo.

Figura 67 – Respostas da dupla D9 – Problema 1 – Atividade 5



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

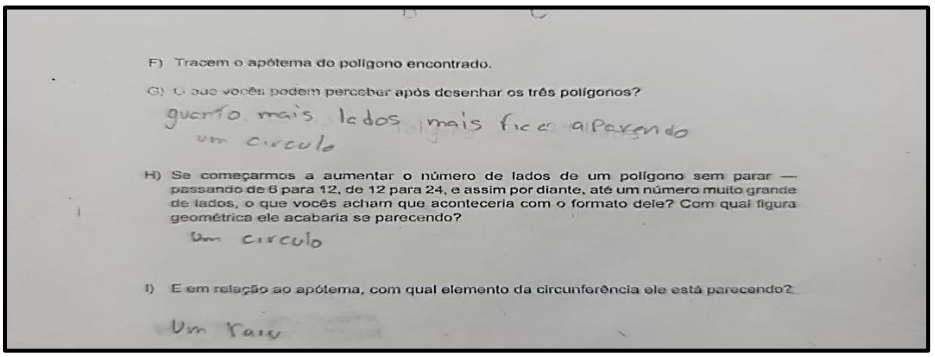
Transcrição das respostas apresentadas na imagem:

G) Que volta a ser uma circunferência.

H) Quanto mais aumenta, mais se parece com uma circunferência.

I) É um raio.

Figura 68 – Respostas da dupla D6 – Problema 1 – Atividade 5



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição das respostas apresentadas na imagem:

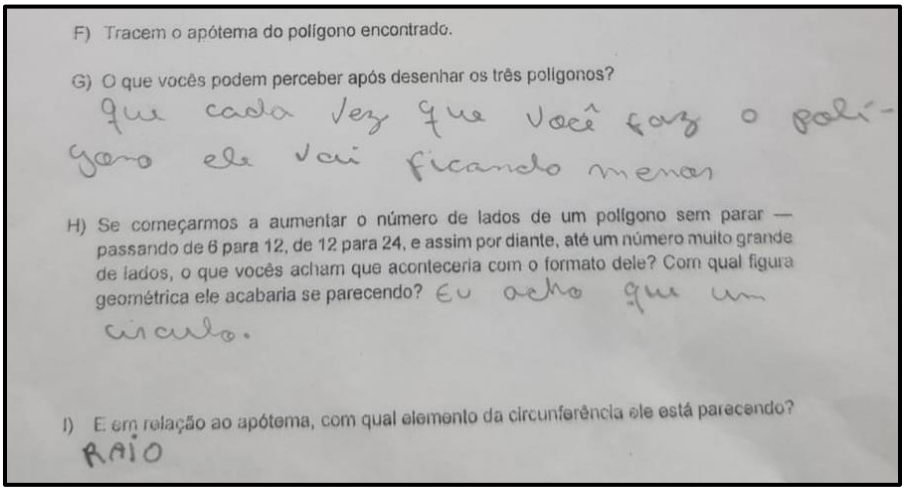
G) Quanto mais lados mais fica parecendo um círculo.

H) Um círculo.

I) Um círculo.

Destacamos também a resposta encontrada pela dupla **D7** durante a busca pelo consenso em relação item (g). Eles afirmaram que o polígono vai "ficando menor" à medida que o número de lados aumentava.

Figura 69 – Resposta da dupla D7 – Problema 1 – Atividade 1



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição das respostas apresentadas na imagem:

G) Que cada vez que você faz (aumentar o número de lados) o polígono, ele (o tamanho do lado) vai ficando menor.

H) Eu acho que um círculo.

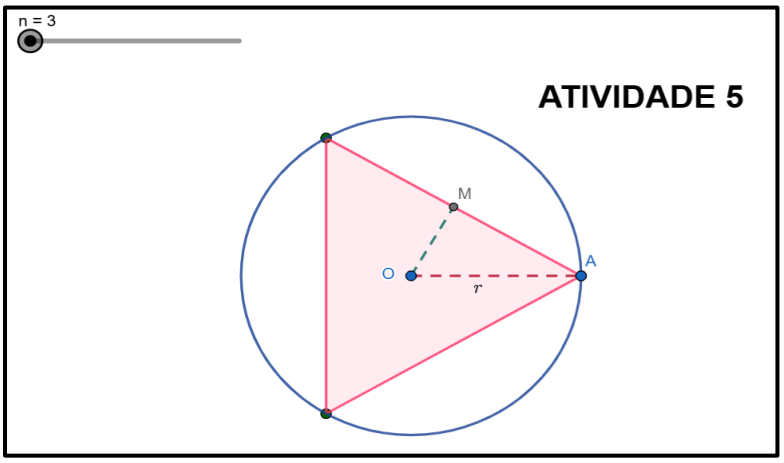
I) Raio.

Durante a busca pelo consenso procuramos entender o que eles estavam afirmando ao dizer que o polígono ficava menor, visto que no item (h) eles perceberam que polígono se aproximava

de um círculo. Ao solicitar que a dupla expusesse seu pensamento na plenária, ela conseguiu explicitar que não estava se referindo a área ocupada pelo polígono, mas sim ao tamanho do lado do polígono que diminuía sempre que aumentávamos a quantidade de lados. Essa constatação foi interessante e permitiu que os próprios estudantes reavaliassem sua escrita e as outras duplas percebessem também que isto estava ocorrendo.

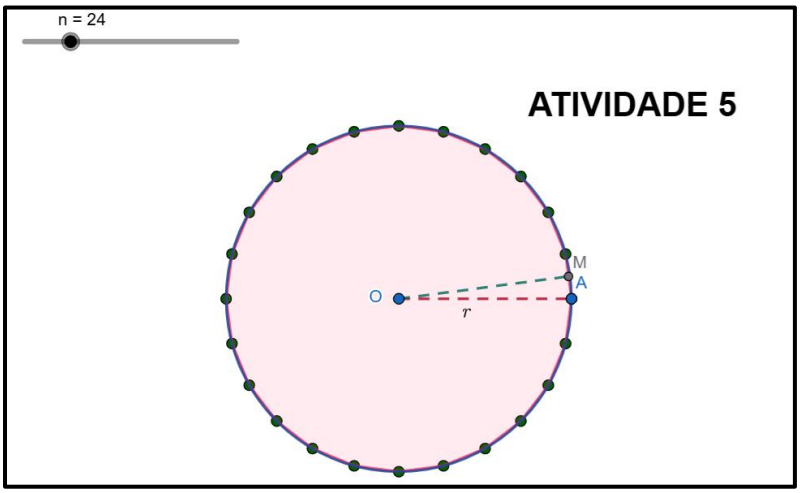
Ao fim da plenária, o professor-pesquisador formalizou o conteúdo com o auxílio de uma construção feita no app *GeoGebra*, disponibilizada neste link, em que os estudantes puderam perceber que à medida que o número de lados aumenta, o apótema fica cada vez mais indistinguível do raio da circunferência, como mostramos abaixo.

Figura 70 – Polígonos regulares inscritos na Circunferência – *GeoGebra* (1)



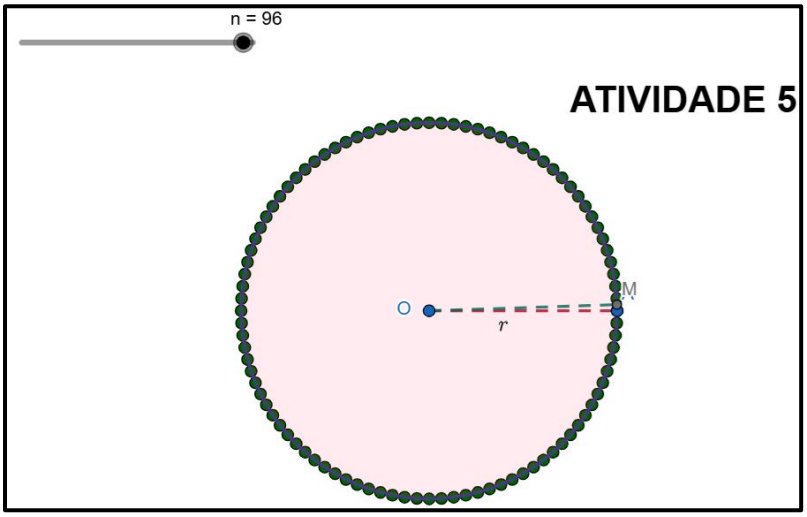
Fonte: *GeoGebra* (2026).

Figura 71 – Polígonos regulares inscritos na Circunferência – *GeoGebra* (2)



Fonte: *GeoGebra* (2026).

FIGURA 64 – Polígonos regulares inscritos na Circunferência – *GeoGebra* (3)



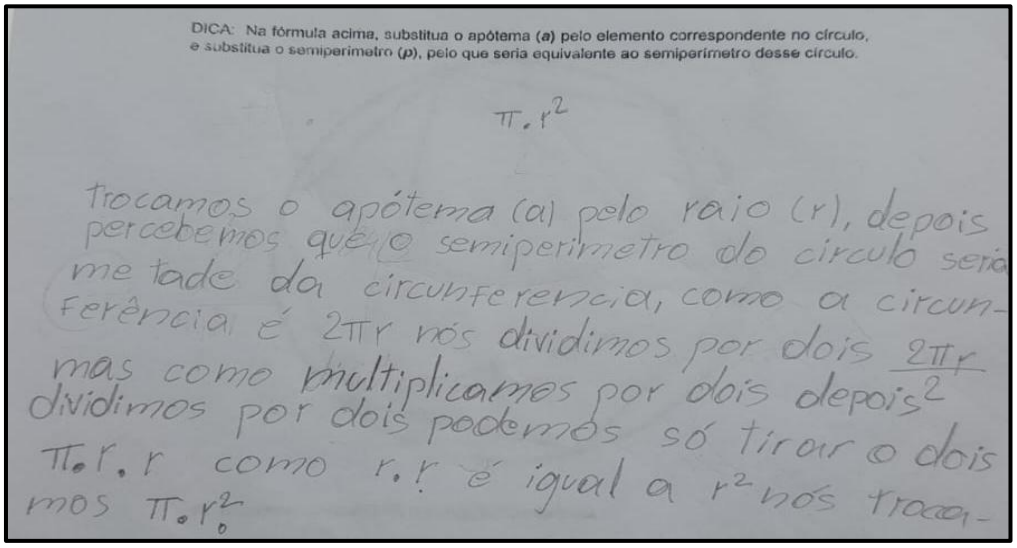
Fonte: *GeoGebra* (2026).

A análise e a discussão dessa atividade revelaram um momento de profunda abstração matemática quando os estudantes constataram que, a cada duplicação sucessiva do número de lados do polígono inscrito, a área da figura regular se aproximava cada vez mais da área do círculo. Essa percepção, ainda que expressa de maneira intuitiva e empírica, carrega, na visão do professor-pesquisador, a essência do conceito de limite e do método da exaustão (Arquimedes), demonstrando que ideias sofisticadas como as do Cálculo Diferencial e Integral podem e devem ser mobilizadas e compreendidas por estudantes ainda no Ensino Fundamental, desde que intencionalmente construídas e acessíveis. Em seguida, discutimos as análises dos dados coletados no Problema 2.

7.6.2 Análise dos dados do Problema 2

Neste problema estávamos interessados que os estudantes conseguissem encontrar a relação para o cálculo da área do círculo de raio r, isto é, queríamos que eles percebessem que a medida da área desse círculo seria $\pi \cdot r^2$, ou algo parecido com isso. Percebemos que muitos deles encontraram dificuldades na hora de resolver o problema, mesmo com o *prompt* resgatando a relação da área de um polígono regular, e a dica sugerindo que eles substituíssem o apótema e o semiperímetro pelas aproximações equivalentes constatadas no problema anterior. Ainda assim, as duplas **D5** e **D11** conseguiram encontrar a relação, como mostramos nas imagens abaixo.

Figura 72 – Resposta da dupla D5 – Problema 2 – Atividade 5

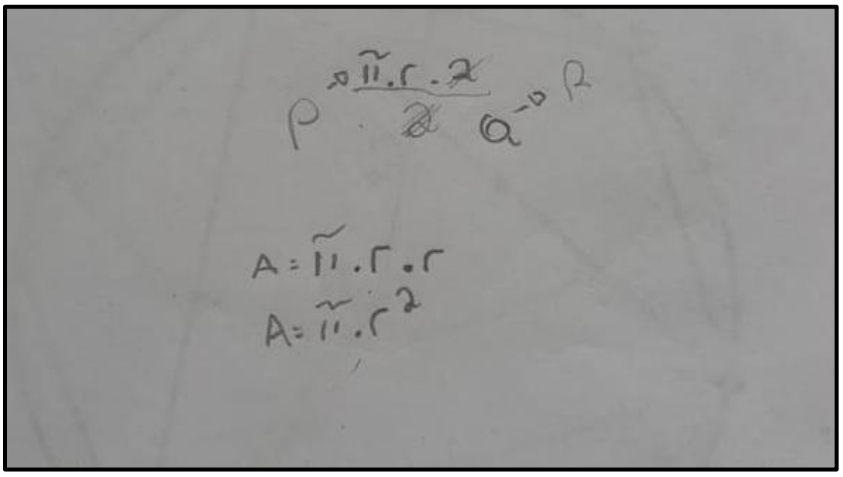


Fonte: arquivos da pesquisa (2026)

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Trocamos o apótema (a) pelo raio (r), depois percebemos que o semiperímetro do círculo seria metade da circunferência. Como a circunferência é $2\pi r$, nós dividimos por dois, mas como

multiplicamos por dois, podemos só tirar o dois: $\pi \cdot r \cdot r$. Como $r \cdot r$ é igual a r² nós trocamos por $\pi \cdot r^2$.

Figura 73 – Resposta da dupla D11 – Problema 2 – Atividade 5



Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Ainda que a maioria das duplas não conseguiu encontrar a solução para o problema, durante a plenária as duplas **D5** e **D11** apresentaram os raciocínios encontrados e as outras duplas conseguiram compreender e concordar que àquela seria a relação procurada para a medida da área do círculo. O raciocínio apresentado pelas duplas aproxima-se do que Balacheff (2000) destaca como prova conceitual, onde podemos perceber que as duas duplas conseguiram generalizar e compreender uma relação para a medida da área do círculo. Novamente, o processo de demonstração percorrido na solução do problema caracterizou o que Gila Hanna (1995) afirma ser uma prova que explica, pois os estudantes conseguem perceber como e porque essa relação agora é válida. Ressaltamos também mais uma vez que a partir da realização das etapas da MEAAMaRP ocorreu o favorecimento da compreensão por parte da turma da demonstração realizada. Ademais, quando na plenária são expostas essas ideias e as outras duplas compreendem e entendem porque de fato esta relação é válida, nos deparamos com as outras funções da demonstração, além da explicação, estabelecidas por Hanna e De Villiers (2008) como por exemplo a *sistematização, a descoberta* e a *comunicação*.

A Figura 74 sintetiza os tópicos de Geometria plana que foram demonstrados, sob as concepções das Balacheff (2000), Hana (1995), De Villiers (2001), Nasser e Tinoco (2003), a partir das atividades desenvolvidas através da MEAAMaRP e identificados durante a análise das atividades propostas nessa pesquisa.

Figura 74 – Demonstrações encontradas nas Atividades Elaboradas



Fonte: elaborado pelos autores (2026).

Ressaltamos ainda o quão importante essa sequência de atividades foi, ao permitir que os estudantes compreendessem que essas relações matemáticas e outras que foram demonstradas e retomadas durante a realização das atividades não são aleatórias, mas sim decorrentes de um processo de encadeamentos e raciocínios que corroboram para a conclusão de algo que estamos interessados em investigar. Vale destacar também a importância que as etapas da MEAAMaRP promoveram para provocar a participação efetiva dos estudantes neste processo, permitindo que eles fizessem as demonstrações, saindo de um conhecimento passivo e as vezes até apático, para um protagonismo em relação ao fazer matemática. Diante disso, constatamos mais uma vez que a utilização da MEAAMaRP favoreceu o caminho para a demonstração, a construção e a compreensão das relações e conceitos de Geometria Plana, particularmente favorecendo o ensino-aprendizagem de círculos e circunferências.

Após vivenciarem o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, os estudantes foram convidados a responder um questionário de Feedback, cujas respostas analisamos e discutimos a seguir.

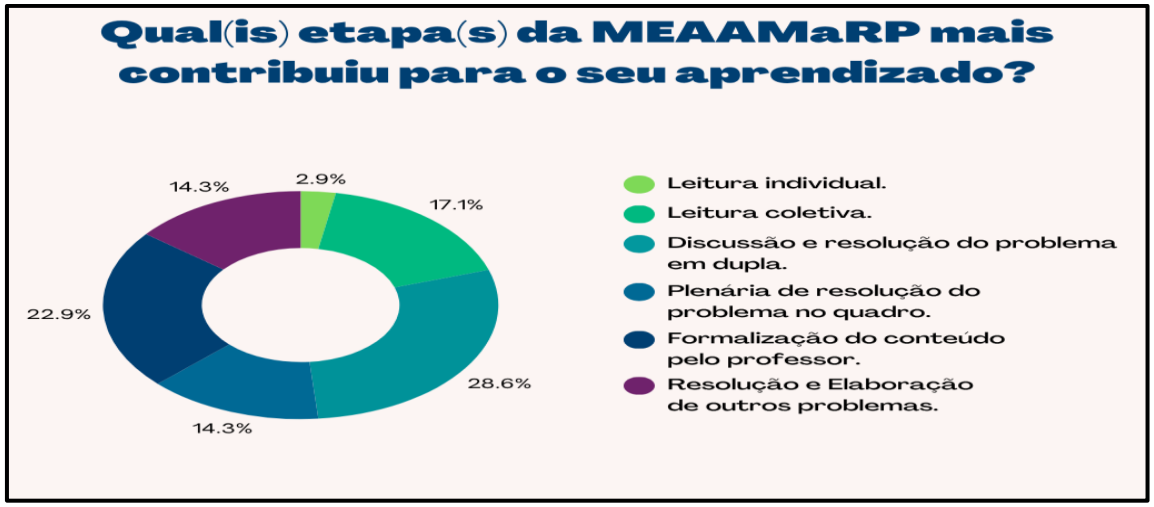
7.7 Questionário de *feedback*

Os dados analisados no questionário de *feedback*[33] nos permitiram compreender como a MEAAMaRP pode favorecer o processo de ensino-aprendizagem dos participantes da pesquisa. Em relação a primeira pergunta, todos os estudantes responderam enfaticamente que a MEAAMaRP contribui para o aprendizado de círculos e circunferências, obtendo relatos como os dos estudantes:

E15: “Sim, porque foi diferente, e foi muito bom”.
E17: “Sim, ajudou a entender melhor sobre o conteúdo”.
E7: “ Deu mais motivação pra fazer as atividades, e ajudou a guardar melhor o que aprendemos nessas aulas”.

A respeito das etapas da MEAAMaRP, selecionamos seis delas e perguntamos aos estudantes qual(is) delas eles acreditavam que foi(ram) mais importante(s) para contribuir no processo de aprendizagem. As respostas apresentadas pelos estudantes foram transformadas no gráfico mostrado apresentado na Figura 75.

Figura 75 – Gráfico com a resposta das etapas mais importantes da MEAAMaRP na perspectiva dos estudantes



Fonte: arquivos da pesquisa (2026)

Os estudantes elegeram a discussão e a resolução do problema em dupla, bem como a formalização do conteúdo pelo professor como as etapas que mais contribuíram para a aprendizagem. Isso também foi expresso por eles, quando perguntamos sobre os pontos positivos e negativos da aplicação da MEAAMaRP. Um dos estudantes nos escreveu que: *“o ponto positivo*

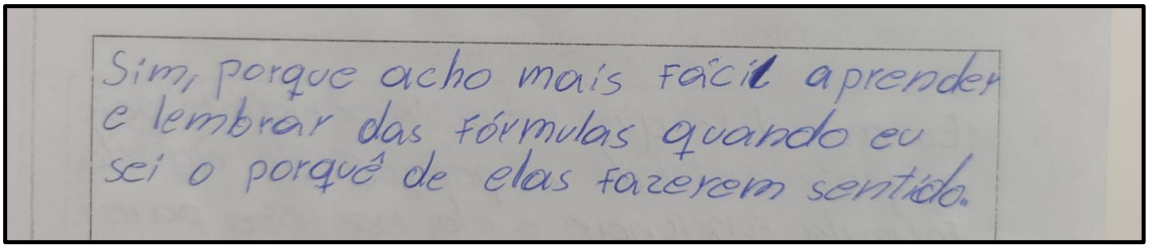
[33] Apêndice C.

é discutir as respostas dos problemas em grupo, porque assim nós podemos ver o ponto de vista e o raciocínio de cada pessoa". Acreditamos que essa configuração, em que os alunos são colocados em duplas para resolver problemas os motivou e despertou interesse nos estudantes, tanto em compartilhas ideias e pensamentos, quanto em relação a validação e a construção do conhecimento coletivo.

Solicitamos também que os estudantes identificassem quais das cinco atividades realizadas mais apreciaram e consideraram úteis para o processo de ensino-aprendizagem. As duas opções mais votadas foram as Atividades 2 e 3, relativas à exploração do número π e à área do pentágono regular, respectivamente. Na Atividade 2, muitos destacaram a importância da exploração matemática, enquanto na Atividade 3 ressaltaram a relevância do raciocínio construído como estratégia para resolver as Atividades 4 e 5.

Na questão 5 do questionário, perguntamos aos estudantes se eles consideraram importante aprender as demonstrações dos tópicos relacionados a circunferências e círculos presentes nos problemas. Como resposta, os estudantes disseram que sim, uma vez que, para eles era mais fácil lembrar das relações quando entendiam o porquê dessas relações fazerem sentido, como mostra o relato a seguir.

Figura 76 – Resposta do estudante E20 ao Item 5 do Questionário de *Feedback*

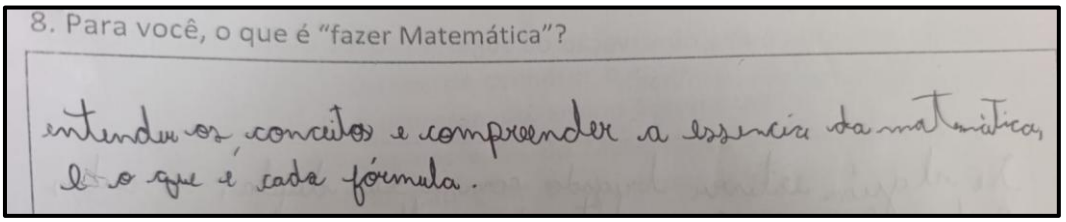


Fonte: arquivos da pesquisa (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Sim, porque acho mais fácil aprender e lembrar das fórmulas quando eu sei o porquê de elas fazerem sentido.

O relato do estudante **E20** nos revela que a sequência de atividades aqui desenvolvidas estimulou que eles compreendessem uma das funções da demonstração, conforme Hanna e De Villiers (2008), que seria a explicação e a compreensão do porque as relações fazem sentido e podem ser utilizadas. Além disso, percebemos que ao perguntarmos novamente, no item 8 desse questionário, "Para você o que é 'fazer Matemática'?", percebemos que, mesmo com várias respostas de que fazer Matemática seria fazer contas, lidar com números e figuras complexas, tivemos alguns relatos que apresentam uma diferença em relação ao primeiro, como mostramos nas figuras seguintes.

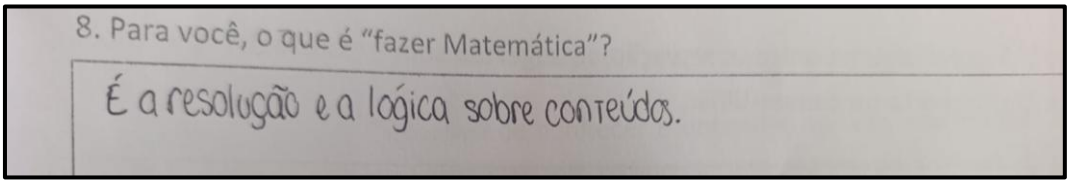
Figura 77 – Resposta do estudante E7 ao item 8



Fonte: arquivos dos pesquisadores (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Entender os conceitos e compreender a essência da matemática e o que é cada fórmula.

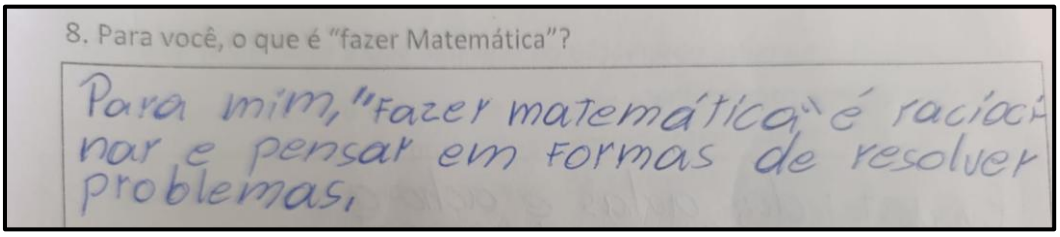
Figura 78 – Resposta do estudante E17 ao item 8



Fonte: arquivos dos pesquisadores (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: É a resolução e a lógica sobre conteúdos.

Figura 79 – Resposta do estudante E20 ao item 8



Fonte: arquivos dos pesquisadores (2026).

Transcrição da resposta apresentada na imagem: Para mim, "Fazer matemática" é raciocinar e pensar em formas de resolver problemas.

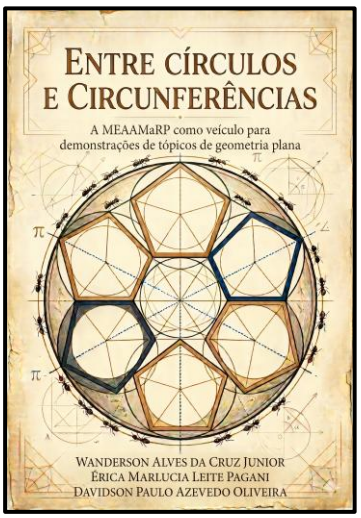
A partir dos relatos analisados, percebemos que, para alguns estudantes, o "*fazer matemática"* deixou de estar associado apenas a cálculos mecânicos, a simples aplicação e memorização de algoritmos e à classificação e reprodução de figuras, passando a englobar a compreensão conceitual de fórmulas e relações, a estruturação lógica e a diversidade de estratégias na resolução de problemas. Essa evolução conceitual, impulsionada pelas atividades propostas, alinha-se à nossa concepção de uma Matemática crítica, acessível e construída com protagonismo

pelos próprios estudantes. A seguir, apresentamos o Produto Educacional elaborado a partir do desenvolvimento e da análise dessas atividades.

8 PRODUTO EDUCACIONAL

A elaboração das atividades sob a perspectiva da utilização da MEAAMaRP como condutora do processo de ensino-aprendizagem-avaliação, e a análise dos dados coletados e aqui discutidos, nos motivou a elaborar um Produto Educacional intitulado: **Entre círculos e circunferências: A MEAAMaRP como veículo para demonstrações de tópicos de Geometria Plana**, como mostrado na imagem abaixo.

Figura 80 – Capa do Produto Educacional



Fonte: os autores (2026).

No Produto Educacional[34], encontram-se a sequência didática com as cinco atividades realizadas nessa pesquisa, juntamente a outras duas que ainda não foram aplicadas em sala de aula, mas tem potencial para desenvolver o ensino-aprendizagem que pretendem. Esperamos que esse material possa auxiliar e inspirar professores e leitores de Educação Matemática que desejem utilizar a MEAAMaRP como estratégia de ensino em sala de aula.

[34] Apêndice D.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões construídas e realizadas nessa dissertação, surgiram tanto das nossas inquietações pessoais, quanto das nossas vivências docentes. Enquanto professores, percebemos cada vez mais a necessidade de termos demonstrações mais presentes na sala de aula durante o ensino de Matemática, principalmente numa perspectiva acessível e apresentada de forma que o estudante não seja apenas um receptor de informações, teoremas ou proposições, mas que ele entenda, se empodere e protagonize a construção crítica e reflexiva do seu próprio conhecimento.

Além disso, por vezes, em nossa prática, nos deparamos com estudantes desanimados, apáticos e pouco interessados em relação aos tópicos de Geometria Plana, muitas vezes alegando que a Geometria é "muito difícil" ou não conseguindo compreender as relações e proposições nelas encontradas.

A partir da revisão bibliográfica feita nessa pesquisa compreendemos que, além dos obstáculos descritos acima, a herança deixada pelo que foi considerado por alguns pesquisadores como o abandono da Geometria (Pavanello, 1989), em decorrência do Movimento da Matemática Moderna, também contribuiu para que em algum momento a Geometria não tivesse seu lugar de cuidado e destaque na sala de aula.

A investigação e o estudo de referenciais bibliográficos a respeito de provas e demonstrações em Matemática, também nos permitiu compreender as diversas concepções e funções que as demonstrações possuem no âmbito escolar, sobretudo a função de explicação (Balacheff, 2000; Hanna, 1995; De Villiers, 2001; Nasser e Tinoco, 2003). Tal compreensão, nos fez perceber que para o ensino de demonstrações durante as aulas de Matemática, precisaríamos de uma metodologia que favorecesse, instigasse e despertasse nos estudantes a compreensão e a necessidade do processo de demonstrações em salas de aula.

Diante desse cenário, nos motivamos a buscar metodologias que pudessem favorecer o ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria Plana durante o ensino de Matemática. Recorrendo aos documentos norteadores oficiais de ensino, os PCNs e a BNCC, encontramos sugestões que o ensino de Matemática dever-se-ia ser conduzido a partir da Resolução de Problemas. No entanto, apesar de tais sugestões, esses documentos não explicitam ou sugerem qual concepção de Resolução de Problemas, tão pouco como utilizá-la em sala de aula nas mais diversas situações de ensino.

Nessa perspectiva, a pesquisa realizada propôs-se a investigar, a partir do estudo dos referenciais teóricos em Resolução e Proposição de Problemas, **como essa metodologia poderia**

favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências, articulados com provas e demonstrações no decorrer do processo de resolução de problemas.

O estudo dos referenciais teóricos nos permitiu conhecer e compreender a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) como uma metodologia promissora para o favorecimento de provas e demonstrações em sala de aula. O entendimento e a compreensão dessa metodologia, influenciou bastante em nossa prática pedagógica, sobretudo por mobilizar, em todas as etapas de sua realização a participação efetiva tanto dos alunos, quanto dos professores. Assim, foram elaboradas cinco atividades compostas por problemas nas quais investigamos se a busca pela solução conduziria os estudantes ao processo de provas e demonstrações e, com isso, a construção de novos conhecimentos matemáticos.

A realização da aplicação das atividades, bem como a análise dos dados, nos permitiu compreender de que formas a utilização da MEAAMaRP contribuiu para o ensino de demonstrações de tópicos de Geometria Plana. Nas percepções dos estudantes, percebemos que as etapas de discussões em duplas, bem como a plenária e a formalização, foram vistas como essenciais e instigantes para o processo de solução e da construção das demonstrações encontradas. De fato, percebemos que essas etapas permitiram a todo momento que os estudantes buscassem coletivamente as soluções para os problemas, favorecendo a troca de ideias, a (re)avaliação de hipóteses e conjecturas, bem como a (re)organização dos próprios conhecimentos coletivamente, sendo esse processo a todo momento instigado, avaliado, mediado e planejado pelo professor.

Nesse sentido, também precisamos destacar que, mesmo inicialmente temerosos e tímidos em expressar suas opiniões no quadro e oralmente, a partir do decorrer das atividades, nota-se uma desenvoltura maior tanto no processo de argumentação oral, quanto no processo de escrita das respostas de alguns estudantes. Tais observações, no contexto da escrita, ficaram ainda mais destacadas nos dados coletados na pesquisa quando analisados sob a ótica dos níveis de prova estabelecidos por Balacheff (2000). Enquanto nas primeiras atividades predominavam-se as *Provas Pragmáticas,* percebemos que, no decorrer do processo, as resoluções de alguns estudantes evoluíram, percebendo na escrita das soluções cada vez mais com processos que justificassem as soluções encontradas, bem como a descrição dos procedimentos que haviam realizado, o que estimulava o desenvolvimento dedutivo e a argumentação, fazendo assim emergir as *Provas Conceituais*, descritas por Balachef (2000), como as encontradas nas atividades 4 e 5.

Ademais, percebemos também, que as etapas da MEAAMaRP desenvolvidas a partir de cada problema gerador, proposto em cada uma das atividades, incentivaram os estudantes a compreender e desenvolver as principais funções das demonstrações, que analisamos à luz do

referencial teórico elencado, a função da explicação e da compreensão (Hanna; De Villiers, 2008). Além disso, percebemos que essas atividades promoveram em alguns estudantes a conscientização de que o processo de demonstração, muitas vezes não ocorre de maneira espontânea e rápida, e que a discussão em pares e a busca pela solução em grupo favorecem o caminho para construírem coletivamente a resolução.

Compreendemos também que, a realização das atividades nos permitiu perceber indícios de que houve a ressignificação do que seria o "fazer Matemática", para alguns estudantes, superando a ideia de uma simples aplicação mecânica de fórmulas ou memorização de algoritmos. O desenvolver das atividades os permitiu valorizar a compreensão conceitual das relações, a construção do raciocínio dedutivo e a diversidade de caminhos para a resolução de problemas. Essa mudança de perspectiva, influenciada pelas atividades desenvolvidas com a MEAAMaRP, reforçam a visão que temos de uma Matemática crítica, acessível e que estimule a participação efetiva e coletiva dos estudantes.

Além disso, percebemos que a utilização da MEAAMaRP oportunizou que os estudantes compreendessem outras funções da demonstração estabelecidas por Hanna e De Villers (2008) como por exemplo a *sistematização, a descoberta* e a *comunicação*.

Diante disso, no contexto investigado e no decorrer do desenvolvimento das atividades e das análises, os resultados de nossa pesquisa sugerem que as etapas da MEAAMaRP contribuíram, não somente para a construção dos conhecimentos propostos, mas também a (re)avaliação de conhecimentos e habilidades que pensávamos já estar consolidadas entre os estudantes, além de favorecerem a autonomia, a percepção, a criatividade e o letramento matemático destes estudantes.

A elaboração das atividades a partir da utilização da MEAAMaRP nos permitiu a escrita de um Produto Educacional, disponibilizado no apêndice desta dissertação, contendo uma sequência de atividades didáticas utilizadas na pesquisa, além de outras duas, elaboradas e não aplicadas. Essas duas últimas atividades, apesar de não terem sido aplicadas nessa pesquisa, estão disponíveis para o docente que desejar se inspirar ou até mesmo utilizar as atividades em sala de aula, ou em alguma outra pesquisa.

É preciso destacar que compreendemos que a utilização da MEAAMaRP em sala de aula não é uma tarefa simples, pois incentiva ao docente o papel de romper com o paradigma estabelecido de uma Educação Bancária (Freire, 1996), além de promover a interação e a participação efetiva dos estudantes. Esse processo demanda uma responsabilidade e uma força de trabalho árdua por parte do professor tanto antes das aulas: no planejamento dos problemas e objetivos traçados para as atividades propostas; quanto durante as aulas: no auxílio e na orientação

da busca pelas resoluções dos problemas pelos estudantes; quanto depois das aulas: na análise e na compreensão das respostas culminando na formalização e na proposição de novos problemas.

Diante disso, Allevato e Onuchic (2021) deixam claro que o professor precisa selecionar e planejar com atenção tanto os problemas geradores que seriam utilizados, quanto a condução e a mediação do processo durante todas as etapas da MEAAMaRP. Essa perspectiva de educação, ainda que aparentemente mais trabalhosa, se alinha com o estilo de educação que acreditamos, na qual o estudante precisa ser consciente e protagonista do seu próprio conhecimento, tendo autonomia para pensar, discutir e debater suas ideias junto aos colegas, sendo o professor o responsável pela mediação, orientação e formalização de todo esse processo.

Destacamos também como a Proposição de Problemas por parte dos estudantes pode favorecer a articulação dos conhecimentos (re)construídos pelos estudantes durante a proposição, bem como auxiliar o professor no processo de avaliação e compreensão do conhecimento dos estudantes, além de estimular a participação efetiva, criativa e crítica desses estudantes durante as aulas de Matemática.

Nesse sentido, também destacamos o quão importante foi para a nossa prática docente a compreensão e a possibilidade de utilizar essa metodologia em nossas aulas. Enquanto professor-pesquisador, percebo e destaco a importância da leitura, da reflexão, da discussão, e do fazer a pesquisa para minha prática docente, e como me senti animado e entusiasmado ao fazê-la. A compreensão e a utilização da MEAAMaRP nos inspiraram a proporcionar um ambiente de sala de aula, ainda que com seus desafios cotidianos, em um espaço mais democrático e participativo para a construção do conhecimento.

Salientamos também que o processo de investigação e compreensão dos referenciais teóricos aqui discutidos, bem como a articulação deles à prática docente, nos inspirou e permitiu compreender o quão importante a pesquisa científica é para o favorecimento da inovação e da manutenção de nossas práticas pedagógicas.

Diante do exposto e considerando a questão geral da nossa pesquisa: ***Como o processo de Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer a construção de conhecimentos sobre Círculos e Circunferências articulados com provas e demonstrações feitas por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?,*** constatamos que a Resolução e Proposição de Problemas, na perspectiva da MEAAMaRP, contribuiu para que os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental construíssem e compreendessem novos conceitos sobre círculos e circunferências, e também retomassem e (re)construíssem conceitos matemáticos anteriores.

Observamos que a introdução do novo conteúdo através de um problema gerador desempenhou um papel fundamental desencadeando o processo de aprendizagem planejado pelo professor, permitindo que as respostas evoluíssem para deduções e justificativas coerentes. A realização das atividades propostas permitiu aos estudantes que estruturassem suas argumentações empregando e favorecendo elementos do raciocínio e do letramento matemático. Assim, entendemos que as resoluções apresentadas pelos estudantes como as soluções para os problemas propostos configuraram-se como demonstrações matemáticas, no contexto escolar, conforme assumimos no Capítulo 4.

Consideramos ainda que a proposta das dez etapas sugeridas pelas pesquisadoras Onuchic e Allevato contribuiu, não apenas para evidenciarmos as dificuldades dos participantes durante os momentos de resolução em grupo, na apresentação das respostas e no momento da plenária, mas também para que o professor-pesquisador possa atuar como mediador. Nesse sentido, os estudantes eram sempre instigados e questionados de forma a direcionar o pensamento, incentivando-os a refletir e a estabelecer possíveis estratégias de resolução, sem fornecer respostas diretas, mas auxiliando-os a interpretar os dados para relacioná-los aos conceitos e conteúdos já estudados.

Entendemos também que nossa pesquisa pode contribuir para o aprimoramento da prática docente ao utilizar a Resolução e Proposição de Problemas como uma metodologia de ensino, visando promover a compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, além de associá-los aos processos de Provas e Demonstrações para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

Por fim, esperamos que este trabalho possa de alguma forma inspirar, renovar e motivar novas práticas de ensino e pesquisas a respeito desta metodologia, alinhadas ao referencial teórico aqui discutido, e que assim possamos, enquanto professores e pesquisadores, compreender que o ensino de Matemática deve ser algo acessível, compreensível, e, sobretudo, transformador.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?** In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). Resolução de Problemas: teoria e prática. 2 ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **As Conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática**. REnCiMa, v.10,n,2,p.01-14, 2019.

ALLEVATO, N. S. G.; POSSAMAI, J. P. Proposição de Problemas: possibilidades e relações com o trabalho através da Resolução de Problemas. **Com a Palavra, o Professor**, *[S. l.]*, v. 7, n. 18, p. 153–172, 2022.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Título original: Processus de preuve et situation de validation). Tradução de Pedro Gómez. Bogotá: Uniandes, Una Empresa Docente, 2000. 200 p.

BICUDO, I. **Demonstração em matemática.** BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BOAVIDA, A. M.; GOMES, A.; MACHADO, S. **Argumentação na aula de Matemática: olhares sobre um projecto de investigação colaborativa.** Educação e Matemática: revista da Associação de Professores de Matemática, (70), pp. 18-26, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, Ltda., 2010.

BRASIL. (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm Acesso em: 06 jan. 2026.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Presidência da República, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

BRASIL. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014**. Diário Oficial da União, Brasília, 26 de junho de 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a Base. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CAI, J.; LESTER, F. **Porque o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno?** Boletim GEPEM.Rio de Janeiro, n.60,p.241, 2012.Tradução de BASTOS, A.S.A.M. e ALLEVATO, N.S.G.

CALABRIA, A. R. **A Geometria fora da Grécia**. Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo, n. 81, p. 2-10, 2013. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/81/rpm1.html. Acesso em: 02 de nov. 2025.

CARLOVICH, M. **A Geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do estado de São Paulo para o 3° e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. 2005. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Mate mática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10927/1/Dissertacao%20MARISA%20CARLOVICH.pdf. Acesso em: 4 jan. 2026.

CASSELMAN, B. **Pictures and Proofs**. The American Mathematical Monthly, v. 47, p. 1257-1266, 2000. Disponível em http://www.ams.org/notices/200010/fea-casselman.pdf. Acesso em: 29 nov. 2025.

CÓRES, F. C. **Argumentos Combinatórios para Identidades Envolvendo Números Binomiais, de Fibonacci e de Lucas**. 2014. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=559. Acesso em: 29 nov. 2025.

CRUZ JUNIOR, W. A. da; PAGANI, E. M. L.; PERES, G. J.; MOREIRA, V. G. **Mapeamento de dissertações no repositório digital do PROFMAT:** um olhar para o ensino de Geometria no contexto da resolução e proposição de problemas. In: ENCONTRO NACIONAL DE PRODUÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENOPEM, 6. Anais do VI Encontro Nacional de Produção de Pesquisa em Educação Matemática, 2025. UNEMAT/MT. p. 855 - 868. Disponível em: Anais VI ENOPEM 2025 - Site.pdf. Acesso em: 01 jun. 2026.

DANTE, L. R. **Matemática contexto & aplicações**.3ªed,3ªreimpr. São Paulo:Ática,2009.

DE VILLIERS, M. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad.** Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática, Porto, n. 63, p. 31-36, 2001. Disponível em https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1013. Acesso em: 17 dez. 2025.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides;** tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora Unesp, 2009

EVES, H. **Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

FEITOSA, H. A.; LOCCI, V. **O fazer matemático.** Mimesis, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

FERREIRA, F. A. **Demonstrações em Geometria Euclidiana: O uso da Sequência Didática como Recurso Metodológico em um curso de Licenciatura de Matemática**. 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica.

FERREIRA, L.; SANTOS, T. S.; BARROS, R. M. de O. **UMA HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: o início da Geometria Hiperbólica**. Revista de História da Educação Matemática, São Paulo, v. 11, p. 1–24, 2025.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. rev. São Paulo: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de professores).

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GUIMARÃES, H. M. **Por uma Matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna**. In: MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. (orgs). A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Primeiros Estudos. São Paulo: Editora Da Vinci, 2007. p. 21- 45.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** 8ª edição. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GOMES, L. F.; ARAMAN, E. M. O. **Do quinto postulado de Euclides ao surgimento das geometrias não euclidianas**. Revista História da Matemática para Professores, v. 10, n. 1, p. 1-12, 2024.

HANNA, G. **Challenges to the Importance of Proof.** For The Learning Mathematics (FLM Publishing Association), nº 15, vol. 3, pp. 42-49, British Columbia, Canadá, 1995 (tradução nossa).

HANNA, G.; DE VILLIERS, M. **ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education**. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, v. 40, n. 2, p. 329–336, 2008. DOI: 10.1007/s11858-008-0073-4. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4. Acesso em: 17 dez. 2025.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 9º ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

IMPA. Portal da OBMEP. **Material Teórico – Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA: Estruturas Básicas, Tópicos Adicionais**. 2019. Portal da OBMEP. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/d7yd6u2fxbcog.pdf. Acesso em: 15 dez. 2025.

LUNA, S. V. de. **Planejamento de pesquisa:** uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2011.

MACHADO, E. M. **Etimologia no ensino de matemática: construção de um dicionário etimológico de Geometria para o ensino médio.** 2024. 87 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal de Rondônia.

MARINCEK, V.; CAVALCANTI, Z. **Aprender Matemática resolvendo Problemas**. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.

MARTINS, R. R. G. **O ensino-aprendizagem-avaliação de Geometria analítica através da resolução de problemas: do problema gerador ao problema de aprofundamento.** 2024. 221f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de geometria**. 2018. 160f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Estadual de Campinas.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides. A História da Geometria: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço**. São Paulo: Geração, 2005.

MOURA, D. V. de. **Introdução à Geometria Fractal**. 2016. 72f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal do Piauí.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MORAIS, R. S; ONUCHIC, L. L. R. **Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas**. In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). Resolução de Problemas: teoria e prática. 2 ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021.

MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 4 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de cálculo**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. de A. **Argumentação e Provas no Ensino da Matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM - Projeto Fundão, 2003.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA – National Council of Teacher of Mathematics, 2000.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de Geometria através da resolução de problemas:** *perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática*. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

OLIVEIRA, K. I. M; FERNANDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** 2a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. Rio Claro, 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739. Acesso em 21 jan. 2026.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.(Org.). Pesquisa em educação matemática. São Paulo: UNESP, 1999. p.199-220.

OXFORD LANGUAGES. **Ciência**. Disponível em: <https://www.google.com/search?q=ci%C3%AAncia&tbm=lcl&gbv=1&sei=>. Acesso em: 15 dez. 2025

PAGANI, E. M. L. **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Derivadas no Curso Técnico Integrado ao Médio através da Resolução de Problemas**. Tese de doutorado. UNICSUL, São Paulo, 2016.

PAIS, L. C.; **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria**: uma visão histórica. 1989. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. **O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: ONUCHIC, L. R; LEAL, JR, Luiz Carlos; PIRONEL; Márcio. Perspectivas para a Resolução de Problemas. São Paulo: Livraria da Física, 2017 p. 279-304.

PIRONEL, M. **Avaliação para a Aprendizagem: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em Ação**. Tese de doutorado. Rio Claro, 2019.

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. de la R. **Resolução de Problemas: Oportunidade de Avaliação para a aprendizagem.** In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). Resolução de Problemas: teoria e prática. 2 ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.** 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

ROSALE, A. R. **Argumentação e prova matemática na Educação Básica**. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

SILVA, M. B. **Demonstrações e Provas em Geometria Analítica através da Resolução e Proposição de Problemas.** 370f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2025.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que desafiou os maiores gênios do mundo por 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2014.

SOUZA, S. da. S. **Alguns fatos históricos sobre π e e**. 2026. 76f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2026.

STEWART, J. **Cálculo, volume 1**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VALENTE, W. R.; OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L. (orgs.). **O Movimento da Matemática Moderna:** história de uma revolução curricular. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/227765. Acesso em: 5 jan. 2026.

VAN DE WALLE, J. A.; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Penso, 2009.

VIEIRA, G.; POSSAMAI J. P.; ALLEVATO, N. S. G. **Proposição de problemas e pensamento criativo na aula de Matemática**. Zetetiké, Campinas, SP, v31, 2023, pp.1-15.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar:** O papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006. Tradução: Ernani Rosa.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO E ASSENTIMENTO

Termo de Consentimento e Assentimento Livre e Esclarecido

Prezados estudantes do 9º ano e responsáveis,

Este documento apresenta as informações sobre a pesquisa de mestrado desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do CEFET-MG, conduzida pelo Prof. Wanderson Alves da Cruz Junior (Junior), sob orientação da Profa. Dra. Erica Marlúcia Leite Pagani. O objetivo desta pesquisa é investigar novas estratégias de ensino-aprendizagem-avaliação que favoreçam o ensino de Matemática e desenvolvam as competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Exploraremos o estudo de circunferências e círculos na Geometria Plana, no contexto da Resolução e Proposição de Problemas, uma metodologia que estimula o pensamento crítico e a construção ativa do conhecimento a partir do protagonismo dos(as) estudantes.

Diante disso, convidamos o(a) estudante a participar deste processo. As atividades realizadas em sala de aula, bem como as observações do professor-pesquisador, serão registradas e analisadas. É importante destacar que os dados coletados comporão a dissertação de mestrado e poderão ser publicados em eventos e revistas científicas da área. Salientamos que a identidade dos estudantes e o nome da escola serão mantidos em anonimato. Nenhum dado pessoal que permita a identificação será divulgado nas análises ou publicações.

Para autorizar a participação, solicitamos, por gentileza, o preenchimento dos campos abaixo, validando o consentimento dos(as) responsáveis e o assentimento do(a) estudante. Cordialmente,

Prof. Wanderson Alves da Cruz Junior (JUNIOR).

1. Assim, considerando que fui informado(a) dos objetivos e procedimentos da pesquisa proposta declaro que:

( ) Li e concordo com o termo acima e confirmo participação.

( ) Li e não concordo com o termo acima, não participaremos.

2.Nome completo e assinatura do(a) estudante.

_____

3. Nome completo e assinatura do(a) responsável.

_____

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL DE SONDAGEM

Caro(a) estudante,

a sua participação é muito importante para o desenvolvimento da nossa pesquisa de mestrado no âmbito do PROFMAT, realizada no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG).

No texto da dissertação e nos demais trabalhos você não será identificado(a).

Desde já agradecemos muito a sua participação!

Professor-pesquisador: Wanderson Alves da Cruz Junior

Orientadora: Profª. Drª. Érica Marlúcia Leite Pagani

Coorientador: Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira

Questionário Inicial de Sondagem

Nome (opcional):_____
Data: _____

PARTE I

1. Qual a sua idade? ○ 13 anos ○ 14 anos ○ 15 anos ○ Outros

Se você respondeu outros, escreva aqui sua idade: _____

2. Há quantos anos você estuda nesta escola?

_____

3. Você já estudou em alguma outra escola? Se sim, qual?

_____

3. Para você, o que é a Geometria?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

4. Você considera importante estudar Geometria? Por quê?

5. Quais tópicos de Geometria você já estudou antes? Cite alguns.

6. Você já estudou sobre círculo ou circunferência?

○ SIM ○ NÃO ○ NÃO ME LEMBRO.

7. Para você, o que é uma circunferência?

8. Para você, o que é um círculo?

9. Você acha que existe diferença entre círculo e circunferência?

○ Sim ○ Não ○ Não sei opinar

10. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, descreva qual a diferença entre esses conceitos.

_____

_____

_____

_____

_____

PARTE II

Nome (opcional):_____
Série: _____
Data: _____

10. Você saberia definir o que é raio da circunferência? ○ Sim ○ Não

11. Caso você tenha respondido sim à pergunta anterior, defina com suas palavras o que é o raio de uma circunferência? (Caso deseje usar um desenho para auxiliar a explicação sinta-se à vontade mas utilize suas palavras para explicar a situação).

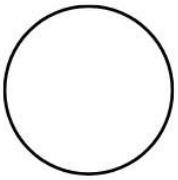
_____
_____
_____
_____
_____
_____

12. Ao contornar com o lápis a base de uma latinha de refrigerante como mostrada na Figura 1, encontramos um desenho parecido com o da Figura 2. Como você acredita que poderia medir o contorno do desenho encontrado na Figura 2?

FIGURA 1



FIGURA 2



_____
_____
_____
_____
_____
_____

13. Você sabe qual a relação entre o número **π** (pi) e o comprimento da circunferência?
○ Sim. ○ Não

Caso tenha marcado sim, descreva abaixo qual é essa relação.

_____

_____

_____

14. Você sabe qual relação entre o número **π** (pi) e a área de um círculo?
○ Sim. ○ Não

Caso tenha marcado sim, descreva abaixo qual é essa relação.

_____

_____

_____

15. Em suas palavras defina o que é fazer Matemática?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

16. Registre abaixo alguns aspectos que você acredita ser importante para desenvolvermos este trabalho em sala de aula.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL DE *FEEDBACK*

Prezados estudantes,

este questionário tem o objetivo de conhecer e entender as suas impressões gerais e opiniões sobre o processo de ensino-aprendizagem de círculos e circunferências desenvolvidos nas aulas de Matemática durante a aplicação dessa pesquisa. Sua contribuição é de fundamental importância para que possamos, a cada dia, melhorar o ensino, a aprendizagem e a avaliação de Matemática.

Desde já agradecemos sua participação e colaboração!

Professor-pesquisador: Wanderson Alves da Cruz Junior. Orientadora: Profª. Drª. Érica Marlúcia Leite Pagani.

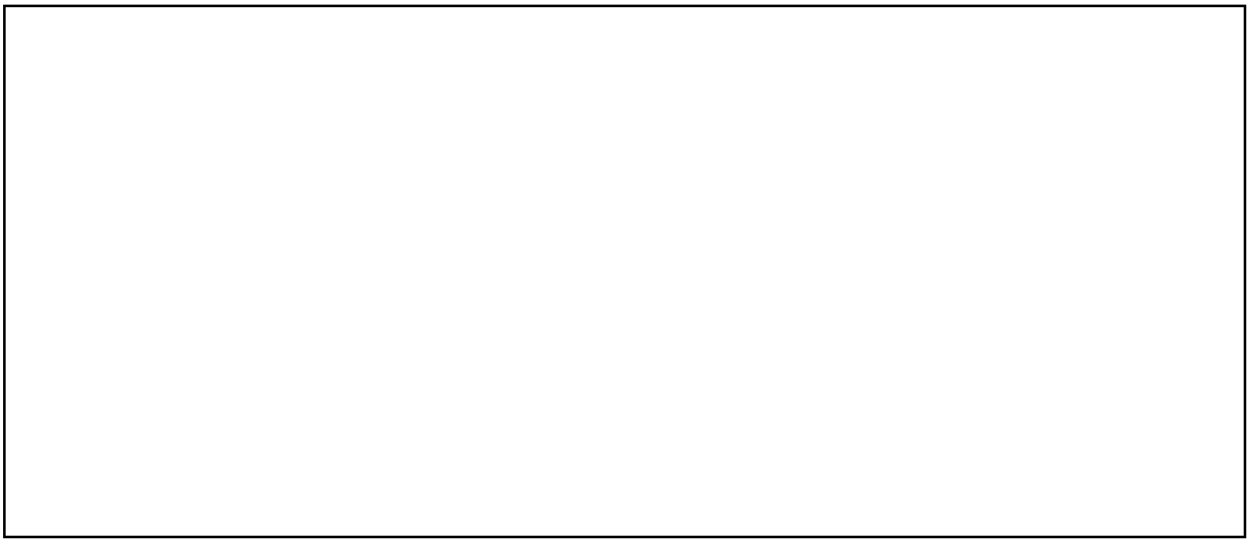
Questionário Final de Feedback

Qual o seu nome? (opcional)

_____ DATA:

1. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) contribuiu para o seu aprendizado sobre círculos e circunferências?

( ) sim
( ) não
Justifique sua resposta.



2. A metodologia utilizada estava dividida em algumas etapas importantes, listadas abaixo. MARQUE a(s) etapa(s) que, na sua opinião, mais contribuiu (contribuíram) para o seu aprendizado?

( ) Leitura individual do problema gerador.

( ) Leitura coletiva do problema gerador.
( ) Discussão e resolução do problema em dupla.
( ) Plenária de resolução do problema no quadro.
( ) Formalização do conteúdo pelo professor.
( ) Resolução e Elaboração de outros problemas.

3. Dentre as cinco atividades propostas em sala de aula (Problema das Formigas, Investigação sobre o número **π**, Área do Pentágono Regular, Área do Dodecágono Regular e Área do Círculo), qual(is) você mais gostou e ou achou útil para sua aprendizagem? Justifique sua resposta.

4. Em sua opinião, essa metodologia contribuiu para que você retomasse, ou esclarecesse alguma dúvida, sobre seus conhecimentos de conteúdos anteriormente ensinados? Quais?

5. Em sua opinião, aprender demonstrações de conteúdos matemáticos relacionados a circunferências e círculos presentes nos problemas, contribuiu para o seu aprendizado? Por quê?

6. Você acredita que outros conteúdos de Matemática poderiam ser ensinados utilizando essa metodologia (MEAAMaRP)?

7. Você acredita que é importante demonstrar e verificar propriedades da Matemática e da Geometria?

( ) sim

( ) não

Justifique sua resposta.

8. Para você, o que é “fazer Matemática”?

9. Em sua opinião, quais são os pontos positivos ou negativos sobre o desenvolvimento do ensino-aprendizagem desses conteúdos através desta metodologia?

10. Escreva alguma outra observação ou sugestão sobre essas aulas que você julgue importante compartilhar.

APÊNDICE D – LINK PARA ACESSO AO PRODUTO EDUCACIONAL

Utilize o link abaixo para ter acesso ao Produto Educacional (*e-book*).

https://drive.google.com/file/d/1nY365l95G88nKo1a6lGDt0YP_52Nt6q-/view?usp=drive_link