



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

Algoritmos para as versões determinística e robusta do problema de localização de concentradores com maximização do lucro

FABRICIO ALVES OLIVEIRA

Belo Horizonte
Fevereiro de 2024

FABRICIO ALVES OLIVEIRA

Algoritmos para as versões determinística e robusta do problema de localização de concentradores com maximização do lucro

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de Concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de Pesquisa: Sistemas Inteligentes

Orientadora: Profa. Dra. Elisangela Martins de Sá

Coorientador: Prof. Dr. Sérgio Ricardo de Souza

Belo Horizonte - MG
Fevereiro de 2024

Oliveira, Fabrício Alves
O48a Algoritmos para as versões determinística e robusta do problema de localização de concentradores com maximização do lucro / Fabrício Alves Oliveira. – 2024.
 xvii, 197 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientadora: Elisangela Martins de Sá.
Coorientador: Sérgio Ricardo de Souza.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Decomposição (Matemática) – Teses. 2. Soluções numéricas – Teses.
3. Otimização robusta – Teses. I. Sá, Elisangela Martins. II. Souza, Sérgio Ricardo de. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 515.353



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“ALGORITMOS PARA AS VERSÕES DETERMINÍSTICA E ROBUSTA
DO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE CONCENTRADORES COM
MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO”.**

Tese de Doutorado apresentada por **Fabricio Alves Oliveira**, em 27 de fevereiro de 2024, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente

gov.br

ELISANGELA MARTINS DE SA
Data: 01/03/2024 10:15:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Elisangela Martins de Sá (Orientadora)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Sérgio Ricardo de Souza (Coorientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Geraldo Robson Mateus
Universidade Federal de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente

gov.br

REINALDO MORABITO NETO
Data: 01/03/2024 06:43:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
Universidade Federal de São Carlos

Documento assinado digitalmente

gov.br

MARCONE JAMILSON FREITAS SOUZA
Data: 01/03/2024 09:07:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente

gov.br

GUSTAVO CAMPOS MENEZES
Data: 01/03/2024 09:48:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gustavo Campos Menezes
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida à impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em
Modelagem Matemática e Computacional

Dedico este trabalho a minha amada mãe,
Marinete Alves Oliveira (*in memoriam*).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido saúde e sabedoria para chegar até o final desta etapa. Embora tenha sido um período de muitas mudanças e desafios pessoais e profissionais, sempre me deu forças e se mostrou presente em todos os momentos.

Agradeço especialmente à professora Elisangela Martins de Sá e ao professor Sérgio Ricardo de Souza, por todos os ensinamentos, empenho e dedicação durante todo o processo de orientação. Agradeço a compreensão por todos os momentos em que precisei estar ausente das atividades do doutorado e também por todo estímulo necessário para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos professores Geraldo Robson Mateus, Gustavo Campos Menezes, Reinaldo Morabito Neto e Marcone Jamilson Freitas Souza, por terem aceito participar da banca deste trabalho. Em especial, agradeço ao professor Marcone, que além de exímio profissional, é uma pessoa inspiradora.

Agradeço também, com muito carinho, à professora Dulce Mary de Almeida e ao professor Marcos Antônio da Câmara, por sempre terem me apoiado e incentivado em todos os momentos da vida acadêmica desde o início da graduação, no curso de Matemática da UFU.

Agradeço ao Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) pela concessão do afastamento parcial para que pudesse me dedicar às atividades da pós-graduação.

Por fim, agradeço a pessoas muito especiais na minha vida, que me deram forças para continuar. Ao meu companheiro, Ricardo, muito obrigado por sempre acreditar em mim, me incentivar e apoiar em todos os momentos dessa jornada. Agradeço por cada uma das muitas e muitas idas ao CEFET, em que ficou me esperando, sempre paciente, enquanto eu assistia aula ou realizava outras tarefas do doutorado. Aos meus amigos, Natália e Leandro, obrigado por todas as palavras de motivação e por sempre estarem presentes na minha vida.

Resumo

Esta tese estuda o problema de localização de concentradores, com objetivo direcionado para a maximização do lucro. Esse problema consiste em estabelecer a localização de concentradores, o projeto da rede e a alocação dos nós de demanda aos concentradores para maximizar o lucro total da rede. O problema considera que a rede de concentradores é incompleta, nenhuma estrutura topológica específica é requerida e é assumido que os concentradores e arcos entre concentradores possuem capacidade suficiente para lidar com o fluxo de demanda na rede. Este trabalho apresentou novas formulações e investigou suas propriedades. As formulações propostas assumem a estratégia de alocação múltipla; não impõem quaisquer restrições ao número de concentradores ou arcos entre concentradores instalados na rede; não permitem conexões diretas entre nós não concentradores e permitem que a demanda da rede seja parcialmente satisfeita, sendo atendida apenas quando for rentável. Essa última característica e o foco na maximização do lucro diferenciam o problema abordado nesta tese em relação aos problemas clássicos de localização de concentradores, nos quais a demanda completa entre todos os pares de origem e destino é atendida, e, além disso, os problemas são modelados sob o ponto de vista dos custos. Esta tese também investigou as propriedades e realizou uma análise comparativa das formulações propostas com outra da literatura. Para resolver o problema, foram desenvolvidos algoritmos baseados no método de decomposição de Benders, incluindo várias estratégias de aprimoramento. Uma vez que o problema aqui abordado é NP-difícil, também foram propostos dois algoritmos heurísticos baseados em busca local e troca sistemática de estruturas de vizinhança para solucionar instâncias do problema de grande porte. Para analisar a eficiência dos procedimentos de solução propostos, foram realizados extensivos experimentos computacionais com instâncias de referência na área de localização de concentradores. Os resultados desses testes mostraram que os algoritmos propostos possuem um bom desempenho. Em particular, com o método de decomposição de Benders, foram resolvidas até a otimalidade instâncias com até 150 nós. Por outro lado, com os algoritmos heurísticos, foram solucionadas instâncias contendo até 500 nós. Adicionalmente, foi realizada uma análise das estruturas de vizinhança consideradas nos algoritmos heurísticos e uma comparação estatística entre os dois algoritmos. Nesta tese também foi abordado o problema de localização de concentradores com maximização do lucro em que as demandas e os custos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores são incertos. Uma formulação robusta, que permite controlar o grau de conservadorismo do modelo por meio de um *budget* de incerteza, é desenvolvida para este caso. São apresentadas discussões sobre a influência que a incerteza nos dados tem sobre a configuração da rede e sobre o lucro associado a ela. Para resolver o problema robusto,

foram propostos um algoritmo exato baseado em decomposição de Benders e outro heurístico baseado na meta-heurística *Iterated Local Search*, adaptados dos melhores métodos identificados na resolução do problema determinístico. As soluções obtidas com o problema robusto possuem diferenças significativas em relação às soluções do problema determinístico, o que evidencia a importância de se estudar este tipo de problema, principalmente em aplicações reais. A incerteza nos dados pode levar a necessidade de um redesenho da rede de concentradores, o que influencia diretamente o lucro associado a ela.

Palavras-chaves: Problema de Localização de Concentradores, Método de Decomposição de Benders, *Iterated Local Search*, *Variable Neighborhood Descent*, Otimização Robusta.

Abstract

This thesis studies the hub location problem to maximize profit. This problem consists of establishing the location of hubs, the network design, and the allocation of demand nodes to hubs to maximize the total network profit. The problem considers that the hub network is incomplete, no specific topological structure is required and it is assumed that the hubs and hub arcs have sufficient capacity to handle the demand flow in the network. This work presented new formulations and investigated their properties. The proposed formulations assume the multiple allocation strategy; they do not impose any restrictions on the number of hubs or hub arcs installed in the network, do not allow direct connections between non-hub nodes, and allow network demand to be partially satisfied, only being met when it is profitable. This last characteristic and the focus on profit maximization differentiate the problem addressed in this thesis in relation to classical hub location problems, in which the complete demand between all origin and destination pairs is met, and the problems are modeled under the point from a cost perspective. This thesis also investigated the properties and carried out a comparative analysis of the proposed formulations with others in the literature. To solve the problem, the Benders decomposition algorithms were developed, including several enhancement strategies. Since the problem addressed here is NP-hard, two heuristic algorithms based on local search and systematic exchange of neighborhood structures were also proposed to solve large-scale problem instances. Extensive computational experiments were carried out with benchmark instances in the hub location area to analyze the efficiency of the proposed solution procedures. The results of these tests showed that the proposed algorithms have good performance. In particular, with the Benders decomposition algorithm, instances with up to 150 nodes were resolved to optimality. On the other hand, with heuristic algorithms, instances containing up to 500 nodes were solved. Additionally, the neighborhood structures considered in the heuristic algorithms and a statistical comparison between the two algorithms were analyzed. This thesis also addressed the hub location problem with profit maximization, in which the demands and costs of installing hubs and hub arcs are uncertain. A robust formulation, which allows controlling the model's degree of conservatism through an uncertainty budget, is developed for this case. Discussions are presented about the influence that data uncertainty has on the network configuration and the profit associated with it. To solve the robust problem, an exact Benders decomposition algorithm and an Iterated Local Search-based algorithm were proposed, adapted from the best methods identified in solving the deterministic problem. The solutions obtained with the robust problem have significant differences concerning the solutions of the deterministic problem, which highlights the importance of studying this type of problem, especially in

real applications. Uncertainty in the data may lead to redesigning the hub network, which directly influences its profit.

Keywords: Hub Location Problem, Benders Decomposition Method, Iterated Local Search, Variable Neighborhood Descent, Robust Optimization.

Sumário

Lista de Tabelas	xiv
Lista de Figuras	xvi
Lista de Algoritmos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro	1
1.2 Objetivos	7
1.2.1 Objetivo Geral	7
1.2.2 Objetivos Específicos	7
1.3 Contribuições	8
1.4 Publicações derivadas desta pesquisa	8
1.4.1 Artigos publicados em periódicos	8
1.4.2 Artigos publicados em anais de congresso	9
1.5 Organização da Tese	9
2 Revisão da Literatura	10
2.1 Problemas de Localização de Concentradores com Redes Incompletas	10
2.2 Problemas de Localização de Concentradores com Considerações de Lucro	13
2.3 Problemas de Localização de Concentradores sob Incerteza	15
2.4 Decomposição de Benders para os Problemas de Localização de Concentradores	19
2.5 Conclusões	21
3 Fundamentação Teórica	22
3.1 Uma revisão de conceitos de dualidade em otimização linear	22
3.2 Teoria poliedral	24
3.3 Método de decomposição de Benders	26
3.4 Abordagem de Bertsimas & Sim para otimização robusta	34
4 Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro	39
4.1 Definição e caracterização do problema	39
4.2 Formulações para o problema	41
4.2.1 Formulação 1	42
4.2.2 Formulação 2	44
4.2.3 Formulação 3	45
4.3 Comparação das formulações	46

4.4	Experimentos computacionais	47
4.4.1	Configurações dos parâmetros	47
4.4.2	Pré-fixação das variáveis	48
4.4.3	Resultados computacionais	49
4.5	Conclusões	54
5	Decomposição de Benders aplicada ao Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro	56
5.1	Reformulação de Benders	56
5.1.1	Seleção da formulação	56
5.1.2	Reformulação de Benders	59
5.2	Aprimoramentos para a decomposição de Benders	62
5.2.1	Estratégia de múltiplos cortes	63
5.2.2	Inserção de cortes não dominados	64
5.2.3	Abordagem Benders <i>Branch-and-Cut</i>	68
5.3	Experimentos computacionais	69
5.3.1	Configurações dos parâmetros	69
5.3.2	Testes computacionais e análise dos resultados	70
5.4	Conclusões	78
6	Algoritmos heurísticos baseados em ILS aplicados ao Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro	79
6.1	Introdução	79
6.2	Descrição dos algoritmos propostos	80
6.2.1	Representação e avaliação da solução	81
6.2.2	Solução inicial (com um único concentrador)	82
6.2.3	Estruturas de vizinhança	82
6.2.4	Busca local	84
6.2.5	Perturbação	84
6.2.6	<i>Iterated Local Search</i> (ILS)	85
6.2.7	<i>Enhanced Iterated Local Search</i> (E-ILS)	87
6.3	Experimentos computacionais	89
6.3.1	Testes com o conjunto de dados AP	89
6.3.2	Testes com os conjuntos de dados de Contreras et al. (2011b)	101
6.4	Conclusões	105
7	Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro sob Incerteza	107
7.1	Introdução	107
7.2	Formulação robusta para o PLCML	109
7.3	Métodos de solução para o problema robusto	113
7.3.1	Método de decomposição de Benders	113
7.3.2	Algoritmo heurístico E-ILS-RVND aplicado ao problema robusto	115
7.4	Experimentos computacionais	117
7.4.1	Experimentos com o conjunto de dados CAB	118
7.4.2	Experimentos com o conjunto de dados AP	124

7.4.3	Experimentos com os conjuntos de dados propostos por Contreras et al. (2011b)	129
7.5	Conclusões	131
8	Conclusões finais e direções futuras	133
8.1	Conclusões finais	133
8.2	Trabalhos futuros	136
	Referências	138
A	Resultados Complementares	152
A.1	Complemento para a demonstração da Proposição 5.1.1	152
A.2	Algoritmo Especializado para o Subproblema Dual de Benders	155
A.3	Comparação do algoritmo E-ILS-RVND com o algoritmo VNS de Zhang et al. (2023)	163
A.4	Resultados adicionais com o algoritmo heurístico ILS-RVND	165
B	Tabelas de Resultados Detalhadas	167
B.1	Tabelas referentes ao Capítulo 5	167
B.2	Tabelas referentes ao Capítulo 7	177

Lista de Tabelas

1.1	Receita e custos de transporte correspondentes aos pares de origem e destino.	4
2.1	Estudos que abordam PLCs com rede incompleta sem restrições topológicas ou operacionais	12
2.2	Estudos que abordam PLCs com maximização do lucro	15
2.3	Revisão dos PLCs sob incerteza baseados em otimização robusta . . .	18
4.1	Número de variáveis e restrições das Formulações 1, 2 e 3 em função da dimensão da instância.	46
4.2	Configurações dos parâmetros.	48
4.3	Soluções das Formulações 1, 2 e 3 para o conjunto de dados CAB, usando o <i>solver</i> CPLEX.	50
4.4	Tempo de solução das Formulações 1, 2 e 3 para o conjunto de dados CAB, usando o Benders do CPLEX.	53
5.1	Comparação entre as Versões com Único Corte e Múltiplos Cortes . .	71
5.2	Inclusão de Cortes Pareto-Ótimos nas Versões com n^2 Cortes	72
5.3	Comparação de quatro estratégias para adicionar cortes na árvore de <i>Branch-and-Cut</i> : apenas para soluções inteiras (BDCFI), apenas para soluções fracionárias no nó raiz (BDCFR), para todas as soluções inteiras e fracionárias no nó raiz (BDCF) e para todas soluções inteiras e fracionárias (BDCFA)	73
5.4	Comparação das melhores variantes da decomposição de Benders com o CPLEX e o Benders do CPLEX usando o conjunto de dados AP - Parte 1	74
5.5	Comparação das melhores variantes da decomposição de Benders com o CPLEX e o Benders do CPLEX usando o conjunto de dados AP - Parte 2	75
5.6	Soluções obtidas com o método BDCFR	77
6.1	Instâncias AP submetidas ao IRACE.	90
6.2	Resultados para as instâncias AP com 40 e 50 nós – 30 execuções. . .	94
6.3	Resultados para as instâncias AP com 75 e 100 nós – 30 execuções. .	95
6.4	Teste de normalidade de Shapiro-Wilk com 95% de confiança usando os valores dos <i>gaps</i> médios.	98
6.5	Resultados para as instâncias AP com 125 e 150 nós em uma única execução dos algoritmos heurísticos.	99

6.6	Resultados para as instâncias AP com 175 e 200 nós em uma única execução dos algoritmos heurísticos.	100
6.7	Conjunto de instâncias de Contreras et al. (2011b) submetidas ao IRACE.	102
6.8	Resultados para instâncias do Conjunto I com uma única execução dos algoritmos heurísticos.	103
6.9	Resultados para instâncias do Conjunto II com uma única execução dos algoritmos heurísticos.	104
6.10	Resultados para instâncias do Conjunto III com uma única execução dos algoritmos heurísticos.	105
7.1	Instâncias AP usadas na calibração dos parâmetros <i>iterMax</i> e <i>timesMax</i> pelo IRACE.	125
7.2	Resumo dos resultados obtidos com as instâncias AP contendo 40, 50, 75 e 100 nós.	126
7.3	Resumo dos resultados obtidos com as instâncias AP contendo 125 e 150 nós.	127
7.4	Resultados obtidos com uma única execução do E-ILS-RVND para instâncias AP com 175 e 200 nós.	128
7.5	Grupo de instâncias de Contreras et al. (2011b) usadas na calibração dos parâmetros <i>iterMax</i> e <i>timesMax</i> com o IRACE.	129
7.6	Resumo dos tempos do E-ILS-RVND aplicado as instâncias de Contreras et al. (2011b) com até 200 nós.	130
A.1	Tempo Computacional com Diferentes Abordagens de Solução para o Subproblema de Benders	162
A.2	Resultados para as instâncias com 25 nós do conjunto de dados CAB considerando 20 execuções	164
A.3	Resultados para as instâncias AP com 40 e 50 nós (30 execuções).	165
A.4	Resultados para as instâncias AP com 75 e 100 nós (30 execuções).	166
B.1	Comparação das Versões com Único Corte e Múltiplos Cortes	167
B.2	Inclusão de Cortes Pareto-Ótimos nas Versões com n^2 Cortes	170
B.3	Comparação de quatro estratégias para adicionar cortes na árvore de <i>Branch-and-Cut</i> : apenas para soluções inteiras (BDCFI), apenas para soluções fracionárias no nó raiz (BDCFR), para todas as soluções inteiras e fracionárias no nó raiz (BDCF) e para todas soluções inteiras e fracionárias (BDCFA)	172
B.4	Resultados com AP-40	177
B.5	Resultados com AP-50	179
B.6	Resultados com AP-75	181
B.7	Resultados com AP-100	183
B.8	Resultados com AP-125	185
B.9	Resultados com AP-150	187
B.10	Resultados com 50-I, 50-II, 50-III	189
B.11	Resultados com 100-I, 100-II, 100-III	192
B.12	Resultados com 150-I, 150-II, 150-III	195
B.13	Resultados com 200-I, 200-II, 200-III	196
B.14	Resultados com 300-I e 500-I	197

Lista de Figuras

1.1	Redes com 10 nós.	1
1.2	Exemplos de redes de concentradores.	3
1.3	Rede de concentradores com 6 nós.	4
3.1	Esquema do método de decomposição de Benders.	30
3.2	Poliedro II: região de viabilidade do SPD.	33
4.1	Rede de concentradores desconexa.	41
4.2	Duas soluções obtidas pelas formulações.	51
4.3	Tempo de CPU requerido pelas Formulações 1, 2 e 3 para diferentes valores dos parâmetros, usando o CPLEX.	51
4.4	Tempo de CPU requerido pelas Formulações 1, 2 e 3 para diferentes valores dos parâmetros, usando o Benders do CPLEX.	54
5.1	Disposição dos nós das instâncias AP com tamanho 125 e 150.	77
6.1	Exemplo da representação de uma solução para o PLCML.	81
6.2	Número de valores ótimos em 10 execuções do E-ILS-RVND, considerando todas as estruturas de vizinhança (N+all) e removendo a i -ésima vizinhança (N- i), $i = 1, \dots, 6$	91
6.3	$Avg_{gaps}(\%)$ para versões do algoritmo E-ILS-RVND com todas as estruturas de vizinhança (N+all) e removendo a i -ésima vizinhança (N- i), $i = 1, \dots, 6$	92
6.4	Tempo gasto pelo método de decomposição de Benders e tempos médios registrados pelos algoritmos heurísticos propostos com instâncias AP - 40 a 100 nós.	96
6.5	Convergência dos algoritmos propostos em algumas instâncias do conjunto de dados AP.	97
6.6	Boxplot para os $gaps$ médios das instâncias AP com 40, 50, 75 e 100 nós.	98
7.1	Configurações da rede de concentradores com o conjunto de dados CAB.	120
7.2	Índice de semelhança entre a rede do problema nominal e a rede do problema robusto, em função de γ e δ	121
7.3	Lucro médio da rede e percentual de pares atendidos em relação ao número de parâmetros incertos.	121
7.4	Valor médio do lucro da rede no problema com incerteza nos parâmetros de demanda (w), com incerteza nos parâmetros de custo de instalação de concentradores e arcos entre concentradores (sg) e com incerteza em todos os parâmetros simultaneamente (wsg).	122

7.5	Índice de semelhança entre o problema nominal e os problemas robustos com incerteza apenas nas demandas (w), com incerteza apenas nos custos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores (sg) e com incerteza nos três parâmetros juntos (wsg), considerando $\gamma \in \{0,3; 0,6\}$	123
7.6	Resultados com instâncias de 300 e 500 nós obtidos com uma única execução do E-ILS-RVND.	131
A.1	A.2.1: Rede com concentradores nos nós 2, 3 e 4.	157

Lista de Algoritmos

1	Método de Decomposição de Benders Clássico	62
2	Decomposição de Benders baseada em Papadakos (2008)	67
3	Encontrando o custo mínimo de transporte entre todos os pares de nós	68
4	Solução inicial: melhor solução com um único concentrador	83
5	<i>Random Variable Neighborhood Descent</i> - RVND	85
6	Perturbação	85
7	ILS-RVND	87
8	E-ILS-RVND	88
9	Solução inicial: melhor solução robusta com um único concentrador .	116
10	Solução do Subproblema Dual	156

Capítulo 1

Introdução

1.1 Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro

Os concentradores são tipos especiais de instalações, responsáveis por coletar, consolidar, transferir e distribuir o fluxo em uma rede, interligando pares de origem e destino. Em uma rede de concentradores, a demanda entre os pares de nós é roteada através dos concentradores aos quais eles estão alocados, ao invés de utilizar conexões diretas. Devido à consolidação e ao redirecionamento de fluxos, uma economia de escala pode ser obtida no transporte entre os concentradores, o que proporciona uma redução no custo total de transporte.

A utilização de concentradores permite estabelecer redes com uma menor quantidade de conexões, principalmente quando comparadas àquelas em que todos os nós são interligados entre si. A Figura 1.1 mostra o exemplo de uma rede completamente conectada e uma rede de concentradores, na qual os círculos correspondem aos nós de demanda e os triângulos representam os concentradores.

Introduzido por O’Kelly (1986), o problema de localização de concentradores (PLC)

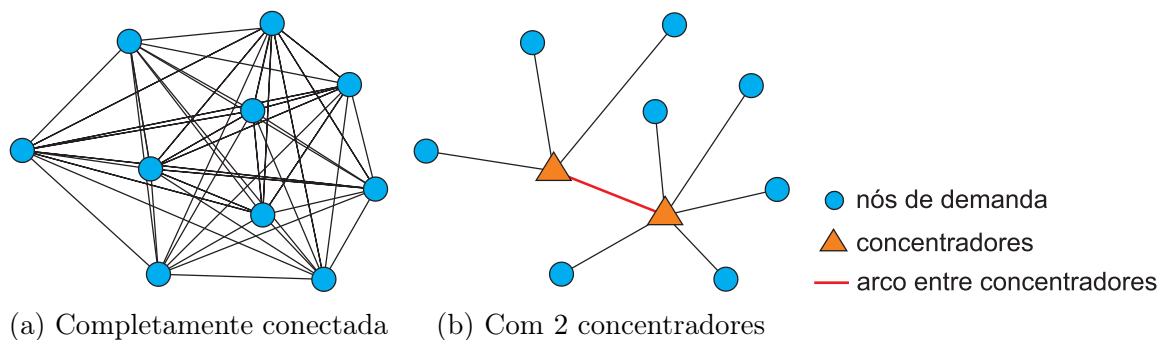


Figura 1.1: Redes com 10 nós.

pode ser definido como um problema de localização e alocação, que consiste na localização dos concentradores, na alocação dos nós de demanda a esses concentradores e, paralelamente, na determinação das rotas de fluxo entre os pares de origem e destino de forma a otimizar um determinado objetivo. Exceto em casos muito especiais, os problemas de localização de concentradores são NP-difíceis. Essa dificuldade decorre da combinação de elementos de ambas as decisões de localização e alocação (Campbell e O’Kelly, 2012).

Nas últimas décadas, os problemas de localização de concentradores têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, pois possuem aplicações em várias áreas, como sistemas de transporte, tanto de passageiros quanto de cargas (Jaillet et al., 1996; Tan e Kara, 2007; Wieberneit, 2008; Lin et al., 2012; Shen et al., 2020), redes de telecomunicações (Carello et al., 2004; Bollapragada et al., 2006; Kim e O’Kelly, 2009) e serviços de entrega postal (Kuby e Gray, 1993; Çetiner et al., 2010; Afandizadeh et al., 2023).

Os concentradores e os arcos que os conectam (arcos entre concentradores) formam uma rede no nível dos concentradores, enquanto os nós não concentradores e os arcos que os ligam aos concentradores (arcos de alocação) compõem uma rede de acesso e/ou distribuição. Em geral, a topologia dessas redes está intimamente relacionada com a área de aplicação e constitui um dos principais critérios de classificação para os problemas de localização de concentradores.

O’Kelly e Miller (1994) propuseram oito protocolos de classificação para esses problemas, de acordo com três características topológicas de uma rede: (i) tipo de alocação, em que cada nó não concentrador é atribuído a um único concentrador (alocação única) ou é conectado a mais de um concentrador (alocação múltipla); (ii) permissão de conexões diretas entre nós não concentradores; e (iii) interconectividade entre os nós concentradores, em que todo par de concentradores é interligado (rede de concentradores completa) ou é parcialmente interligado (rede de concentradores incompleta).

Além das estratégias de alocação definidas no item (i) acima, também foi proposta por Yaman (2011) a estratégia de r -alocação, em que cada nó da rede pode ser atribuído a no máximo r concentradores. A Figura 1.2 ilustra duas redes de concentradores, sendo a Figura 1.2a uma rede completa com alocação única e a Figura 1.2b uma rede incompleta com alocação múltipla.

Três outras propriedades também são utilizadas para caracterizar esses problemas: (a) a quantidade de concentradores presentes na rede, que pode ser previamente fixada (originando os problemas de localização de p -concentradores) ou não; (b) a limitação de capacidade de fluxo nos concentradores e arcos da rede (caracterizando os problemas capacitados); e (c) a existência de custos fixos para instalação de con-

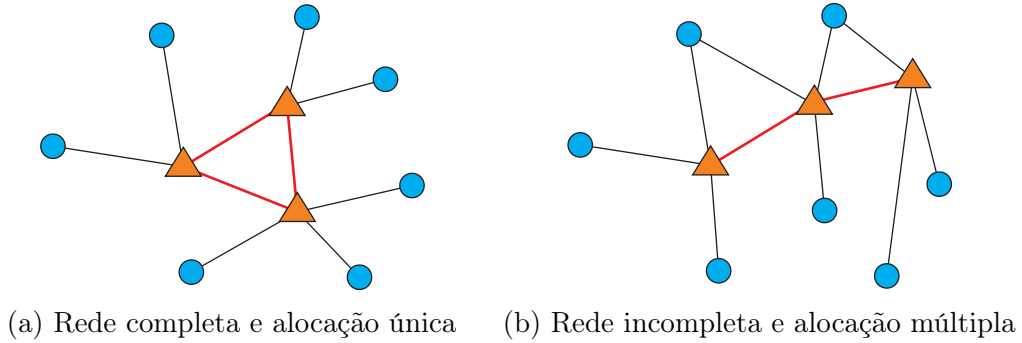


Figura 1.2: Exemplos de redes de concentradores.

centradores e arcos entre concentradores. Com essa série de características, diversos tipos de problemas de localização de concentradores foram propostos na literatura. Revisões dessas muitas variantes do problema podem ser encontradas em [Alumur e Kara \(2008\)](#); [Campbell e O’Kelly \(2012\)](#); [Farahani et al. \(2013\)](#) e [Contreras \(2015\)](#).

[Wandelt et al. \(2022\)](#) investigaram alguns métodos de solução comumente usados na literatura para resolver problemas de localização de concentradores. Foram realizados vários experimentos computacionais com 12 diferentes versões do problema. Eles apresentaram *insights* sobre a similaridade das soluções dos problemas, sobre os conjuntos de concentradores e também sobre as economias de escala.

Os problemas clássicos de localização de concentradores são modelados principalmente sob a perspectiva dos custos e têm, como objetivo principal, minimizar o custo total da rede, de modo a satisfazer toda a demanda. No entanto, do ponto de vista do lucro, pode ser mais vantajoso não atender a demanda de alguns pares de origem e destino, especialmente se o custo for maior do que a receita associada ao atendimento dessa demanda. Nessa situação, o mais adequado é maximizar o lucro em vez de minimizar o custo, de forma que a decisão sobre a quantidade de pares a serem atendidos dependa da compensação entre receita e custo. Segundo [Alibeyg et al. \(2016\)](#), por envolver decisões adicionais, os modelos para a maximização do lucro são mais difíceis do que os modelos para a minimização dos custos. Por outro lado, esta configuração pode fornecer uma estrutura mais realista para o projeto de uma rede de concentradores ([Taherkhani e Alumur, 2019](#)).

O Exemplo 1.1.1, mostrado a seguir, ilustra a situação descrita anteriormente, na qual o atendimento parcial dos nós da rede é mais conveniente pelo ponto de vista da maximização do lucro.

Exemplo 1.1.1. Considere a rede de concentradores da Figura 1.3. Suponha que 1 unidade de demanda precise ser enviada entre os pares de origem e destino (1,4), (1,5), (2,5), (2,6), (3,4) e (5,6). Assuma que o custo de transporte em qualquer arco dessa rede seja igual a 8 e que a receita obtida com o atendimento da demanda

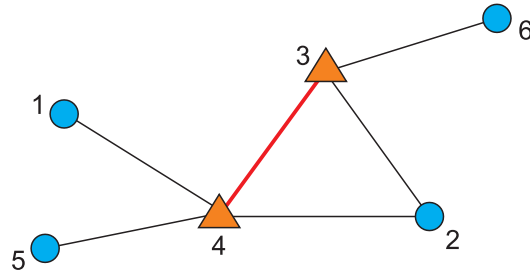


Figura 1.3: Rede de concentradores com 6 nós.

Tabela 1.1: Receita e custos de transporte correspondentes aos pares de origem e destino.

Par (O, D)	Receita	Custos de transporte
(1, 4)	20	8
(1, 5)	20	16
(2, 5)	20	16
(2, 6)	20	16
(3, 4)	20	4,8
(5, 6)	20	20,8

entre qualquer par de origem e destino seja igual a 20. Considere, também, que há um fator de desconto aplicado no custo de transporte no arco entre os concentradores 3 e 4 igual a 0,6. A Tabela 1.1 apresenta a receita e os custos de transporte obtidos pelo atendimento desses pares de demanda.

Observe que o lucro obtido para o atendimento de todos os pares de origem e destino da rede é igual a 38,4, enquanto o atendimento apenas dos pares (1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 6) e (3, 4) gera um lucro de 39,2. Assim, não atender o par (5, 6) é mais vantajoso neste cenário, pois o custo de transporte excede a receita. ■

Além disso, grande parte dos trabalhos clássicos lidam com uma estrutura em que a rede, no nível dos concentradores, é completa. No entanto, há casos em que essa suposição não é adequada, principalmente se os custos de ativação de arcos entre concentradores são relevantes na composição da rede ou o fluxo de demanda nessas conexões é baixo, de modo que a ativação de todos os arcos entre concentradores não seja viável. Redes de concentradores incompletas são frequentemente encontradas em muitas situações práticas, como sistemas de transporte público, no transporte de cargas e em redes de telecomunicações (Nickel et al., 2001; Alumur e Kara, 2009).

Neste trabalho, o problema de localização de concentradores tem seu foco sob o ponto de vista do lucro e considera que a rede no nível de concentradores é incompleta, não sendo imposta nenhuma estrutura topológica especial.

O problema de localização de concentradores com maximização do lucro (PLCML) consiste em determinar a quantidade e a localização dos concentradores, alocar nós de

demanda a esses concentradores, estabelecer a topologia da rede e definir as rotas de fluxo para satisfazer as demandas entre os pares de origem e destino que foram selecionados para serem atendidos, tendo, como objetivo, obter o maior lucro. Considera-se também que a alocação é múltipla, conexões diretas entre nós não concentradores não são permitidas, de modo que toda a demanda deve ser roteada através dos concentradores, e que existem custos fixos envolvidos na instalação de concentradores e arcos entre concentradores.

Aplicações potenciais dos problemas de localização de concentradores com maximização do lucro surgem no projeto de redes aéreas para o transporte de passageiros e carga, no transporte rodoviário de cargas fracionadas (*less-than-truckload transportation*), em serviços de entrega postal e remessa expressa. Eles também podem ser aplicados em qualquer outro setor que utiliza a estrutura de uma rede de concentradores, no qual o lucro seja um fator determinante, podendo auxiliar na criação de novas redes ou na adequação de redes existentes.

Como exemplo, no caso das companhias aéreas, as redes são projetadas quando as empresas entram no mercado pela primeira vez, e podem ser modificadas de acordo com a necessidade, quando ocorrem alianças, fusões e aquisições de empresas. Entre as decisões envolvidas no projeto dessas redes estão a determinação das cidades que farão parte da rede, ou seja, em quais cidades os serviços serão fornecidos, e quais voos serão operados entre os pares de cidades para atender os passageiros. As decisões também incluem a localização dos aeroportos principais (nós concentradores), a seleção dos trechos usados para conectar aeroportos regionais (nós não concentradores) aos aeroportos principais e na determinação de quais aeroportos principais serão interligados entre si. O objetivo é encontrar uma estrutura de rede de concentradores ideal que maximize o lucro líquido total para fornecer serviços de viagens aéreas a um conjunto de voos de origem e destino, levando em consideração o custo de projetar ou reprojetar a rede, o custo total de transporte e a receita. Dependendo das normas ou da política da empresa, os serviços de viagens aéreas de passageiros podem ser fornecidos: (i) apenas para pares de cidades que geram lucro; (ii) entre todos os pares de cidades servidos pela empresa; ou (iii) uma porcentagem deles (geralmente utilizado por empresas privadas com compromisso de serviço ou com políticas de penetração no mercado) (Alibeyg et al., 2016).

Neste trabalho será abordado o problema de localização de concentradores, com o objetivo direcionado para a maximização do lucro. Novas formulações para o problema são apresentadas e suas propriedades são investigadas. As formulações propostas consideram a estratégia de alocação múltipla, não impõem nenhuma restrição sobre o número de concentradores instalados nem sobre a configuração da rede, não permitem conexões diretas entre nós não concentradores e possibilitam que a de-

manda da rede seja atendida de modo parcial, ou seja, apenas quando for rentável. Essa última característica e o foco na maximização do lucro diferenciam o presente trabalho em relação aos problemas clássicos de localização de concentradores, em que são pressupostos o atendimento completo da demanda entre todos os pares de origem e destino e o modelados sob o ponto de vista dos custos. Além disso, como a maioria das aplicações práticas deste problema envolve dados incertos, como demandas e custos, esta tese irá abordar suas versões determinística e sob consideração de incerteza.

Recentemente proposto na literatura, o problema de localização de concentradores com considerações de lucro ainda foi pouco explorado. Com isso, mais estudos são fundamentais para compreender melhor esse novo tipo de problema e os desafios que o cercam. Adicionalmente, a grande quantidade de aplicações nas quais ele está inserido endossa a importância desses estudos.

Nesse problema, o lucro é obtido através do atendimento da demanda de um par de origem e destino. Esse lucro pode estar envolvido não apenas com os custos de roteamento, mas também com custos de configuração adicionais, pois os nós de origem e destino podem exigir a instalação *a priori* de uma infraestrutura adequada de transporte. Os problemas clássicos de localização de concentradores, no entanto, ignoram esses lucros e os custos de configuração associados, uma vez que é requerido o atendimento completo da demanda. Em termos gerais, esse requisito expressa a hipótese implícita de que os custos gerais da rede serão compensados pelos lucros gerais. Obviamente, esta hipótese não é necessariamente válida, e a incorporação de decisões sobre os pares de nós que devem ser atendidos pode ter implicações importantes nos custos estratégicos e operacionais (Alibeyg et al., 2016).

Como observado anteriormente, o PLCML pertence à classe NP-difícil (Alumur e Kara, 2008; Campbell e O’Kelly, 2012). Consequentemente, obter a configuração de uma rede de concentradores ótima não é uma tarefa fácil. Além disso, o projeto dessas redes é um trabalho de planejamento estratégico que envolve altos custos, devido à natureza das aplicações às quais ele está associado. Por exemplo, no setor aéreo, os concentradores podem indicar a instalação de um aeroporto em uma determinada localidade, sendo, assim, um fator de elevado impacto econômico e social. Nas redes de transporte rodoviário e ferroviário, além dos custos de instalação de concentradores, os custos relacionados com as conexões entre os concentradores, isto é, as rodovias e ferrovias, são altamente relevantes no projeto das redes.

Portanto, é essencial que a rede de concentradores seja estabelecida da maneira mais assertiva possível, de modo que a seleção dos pares de origem e destino a serem atendidos seja satisfatória (gerando o maior lucro) e que a localização dos concentradores, bem como a topologia da rede estejam em consonância com os propósitos reais

do problema retratado.

Assim, surge a necessidade de se desenvolver métodos eficientes para lidar com esse novo tipo de problema. Devido a sua estrutura decomponível (ou seja, sua estrutura ser passível de decomposição), um dos procedimentos disponíveis é a utilização de algoritmos exatos que fazem uso de métodos de decomposição, pois permitem obter uma configuração ótima de forma precisa, dentro de um tempo computacional adequado. Adicionalmente, algoritmos heurísticos também podem ser aplicados para lidar com instâncias de grande dimensão do problema.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Considerando o contexto exposto, o objetivo geral deste trabalho é estudar o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, não capacitado e com rede incompleta, bem como propor métodos exatos e heurísticos para resolvê-lo.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para que este objetivo geral seja alcançado, é necessário atingir os seguintes objetivos específicos:

- (i) Realizar um levantamento da literatura sobre os principais temas envolvidos nesta tese, os quais são: PLCs com rede incompleta; PLCs com considerações de lucro; PLCs sob incerteza; e métodos de solução para estes tipos de problemas;
- (ii) Compreender as características do problema de localização de concentradores com considerações de lucro;
- (iii) Propor formulações que possuam boas propriedades para lidar com o problema;
- (iv) Identificar as propriedades das formulações propostas e compará-las com outras apresentadas na literatura;
- (v) Desenvolver algoritmos exatos para resolver instâncias do problema;
- (vi) Desenvolver algoritmos heurísticos eficientes que possam ser aplicados para solucionar instâncias de grande dimensão;
- (vii) Comparar os resultados dos algoritmos desenvolvidos com os resultados da literatura;

- (viii) Estudar e apresentar uma formulação robusta para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro que incorpora considerações de incerteza nos dados;
- (ix) Identificar como a incerteza nos dados do problema é refletida na configuração da rede e no valor do lucro associado a ela;
- (x) Desenvolver métodos de solução exato e heurístico para lidar com o problema de localização de concentradores com maximização do lucro sob incerteza.

1.3 Contribuições

Este trabalho tem como principal contribuição o estudo de propriedades e características do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, não capacitado e com rede incompleta, ainda pouco explorado na literatura. O trabalho apresenta as seguintes contribuições específicas:

- (i) a apresentação de novas formulações para o PLCML, considerando o caso determinístico e o caso robusto (com incerteza nos dados);
- (ii) o desenvolvimento de métodos especializados de decomposição de Benders para o PLCML, com e sem considerações de incerteza;
- (iii) o desenvolvimento de algoritmos heurísticos baseados em procedimentos de busca local e na troca sistemática de estruturas de vizinhança, eficazes na resolução de instâncias de grande porte para o PLCML determinístico e robusto.

1.4 Publicações derivadas desta pesquisa

A seguir são listadas as publicações geradas pela presente pesquisa.

1.4.1 Artigos publicados em periódicos

- Oliveira, F. A., de Sá, E. M., de Souza, S. R. (2022). *Benders decomposition applied to profit maximizing hub location problem with incomplete hub network*. *Computers & Operations Research*, 142, 105715. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.105715>
- Oliveira, F. A.; de Sá, E. M.; de Souza, S. R.; e Souza, M. J. F. (2023). *ILS-based algorithms for the profit maximizing uncapacitated hub network design problem*

with multiple allocation. Computers & Operations Research, 157, 106252. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106252>

1.4.2 Artigos publicados em anais de congresso

- Oliveira, F. A., de Sá, E. M., de Souza, S. R. (2020). *Formulações para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro. Anais do 52º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. João Pessoa (PB). Brasil. Disponível em: <https://proceedings.science/sbpo/sbpo-2020/trabalhos/formulacoes-para-o-problema-de-localizacao-de-concentradores-com-maximizacao-do?lang=pt-br>.
- Oliveira, F. A., de Sá, E. M., Souza, M. J. F.; e de Souza, S. R. (2021). *Algoritmo Smart ILS aplicado ao problema de localização de concentradores com maximização do lucro. Anais do 53º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. João Pessoa (PB). Brasil. Disponível em: <https://proceedings.science/sbpo/sbpo-2021/trabalhos/algoritmo-smart-ils-aplicado-ao-problema-de-localizacao-de-concentradores-com-ma?lang=pt-br>.

1.5 Organização da Tese

O restante desta tese está organizado como segue. O Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura para o problema e destaca os principais trabalhos relacionados. No Capítulo 3 é realizada a fundamentação teórica dos assuntos e temas necessários para o desenvolvimento desta pesquisa. No Capítulo 4, o problema é descrito formalmente, novas formulações são apresentadas e comparadas com outra da literatura. Diferentes versões do método de decomposição de Benders são desenvolvidos para o problema no Capítulo 5. No Capítulo 6 são apresentadas duas heurísticas baseadas no ILS e na troca sistemática de estruturas de vizinhança para resolver o problema. Também é realizada, nesse capítulo, uma análise das estruturas de vizinhança e uma comparação estatística dos algoritmos propostos. A fim de avaliar o desempenho desses métodos de solução, foram executados extensivos testes computacionais com instâncias de referência da literatura. O PLCML com considerações de incerteza é abordado no Capítulo 7. Nesse capítulo, uma formulação robusta para o problema é apresentada. Além disso, um método exato e outro heurístico, adaptados dos algoritmos desenvolvidos para o caso determinístico, são propostos para resolver instâncias do problema robusto. Por fim, no Capítulo 8 são realizadas as considerações finais. Também são apresentados direcionamentos para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Este capítulo apresenta uma revisão da literatura dos trabalhos relacionados com o problema de localização de concentradores (PLC) sob a perspectiva do lucro e rede incompleta. Em particular, na Seção 2.1, é feita uma revisão dos PLCs que lidam exclusivamente com redes incompletas. A Seção 2.2 aborda os trabalhos que têm, como objetivo, a maximização do lucro. A Seção 2.3 apresenta uma revisão dos trabalhos que abordam problemas com considerações de incerteza. Estudos que empregam o método de decomposição de Benders para resolver PLCs são examinados na Seção 2.4. Por fim, na Seção 2.5, são apresentadas as considerações finais deste capítulo.

2.1 Problemas de Localização de Concentradores com Redes Incompletas

Diferentes problemas de localização de concentradores envolvendo redes incompletas podem ser encontrados na literatura. Alguns desses trabalhos abordam problemas em que a rede possui uma estrutura topológica específica. Lee e Ro (1993) estudaram a topologia anel-estrela, em que os concentradores são conectados por um anel e a atribuição dos nós não concentradores aos concentradores é realizada por alocação única. A topologia árvore-estrela, em que a rede no nível dos concentradores é uma árvore e cada nó de demanda é alocado a um único concentrador, foi considerada nos trabalhos de Contreras e Fernández (2009); Contreras et al. (2010); Martins de Sá et al. (2013) e Pessoa et al. (2016). A topologia estrela-estrela, abordada por Labbé e Yaman (2008); Yaman (2008); Yaman e Elloumi (2012), possui uma estrutura em que todos os concentradores são ligados a um concentrador central e os nós não concentradores são atribuídos com alocação única. Alumur et al. (2012b) abordaram topologias de redes de concentradores com mais de duas camadas, considerando tipos diferentes

de concentradores no projeto da rede. [Martins de Sá et al. \(2015\)](#) introduziram o problema de localização de concentradores em linha, em que os concentradores são conectados por um caminho (ou uma linha) e cada nó não concentrador pode ser atribuído a mais de um concentrador.

Outros autores exploraram problemas em que os concentradores podem ser parcialmente interconectados e nenhuma restrição topológica especial é imposta à rede de concentradores. [Nickel et al. \(2001\)](#) propuseram um modelo para o problema de localização de concentradores aplicado a redes de transporte público, no qual consideraram a estrutura de alocação múltipla e permitiram conexões diretas entre nós não concentradores. [Campbell et al. \(2005a,b\)](#) abordaram os problemas de localização de arcos entre concentradores, em que um número fixo de arcos entre concentradores é localizado de modo a minimizar os custos totais de transporte. [Yoon e Current \(2008\)](#) estudaram o projeto de uma rede de concentradores incompleta com a incorporação de custos fixos e custos variáveis nos arcos entre concentradores, considerando alocação múltipla e conexões diretas entre nós não concentradores. Eles utilizaram heurísticas baseadas no problema dual para resolver instâncias com até 100 nós.

Os trabalhos de [Alumur e Kara \(2009\)](#) e [Calik et al. \(2009\)](#) consideraram o problema de cobertura de uma rede incompleta de concentradores, sendo a alocação única e o tempo de viagem entre qualquer par de origem e destino limitado por um valor específico. Para solucionar o problema, [Alumur e Kara \(2009\)](#) utilizaram o *solver* CPLEX, enquanto [Calik et al. \(2009\)](#) aplicaram heurísticas baseadas em busca tabu. [Davari et al. \(2013\)](#) também estudaram o problema de cobertura de uma rede de concentradores incompleta, com a incorporação de incerteza sobre a demanda entre os pares de origem e destino, estimados com variáveis *fuzzy*. Os autores propuseram algoritmos heurísticos baseados em VNS (*Variable Neighborhood Search*) para resolver instâncias do problema. [Alumur et al. \(2009\)](#) exploram várias versões do problema de localização de concentradores com redes incompletas, considerando apenas a estratégia de alocação única. As autoras mostraram que um serviço tão bom quanto o obtido com uma rede de concentradores completa pode ser ofertado com uma rede de concentradores incompleta, além de permitir uma redução nos custos de transporte.

[Gelareh e Nickel \(2011\)](#) abordaram problemas de localização de concentradores não capacitados, com alocação múltipla e rede incompleta aplicados ao projeto de redes de transporte urbano e marítimo. Neste trabalho, foram propostos um método de decomposição de Benders acelerado e um algoritmo heurístico guloso. Problemas de localização de concentradores modelados como uma minimização de um conjunto de funções supermodulares foram estudados por [Contreras e Fernández \(2014\)](#). Em particular, eles retrataram o problema de localização de arcos entre concentradores

e aplicaram um algoritmo *branch-and-cut* para resolver instâncias do problema. Um algoritmo baseado em heurísticas foi apresentado por Dai et al. (2019) para problemas de localização de p concentradores medianos com redes incompletas. Öztürk et al. (2021) também trataram de problemas em que o número de concentradores é determinado previamente. Estes autores consideraram a estratégia de alocação única e apresentaram métodos heurísticos que utilizam medidas de centralidade. Em ambos os trabalhos, foram realizados experimentos computacionais usando instâncias com até 200 nós.

A Tabela 2.1 resume esses estudos, nos quais a rede de concentradores é incompleta, sem a imposição de nenhuma restrição topológica ou operacional. Essa tabela mostra o método utilizado para resolução dos problemas e o tamanho da maior instância resolvida em cada um deles, sendo o tamanho da instância dado pelo número de nós da rede.

Tabela 2.1: Estudos que abordam PLCs com rede incompleta sem restrições topológicas ou operacionais

Artigos	Método de solução	Tamanho da instância
Nickel et al. (2001)	Algoritmos de caminho mínimo	10
Campbell et al. (2005b)	Algoritmos baseados em enumeração	25
Yoon e Current (2008)	Algoritmos heurísticos baseados em duais	25
Alumur e Kara (2009)	<i>Solver</i> CPLEX	81
Calik et al. (2009)	Algoritmos heurísticos baseados em busca tabu	81
Alumur et al. (2009)	<i>Solver</i> CPLEX	81
Gelareh e Nickel (2011)	Decomposição de Benders e algoritmos gulosos	50
Davari et al. (2013)	Algoritmos heurísticos baseados em VNS	25
Contreras e Fernández (2014)	Algoritmo <i>branch-and-cut</i>	125
Dai et al. (2019)	Algoritmos heurísticos baseados em VNS	200
Öztürk et al. (2021)	Algoritmos heurísticos baseados em medidas de centralidade	200

Observe que a maior instância resolvida tem 200 nós. Vale ressaltar aqui que, embora os trabalhos apontados na tabela tenham resolvido instâncias com até 200 nós, há estudos na literatura que resolveram instâncias de PLCs com até 500 nós (Contreras et al., 2011b,c; Taherkhani et al., 2020). Estes estudos, no entanto, consideram redes de concentradores completas ou redes incompletas com alguma restrição sobre a topologia da rede ou sobre a quantidade de concentradores nos caminhos interligando os pares de origem e destino, fazendo, assim, o uso de rotas triviais. Na verdade, é bem conhecido na área de localização de concentradores que os problemas com rede incompleta e que não impõem condições topológicas específicas ou limitações operacionais são mais desafiadores, uma vez que também incluem decisões complexas de projeto de rede e têm que lidar com rotas não triviais (O’Kelly e Miller, 1994; Alumur

et al., 2021).

Mais alguns estudos que envolvem problemas com redes incompletas são destacados nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4, apresentadas a seguir.

2.2 Problemas de Localização de Concentradores com Considerações de Lucro

Existem poucos estudos sobre o problema de localização de concentradores com maximização do lucro. O primeiro trabalho deste tipo foi proposto por [Alibeyg et al. \(2016\)](#), no qual foram apresentados modelos para diferentes versões do problema que incluem restrições e/ou decisões adicionais, como a obrigatoriedade do atendimento da demanda de todos os nós da rede. Eles consideraram a estratégia de alocação múltipla e assumiram que a rota de atendimento de um par de origem e destino deveria conter pelo menos um e no máximo dois nós concentradores. O desempenho de seus modelos foi testado com o *solver* CPLEX. Em um estudo subsequente, [Alibeyg et al. \(2018\)](#) propuseram um algoritmo exato para os modelos apresentados em [Alibeyg et al. \(2016\)](#). Eles utilizaram testes de redução e enumeração parcial para reduzir a dimensão do problema e um algoritmo *Branch-and-bound* integrado com uma relaxação lagrangiana. Para avaliar o desempenho do algoritmo proposto, foram solucionadas instâncias contendo até 100 nós.

O problema de localização de concentradores com objetivo direcionado ao lucro foi aplicado por [Lin e Lee \(2018\)](#) no projeto de uma rede de transporte de carga fracionada com tempos definidos. Eles propuseram um algoritmo de enumeração implícita para resolver o problema e mostraram que a rede de concentradores gerada com a maximização do lucro é mais densa do que a rede obtida com a minimização dos custos para aumentar o lucro. [Taherkhani e Alumur \(2019\)](#) propuseram novos modelos para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, considerando a rede no nível dos concentradores incompleta. Foram apresentadas formulações que utilizam todos os tipos de estratégias de alocação (única, múltipla e *r*-alocação) e, para cada uma delas, foram modeladas versões nas quais conexões diretas entre nós não concentradores não eram permitidas e versões que relaxavam essa condição.

[Taherkhani et al. \(2020\)](#) abordaram o problema de localização de concentradores com maximização do lucro capacitado. Foram apresentados um modelo determinístico e um modelo estocástico, em que: a demanda é segmentada de diferentes classes; a alocação é múltipla; conexões diretas entre nós não concentradores não são permitidas; no caminho de um par de origem e destino há, no máximo, dois concentradores;

e a rede no nível dos concentradores é completa. Foram apresentados métodos de solução baseados em decomposição de Benders. Testes de redução, utilizando pré-fixação de variáveis, foram aplicados para reduzir a dimensão do problema, bem como o esforço computacional.

Em [Oliveira et al. \(2022\)](#) e [Oliveira et al. \(2023\)](#), que são trabalhos oriundos desta pesquisa de doutorado, foi estudado o problema de localização de concentradores não capacitado, com alocação múltipla e que não limita a quantidade de concentradores e arcos entre concentradores na rede, nem impõe que todos os concentradores sejam interligados, considerando a maximização do lucro. No primeiro estudo, foram apresentadas diferentes versões de algoritmos exatos baseados no método de decomposição de Benders que aplicam cortes Pareto-ótimos e foram resolvidas instâncias com até 100 nós. No segundo trabalho, foram propostos métodos heurísticos baseados na meta-heurística ILS (*Iterated Local Search*) e foram resolvidas instâncias com até 500 nós.

Também, recentemente, [Zhang et al. \(2023\)](#) usaram algoritmos heurísticos baseados em VNS (*Variable Neighborhood Search*) para solucionar algumas variantes de problemas de localização de concentradores não capacitados, com rede incompleta e objetivo voltado a maximização do lucro. Foram considerados problemas com estratégias de alocação única, alocação múltipla e r -alocação, em versões com e sem conexões diretas.

Um resumo dos trabalhos discutidos acima é mostrado na Tabela 2.2. Para cada artigo, são destacadas as características dos problemas estudados. Em seguida, é indicado se existem restrições quanto ao número de concentradores em cada rota ligando pares de origem e destino e também são mostrados o método de solução utilizado e o tamanho máximo de instância resolvida, correspondente ao número de nós da rede. Observe que [Oliveira et al. \(2022\)](#) e [Oliveira et al. \(2023\)](#) são os únicos trabalhos que resolveram instâncias com mais de 100 nós da versão UMAI, que é a versão do problema não capacitada e sem restrição na rota.

Além dos trabalhos considerados acima, que possuem, como objetivo exclusivo a maximização do lucro da rede de concentradores, existem na literatura, trabalhos correlatos que também consideram objetivos direcionados ao lucro. Como exemplo, podemos destacar os problemas de cobertura maximal, que visam maximizar a cobertura da demanda na rede ([Church e ReVelle, 1974](#); [Hwang e Lee, 2012](#); [Peker e Kara, 2015](#); [Ghaffarinasab et al., 2022](#)). Também podem ser inseridos nessa lista, problemas que envolvem um ambiente competitivo. Nestes estudos, em vez de haver uma única empresa, há várias empresas competindo para atender a demanda. Consequentemente, as decisões dos concorrentes afetam o lucro da empresa. Diferentes funções objetivo são consideradas nestes tipos de problemas, como maximizar a demanda

Tabela 2.2: Estudos que abordam PLCs com maximização do lucro

Artigos	PLCs com maximização do lucro	Restrição na rota	Método de solução	Tamanho da instância
Alibeyg et al. (2016)	UMAI, CapMAI	Sim	<i>Solver</i> CPLEX	70
Alibeyg et al. (2018)	UMAI, CapMAI	Sim	<i>Branch-and-bound</i> e relaxação Lagrangiana	100
Lin e Lee (2018)	CapMAI	Não	Algoritmo de enumeração implícita	48
Taherkhani e Alumur (2019)	UMAI, USAI, UrAI, UMAIDC, USAIDC, UrAIDC	Não	<i>Solver</i> CPLEX	40
Taherkhani et al. (2020)	CapMAComp	Sim	Decomposição de Benders	500
Oliveira et al. (2022)	UMAI	Não	Decomposição de Benders	150
Oliveira et al. (2023)	UMAI	Não	Algoritmos heurísticos baseados no ILS	500
Zhang et al. (2023)	UMAI, USAI, UrAI, UMAIDC, USAIDC, UrAIDC	Não	Algoritmo heurístico baseado no VNS	60

Nota. U/Cap=Não capacitado/Capacitado, SA/MA/rA=Alocação Única/Múltipla/r
I/Comp=Rede de concentradores Incompleta/Completa, DC=Conexões diretas permitidas

capturada e maximizar a receita. Exemplos de estudos considerando um ambiente competitivo incluem [Marianov et al. \(1999\)](#), [Eiselt e Marianov \(2009\)](#), [Gelareh et al. \(2010\)](#), [Lüer-Villagra e Marianov \(2013\)](#) e [Tiwari et al. \(2021\)](#).

2.3 Problemas de Localização de Concentradores sob Incerteza

Nos trabalhos da área de localização de concentradores, os aspectos de incerteza são incorporados nos elementos associados com o projeto das redes de várias maneiras diferentes. Esses estudos, em geral, tratam os parâmetros incertos usando ferramentas da otimização estocástica e da otimização robusta. Nesta seção é apresentada uma revisão dos trabalhos que utilizam principalmente as ferramentas e técnicas da otimização robusta.

[Alumur et al. \(2012a\)](#) abordaram PLCs com alocação única e múltipla, nos quais os custos fixos dos arcos entre concentradores e as demandas são incertos. As fontes de incerteza foram inicialmente analisadas separadamente. Eles assumiram que nenhuma informação probabilística é associada aos custos fixos incertos e propõem uma formulação baseada em minimização do máximo arrependimento. Para a demanda incerta, eles consideraram um modelo estocástico. [Shahabi e Unnikrishnan](#)

(2014) apresentaram uma formulação robusta para problemas não capacitados, com alocação única e múltipla, no qual a demanda é incerta e sua distribuição não é totalmente conhecida. Eles propuseram uma estratégia eficiente de relaxação linear e mostraram que a quantidade de concentradores instalados na rede é maior quando as demandas são consideradas incertezas em relação ao caso determinístico. Ghaffarinasab et al. (2015) estudaram um PLC com alocação única e que possui restrições de capacidade. Uma abordagem de otimização robusta foi empregada para modelar o problema considerando as demandas sob incerteza. Técnicas da otimização robusta também foram usadas por Boukani et al. (2016) para os problemas de localização de concentradores com alocação única e múltipla capacitados, em que os custos fixos de instalação dos concentradores e a capacidade dos concentradores foram considerados como parâmetros incertos.

Meraklı e Yaman (2016) modelaram o problema robusto de localização de p concentradores medianos com alocação múltipla e não capacitado sob incerteza de demanda poliédrica. Eles adotaram um critério de robustez min-max para uma função objetivo baseada em custos e desenvolveram dois algoritmos exatos baseados na decomposição de Benders. Em um trabalho posterior, Meraklı e Yaman (2017) abordaram um PLC com alocação múltipla, capacitado e com demandas incertas, tratadas com otimização robusta. Foram desenvolvidos dois algoritmos de decomposição de Benders diferentes, onde foram resolvidas instâncias com até 50 nós. Zetina et al. (2017) apresentaram contrapartes robustas para os problemas de localização de concentradores com alocação múltipla, não capacitado, considerando demandas e custos de transporte incertos. Eles empregaram um orçamento de incerteza para controlar o nível de conservadorismo em seus modelos matemáticos. Para resolver o problema, eles propuseram um algoritmo *branch-and-cut*.

Martins de Sá et al. (2018a) estudaram um problema com alocação múltipla, rede de concentradores incompleta, com permissão de conexões diretas entre nós não concentradores, assegurando a conexidade da rede. Incerteza é assumida para os dados de demanda e para os custos fixos de instalação de concentradores. Os experimentos computacionais mostraram que o modelo robusto proposto por eles oferece melhor garantia de não violar as restrições orçamentárias do que a versão determinística. Foram desenvolvidos métodos de decomposição de Benders especializados para resolver instâncias do problema. Em outro trabalho, Martins de Sá et al. (2018b) abordaram o problema robusto de localização de concentradores, com alocação múltipla e rede incompleta, considerando requisitos de tempo de serviço, que foi considerado como sendo um dado incerto. Neste problema, conexões diretas entre nós não concentradores não foram permitidas e a conexidade da rede foi garantida. O problema foi formulado utilizando um modelo de otimização robusto linear binário. Foram apre-

sentados dois algoritmos de decomposição de Benders. Os resultados mostraram que a probabilidade de violação dos requisitos de tempo de viagem diminui com o nível de proteção prescrito, em detrimento dos custos mais elevados da solução ótima para o modelo de otimização robusto. Ghaffarinasab (2018) considerou um problema robusto de localização de p concentradores medianos, considerando modelos de incerteza poliédrica sobre os dados de demanda. Três variantes desses modelos foram usadas no problema e um algoritmo heurístico baseado em busca tabu foi desenvolvido para resolver os modelos apresentados.

Lozkins et al. (2019) abordaram o problema robusto de localização de concentradores com alocação múltipla, não capacitado, considerando um conjunto de cenários para as demandas. Formulações estocásticas e robustas para o problema foram apresentadas e comparadas, utilizando algoritmos de decomposição de Benders e o *solver* Gurobi. Li et al. (2020) consideraram os dados de demanda e os custos de instalação de concentradores incertos para PLCs com alocação única e múltipla. Uma formulação de otimização robusta foi proposta e modelos de otimização inteira não linear foram obtidos e resolvidos com o CPLEX. Os resultados alcançados mostraram que o modelo robusto instalou mais *hubs* do que o modelo determinístico, com um aumento de custo relativamente pequeno, e que o custo total da solução robusta para o caso de alocação múltipla é marginalmente menor quando comparado com o caso de alocação única. Wang et al. (2020) abordaram o problema adaptativo de localização de concentradores distributivamente robusto com múltiplas *commodities*, considerando a demanda e os custos incertos. Foram consideradas versões do problema com e sem restrições de capacidade, nos quais as rotas são adaptativas de acordo com a realização de incerteza, selecionando centros específicos para o envio das mercadorias. Em termos de tratabilidade, os autores reformularam o modelo distributivamente robusto como um programa linear inteiro misto e resolveram instâncias do problema com o CPLEX.

Shang et al. (2021) abordaram um problema de localização de concentradores hierárquico baseado em *clusters* para a integração do sistema de transporte público urbano e rural. Eles propuseram um modelo de otimização distributivamente robusto para incorporar a incerteza nos dados relativos aos custos da rede e aos tempos de viagem. Para resolver instâncias de grande porte, os autores apresentaram dois algoritmos heurísticos baseados em VNS e em busca populacional. Taherkhani et al. (2021) desenvolveram modelos robusto-estocásticos para um PLC capacitado, com objetivo orientado ao lucro, considerando a receita incerta e a demanda estocástica. Algoritmos exatos baseados em decomposição de Benders, juntamente com um esquema de aproximação de média amostral, foram propostos para resolver o problema. Técnicas de aceleração para aprimorar os algoritmos também foram desenvolvidas e

instâncias com até 75 nós foram solucionadas. [Ghaffarinasab et al. \(2022\)](#) estudou o problema robusto de um PLC p -mediana com alocação múltipla e não capacitado, em que o tráfego de demanda entre pares origem e destino está sujeito à incerteza. Dois procedimentos de solução baseados no método de decomposição de Benders foram desenvolvidos para resolver instâncias do problema.

[Rahmati et al. \(2022\)](#) aplicaram otimização robusta em dois estágios para um PLC não capacitado, no qual a demanda é incerta e o nível de conservadorismo é controlado por um orçamento de incerteza. Na primeira fase são determinadas as localizações dos concentradores e as decisões de atribuição são tomadas na segunda fase. Métodos acelerados de decomposição de Benders foram propostos e os autores concluíram que a consideração de incerteza permitiu uma melhor definição do orçamento. [Shiripour et al. \(2023\)](#) abordaram um problema dinâmico de localização de concentradores virtual sob incerteza e presença de restrições de capacidade para os concentradores originais e virtuais. As restrições de capacidade foram aplicadas ao modelo usando uma fila M/M/C/K e dois algoritmos metaheurísticos foram propostos: um algoritmo genético e um algoritmo competitivo imperialista em um espaço discreto.

A Tabela 2.3 mostra uma revisão dos trabalhos discutidos anteriormente, evidenciando o objetivo do problema, os parâmetros com incerteza e o método de solução utilizado.

Tabela 2.3: Revisão dos PLCs sob incerteza baseados em otimização robusta

Artigos	Objetivo		Parâmetros incertos							Método de solução
	custos	lucro	w	c	s	g	cap	t	r	
Alumur et al. (2012a)	✓		✓		✓					<i>solver</i> CPLEX
Shahabi e Unnikrishnan (2014)	✓		✓							<i>solver</i> CPLEX
Ghaffarinasab et al. (2015)	✓		✓							<i>solver</i> CPLEX
Merakli e Yaman (2016)	✓		✓							Decomposição de Benders
Boukani et al. (2016)	✓				✓		✓			<i>solver</i> GAMS
Merakli e Yaman (2017)	✓		✓							Decomposição de Benders
Zetina et al. (2017)	✓		✓	✓						<i>Branch-and-cut</i>
Ghaffarinasab (2018)	✓		✓							Heurísticas baseadas em busca tabu
Martins de Sá et al. (2018a)	✓		✓		✓					Decomposição de Benders e heurística ILS-VND
Martins de Sá et al. (2018b)	✓							✓		Decomposição de Benders
Lozkins et al. (2019)	✓		✓							Decomposição de Benders
Li et al. (2020)	✓		✓	✓						<i>solver</i> CPLEX
Wang et al. (2020)	✓		✓		✓					<i>solver</i> CPLEX
Shang et al. (2021)	✓		✓		✓	✓		✓		Heurística baseada em VNS e busca populacional
Taherkhani et al. (2021)		✓	✓						✓	Decomposição de Benders
Ghaffarinasab et al. (2022)	✓		✓							Decomposição de Benders
Rahmati et al. (2022)	✓		✓							Decomposição de Benders
Shiripour et al. (2023)	✓		✓							Algoritmo genético e algoritmo competitivo imperialista

Notas: w = Demanda, c = Custos de transporte, s = Custos de instalação de concentradores, g = Custos de instalação de arcos entre concentradores, cap = Capacidade dos concentradores, t = Tempos de serviço, r = Receita.

Observe na Tabela 2.3 que, embora tenham surgido nos últimos anos muitos trabalhos na área de localização de concentradores que tratam incerteza com otimização robusta, a maioria deles possui objetivos voltados a minimização dos custos. [Taherkhani et al. \(2021\)](#) é o único estudo que considera incerteza em um problema com objetivo voltado à maximização do lucro. No entanto, nesse trabalho não foram consideradas as incertezas nos custos de localização de concentradores e de instalação

de arcos entre concentradores, que é um dos focos desta pesquisa de doutorado.

Para fins de completude, destacamos a seguir trabalhos recentes que abordam PLCs orientados ao lucro e que tratam incerteza nos dados utilizando abordagem estocástica. [Rahmati et al. \(2023a\)](#) exploraram um problema com maximização do lucro voltado para sustentabilidade, considerando a demanda incerta. Foi proposto um modelo estocástico em dois estágios, que incorpora vários regulamentos de carbono. Eles propuseram um algoritmo *L-shaped* para resolver cenários obtidos através de um método de aproximação de média amostral aprimorado. Os resultados dos testes realizados mostraram que as regulamentações de carbono podem reduzir as emissões globais de carbono. Em outro trabalho, [Rahmati et al. \(2023b\)](#) abordaram um PLC orientado ao lucro também com questões de sustentabilidade. O modelo proposto não se destina apenas a maximizar o lucro, mas também a controlar as emissões de carbono através de uma política de limite de carbono e a reduzir as diferenças nas emissões entre regiões, considerando a densidade populacional. Uma abordagem de programação estocástica em dois estágios foi empregada para lidar com a incerteza da demanda e instâncias do problema foram resolvidas com métodos baseados na decomposição de Benders incluindo cortes Pareto-ótimos e também com um algoritmo *L-shaped*.

2.4 Decomposição de Benders para os Problemas de Localização de Concentradores

Obter uma solução exata para os problemas de localização de concentradores é um grande desafio, pois, com exceção de casos bem específicos, eles são NP-difíceis ([Campbell e O’Kelly, 2012](#)). Além disso, a maioria dos problemas reais que envolvem redes de concentradores são caracterizados como de grande porte, o que intensifica essa dificuldade. O método de decomposição de Benders (BD) tem recebido uma atenção especial por resolver várias classes dos PLCs até a otimalidade. Esse procedimento, proposto por [Benders \(1962\)](#), é um método de particionamento muito eficaz para resolver problemas de otimização com variáveis mistas, em que a matriz associada possui uma estrutura bloco diagonal.

A decomposição de Benders tem sido aplicada com sucesso para resolver diferentes variantes do problema de localização de concentradores. [Camargo et al. \(2008\)](#) apresentaram variantes do método de decomposição de Benders para o problema de localização de concentradores com alocação múltipla não capacitado. Em [Camargo et al. \(2009a\)](#) foi desenvolvido um algoritmo de decomposição de Benders para duas versões do PLC com alocação múltipla não capacitado (uma direcionada a servi-

cos e outra direcionada a custos), em que as economias de escala eram dependentes do fluxo. Em outro trabalho, [Camargo et al. \(2009b\)](#) propuseram um algoritmo de decomposição de Benders generalizada para um PLC de alocação múltipla sob congestionamento. [Contreras et al. \(2011a\)](#) empregaram um algoritmo de BD para resolver o problema de localização de concentradores estocástico não capacitado. [Contreras et al. \(2011b\)](#) desenvolveram um método de decomposição de Benders para resolver instâncias de grande escala do PLC não capacitado. [Camargo et al. \(2011\)](#) desenvolveram um algoritmo híbrido, combinando a técnica de aproximação externa e uma versão especializada do procedimento de Benders, para resolver o PLC com alocação única sob congestionamento.

[Gelareh e Nickel \(2011\)](#) desenvolveram um algoritmo de decomposição de Benders melhorado para um PLC de alocação múltipla não capacitado adaptado para problemas de projeto de rede de transporte urbano e transporte marítimo. Em [Gelareh et al. \(2015\)](#), os mesmos autores estenderam o método proposto no artigo anterior para o PLC de atribuição múltipla não capacitado, considerando alguns períodos sob restrição orçamentária. [Contreras et al. \(2012\)](#) apresentaram um algoritmo de Benders para uma extensão do PLC com atribuição múltipla e capacitado, em que a capacidade disponível nos concentradores é uma variável de decisão. Em [Camargo et al. \(2013\)](#), os autores desenvolveram um algoritmo de BD para lidar com um problema, obtido a partir da combinação de dois outros: o roteamento de veículos e o PLC com alocação única. [O’Kelly et al. \(2015\)](#) apresentaram um método de BD para o PLC com demandas sensíveis ao preço. [Ghaffarinasab e Kara \(2019\)](#) desenvolveram algoritmos de decomposição de Benders para resolver duas variantes do PLC com alocação única e o PLC p -mediana com alocação única não capacitado. Em [Ghaffarinasab \(2020\)](#) foi proposto um eficiente método de decomposição de Benders para resolver instâncias de grandes dimensões do problema de localização de p concentradores medianos com alocação múltipla não capacitado. [Najy e Diabat \(2020\)](#) desenvolveram um método de decomposição de Benders especializado para o PLC não capacitado com alocação múltipla, em que foram incorporados economias de escala dependentes do fluxo e considerações de congestionamento.

Variantes do problema de localização de concentradores que consideram redes incompletas também foram resolvidas eficientemente com algoritmos que utilizam a decomposição de Benders. Nos trabalhos de [Martins de Sá et al. \(2013\)](#) e [Martins de Sá et al. \(2015\)](#), métodos de Benders melhorados foram desenvolvidos para solucionar os PLCs em árvore e em linha, respectivamente. Nos dois trabalhos, foram resolvidas instâncias com até 100 nós. [Camargo et al. \(2017\)](#) propuseram formulações e desenvolveram algoritmos especializados baseados na decomposição de Benders para resolver problemas de localização de concentradores com rede incompleta que incluem

hop-constraints. Foram resolvidas instâncias com até 100 nós. A decomposição de Benders também foi aplicada por [Xu et al. \(2017\)](#) para obter solução de problemas com rede incompleta que consideram restrições de capacidade.

Observamos ainda que, muitos trabalhos destacados nas Seções 2.1, 2.2 e 2.3 também aplicaram o método de decomposição de Benders para solucionar instâncias dos problemas abordados ([Gelareh e Nickel, 2011](#); [Meraklı e Yaman, 2016, 2017](#); [Martins de Sá et al., 2018a,b](#); [Taherkhani et al., 2020, 2021](#); [Ghaffarinasab et al., 2022](#); [Oliveira et al., 2022](#); [Rahmati et al., 2022, 2023b](#)).

2.5 Conclusões

Os trabalhos discutidos neste capítulo mostram que, nas últimas décadas, a área de localização de concentradores tem chamado a atenção de muitos pesquisadores e está em constante crescimento. A aplicabilidade em diversos setores, como transporte e telecomunicações, confirmam a importância de estudos nessa área. Além disso, frequentemente surgem novas variantes do problema, com características e particularidades a serem investigadas. Devido a complexidade dos problemas, a busca por métodos com bom desempenho computacional se faz necessária, principalmente para tratar problemas de grande porte, que exigem mais esforço computacional.

Foram destacados trabalhos envolvendo redes de concentradores incompletas, estudos com foco na maximização do lucro e outros consideram incerteza nos dados e aplicam abordagens de otimização robusta. Também foram discutidos trabalhos que utilizam algoritmos baseados no método de decomposição de Benders para solucionar PLCs. Nesta tese, será considerado um PLC que possui essas duas características, ou seja, que possui rede de concentradores incompleta e objetivo voltado a maximização do lucro. Também é apresentada uma versão que incorpora incerteza nos dados e que é tratada com otimização robusta. Como métodos de solução, são apresentados algoritmos que empregam a decomposição de Benders e também algoritmos heurísticos baseados no ILS para resolver instâncias maiores do problema.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica usada neste trabalho. Na Seção 3.1 são revisados os principais resultados envolvendo a Teoria da Dualidade associados ao tema objeto de interesse. Na Seção 3.2 são apresentados conceitos e resultados sobre a Teoria Poliedral. O método de decomposição de Benders é descrito em detalhes na Seção 3.3. Por fim, na Seção 3.4, é apresentada a abordagem de otimização robusta utilizada neste trabalho.

3.1 Uma revisão de conceitos de dualidade em otimização linear

Nesta seção é realizada uma breve revisão sobre dualidade em otimização linear. Em particular, são apresentados os principais resultados da teoria associados ao tema deste projeto de pesquisa. Uma abordagem completa sobre o assunto, bem como as demonstrações dos resultados enunciados a seguir, podem ser obtidas em [Nemhauser e Wolsey \(1999\)](#); [Bazaraa et al. \(2010\)](#).

Dado um problema de otimização linear, existe outro problema de otimização linear associado a ele, denominado problema dual. Esse par de problemas lineares tem muitas propriedades e suas soluções possuem importantes relações.

Seja o problema:

$$\begin{aligned} \text{(PP)} \quad & \max \quad c'x \\ & \text{sujeito a} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

denominado problema primal, em que A é uma matriz $m \times n$, b é um vetor de dimensão m , c e x são vetores de dimensão n , sendo x as variáveis de decisão do problema.

O seu problema dual é definido como o problema linear:

$$\begin{aligned} \text{(PD)} \quad & \min \quad b'\pi \\ & \text{sujeito a} \quad A'\pi \geq c \\ & \quad \pi \geq 0, \end{aligned}$$

em que π é um vetor de dimensão m , representando as variáveis de decisão duais. Observe que existe exatamente uma variável dual para cada restrição primal e exatamente uma restrição dual para cada variável primal.

O primeiro resultado mostra que os termos “primal” e “dual” são relativos, de modo que essa atribuição aos problemas pode ser feita ao contrário, sem nenhum prejuízo.

Lema 3.1.1. *O dual do problema dual é o problema primal.*

Considerando os problemas primal (PP) e dual (PD) definidos anteriormente, o lema a seguir nos diz que soluções factíveis do problema dual fornecem limitantes superiores para soluções factíveis do problema primal.

Lema 3.1.2 (Lema da Dualidade Fraca). *Se $\bar{x}$ é uma solução factível do problema primal e $\bar{\pi}$ é uma solução factível do problema dual, então $c'\bar{x} \leq b'\bar{\pi}$.*

O próximo lema traz um resultado importante da Teoria da Dualidade.

Lema 3.1.3 (Lema da Dualidade Forte). *Se um problema possui solução ótima finita, então o outro também terá solução ótima finita e os valores objetivos ótimos são iguais.*

O resultado seguinte é conhecido como Teorema Fundamental da Dualidade e mostra como estão relacionadas as soluções do par de problemas primal e dual.

Teorema 3.1.1 (Teorema Fundamental da Dualidade). *Em relação ao par de problemas primal e dual, uma e somente uma das alternativas é verdadeira:*

- (a) *Ambos têm soluções ótimas finitas x^* e π^* , com $c'x^* = b'\pi^*$.*
- (b) *Um tem solução ilimitada e o outro é infactível.*
- (c) *Os dois são infactíveis.*

O teorema a seguir nos dá condições suficientes e necessárias para a otimalidade de soluções dos problemas primal e dual.

Teorema 3.1.2 (Teorema das Folgas Complementares). *As soluções x^* e π^* são ótimas para os problemas primal e dual, respectivamente, se, e somente se,*

$$x_j^* s_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

e

$$\pi_i^* t_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

em que $s^* = A'\pi^* - c$ e $t^* = b - Ax^*$.

É importante poder verificar se um sistema de desigualdades lineares é viável ou não. A dualidade fornece uma caracterização muito útil da inviabilidade, apresentada no teorema abaixo.

Teorema 3.1.3 (Teorema das Alternativas - Lema de Farkas). *Seja A uma matriz $m \times n$ e b um vetor de tamanho m . Ou existe um vetor x tal que $Ax \leq b$ e $x \geq 0$, ou existe um vetor $\pi \geq 0$ tal que $A'\pi \geq 0$ e $b'\pi < 0$, mas não ambos.*

3.2 Teoria poliedral

Esta seção revisa algumas definições e resultados envolvendo conjuntos poliédricos, que serão utilizados ao longo deste trabalho. Assim como na seção anterior, as provas dos resultados e uma abordagem detalhada sobre a Teoria Poliedral podem ser obtidas em [Nemhauser e Wolsey \(1999\)](#); [Bazaraa et al. \(2010\)](#).

Iniciamos com a definição de poliedro e a sua caracterização como um conjunto convexo.

Definição 3.2.1. *Um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto de pontos que satisfaz um número finito de desigualdades lineares.*

Os conjuntos $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ e $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, em que A é uma matriz $m \times n$ e b é um vetor de dimensão m são exemplos de poliedros.

Definição 3.2.2. *Um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado se existe $w \geq 0$ tal que $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : -w \leq x_j \leq w, \text{ para todo } j = 1, \dots, n\}$. Um poliedro limitado é chamado de politopo.*

Definição 3.2.3. *Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se, dados quaisquer dois pontos x_1 e x_2 em X , então $\forall x \in X$ pode ser representado na forma $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Proposição 3.2.1. *Um poliedro é um conjunto convexo.*

A seguir serão apresentados os conceitos de pontos extremos, raios e raios extremos de um conjunto poliédrico.

Definição 3.2.4. *Sejam $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $x \in P$. Dizemos que x é um ponto extremo de P quando ele não pode ser representado como uma combinação convexa estrita de dois pontos distintos de P . Em outras palavras, se $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, com $0 < \lambda < 1$ e $x_1, x_2 \in P$, então $x = x_1 = x_2$.*

Definição 3.2.5. *Sejam $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $r \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo. Dizemos que r é um raio do poliedro P se, para qualquer ponto $x \in P$, o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \lambda r, \lambda \geq 0\}$ está contido em P .*

Considere o poliedro não-vazio $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$. Então, um vetor não-nulo $r \in \mathbb{R}^n$ é um raio de P se, e somente se:

$$A(x + \lambda r) \geq b \text{ e } x + \lambda r \geq 0,$$

para cada $\lambda \geq 0$ e cada $x \in P$. Como $x \in P$, então $Ax \geq b$ e a primeira desigualdade é verdadeira para $\lambda \geq 0$ arbitrariamente grande se, e somente se, $Ar \geq 0$. Analogamente, $x + \lambda r$ é não-negativo para λ arbitrariamente grande se, e somente se, r é não-negativo. Isso mostra que r é um raio do poliedro P se, e somente se,

$$Ar \geq 0, \quad r \geq 0 \text{ e } r \neq 0.$$

Portanto, o conjunto de raios do poliedro não-vazio $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ pode ser caracterizado como sendo o conjunto dado por

$$\text{Raio}(P) = \{r \in \mathbb{R}^n : Ar \geq 0, \quad r \geq 0 \text{ e } r \neq 0\}. \quad (3.1)$$

A noção de raios extremos é similar à noção de pontos extremos. Um raio extremo de um conjunto poliédrico é um raio que não pode ser representado como uma combinação positiva de dois raios de P que não são múltiplos positivos entre si. A definição formal é dada a seguir.

Definição 3.2.6. *Sejam $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $r \in \mathbb{R}^n$ um raio de P . Dizemos que r é um raio extremo de P se não existem raios r_1, r_2 de P , com $r_1 \neq \lambda r_2$ para qualquer $\lambda > 0$, tais que $r = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$, em que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.*

Um poliedro pode ser representado em termos dos seus pontos extremos e raios extremos. Essa representação é útil em muitas situações envolvendo problemas de otimização.

Teorema 3.2.1 (Teorema da Representação de Poliedros). *Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Então, o conjunto de pontos extremos de P é não-vazio e tem um número finito de elementos, digamos $x_1, x_2, \dots, x_k$. Adicionalmente, o conjunto de raios extremos de P é vazio se, e somente se, P é limitado. Se P não é limitado, então o conjunto de raios extremos é não-vazio e tem um número finito de elementos, digamos $r_1, r_2, \dots, r_l$. Mais ainda, $x \in P$ se, e somente se, ele pode ser representado como uma combinação convexa dos pontos extremos de P somado com uma combinação linear não-negativa dos raios extremos de P , isto é,*

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j r_j,$$

com $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, k$, e $\mu_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, l$.

3.3 Método de decomposição de Benders

Nesta seção é apresentado o método de decomposição de Benders e algumas propriedades são discutidas. Uma abordagem clássica sobre o método pode ser obtida em [Lasdon \(1970\)](#), e um tratamento usando projeção é apresentado em [Martin \(1999\)](#).

O método de decomposição de Benders (BD), proposto por [Benders \(1962\)](#), é um procedimento de particionamento adequado para resolver problemas de otimização com variáveis contínuas ou mistas, como os problemas de otimização linear inteira mista, com estrutura decomponível. O método é baseado em um algoritmo de relaxação e divide o problema original em dois problemas mais simples: o problema mestre e o subproblema.

O problema mestre (PM) é uma reformulação do problema original, que é relaxada durante a execução do método de decomposição de Benders, contendo o conjunto de variáveis inteiras (chamadas de variáveis complicantes) e suas respectivas restrições. O subproblema de Benders (SP) corresponde ao problema original com os valores das variáveis complicantes temporariamente fixadas pelo problema mestre. O método resolve cada um desses problemas de forma iterativa, de modo que, a cada iteração, limitantes inferior e superior do valor de função objetivo da solução ótima do problema original são obtidos e uma nova restrição, conhecida como corte de Benders, é adicionada ao problema mestre. Este ciclo se repete até que a convergência dos limitantes seja obtida, caso uma solução ótima exista.

No Capítulo 2 foram apresentadas diversas versões do problema de localização de concentradores que empregaram, com sucesso, algoritmos baseados na decomposição

de Benders para sua solução. Diversos outros problemas, em temas diversos, também têm utilizado o método de decomposição de Benders com êxito, incluindo gestão de energia e recursos (Cai et al., 2001; Zhang e Ponnambalam, 2006), planejamento e programação (Hooker, 2007; Canto, 2008), saúde (Roshanaei et al., 2017), transporte e telecomunicações (Costa, 2005) e projeto de processos químicos (Zhu e Kuno, 2003). Uma revisão de trabalhos que aplicam a decomposição de Benders pode ser obtida em Rahmaniani et al. (2017).

Será apresentado a seguir o método de decomposição de Benders, considerando sua aplicação a um problema de otimização linear inteira mista. De forma geral, considere o seguinte problema:

$$\max \quad c'x + f'y \quad (3.2)$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax + By \leq b \quad (3.3)$$

$$Dy \leq d \quad (3.4)$$

$$x \geq 0 \quad (3.5)$$

$$y \geq 0 \text{ e inteiro,} \quad (3.6)$$

em que A é uma matriz $m \times n$, B é uma matriz $m \times p$ e D é uma matriz $q \times p$. Os vetores b e d possuem dimensão m e q , respectivamente. Os vetores c e x possuem dimensão n e os vetores f e y têm dimensão p , sendo x correspondente às variáveis de decisão contínuas e y às variáveis de decisão inteiras.

Este problema pode ser expresso como:

$$\max_{y \in Y} \left\{ f'y + \max_{x \geq 0} \{ c'x : Ax \leq b - By \} \right\}, \quad (3.7)$$

em que $Y = \{y : Dy \leq d, y \geq 0 \text{ e inteiro}\}$.

O problema de maximização interno, dado por:

$$\max \quad c'x \quad (3.8)$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax \leq b - By \quad (3.9)$$

$$x \geq 0, \quad (3.10)$$

é um problema linear, chamado de subproblema de Benders, e será denotado por SP.

Associando variáveis duais π às restrições (3.9), temos que o dual do subproblema de Benders é dado por:

$$\min \quad (b - By)' \pi \quad (3.11)$$

$$\text{sujeito a} \quad A' \pi \geq c \quad (3.12)$$

$$\pi \geq 0. \quad (3.13)$$

Esse problema é chamado de subproblema dual de Benders, e será denotado por SPD. Note que ambos subproblemas SP e SPD são problemas obtidos em função de y , isto é, $SP = SP(y)$ e $SPD = SPD(y)$.

Pela teoria da dualidade, a maximização interna do problema (3.7) pode ser substituída pela minimização referente ao problema dual (3.11)-(3.13), obtendo a seguinte formulação equivalente ao problema original:

$$\max_{y \in Y} \left\{ f'y + \min_{\pi \geq 0} \{ (b - By)' \pi : A' \pi \geq c \} \right\}. \quad (3.14)$$

O subproblema dual de Benders possui uma característica interessante. Embora $SPD = SPD(y)$ seja definido em função das variáveis y , a sua região de viabilidade, dada pelo poliedro:

$$\Pi = \{ \pi \geq 0 : A' \pi \geq c \}, \quad (3.15)$$

independe dos valores de y . Assim, se Π é não-vazio, então SPD pode ser ilimitado ou factível. A presença de soluções duais ilimitadas é indesejada, uma vez que elas correspondem a problemas primais inviáveis. Veja a seguir como esse tipo de solução pode ser evitada.

Do Teorema 3.1.3, segue que o sistema

$$Ax \leq b - By, \quad x \geq 0 \quad (3.16)$$

possui solução se o sistema

$$(b - By)' \pi \geq 0, \quad A' \pi \geq 0, \quad \pi \geq 0 \quad (3.17)$$

possui solução. Além disso, note que o conjunto dos raios do poliedro Π é dado por $\text{Raio}(\Pi) = \{ \pi : A' \pi \geq 0, \pi \geq 0 \text{ e } \pi \neq 0 \}$. Assim, o sistema (3.17) possui solução não-nula quando existe $\pi \in \text{Raio}(\Pi)$ tal que $(b - By)' \pi \geq 0$.

Logo, SP é viável se $(b - By)' \pi \geq 0$, para todo $\pi \in \text{Raio}(\Pi)$. Pelo Teorema 3.2.1, essa condição pode ser restrita aos raios extremos de Π , uma vez que qualquer raio de Π pode ser expresso em termos dos seus raios extremos.

Portanto, soluções ilimitadas do SPD podem ser evitadas adicionando-se ao problema o seguinte conjunto de restrições:

$$(b - By)' \pi^r \geq 0, \quad \pi^r \in R, \quad (3.18)$$

em que R representa o conjunto dos raios extremos de Π .

Por outro lado, se a solução do subproblema dual de Benders é factível, então ela corresponde a um ponto extremo $\pi^v \in V$, em que V é o conjunto dos pontos extremos de Π . Desse modo, pontos extremos de Π correspondem a soluções duais limitadas e os raios extremos de Π estão associados com soluções duais ilimitadas.

Se todas as restrições (3.18) são adicionadas ao problema de maximização de (3.14), então o valor do problema interno será um de seus pontos extremos. Assim, o problema (3.14) é equivalente a:

$$\max \quad f'y + \min_{\pi^v \in V} \{(b - By)' \pi^v\} \quad (3.19)$$

$$\text{sujeito a} \quad (b - By)' \pi^r \geq 0 \quad \pi^r \in R \quad (3.20)$$

$$y \in Y. \quad (3.21)$$

Nessa formulação, o problema de minimização pode ser substituído com o auxílio de uma variável contínua η , de modo a obter a seguinte formulação equivalente para o problema original (3.2)-(3.6):

$$\max \quad f'y + \eta \quad (3.22)$$

$$\text{sujeito a} \quad \eta \leq (b - By)' \pi^v \quad \pi^v \in V \quad (3.23)$$

$$(b - By)' \pi^r \geq 0 \quad \pi^r \in R \quad (3.24)$$

$$y \in Y \quad (3.25)$$

$$\eta \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

Essa reformulação do problema original é chamada de Problema Mestre de Benders (PM). As restrições (3.23) e (3.24) são chamadas de cortes de Benders de otimalidade e viabilidade, respectivamente.

Observe que o problema mestre pode ser de difícil resolução, uma vez que ele possui uma restrição para cada ponto e raio extremo do poliedro Π . Essa característica, em geral, resulta em um número muito elevado de restrições, dependendo da dimensão do problema. Entretanto, apenas uma parcela dessas restrições estão ativas na solução ótima do problema original. Assim, o problema mestre pode ser resolvido de forma relaxada, gerando-se os cortes de Benders através de uma abordagem iterativa.

A princípio, o problema mestre é resolvido apenas com o conjunto Y de restrições. A cada iteração, resolve-se o problema mestre, obtendo-se configurações temporárias para as variáveis y . A cada configuração $y = \bar{y}$, um subproblema de Benders é obtido. Então, o seu problema dual é resolvido, podendo-se obter um ponto extremo, caso a solução seja limitada, ou um raio extremo, caso a solução seja ilimitada. Na primeira situação, um corte de otimalidade (3.23) é adicionado ao problema mestre;

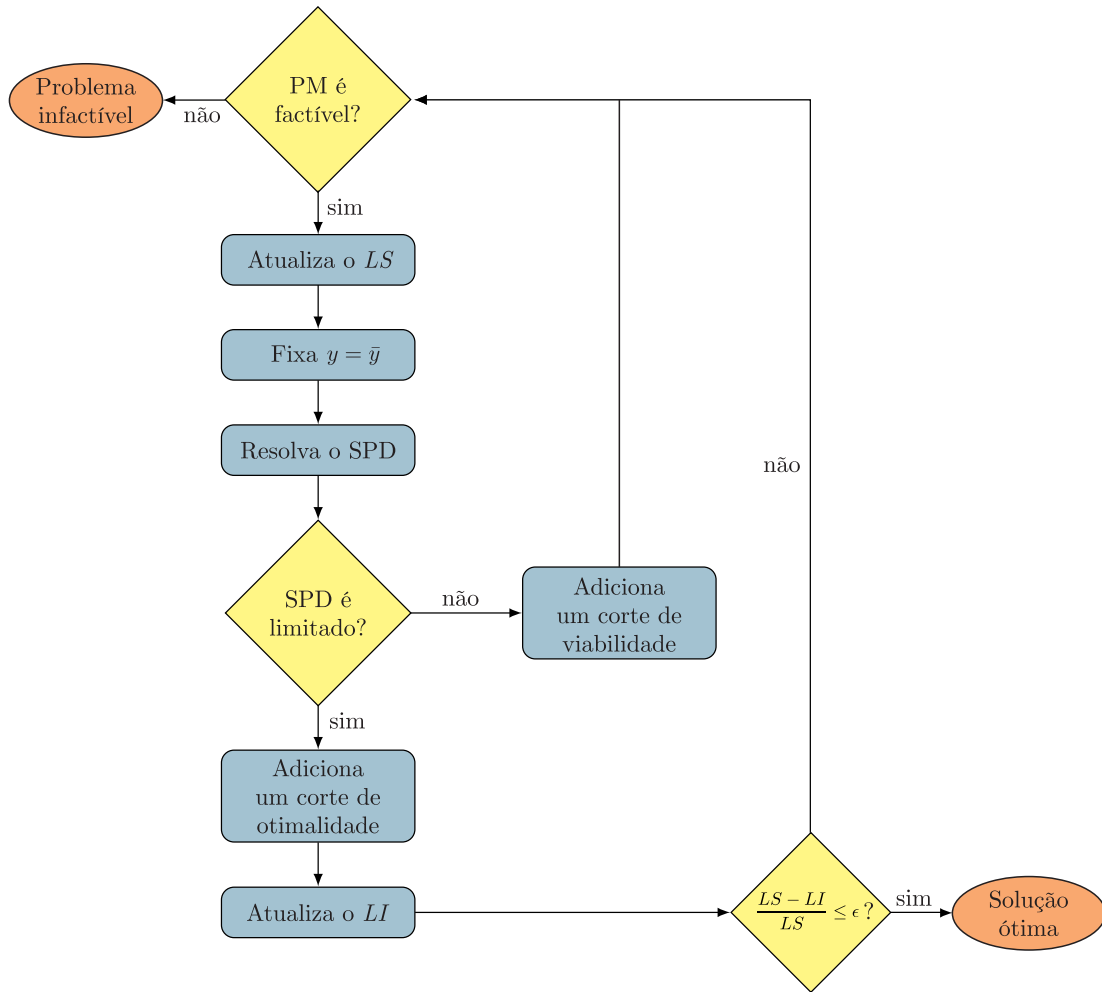


Figura 3.1: Esquema do método de decomposição de Benders.

na segunda situação, um corte de viabilidade (3.24) é inserido no problema mestre. Esse procedimento corresponde a uma iteração completa do método de decomposição de Benders.

O valor ótimo do problema mestre fornece um limitante superior válido para o problema, uma vez que ele é uma relaxação de uma formulação equivalente ao problema original. Por outro lado, a soma do valor ótimo do problema mestre associado às variáveis inteiras ($f'y$) com o valor ótimo da função objetivo do subproblema de Benders fornece um limitante inferior válido. Desse modo, o problema mestre e o subproblema são resolvidos de forma iterativa até que os limites inferior e superior converjam, obtendo-se, então, a solução ótima do problema original, caso ela exista.

A Figura 3.1 ilustra as etapas do método de decomposição de Benders, aplicado a um problema de maximização, em que $\epsilon > 0$ é o *gap* de otimalidade.

O exemplo a seguir mostra uma aplicação da decomposição de Benders para resolver um problema de programação linear inteira mista.

Exemplo 3.3.1. *Considere o seguinte problema:*

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 - 3x_2 + 5y_1 + 2y_2 \\
 \text{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 + 2y_1 - y_2 \leq 6 \\
 & x_1 - x_2 - 3y_1 - 2y_2 \leq 2 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \\
 & y_i \leq 5 \quad i = 1, 2 \\
 & y_1, y_2 \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Será utilizado o método de decomposição de Benders para obter a sua solução. Fixando as variáveis inteiras $y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, tem-se o subproblema de Benders (SP($\bar{y}$)) dado por:

$$\max \quad x_1 - 3x_2 \quad (3.27)$$

$$\text{sujeito a} \quad x_1 + 3x_2 \leq 6 - 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \quad (3.28)$$

$$x_1 - x_2 \leq 2 + 3\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 \quad (3.29)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (3.30)$$

Associando as variáveis duais π_1 e π_2 às restrições (3.28) e (3.29), respectivamente, obtemos o seguinte subproblema dual de Benders (SPD($\bar{y}$)):

$$\min \quad (6 - 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2)\pi_1 + (2 + 3\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2)\pi_2 \quad (3.31)$$

$$\text{sujeito a} \quad \pi_1 + \pi_2 \geq 1 \quad (3.32)$$

$$3\pi_1 - \pi_2 \geq -3 \quad (3.33)$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0. \quad (3.34)$$

Uma vez definido o subproblema de Benders e o seu dual, pode-se aplicar o procedimento iterativo do método, resolvendo o problema mestre relaxado, seguido do subproblema dual de Benders, a cada iteração.

Iteração 1

O problema mestre de Benders inicial é dado por:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5y_1 + 2y_2 + \eta \\
 \text{sujeito a} \quad & y_1 \leq 5
 \end{aligned}$$

$$y_2 \leq 5$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\eta \leq M,$$

em que M é um número suficientemente grande. Neste exemplo, vamos considerar $M = 1000$. Resolvendo esse PM, obtemos $\eta = 1000$ e $y_1 = y_2 = 5$, com valor objetivo ótimo igual a 1035. Logo, um limite superior para o problema original é dado por $LS = 1035$.

Substituindo a solução $y = (5, 5)$ em (3.31)-(3.34), obtemos o subproblema dual correspondente, dado por:

$$\min \quad \pi_1 + 27\pi_2 \quad (3.35)$$

$$\text{sujeito a} \quad \pi_1 + \pi_2 \geq 1 \quad (3.36)$$

$$3\pi_1 - \pi_2 \geq -3 \quad (3.37)$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0, \quad (3.38)$$

cuja solução é $\pi_1 = 1, \pi_2 = 0$, com valor ótimo 1. Como a solução é finita, temos que um limitante inferior válido para o problema original é dado pelo valor ótimo do PM correspondente às variáveis inteiras somado ao valor ótimo obtido pelo subproblema dual, isto é, $LI = 35 + 1 = 36$. Além disso, como $LS \neq LI$, então o seguinte corte de otimalidade será gerado e adicionado ao PM:

$$\eta \leq 6 - 2y_1 + y_2. \quad (3.39)$$

Iteração 2

Com a inserção do corte de otimalidade (3.39), o problema mestre de Benders, na segunda iteração, é dado por:

$$\max \quad 5y_1 + 2y_2 + \eta$$

$$\text{sujeito a} \quad \eta \leq 6 - 2y_1 + y_2$$

$$y_1 \leq 5$$

$$y_2 \leq 5$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\eta \leq M.$$

A solução ótima do PM, nesta iteração, é $\eta = 1$ e $y_1 = y_2 = 5$, com valor ótimo igual a 36. Como esse valor é menor do que o limitante superior obtido na iteração

anterior, ele é atualizado para $LS = 36$.

Como os limitantes superior e inferior são iguais, então a solução ótima para o problema original foi encontrada. Portanto, o valor ótimo é igual a 36, sendo $x_1^* = 1, x_2^* = 0$, e $y_1^* = y_2^* = 5$.

Observe que a região de viabilidade do subproblema dual (3.35)-(3.38) é o poliedro:

$$\Pi = \{(\pi_1, \pi_2) : \pi_1 + \pi_2 \geq 1, 3\pi_1 - \pi_2 \geq -3, \pi_1 \geq 0, \pi_2 \geq 0\}$$

cujos esboço é dado na Figura 3.2.

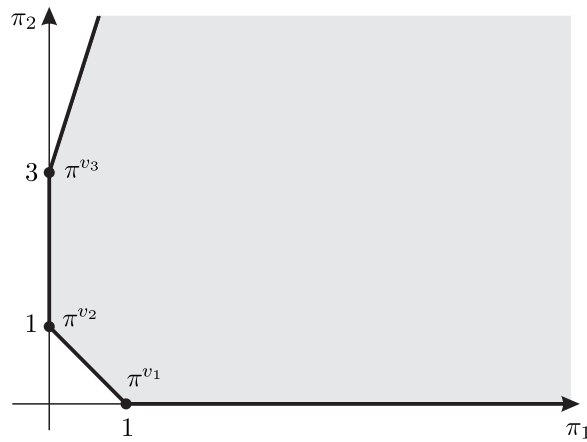


Figura 3.2: Poliedro Π : região de viabilidade do SPD.

Veja que os pontos extremos desse poliedro são $\pi^{v1} = (1, 0)$, $\pi^{v2} = (0, 1)$ e $\pi^{v3} = (0, 3)$ e os seus raios extremos são $\pi^{r1} = (1, 0)$ e $\pi^{r2} = (1, 3)$. Logo, o problema mestre completo é dado pela seguinte reformulação do problema original:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5y_1 + 2y_2 + \eta \\ \text{sujeito a} \quad & \eta \leq 6 - 2y_1 + y_2 \\ & \eta \leq 2 + 3y_1 + 2y_2 \\ & \eta \leq 6 + 9y_1 + 6y_2 \\ & 6 - 2y_1 + y_2 \geq 0 \\ & 12 + 7y_1 + 7y_2 \geq 0 \\ & y_1 \leq 5 \\ & y_2 \leq 5 \\ & y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \\ & \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ao se utilizar o procedimento iterativo do método de decomposição de Benders,

obteve-se a solução ótima do problema original sem precisar resolver essa reformulação completa, que contém uma maior quantidade de restrições.

No presente trabalho, variantes do método de decomposição de Benders são desenvolvidas para resolver problemas de localização de concentradores com maximização do lucro. Os algoritmos propostos e os resultados obtidos são dados no Capítulo 5.

3.4 Abordagem de Bertsimas & Sim para otimização robusta

Apresentamos, nesta seção, a abordagem de otimização robusta proposta por Bertsimas e Sim (2003) que permite tratar incerteza nos dados em problemas de programação inteira mista. Essa abordagem é aplicada ao problema de localização de concentradores com maximização do lucro no Capítulo 7.

Considerar modelos matemáticos cujos dados são incertos é de extrema importância. Segundo Ben-Tal e Nemirovski (2000), para aplicações reais de programação linear, uma pequena incerteza nos dados pode tornar a solução ótima completamente sem sentido do ponto de vista prático.

Na otimização robusta é assumido que os valores dos parâmetros incertos pertencem a um conjunto de incertezas, sem assumir nenhuma distribuição de probabilidade *a priori*. Esta abordagem tem por objetivo obter soluções que sejam imunes à incerteza dos dados o tanto quanto possível, isto é, que sejam “robustas”.

Abordagens mais básicas de otimização robusta são baseadas no estudo do pior caso, em que todos os parâmetros assumem seus piores valores. No entanto, como discutido por Bertsimas e Sim (2003), intuitivamente é muito improvável que esse cenário ocorra na prática. Além disso, essa abordagem dá origem a modelos matemáticos que produzem soluções muito conservadoras, que são totalmente avessas ao risco.

Diferentes abordagens para a otimização robusta foram propostas na literatura. Soyster (1973) propôs um modelo de otimização linear que considera os dados incertos pertencentes a um conjunto convexo. Tal modelo possui uma alta proteção contra incerteza; no entanto, tem a desvantagem de gerar uma solução robusta muito conservadora, que tem um valor de função objetivo muito pior do que o valor de função objetivo obtido com a solução ótima do problema nominal. Modelos menos conservadores foram propostos por Ben-Tal e Nemirovski (1999, 2000), considerando problemas lineares com incerteza, nos quais a representação do conjunto de parâmetros incertos é elipsoidal e que envolvem a resolução de contrapartes robustas do problema nominal na forma de problemas cônicos quadráticos.

A abordagem proposta por Bertsimas e Sim (2003) pode ser aplicada a problemas de otimização inteira mista que possuem os coeficientes da função objetivo e/ou os coeficientes das restrições incertos. Nessa abordagem, é possível controlar o grau de conservadorismo da solução e obter contrapartes robustas do problema nominal que são tratáveis computacionalmente.

Sejam c, l, u vetores de tamanho n , A uma matriz $m \times n$, b um vetor de tamanho m e x um vetor com n variáveis de decisão, em que as k primeiras são inteiras. Considere o seguinte problema de programação linear inteira mista:

$$\max \quad c'x \quad (3.40)$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax \leq b \quad (3.41)$$

$$l \leq x \leq u \quad (3.42)$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.43)$$

Será assumido que os elementos da matriz A e os elementos do vetor c são incertos. Assim, cada entrada $\tilde{a}_{ij}$ da matriz A é modelada como uma variável aleatória independente, simétrica e limitada tomando valores no intervalo $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ e que cada coeficiente da função objetivo $\tilde{c}_j$ também é uma variável aleatória independente, simétrica e limitada que pertence ao intervalo $[c_j - \hat{c}_j, c_j + \hat{c}_j]$.

Para obter um modelo robusto para o problema, considere, para todo $i = 1, \dots, m$, o número $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$, com $J_i = \{j : \hat{a}_{ij} > 0\}$ e $\Gamma_0 \in [0, |J_0|]$, para $J_0 = \{j : \hat{c}_j > 0\}$. Observe que Γ_i , $i = 1, \dots, m$ corresponde à quantidade de parâmetros da i -ésima restrição que irão desviar de seus valores nominais e, de modo análogo, Γ_0 é igual ao número de coeficientes da função objetivo que terão seus valores nominais alterados. O objetivo da abordagem de Bertsimas e Sim (2003) é obter uma solução robusta para o problema em que no máximo $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ dos coeficientes terão seus valores alterados e um dos coeficientes será alterado para no máximo $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)$ do seu valor nominal. Em outras palavras, nessa abordagem, é assumido que apenas um subconjunto dos coeficientes mudará de forma a afetar negativamente a solução. Os autores mostram que a solução robusta obtida sobre essas premissas é viável deterministicamente e que, se mais do que $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ parâmetros tiverem seus valores alterados, ainda assim a solução robusta obtida pode possuir uma alta probabilidade de ser factível para o problema determinístico. Observe que Γ_i funciona como um *budget* de incerteza e permite ajustar a robustez no modelo, controlando assim o nível de conservadorismo na solução. Por exemplo, se $\Gamma_0 = 0$, então obtém-se uma função objetivo livre de incerteza, enquanto $\Gamma_0 = |J_0|$ considera que todos os coeficientes na função objetivo terão seus valores nominais alterados, tornando o problema mais conservador.

Desse modo, a contraparte robusta do problema nominal (3.40)-(3.43) é dada pelo

problema não linear:

$$\max c'x + \min_{\{S_0: S_0 \subset J_0, |S_0| \leq \lfloor \Gamma_0 \rfloor\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} (-\hat{c}_j) |x_j| \right\} \quad (3.44)$$

$$\text{sujeito a } \sum_j a_{ij} x_j + \quad (3.45)$$

$$+ \max_{\{S_i \cup \{t_i\}: S_i \subset J_i, |S_i| \leq \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{t_i}| \right\} \leq b_i, \forall i \quad (3.46)$$

$$l \leq x \leq u \quad (3.47)$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.48)$$

Observe que a não linearidade desse modelo ocorre em virtude dos problemas de minimização e maximização internos na função objetivo e no conjunto de restrições, respectivamente. O teorema a seguir mostra que esse modelo pode ser reformulado em outro equivalente a ele que é linear.

Teorema 3.4.1. *O problema (3.44)-(3.48) é equivalente ao seguinte problema de programação linear inteira mista:*

$$\max \quad c'x - \Gamma_0 q_0 - \sum_{j \in J_0} p_{0j} \quad (3.49)$$

$$\text{sujeito a } \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} p_{ij} + \Gamma_i q_i \leq b_i \quad \forall i \quad (3.50)$$

$$q_0 + p_{0j} \geq \hat{c}_j y_j \quad \forall j \in J_0 \quad (3.51)$$

$$q_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \quad \forall i \neq 0, j \in J_i \quad (3.52)$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in J_i \quad (3.53)$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j \quad (3.54)$$

$$q_i \geq 0 \quad \forall i \quad (3.55)$$

$$-y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j \quad (3.56)$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j \quad (3.57)$$

$$x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.58)$$

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente como o problema de maximização interno do conjunto de restrições da contraparte robusta (3.44)-(3.48) pode ser reescrito

como um problema linear. Dado um vetor x^* , defina a função

$$\beta_i(x^*) = \max_{\{S_i \cup \{t_i\} : S_i \subset J_i, |S_i| \leq \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{t_i}^*| \right\}.$$

Essa função é igual a função objetivo do seguinte problema de otimização linear:

$$\beta_i(x^*) = \max \quad \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| z_{ij} \quad (3.59)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \quad (3.60)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \in J_i. \quad (3.61)$$

O valor da solução ótima desse problema consiste em tomar $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ variáveis iguais a 1 e uma variável igual a $\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor$. Isso é equivalente a selecionar um subconjunto $\{S_i \cup \{t_i\} : S_i \subset J_i, |S_i| \leq \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}$ com correspondente função objetivo $\sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{t_i}^*|$.

Considere o dual do problema (3.59)-(3.61), dado por:

$$\min \quad \sum_{j \in J_i} p_{ij} + \Gamma_i q_i \quad (3.62)$$

$$\text{sujeito a } p_{ij} + q_i \geq \hat{a}_{ij} |x_j^*| \quad \forall j \in J_i \quad (3.63)$$

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J_i \quad (3.64)$$

$$q_i \geq 0 \quad \forall i. \quad (3.65)$$

Uma vez que o problema (3.59)-(3.61) é factível e limitado para todo $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$, segue do Teorema da Dualidade Forte, que o problema dual (3.62)-(3.65) é também factível e limitado e os valores das funções objetivo desses dois problemas são coincidentes. Assim, temos que $\beta_i(x^*)$ é igual ao valor da função objetivo do problema (3.62)-(3.65) e logo, o problema de maximização interno pode ser substituído por esse problema dual.

Similarmente, podemos reescrever o problema de minimização interno presente na função objetivo da contraparte robusta (3.44)-(3.48) em um problema linear. Dado um vetor x^* , temos que:

$$\begin{aligned} \beta_0(x^*) &= \min \left\{ \sum_{j \in S_0} (-\hat{c}_j) |x_j^*| : |S_0| \leq \lfloor \Gamma_0 \rfloor, S_0 \subset J_0 \right\} \\ &= \min \left\{ \sum_{j \in J_0} (-\hat{c}_j) |x_j^*| z_{0j} : \sum_{j \in J_0} z_{0j} \leq \Gamma_0, 0 \leq z_{0j} \leq 1, \forall j \in J_0 \right\} \end{aligned}$$

$$= \max \left\{ - \sum_{j \in J_0} p_{0j} - \Gamma_0 : -q_0 - p_{0j} \leq (-\hat{c}_j)|x_j^*|, q_0 \geq 0, p_{0j} \geq 0, \forall j \in J_0 \right\}.$$

Substituindo o problema de minimização interno pelo obtido acima, segue que o problema (3.44)-(3.48) é equivalente ao problema linear (3.49)-(3.58). $\square$

Outras propriedades dessa abordagem, bem como extensões a outros tipos de problemas de otimização, podem ser vistos na íntegra em Bertsimas e Sim (2003, 2004).

Capítulo 4

Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro

Este capítulo aborda em detalhes o Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro (PLCML), problema central deste trabalho. Na Seção 4.1 são introduzidas a definição formal do problema e a sua caracterização. Na Seção 4.2 são apresentadas três formulações para o problema, sendo uma proveniente da literatura e duas outras propostas nessa tese. Uma comparação dessas formulações é feita na Seção 4.3. Em seguida, na Seção 4.4, as propriedades das formulações são investigadas por meio de experimentos computacionais. Por fim, na Seção 4.5, são apresentadas as considerações finais deste capítulo.

4.1 Definição e caracterização do problema

O problema de localização de concentradores estudado neste trabalho determina a localização dos concentradores, o projeto da rede de concentradores e as rotas ótimas de fluxo com a finalidade de maximizar o lucro total da rede. A decisão de localização concentra-se na seleção de um conjunto de nós para instalar concentradores e as decisões de projeto da rede tratam das conexões entre os nós da rede.

Dado um conjunto de nós e a demanda a ser roteada entre eles, o problema consiste em determinar os pares de origem e destino a serem atendidos e como atendê-los para maximizar o lucro total da rede. Como ilustrado anteriormente, sob o ponto de vista do lucro, nem toda a demanda precisa ser satisfeita. A demanda entre alguns pares de origem e destino pode não ser atendida, caso ela não seja lucrativa.

O Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro (PLCML)

considerado neste estudo possui as seguintes características:

- (i) um nó pode ser alocado a mais de um concentrador;
- (ii) cada rota conectando um par de nós origem e destino pode conter apenas concentradores como nós intermediários;
- (iii) não há limitação quanto ao número de concentradores a serem instalados, nem em relação à quantidade de conexões entre pares de concentradores que podem ser instaladas;
- (iv) os concentradores e os arcos da rede possuem capacidade suficiente para lidar com todo o fluxo que for necessário;
- (v) não é imposto que os concentradores sejam todos interligados entre si, nem que a rede de concentradores seja conexa;
- (vi) nenhuma estrutura particular da rede de concentradores é assumida;
- (vii) existem custos fixos de instalação de concentradores e também custos de operação das conexões entre concentradores;
- (viii) conexões diretas entre nós não concentradores não são permitidas; e
- (ix) não é exigido que toda a demanda seja atendida.

De maneira resumida, pode-se dizer que este trabalho aborda um problema de localização de concentradores com maximização do lucro de alocação múltipla, não capacitado, com rede incompleta, que possui custos fixos e não permite conexões diretas.

Observe que uma das características listada anteriormente é a não obrigatoriedade de que a rede de concentradores seja conexa. Isso significa que podem ser obtidas soluções para o problema nas quais os concentradores podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos e não vazios H_1 e H_2 , de forma que não existe nenhum caminho na rede de concentradores ligando concentradores de H_1 a concentradores de H_2 . A Figura 4.1 ilustra uma rede com três concentradores (indicados por 1, 2 e 3) desconexa. Neste caso, pode-se considerar, por exemplo, $H_1 = \{1\}$ e $H_2 = \{2, 3\}$.

O objetivo do problema é maximizar o lucro total da rede, calculado pela subtração do custo total a partir da receita total. A receita total é obtida considerando-se a quantidade de demanda de cada par de origem e destino que é atendida. Admite-se que o preço é uma variável exógena, determinada pelo mercado, e que a receita independe da rota do fluxo da demanda. O custo total é composto pelo custo variável

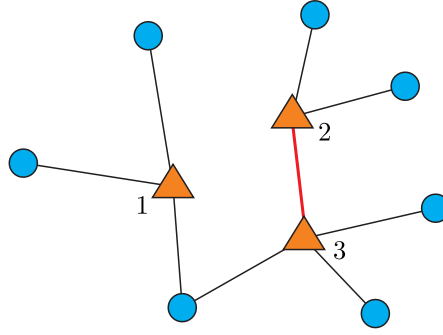


Figura 4.1: Rede de concentradores desconexa.

de transporte, o custo fixo de instalação dos concentradores e o custo fixo de operação das conexões entre concentradores. O custo de transporte entre cada par de origem e destino é calculado pelo custo de transporte da origem até o concentrador (coleta), pelo custo de transporte nas conexões entre concentradores (transferência) e pelo custo de transporte do concentrador até o destino (distribuição).

Ao computar o custo total de transporte, assume-se que existe uma economia de escala no custo de transporte ao rotear fluxo nas conexões entre concentradores. Economias de escala nas conexões entre os nós concentradores são originadas, por exemplo, devido à consolidação da demanda ou a maior frequência de serviço nestas instalações. Essa economia de escala reflete-se no custo de transporte nos arcos entre concentradores, por meio de um fator de desconto constante.

Para apresentar o problema, seja N o conjunto de nós que trocam fluxos e que também são potenciais candidatos a concentradores. A quantidade de demanda a ser enviada do nó $i \in N$ para o nó $j \in N$ é denotada por w_{ij} . Todo o fluxo originado de um determinado nó $i \in N$ é dado por $O_i = \sum_{j \in N} w_{ij}$. Para todo $i, j \in N$, tem-se que r_{ij} representa a receita obtida pelo atendimento de uma unidade da demanda do nó de origem i para o nó de destino j . O custo de transporte em um arco ligando os nós $i \in N$ e $j \in N$ é denotado por c_{ij} . O custo fixo de instalação de um concentrador no nó $k \in N$ é dado por s_k , e o custo fixo de instalação de uma conexão entre os concentradores k e m é denotado por g_{km} , $k, m \in N$. Por fim, o fator de desconto constante no transporte realizado nas conexões entre concentradores é dado por α , para $0 \leq \alpha < 1$.

4.2 Formulações para o problema

Esta seção apresenta algumas formulações para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, abordado neste estudo. A Formulação 1 advém da literatura e as Formulações 2 e 3, introduzidas no presente trabalho, são

adaptações de formulações da literatura.

As formulações apresentadas podem ser aplicadas no projeto de novas redes de concentradores, bem como para melhorar as existentes. Elas podem ser usadas como ferramentas de apoio à decisão para avaliar possíveis localizações dos concentradores, e ajudar a definir estratégias ideais para rotear os fluxos de demanda, ao mesmo tempo que determinam o conjunto de pares origem-destino a serem servidos.

4.2.1 Formulação 1

A Formulação 1 trata da versão de alocação múltipla, sem conexões diretas e sem restrições de capacidade, proposta em [Taherkhani e Alumur \(2019\)](#) para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro. Nesse artigo, as autoras mostraram que, dentre os modelos propostos sem conexões diretas, a versão com alocação múltipla obteve um melhor desempenho computacional em relação às demais versões (com alocação única e r -alocação).

Além dos parâmetros definidos na seção anterior, são necessárias, para a definição do modelo, as seguintes variáveis:

- (i) as variáveis binárias h_k indicam se um concentrador é localizado no nó $k \in N$;
- (ii) as variáveis binárias y_{ijkm} determinam se a demanda entre os nós i e j é atendida ao longo de um caminho em que o primeiro concentrador é o nó k e o último concentrador é o nó m , com $i, j, k, m \in N$;
- (iii) as variáveis binárias z_{km} indicam se uma conexão entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$ está ativa;
- (iv) as variáveis de fluxo f_{ikm} representam a quantidade de demanda originada no nó $i \in N$ que é roteada no arco entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$.

A Formulação 1, proposta em [Taherkhani e Alumur \(2019\)](#), é dada por:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} y_{ijkm} - \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} (c_{ik} + c_{mj}) w_{ij} y_{ijkm} \right. \\ & \left. + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha c_{km} f_{ikm} + \sum_{k \in N} s_k h_k + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} y_{ijkm} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (4.2)$$

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} y_{ijmk} \leq h_k \quad i, j, k \in N \quad (4.3)$$

$$\sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{imk} + \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} w_{ij} y_{ijkm} = \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} w_{ij} y_{ijmk} \quad i, k \in N \quad (4.4)$$

$$f_{ikm} \leq O_i z_{km} \quad i, k, m \in N, \quad k \neq m \quad (4.5)$$

$$z_{km} \leq h_k \quad k, m \in N, \quad k \neq m \quad (4.6)$$

$$z_{km} \leq h_m \quad k, m \in N, \quad k \neq m \quad (4.7)$$

$$z_{km} \in \{0, 1\} \quad k, m \in N, \quad k \neq m \quad (4.8)$$

$$h_k \in \{0, 1\} \quad k \in N \quad (4.9)$$

$$f_{ikm} \geq 0 \quad i, k, m \in N \quad (4.10)$$

$$y_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad i, j, k, m \in N. \quad (4.11)$$

A função objetivo (4.1) representa o lucro total da rede, que é obtido pela diferença entre a receita total e o custo total. O primeiro termo da função objetivo calcula a receita obtida com o atendimento da demanda. Os três primeiros termos dentro dos colchetes representam os custos de transporte, composto pelos custos de acesso, distribuição e transferência na rede. Os dois últimos termos dentro dos parênteses correspondem aos custos fixos de instalação de concentradores e de arcos entre concentradores, respectivamente. As restrições (4.2) asseguram que, se a demanda entre um determinado par de nós for atendida, apenas um par de concentradores será selecionado para ser o primeiro e o último concentrador do caminho, respectivamente. As restrições (4.3) garantem que a demanda entre os nós de origem e destino pode ser satisfeita apenas através de concentradores instalados. As restrições (4.4) são as equações de balanço de fluxo e asseguram que a quantidade de demanda originada em um nó i e que passa por um concentrador k deve ser devidamente contabilizada. O primeiro membro da igualdade representa a quantidade total de demanda originada no nó i que chega ao concentrador k . Cada parcela desse membro indica um modo pelo qual o fluxo de demanda incide no concentrador k : ou ele chega através de um outro concentrador da rede ou ele chega diretamente do nó de origem i . De modo análogo, o segundo membro da igualdade contabiliza a quantidade total de demanda originada no nó i que deixa o concentrador k . Isso também pode ocorrer de duas maneiras: ou o fluxo de demanda sai do concentrador k em direção a outro concentrador da rede, ou ele deixa o concentrador k em direção ao nó de destino j . As restrições (4.5) impõem que o fluxo seja roteado apenas nas conexões entre concentradores ativas. As restrições (4.6) e (4.7) indicam que uma conexão entre concentradores só pode ser operada se os dois nós finais dessa conexão forem concentradores. As restrições (4.8) - (4.11) representam as variáveis não negativas e binárias.

Como o ambiente sob o qual essa formulação está inserida é não capacitado,

sempre existe uma solução ótima na qual as variáveis $y_{ijkm} \in \{0, 1\}$, $\forall i, j, k, m \in N$. Assim, mesmo se estas variáveis fossem definidas como $y_{ijkm} \geq 0$, $\forall i, j, k, m \in N$, sempre existe uma solução ótima, em que a demanda entre o par de nós i e j é atendida completamente ou não é atendida. A escolha de se declarar essas variáveis como binárias, ao invés de variáveis não negativas, se deve ao fato da obtenção de melhores tempos nos testes computacionais, segundo [Taherkhani e Alumur \(2019\)](#).

4.2.2 Formulação 2

A Formulação 2 é uma adaptação, para o problema em questão, da formulação apresentada por [Martins de Sá et al. \(2018a\)](#), para o problema de localização de concentradores com múltipla alocação, que visa a minimização do custo total da rede, permitindo conexões diretas entre nós não concentradores e assegurando que a rede de concentradores seja conexa.

Além de utilizar as variáveis h_k e z_{km} , com $i, k, m \in N$, já definidas na Formulação 1, a Formulação 2 requer as seguintes variáveis: (i) variáveis de fluxo a_{ijk} , que representam a fração da demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$ que é atendida ao longo de um caminho no qual o primeiro concentrador é $k \in N$; (ii) variáveis de fluxo b_{ijm} , que representam a fração da demanda entre os nós $i \in N$ e $j \in N$ que é atendida ao longo de uma rota na qual o último concentrador é $m \in N$; (iii) variáveis de fluxo x_{ijkm} , que determinam a fração da demanda w_{ij} que é roteada na conexão entre os concentradores $k \in N$ e $m \in N$.

A Formulação 2 é dada por:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} r_{ij} w_{ij} a_{ijk} - \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} w_{ij} a_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} \right. \\ & \left. + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} w_{ij} x_{ijkm} + \sum_{k \in N} s_k h_k + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

sujeito a (4.6), (4.7), (4.8), (4.9)

$$\sum_{k \in N} a_{ijk} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (4.13)$$

$$\sum_{m \in N} b_{ijm} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (4.14)$$

$$a_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijmk} = b_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijkm} \quad i, j, k \in N \quad (4.15)$$

$$a_{ijk} \leq h_k \quad i, j, k \in N \quad (4.16)$$

$$b_{ijm} \leq h_m \quad i, j, m \in N \quad (4.17)$$

$$x_{ijkm} \leq z_{km} \quad i, j, k, m \in N, k \neq m \quad (4.18)$$

$$a_{ijk} \geq 0 \quad i, j, k \in N \quad (4.19)$$

$$b_{ijm} \geq 0 \quad i, j, m \in N \quad (4.20)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N, k \neq m. \quad (4.21)$$

A função objetivo (4.12) calcula o lucro líquido total da rede. As restrições (4.13)-(4.15) são restrições de conservação do fluxo e garantem que, se a demanda w_{ij} for atendida, então ela deve sair do nó i e chegar ao nó j , sendo devidamente contabilizada, sempre que um concentrador k for utilizado. As restrições (4.16) e (4.17) garantem que a demanda entre os nós de origem e destino pode ser atendida apenas através de concentradores instalados. As restrições (4.18) asseguram que o fluxo roteado em uma conexão entre os concentradores seja realizado apenas nas conexões ativas. As restrições (4.19) - (4.21) representam a não negatividade das variáveis.

4.2.3 Formulação 3

A Formulação 3 é uma adaptação de uma formulação para o problema de localização de p concentradores medianos, não capacitado, com alocação múltipla e com rede de concentradores completa, introduzida em [Ernst e Krishnamoorthy \(1998\)](#).

As variáveis b_{ijm} , f_{ikm} , h_k e z_{km} , com $i, j, k, m \in N$, já apresentadas anteriormente, são necessárias na Formulação 3, juntamente com as variáveis $\tilde{a}_{ik}$, que representam a fração da demanda que é originada no nó $i \in N$ e acessa a rede por meio do concentrador $k \in N$. Considerando essas variáveis e os parâmetros definidos na Seção 4.1, a Formulação 3 é dada por:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} b_{ijm} - \left[\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} O_i \tilde{a}_{ik} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} \right. \\ & \left. + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} \alpha c_{km} f_{ikm} + \sum_{k \in N} s_k h_k + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

sujeito a (4.5) – (4.10), (4.14), (4.17), (4.20)

$$\sum_{k \in N} \tilde{a}_{ik} \leq 1 \quad i \in N \quad (4.23)$$

$$\sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{imk} + O_i \tilde{a}_{ik} = \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm} + \sum_{j \in N} w_{ij} b_{ijk} \quad i, k \in N \quad (4.24)$$

$$\tilde{a}_{ik} \leq h_k \quad i, k \in N \quad (4.25)$$

$$\tilde{a}_{ik} \geq 0 \quad i, k \in N. \quad (4.26)$$

A função objetivo (4.22) determina o lucro total da rede, assim como as funções objetivo das formulações anteriores. As restrições (4.23) e (4.24) são restrições de conservação do fluxo. As restrições (4.25) garantem que a demanda originada de um nó $i \in N$ só pode acessar a rede através de concentradores instalados. As restrições (4.26) representam a não negatividade das variáveis.

4.3 Comparação das formulações

As Formulações 1, 2 e 3, embora representem o mesmo problema, possuem características diferentes. A principal diferença diz respeito ao modo como o fluxo da rede é modelado em cada uma delas. Na Formulação 1, o fluxo da demanda entre pares de origem e destino que entra e sai da rede é identificado pelas variáveis y_{ijkm} , $i, j, k, m \in N$, que possuem quatro índices. Na Formulação 2, este fluxo de entrada e saída da rede é monitorado pelas variáveis de três índices a_{ijk} e b_{ijm} , respectivamente, em que $i, j, m, k \in N$. Na Formulação 3, o rastreamento de fluxo de acesso na rede é realizado por meio das variáveis $\tilde{a}_{ik}$, $i, k \in N$, que possuem apenas dois índices, enquanto o rastreamento do fluxo de saída é feito através das variáveis b_{ijm} , $i, j, m \in N$, assim como na Formulação 2. Quanto ao cálculo do fluxo entre os nós concentradores, as variáveis f_{ikm} , $i, k, m \in N$, que possuem três índices, desempenham esse papel nas Formulações 1 e 3; por outro lado, na Formulação 2, esse monitoramento é realizado pelas variáveis de quatro índices x_{ijkm} , $i, j, k, m \in N$.

As formulações também diferem quanto ao número de variáveis e restrições presentes em cada uma delas. A Tabela 4.1 apresenta um resumo desses dados.

Tabela 4.1: Número de variáveis e restrições das Formulações 1, 2 e 3 em função da dimensão da instância.

Propriedades	Formulação 1	Formulação 2	Formulação 3
Variáveis binárias	$n^4 + n^2$	n^2	n^2
Total de variáveis	$n^4 + n^3 + n^2$	$n^4 + n^3 + n^2$	$2n^3 + 2n^2$
Total de restrições	$2n^3 + 3n^2 - 2n$	$n^4 + 2n^3 + 4n^2 - 2n$	$2n^3 + 4n^2 - n$

De acordo com esta tabela, a Formulação 3 se destaca, quando comparada com as demais formulações, em relação ao número de variáveis e restrições. Ela emprega uma quantidade de variáveis menor que as Formulações 1 e 2 e envolve a mesma ordem do número de restrições da Formulação 1, que, por sua vez, é inferior à ordem da quantidade de restrições definidas na Formulação 2.

4.4 Experimentos computacionais

Esta seção apresenta os experimentos computacionais realizados aplicando as Formulações 1, 2 e 3. A Subseção 4.4.1 mostra as configurações dos parâmetros. A Subseção 4.4.2 detalha a pré-fixação de variáveis empregada em cada uma das formulações, que foi usada para fixar em zero as variáveis que certamente serão iguais a zero na solução ótima, e a Subseção 4.4.3 apresenta os resultados obtidos.

4.4.1 Configurações dos parâmetros

Para a realização dos experimentos computacionais, foi utilizada a instância CAB, amplamente empregada na literatura de localização de concentradores e disponibilizada na *OR Library* (Beasley, 1990). Esse conjunto de dados foi introduzido por O’Kelly (1987) e refere-se às interações de passageiros de companhias aéreas entre 25 cidades dos Estados Unidos em 1970. O conjunto de dados CAB fornece os custos de transporte (c_{ij}) e a demanda (w_{ij}) entre cada par de cidades. Cada valor da demanda foi dividido por $\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij}$, de modo que a soma total da demanda fosse igual a um.

Para a receita (r_{ij}) por unidade de demanda atendida entre cada par de origem e destino, foram utilizados três valores: 1000, 1500 e 2000. Esses valores são referenciados como receita baixa, média e alta, respectivamente. A receita por unidade de demanda é considerada independente da localização do par de nós atendido. Também foram empregados três valores para o custo de instalação dos concentradores (s_k): 50, 100 e 150. Similarmente à receita, esses valores são referenciados como custo de transporte baixo, médio e alto, respectivamente. O custo de operação de uma conexão entre concentradores foi tomado como sendo 10% dos custos de instalação e, consequentemente, dependem diretamente do nível do custo de instalação dos concentradores (baixo, médio ou alto). Os custos fixos de instalação dos concentradores foram propostos por O’Kelly (1992). Os valores da receita e dos custos de operação nos arcos entre concentradores foram os mesmos propostos por Taherkhani e Alumur (2019). O fator de desconto nos arcos entre concentradores (α) foi considerado assumindo os valores 0,2; 0,4; 0,6; e 0,8.

A Tabela 4.2 resume as configurações dos parâmetros utilizadas nos experimentos computacionais.

Os experimentos foram realizados em um computador Intel Core i7-7500U, com 16 GB de RAM, 2.70 GHz, utilizando o ambiente Linux e a codificação foi feita em C++. Todas as instâncias foram resolvidas até a otimalidade com *gap* de 10^{-7} , ou seja, uma solução foi considerada ótima quando o seu *gap* foi menor ou igual a 10^{-7} .

Os problemas foram resolvidos através de duas abordagens distintas, utilizando-

Tabela 4.2: Configurações dos parâmetros.

Descrição	Parâmetro	Valor
Conjunto de nós	$ N $	25
Demanda	w_{ij}	<i>OR Library</i>
Receita por unidade de demanda	r_{ij}	Baixa: 1000, Média: 1500, Alta: 2000
Custo de transporte por unidade de fluxo	c_{ij}	<i>OR Library</i>
Custo de instalação de um concentrador	s_k	Baixo: 50, Médio: 100, Alto: 150
Custo de instalação de um arco entre concentradores	g_{km}	Baixo: 5, Médio: 10, Alto: 15
Fator de desconto nos arcos entre concentradores	α	0,2; 0,4; 0,6 e 0,8

se o *solver* CPLEX 12.10. Na primeira abordagem, a solução dos problemas foi obtida pelo *solver*, usando a configuração padrão. Este teste foi realizado com o objetivo de verificar o desempenho e as propriedades das formulações apresentadas neste capítulo. No segundo teste, o método de decomposição de Benders padrão do CPLEX foi empregado para resolver as instâncias, com o propósito de verificar a eficiência do método aplicado a esse tipo de problema e também para identificar com qual das formulações o método possui o desempenho computacional mais promissor. Para garantir as boas práticas de pesquisa operacional propostas por [Kendall et al. \(2016\)](#), as implementações das formulações aqui descritas estão disponibilizadas no domínio público <https://github.com/fabricioneo/plcml>.

Além disso, nos experimentos realizados, foi empregada a pré-fixação de algumas variáveis, em cada uma das formulações. Essa pré-fixação é detalhada a seguir.

4.4.2 Pré-fixação das variáveis

Como discutido anteriormente, o problema de localização de concentradores com maximização do lucro possui a propriedade particular de que a demanda entre um par de origem e destino só é satisfeita se ela for rentável. Desse modo, se a receita para satisfazer a demanda de um determinado par de origem e destino for menor do que o custo incorrido por esse atendimento, então esse par não gera lucro, e, consequentemente, não pode ter sua demanda atendida.

Para diminuir o esforço computacional das formulações nos experimentos realizados, essa propriedade foi utilizada para pré-fixar o valor das seguintes variáveis:

$$y_{ijkm} = 0, \quad i, j, k, m \in N, \quad \text{sempre que} \quad r_{ij} < c_{ik} + c_{mj}, \quad (4.27)$$

$$a_{ijk} = 0, \quad i, j, k \in N, \quad \text{sempre que} \quad r_{ij} < c_{ik}, \quad (4.28)$$

$$b_{ijm} = 0, \quad i, j, m \in N, \quad \text{sempre que} \quad r_{ij} < c_{mj}. \quad (4.29)$$

Na Formulação 1, foi empregada a pré-fixação dada pela Condição (4.27). Na Formulação 2, foram utilizados os critérios dados pelas Condições (4.28) e (4.29). Na Formulação 3, foi aplicada a Condição (4.29).

4.4.3 Resultados computacionais

Os resultados computacionais do primeiro teste, em que o CPLEX foi empregado para resolver as instâncias, são indicados na Tabela 4.3. São apresentados o lucro máximo, a porcentagem de pares atendidos, a porcentagem da demanda satisfeita e a localização dos nós concentradores, obtidos como solução por cada uma das formulações, além do tempo de CPU (em segundos), obtido na execução das instâncias até a otimalidade, juntamente com o *gap* entre a solução ótima do problema e a solução da relaxação linear (*Gap* PL). A porcentagem de pares atendidos foi obtida pela divisão da quantidade de pares atendidos por 600, que corresponde ao número total de pares do conjunto de dados CAB com demanda a ser satisfeita. Como a demanda foi escalonada, para obter a porcentagem de demanda satisfeita basta multiplicar por 100 a soma de todos os pares de cidades atendidos. O *Gap* PL foi calculado pelo quociente $\frac{100(l-l^*)}{l^*}$, em que l^* é o valor ótimo da função objetivo do problema e l é o resultado obtido a partir da sua relaxação linear.

A Tabela 4.3 mostra que um aumento tanto dos custos quanto do valor de α provoca uma redução no lucro, nos percentuais de pares atendidos e de demanda satisfeita e no tempo de CPU gasto pelas formulações para resolver as instâncias. Também nota-se que o número de concentradores instalados diminui ou permanece o mesmo. Observe que um aumento no valor de α implica em uma menor economia de escala nas conexões entre concentradores, o que justifica a menor quantidade de concentradores instalados nestes casos. Além disso, para um determinado nível de receita e custo em que houve a instalação de apenas um concentrador, o fator de desconto α não produz nenhum efeito. Ao decrescer o valor da receita, o lucro e as porcentagens de pares atendidos e de demanda satisfeita também decrescem. Verifica-se ainda que um aumento nos níveis da receita, em geral, eleva a quantidade de concentradores instalados.

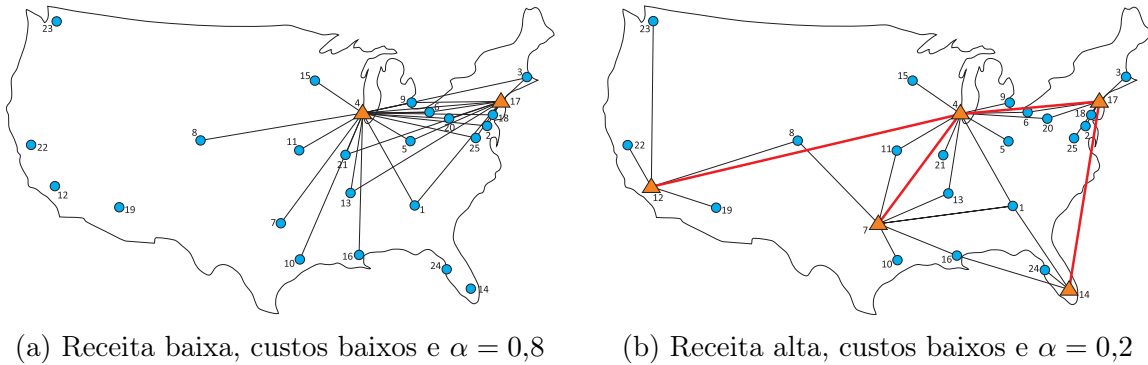
A Figura 4.2 exibe duas soluções obtidas pelas formulações, em que os triângulos representam os concentradores instalados e os segmentos em vermelho indicam as conexões entre concentradores nos quais foram aplicadas economias de escala. A Figura 4.2a mostra a solução obtida considerando-se a receita e os custos baixos e $\alpha = 0,8$. Ela retrata o caso em que apenas 31,33% dos pares de cidades foram atendidos e expõe uma situação muito interessante. Embora tenham sido instalados dois concentradores e exista um segmento entre eles, nenhuma economia de escala

Tabela 4.3: Soluções das Formulações 1, 2 e 3 para o conjunto de dados CAB, usando o *solver* CPLEX.

Custos	α	Lucro	Pares atendi- dos (%)	Demanda satis- feita (%)	Localização dos concentradores	Formulação 1		Formulação 2		Formulação 3	
						Tempo CPU (s)	Gap PL (%)	Tempo CPU (s)	Gap PL (%)	Tempo CPU (s)	Gap PL (%)
Receita Alta											
Baixo	0,2	1162,92	100,00	100,00	4, 7, 12, 14, 17	98536,32	3,29	4605,97	0,00	999,72	3,29
	0,4	1008,46	97,00	99,27	4, 7, 12, 14, 17	321492,74	4,82	4388,60	0,00	2289,84	4,82
	0,6	898,24	90,67	96,83	1, 4, 12, 17	209938,40	3,91	2046,60	0,00	901,38	3,94
Médio	0,8	839,40	86,67	92,38	1, 4, 12, 17	40813,36	2,43	620,47	0,13	280,74	2,44
	0,2	911,27	99,00	99,77	4, 12, 17, 24	10391,64	4,59	7366,81	0,00	635,40	4,60
	0,4	803,73	92,67	97,66	4, 12, 17	936,55	3,20	2963,01	0,00	230,28	3,22
Alto	0,6	717,73	88,67	95,80	4, 12, 17	3410,04	3,81	1639,54	0,00	241,11	3,84
	0,8	690,90	79,00	78,87	18, 21	317,74	0,63	382,43	0,00	16,78	0,95
	0,2	738,08	97,00	98,72	4, 12, 17	640,09	4,90	6855,42	0,00	120,27	4,90
	0,4	633,73	92,67	97,66	4, 12, 17	780,24	6,05	4441,65	0,00	249,18	6,14
	0,6	599,18	66,67	70,63	20	85,40	0,55	1478,37	0,00	19,25	0,86
	0,8	599,18	66,67	70,63	20	33,22	0,00	330,08	0,00	11,18	0,00
Receita Média											
Baixo	0,2	665,79	94,00	98,62	4, 7, 12, 14, 17	18029,76	5,69	5135,27	0,00	1011,54	5,70
	0,4	520,25	82,33	92,44	4, 12, 14, 17	33363,71	8,83	3201,77	0,00	1434,07	8,89
	0,6	439,14	68,33	82,75	4, 12, 17	28594,78	6,40	1513,29	0,00	664,44	6,63
Médio	0,8	424,73	61,00	67,71	4, 18	4019,81	1,59	330,63	0,00	44,74	1,65
	0,2	426,89	83,00	92,28	4, 12, 17	3338,42	7,75	5836,47	0,00	222,42	7,93
	0,4	348,40	63,00	68,83	4, 17	167,71	3,96	2993,14	0,00	75,77	5,31
Alto	0,6	327,82	61,33	68,29	4, 17	237,21	4,50	774,59	0,00	30,34	4,50
	0,8	324,73	61,00	67,71	4, 18	57,55	1,22	271,72	0,00	12,99	1,22
	0,2	266,41	63,00	68,83	4, 17	892,24	9,84	7922,50	0,00	175,13	13,58
	0,4	259,89	52,67	63,20	20	40,56	0,00	2069,65	0,00	14,78	2,83
	0,6	259,89	52,67	63,20	20	38,69	0,00	428,45	0,00	14,30	0,00
	0,8	259,89	52,67	63,20	20	35,43	0,00	154,05	0,00	11,28	0,00
Receita Baixa											
Baixo	0,2	197,97	58,67	80,92	4, 12, 14, 17	3425,26	12,66	3932,77	0,00	672,13	14,55
	0,4	156,90	35,33	48,58	4, 17	32,65	4,61	832,17	0,00	35,47	6,89
	0,6	141,69	33,33	48,19	4, 17	27,49	5,40	159,85	0,00	16,91	5,40
Médio	0,8	132,16	31,33	46,57	4, 17	24,82	4,21	61,69	0,00	8,40	4,21
	0,2	69,02	36,00	49,79	4, 17	29,26	19,34	3300,05	0,00	30,64	31,28
	0,4	65,28	16,00	33,63	17	23,92	0,00	721,27	0,00	13,30	12,78
Alto	0,6	65,28	16,00	33,63	17	20,81	0,00	160,90	0,00	8,75	1,62
	0,8	65,28	16,00	33,63	17	20,42	0,00	41,50	0,00	6,92	0,00
	0,2	15,28	16,00	33,63	17	10,79	0,00	2915,96	0,00	10,57	82,61
	0,4	15,28	16,00	33,63	17	10,30	0,00	619,81	0,00	8,25	34,92
	0,6	15,28	16,00	33,63	17	10,42	0,00	114,51	0,00	7,14	0,00
	0,8	15,28	16,00	33,63	17	11,09	0,00	35,81	0,00	6,79	0,00

é aplicada na solução, pois este segmento não é um arco entre concentradores (de acordo com as variáveis z_{km}) que resulta em economia de escala e, sim, um arco de alocação entre dois concentradores da rede. Isso ocorre porque o fator de desconto $\alpha = 0,8$ gera uma baixa economia de escala, não sendo rentável instalar um arco entre os concentradores, nesse caso. Observe também, que esta solução possui uma rede de concentradores desconexa, uma vez que não existe um arco entre os concentradores (no sentido das variáveis z_{km}) instalado. A Figura 4.2b corresponde ao cenário em que a receita é alta, os custos são baixos e $\alpha = 0,2$. Ela exhibe a solução em que a demanda entre todos os pares de cidades foi atendida. Note que a rede de concentradores é incompleta.

Para avaliar o desempenho das formulações, foram utilizadas duas métricas: o tempo de CPU e o *Gap* PL. Os melhores valores desses parâmetros foram destacados



em **negrito** na Tabela 4.3. Esses dados mostram que os melhores tempos de CPU para resolver as instâncias foram obtidos pela Formulação 3. A diferença nos tempos registrados entre ela e as demais formulações é bem expressiva, principalmente quando é realizada uma diminuição nos níveis dos custos. A Figura 4.3 exibe uma visualização gráfica desses dados.

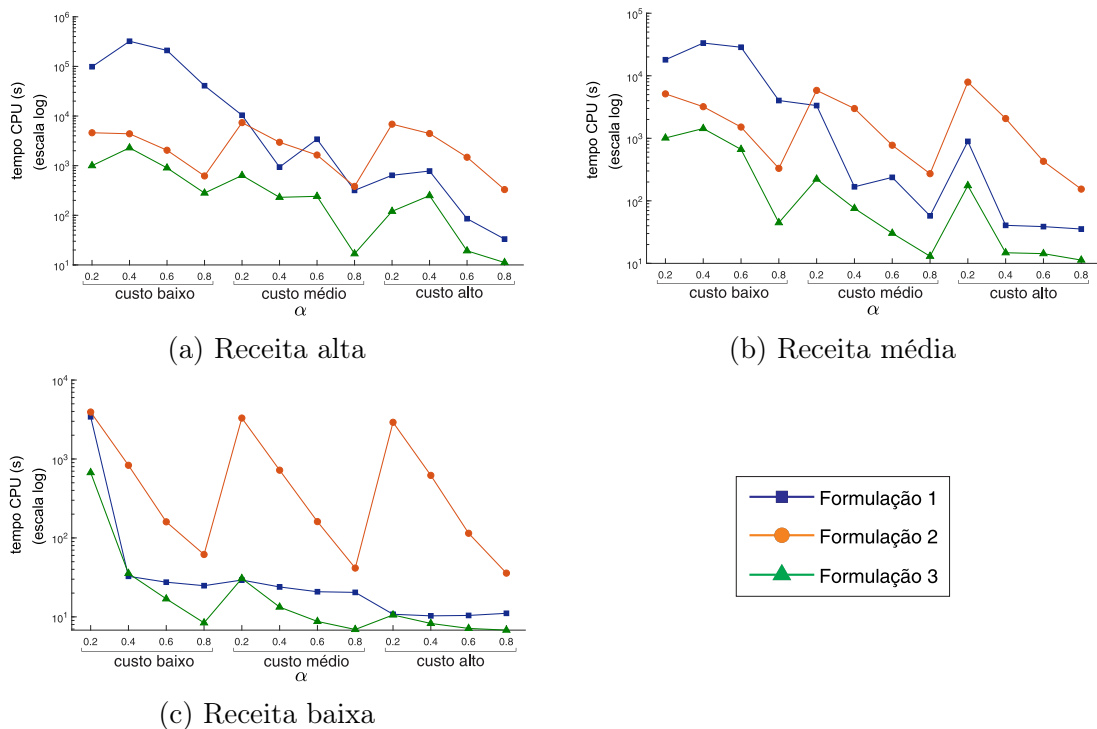


Figura 4.3: Tempo de CPU requerido pelas Formulações 1, 2 e 3 para diferentes valores dos parâmetros, usando o CPLEX.

Para uma melhor visualização, os tempos de CPU são dados segundo uma escala logarítmica (com logaritmo na base 10), devido à diferença entre as ordens de grandeza dos valores obtidos. Por exemplo, com a receita alta, custo baixo e $\alpha = 0,2$, a Formulação 3 registrou um tempo de CPU quatro vezes menor que a Formulação

2 e quase cem vezes menor que a Formulação 1. Como mencionado antes, também observa-se na Figura 4.3 que tanto o aumento dos custos, quanto o aumento do valor de α implica em uma diminuição do tempo de CPU requerido pelas formulações. Nos casos mais dispendiosos das receitas média e alta, os tempos de CPU registrados pela Formulação 2 são significativamente menores do que os tempos obtidos pela Formulação 1 e tendem a se aproximar dos tempos da Formulação 3.

Em relação ao valores do *gap* entre os problemas original e relaxado, os resultados evidenciam que, embora as três formulações apresentem valores relativamente baixos, a Formulação 2 se destaca ao fornecer *gap* de relaxação linear nulo para praticamente todas as instâncias, demonstrando, assim, ser uma formulação com relaxação linear mais forte que as demais.

No segundo teste, as instâncias foram resolvidas utilizando-se o método de decomposição de Benders padrão do CPLEX. Esse método corresponde à estratégia 3 de decomposição, definida no *solver*. Também neste teste, as variáveis binárias $y_{ijkm}, i, j, k, m \in N$ da Formulação 2 foram consideradas relaxadas, pois, desse modo, foi obtido um melhor desempenho na decomposição de Benders aplicada pelo *solver*. Isso ocorre porque, ao relaxar as variáveis, elas passam a pertencer ao subproblema de Benders. Por outro lado, se a integralidade dessas variáveis for mantida, então elas pertencerão ao problema mestre, que terá em sua composição variáveis com quatro índices, aumentando consideravelmente o seu tamanho. No entanto, deixá-las no subproblema de Benders é menos dispendioso, uma vez que o SP possui uma estrutura decomponível.

Os resultados desse teste são dados na Tabela 4.4, que mostra, para cada uma das formulações, o tempo de CPU (em segundos) obtido pelo método de Benders do *solver* CPLEX (BD-CPLEX) e o tempo registrado pelo *solver* (CPLEX) para resolver os problemas, extraídos do teste anterior. Os melhores tempos de solução registrados foram destacados em negrito.

A Tabela 4.4 mostra que, de modo geral, o método de decomposição de Benders possui um bom desempenho quando aplicado às formulações. Para as Formulações 1 e 2, a aplicação do método proporcionou uma redução muito significativa nos tempos de resolução, quando comparados aos tempos obtidos pelo *solver*. Em especial, note que os tempos dos casos mais desafiadores para a Formulação 1 foram reduzidos à ordem de grandeza dos tempos registrados pela Formulação 3, destacada anteriormente por possuir a melhor desempenho quando resolvida pelo *solver*. Por outro lado, nota-se que a aplicação do método à Formulação 3 não teve o mesmo impacto observado com as outras formulações. Nesta formulação, as reduções foram menos expressivas, ocorrendo para os casos menos custosos. Além disso, para os problemas mais desafiadores, com custo baixo e α pequeno, houve um aumento do tempo de

Tabela 4.4: Tempo de solução das Formulações 1, 2 e 3 para o conjunto de dados CAB, usando o Benders do CPLEX.

Custos	α	Formulação 1		Formulação 2		Formulação 3	
		BD-CPLEX	CPLEX	BD-CPLEX	CPLEX	BD-CPLEX	CPLEX
		Tempo CPU (s)	Tempo CPU (s)	Tempo CPU (s)	Tempo CPU (s)	Tempo CPU (s)	Tempo CPU (s)
Receita Alta							
Baixo	0,2	1092,15	98536,32	94,14	4605,97	1841,75	1000,92
	0,4	4036,69	321492,74	109,18	4388,6	4882,64	1890,52
	0,6	772,20	209938,40	57,74	2046,6	757,68	902,66
	0,8	114,65	40813,36	36,63	620,47	118,26	221,40
Médio	0,2	774,92	10391,64	167,39	7366,81	650,86	369,99
	0,4	148,26	936,55	95,01	2963,01	120,67	231,94
	0,6	66,63	3410,04	47,95	1639,54	99,91	204,20
	0,8	25,90	317,74	33,16	382,43	2,91	16,15
Alto	0,2	99,98	640,09	265,28	6855,42	21,95	74,71
	0,4	85,28	780,24	87,30	4441,65	35,02	210,68
	0,6	36,47	85,40	50,01	1478,37	4,93	18,54
	0,8	16,36	33,22	26,71	330,08	1,10	12,50
Receita Média							
Baixo	0,2	2303,90	18029,76	149,07	5135,27	1695,48	869,28
	0,4	2538,85	33363,71	122,46	3201,77	4396,89	1471,33
	0,6	848,08	28594,78	48,07	1513,29	588,11	630,07
	0,8	27,75	4019,81	27,34	330,63	7,96	50,73
Médio	0,2	321,75	3338,42	109,90	5836,47	144,83	263,75
	0,4	34,65	167,71	65,57	2993,14	14,50	61,17
	0,6	21,74	237,21	34,18	774,59	3,70	26,51
	0,8	9,74	57,55	27,59	271,72	1,99	14,82
Alto	0,2	50,50	892,24	139,32	7922,5	59,37	125,74
	0,4	16,66	40,56	32,43	2069,65	6,10	17,18
	0,6	9,85	38,69	24,17	428,45	1,61	17,59
	0,8	7,35	35,43	14,11	154,05	0,88	11,13
Receita Baixa							
Baixo	0,2	581,67	3425,26	152,82	3932,77	838,01	645,24
	0,4	33,73	32,65	32,35	832,17	16,75	50,07
	0,6	13,88	27,49	16,04	159,85	6,73	25,90
	0,8	6,44	24,82	11,48	61,69	1,51	9,31
Médio	0,2	28,51	29,26	39,01	3300,05	12,26	31,93
	0,4	15,72	23,92	11,64	721,27	3,56	15,51
	0,6	5,62	20,81	8,11	160,90	1,31	7,15
	0,8	4,05	20,42	6,51	41,50	0,85	4,22
Alto	0,2	8,21	10,79	23,18	2915,96	3,63	11,18
	0,4	4,59	10,30	8,85	619,81	1,74	9,32
	0,6	4,14	10,42	7,64	114,51	1,10	5,24
	0,8	3,27	11,09	6,96	35,81	0,69	3,45

resolução ao utilizar a decomposição de Benders na Formulação 3.

A decomposição de Benders aplicada pelo *solver*, utilizando a Formulação 2, foi a mais favorável. Além das consideráveis reduções nos tempos, observadas anteriormente, a aplicação do método se mostrou muito eficiente para as instâncias mais complicadas. Por exemplo, o problema correspondente à receita alta, custo baixo e $\alpha = 0,2$ teve o seu tempo reduzido em quase 98%.

Uma visualização gráfica dos tempos de solução gastos pelo Benders do CPLEX para resolver as instâncias, usando cada uma das formulações, são mostrados na

Figura 4.4, em que a escala logarítmica foi novamente empregada para uma melhor observação dos resultados.

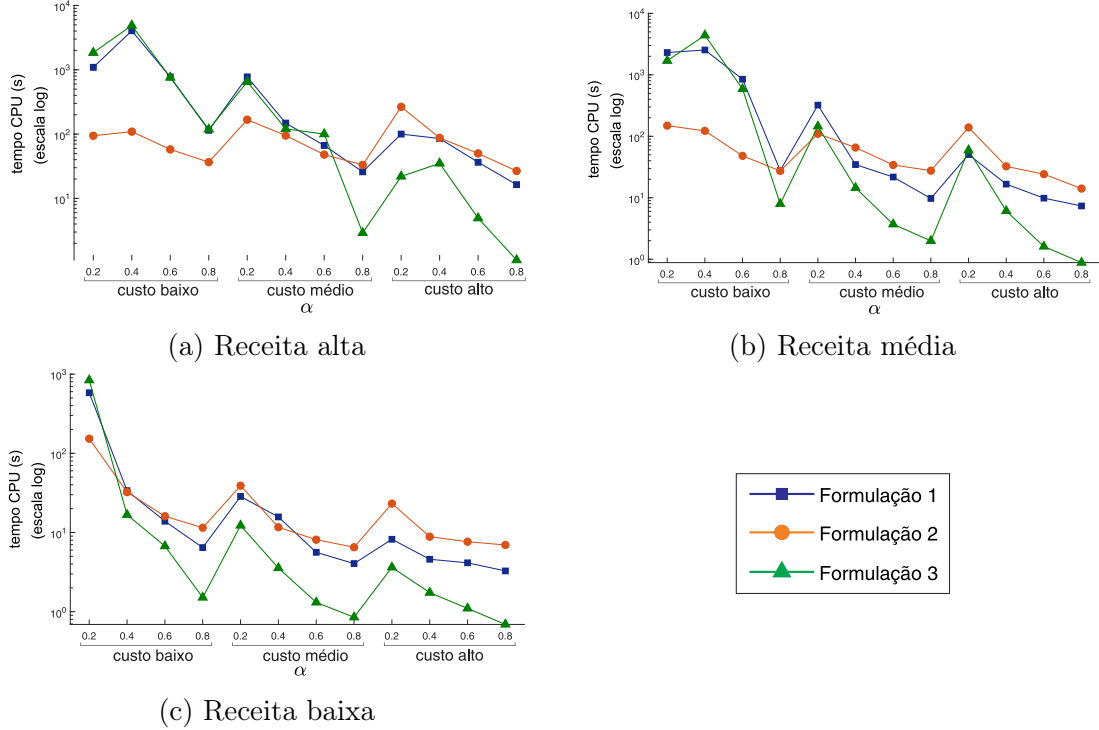


Figura 4.4: Tempo de CPU requerido pelas Formulações 1, 2 e 3 para diferentes valores dos parâmetros, usando o Benders do CPLEX.

A Figura 4.4 evidencia a observação feita anteriormente de que os tempos registrados com a Formulação 3 são melhores que os tempos das demais formulações, para os problemas menos complexos, enquanto a Formulação 2 se destaca para as instâncias mais desafiadoras. Nota-se também que, em todos os três tipos de receita, a Formulação 2 é mais estável, pois não apresenta oscilações grosseiras dos tempos registrados, mesmo para os casos mais difíceis.

4.5 Conclusões

Este capítulo abordou com detalhes o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, objeto de estudo deste trabalho. Esse problema tem, como objetivos principais, localizar concentradores e alocar nós de demanda aos concentradores de modo a maximizar o lucro total da rede. Diferentemente dos problemas clássicos da área de localização de concentradores, parte da demanda pode não ser atendida, se não for lucrativa.

Três formulações para o problema foram apresentadas, tendo destacadas algumas de suas propriedades, e, além disso, foram analisadas comparativamente. A princi-

pal diferença entre as formulações foi verificada na forma como o fluxo da rede foi rastreado. Além disso, a Formulação 3 apresentou a menor quantidade de variáveis e restrições, em função do tamanho do problema. Para avaliar o desempenho das formulações, foram realizados experimentos computacionais com várias configurações diferentes para os parâmetros do problema, utilizando-se duas abordagens distintas.

Na primeira abordagem, o *solver* CPLEX foi usado para resolver as instâncias. Os resultados desse teste apontaram valiosas características das formulações. Observou-se que, em relação ao tempo computacional, a Formulação 3 possui uma grande vantagem, quando comparada com as outras formulações. Por outro lado, a análise do *gap* entre a solução ótima do problema original e a solução do problema linear relaxado indicou que a Formulação 2 é mais forte, pois, com exceção de uma única instância, todas as demais apresentaram *gap* nulo.

A segunda abordagem considerou o método de decomposição de Benders do CPLEX para solucionar os problemas. Os resultados obtidos mostraram que o método é promissor para resolver este tipo de problema, uma vez que os tempos computacionais foram reduzidos de modo significativo, principalmente quando foram usadas as Formulações 1 e 2. O desempenho obtido com a Formulação 2 foi muito satisfatório, pois, além de apresentar bons tempos computacionais, se mostrou a mais estável.

Os resultados dos experimentos computacionais realizados com as formulações também apontaram questões a serem investigadas. Dado o esforço computacional empregado para resolver algumas das instâncias testadas, observa-se a necessidade de se obter algoritmos com bom desempenho para resolver instâncias maiores do problema. No Capítulo 5, algoritmos exatos baseados no método de decomposição de Benders são desenvolvidos para lidar com o PLCML e rede incompleta de grande porte. Nestes métodos, a Formulação 2 é utilizada, uma vez que ela apresentou características favoráveis a aplicação da decomposição de Benders, como discutido anteriormente.

Capítulo 5

Decomposição de Benders aplicada ao Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro

Neste capítulo, são propostos algoritmos baseados no método de decomposição de Benders para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, em que a rede de concentradores é incompleta. Na Seção 5.1 é apresentada a reformulação de Benders para o problema. Na Seção 5.2 são discutidos os aprimoramentos para o método de Benders que são usados nos algoritmos desenvolvidos. Os experimentos computacionais realizados e os resultados obtidos são expostos na Seção 5.3. Na Seção 5.4, por fim, são feitas as considerações finais do capítulo. Destacamos que este capítulo é fortemente baseado no artigo [Oliveira et al. \(2022\)](#), publicado como parte dos requisitos obrigatórios para conclusão desta tese.

5.1 Reformulação de Benders

5.1.1 Seleção da formulação

A seleção de uma formulação adequada é um fator importante que afeta o desempenho computacional da decomposição de Benders, uma vez que a formulação está intimamente relacionada com a qualidade dos cortes de Benders que são gerados a cada iteração do método ([Magnanti e Wong, 1981](#)).

Em [Geoffrion e Graves \(1974\)](#), os autores discutem que uma das características desejadas é que a formulação possua um bom limite de otimização linear. Conforme visto no Capítulo 4, a Formulação 2 apresentou um *gap* de relaxação linear muito

satisfatório, sendo nulo para praticamente todas as instâncias testadas. Adicionalmente, ao aplicar o método de decomposição de Benders do *solver* CPLEX a essa formulação, foi observado um comportamento promissor, em que foram obtidos bons tempos computacionais e uma baixa variação nos tempos registrados, indicando uma maior estabilidade.

Segundo [Magnanti e Wong \(1981\)](#) a decomposição de Benders possui um melhor desempenho quando aplicada a formulações fortes. Mostraremos, a seguir, que a Formulação 2 é mais forte do que a Formulação 1. Para tanto, consideremos a caracterização de formulação mais forte, introduzida por [Bertsimas e Tsitsiklis \(1997\)](#).

Definição 5.1.1. *Sejam F_1 e F_2 formulações para o mesmo problema MIP e considere P_1 e P_2 as regiões viáveis correspondentes de suas relaxações de programação linear. A formulação F_1 é considerada mais forte do que a formulação F_2 se P_1 estiver estritamente contida em P_2 .*

Para um problema de maximização, dizer que uma formulação F_1 é mais forte que uma formulação F_2 significa que o limite superior obtido pela relaxação de programação linear (PL) de F_1 está mais próximo do valor da função objetivo da solução ótima do MIP do que o valor obtido pela relaxação de PL de F_2 ou, então, ambos os limites são iguais. A Proposição 5.1.1 mostra que a Formulação 2, proposta neste trabalho, é mais forte do que a Formulação 1 proposta por [Taherkhani e Alumur \(2019\)](#).

Proposição 5.1.1. *A Formulação 2 é mais forte do que a Formulação 1.*

Demonstração. As relaxações de PL das formulações 1 e 2 serão denotadas por $\bar{F}_1$ e $\bar{F}_2$, respectivamente. Sejam P_1 e P_2 as regiões factíveis de $\bar{F}_1$ e $\bar{F}_2$, respectivamente. Vamos provar que $P_1 \subset P_2$. Como existem variáveis distintas entre as formulações, mostraremos que, dada qualquer solução em P_1 , existe uma solução equivalente a ela em P_2 , ou seja, uma solução viável que possui o mesmo valor de função objetivo para o problema. Seja $s_1 = (h, z, a, b, x)$ uma solução em P_1 , onde cada componente representa um vetor correspondente às variáveis h_k , z_{km} , a_{ijk} , b_{ijm} e x_{ijkm} . Uma solução $s_2 \in P_2$ com o mesmo valor de função objetivo (FO) de s_1 pode ser construída da seguinte forma. Mantenha os valores das variáveis h e z . Seja R o conjunto de pares (k, m) tais que k e m são, respectivamente, o primeiro e o último concentrador de uma rota usada para servir o par (i, j) ; seja R' composto pelos concentradores k tais que k seja o primeiro concentrador de uma rota usada para atender a demanda de (i, j) , e seja R'' o conjunto de concentradores m tais que m é o último concentrador de uma rota utilizada para atender a demanda do par (i, j) . Então, para cada par $(i, j) \in N \times N$ cuja demanda foi satisfeita, os valores das variáveis y são obtidos

resolvendo o sistema de equações:

$$\sum_{(k,m) \in R} y_{ijkm} = \sum_{k:(k,m) \in R} a_{ijk} \quad (5.1)$$

$$\sum_{m:(k,m) \in R} y_{ijkm} = a_{ijk}, \quad \forall k \in R' \quad (5.2)$$

$$\sum_{k:(k,m) \in R} y_{ijkm} = b_{ijm}, \quad \forall m \in R'' \quad (5.3)$$

Note que este sistema de equações determina a fração da demanda w_{ij} que é roteada ao longo de cada um dos caminhos que conectam o nó de origem i ao nó de destino j . Devido à restrição de balanceamento de fluxo (4.15), que garante que $\sum_{k \in N} a_{ijk} = \sum_{m \in N} b_{ijm}$, então este sistema é sempre viável. Além disso, o valor das outras variáveis y_{ijkm} que não estão neste sistema é definido como zero. Em seguida, para cada $i, k, m \in N$, defina as variáveis f como:

$$f_{ikm} = \sum_{j \in N} w_{ij} x_{ijkm}. \quad (5.4)$$

A Proposição A.1.1 no Apêndice A mostra que a solução $s_2 = (h, z, y, f)$, definida como acima, pertence a P_2 e produz o mesmo valor de FO que s_1 . Para verificar que P_1 e P_2 são regiões factíveis distintas, considere $\bar{s}_2$ uma solução para P_2 , de modo que haja um arco entre concentradores (k, m) instalado tal que, para todo nó $i \in N$,

$$f_{ikm} < \sum_{j \in N} w_{ij}, \quad (5.5)$$

e que satisfaz a condição de que toda a demanda do nó i destinada a algum nó $j \in N$ seja roteada através do arco (k, m) . Assim, em qualquer solução de P_1 com a mesma decisão de roteamento de $\bar{s}_2$, para satisfazer o conjunto de restrições (4.18), o valor de z_{km} deve ser necessariamente igual a um, já que $x_{ijkm} = 1$ para algum par $(i, j) \in N \times N$. Por outro lado, em P_2 , o valor de z_{km} pode ser estritamente menor que um (veja as restrições (4.5)). Isso mostra que $P_1 \neq P_2$.

Uma vez que estamos lidando com um problema de maximização e essa variável incide sobre os custos do projeto da rede, nas soluções ótimas para $\bar{F}_2$ o valor desta variável será

$$z_{km} = \max_{i \in N} \left\{ \frac{f_{ikm}}{\sum_{j \in N} w_{ij}} \right\}. \quad (5.6)$$

Assim, neste caso, o valor do custo total do projeto da rede dado por uma solução

de $\bar{F}_2$ que satisfaz a condição (5.5), para algum arco entre concentrador instalado (k, m) e $i \in N$, será estritamente menor que o valor obtido com uma solução de $\bar{F}_1$, com roteamento de fluxo equivalente, onde $x_{ijkm} = 1$, para algum $(i, j) \in N \times N$. Consequentemente, $\bar{F}_2$ fornecerá uma solução que tem um valor de função objetivo estritamente menor que o valor de uma solução de $\bar{F}_1$. $\square$

Em virtude das boas propriedades da Formulação 2 discutidas acima, ela foi selecionada para aplicação do método de decomposição de Benders. Os detalhes da reformulação de Benders são dados a seguir.

5.1.2 Reformulação de Benders

A reformulação de Benders para a Formulação 2, dada pelas expressões (4.12)-(4.21), é obtida de modo que as decisões de localização dos concentradores e de ativação dos arcos que os ligam sejam realizadas no problema mestre e as demais decisões sejam tomadas no subproblema. Fixando os vetores de variáveis inteiras h e z com valores h^e e z^e , respectivamente, obtemos o seguinte subproblema de Benders (SP):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) w_{ij} a_{ijk} - \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} \right. \\ & \left. + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} w_{ij} x_{ijkm} + \sum_{k \in N} s_k h_k^e + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km}^e \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in N} a_{ijk} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (5.8)$$

$$\sum_{m \in N} b_{ijm} \leq 1 \quad i, j \in N \quad (5.9)$$

$$a_{ijk} - b_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijmk} - \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijk m} = 0 \quad i, j, k \in N \quad (5.10)$$

$$a_{ijk} \leq h_k^e \quad i, j, k \in N \quad (5.11)$$

$$b_{ijm} \leq h_m^e \quad i, j, m \in N \quad (5.12)$$

$$x_{ijkm} \leq z_{km}^e \quad i, j, k, m \in N, k \neq m \quad (5.13)$$

$$z_{km}^e \leq h_k^e \quad k, m \in N, k \neq m \quad (5.14)$$

$$z_{km}^e \leq h_m^e \quad k, m \in N, k \neq m \quad (5.15)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N, k \neq m \quad (5.16)$$

$$a_{ijk} \geq 0 \quad i, j, k \in N \quad (5.17)$$

$$b_{ijm} \geq 0 \quad i, j, m \in N. \quad (5.18)$$

Associando as variáveis duais $\beta_{ij} \geq 0, \gamma_{ij} \geq 0, \delta_{ijk} \in \mathbb{R}, \theta_{ijk} \geq 0, \mu_{ijm} \geq 0$ e $\rho_{ijkm} \geq 0$ com as restrições (5.8)-(5.13), respectivamente, o subproblema dual de Benders (SPD) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (\beta_{ij} + \gamma_{ij}) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_k^e \theta_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} h_m^e \mu_{ijm} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^e \rho_{ijkm} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\text{s.a.} \quad \beta_{ij} + \delta_{ijk} + \theta_{ijk} \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik}) \quad i, j, k \in N \quad (5.20)$$

$$\gamma_{ij} - \delta_{ijm} + \mu_{ijm} \geq -w_{ij}c_{mj} \quad i, j, m \in N \quad (5.21)$$

$$\delta_{ijm} - \delta_{ijk} + \rho_{ijkm} \geq -\alpha w_{ij}c_{km} \quad i, j, k, m \in N, k \neq m \quad (5.22)$$

$$\beta_{ij}, \gamma_{ij} \geq 0 \quad i, j \in N \quad (5.23)$$

$$\theta_{ijk} \geq 0 \quad i, j, k \in N \quad (5.24)$$

$$\mu_{ijm} \geq 0 \quad i, j, m \in N \quad (5.25)$$

$$\rho_{ijkm} \geq 0 \quad i, j, k, m \in N, k \neq m \quad (5.26)$$

$$\delta_{ijk} \in \mathbb{R} \quad i, j, k \in N. \quad (5.27)$$

Observe que, neste caso, o subproblema de Benders (5.7)-(5.18) e o seu dual (5.19)-(5.27) são sempre factíveis e limitados. De fato, SP sempre tem solução factível, uma vez que o atendimento da demanda dos pares de origem e destino não é obrigatório, sendo realizado apenas quando é rentável. Além disso, existe uma quantidade finita de pares de demanda a serem atendidos. Logo, a solução do SP é factível e limitada. Pelo Lema 3.1.3 (Lema da Dualidade Forte), segue que a solução do dual de SP é também factível e limitada.

Em vista da observação anterior e do fato do subproblema dual (5.19)-(5.27) ser linear, segue que pelo menos um ponto extremo do poliedro (5.20)-(5.27) corresponde a uma solução ótima. Como existe uma quantidade finita de tais pontos extremos, podemos escrever o corte de Benders a ser adicionado ao problema mestre como sendo:

$$\eta \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \left[\beta_{ij}^v + \gamma_{ij}^v + \sum_{k \in N} h_k^e \theta_{ijk}^v + \sum_{m \in N} h_m^e \mu_{ijm}^v + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^e \rho_{ijkm}^v \right],$$

$$\forall (\beta^v, \gamma^v, \theta^v, \mu^v, \rho^v, \delta^v) \in \mathbb{V}, \quad (5.28)$$

em que η é uma variável super-estimadora do lucro total sobre os custos de transporte e $\mathbb{V}$ é o conjunto de pontos extremos do poliedro (5.20)-(5.27). Desse modo, o problema mestre (PM) é dado por:

$$\max \quad \eta - \sum_{k \in N} s_k h_k - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} \quad (5.29)$$

$$\text{s.a.} \quad (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \eta \leq & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (\beta_{ij}^v + \gamma_{ij}^v) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_k \theta_{ijk}^v + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} h_m \mu_{ijm}^v \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km} \rho_{ijkm}^v \quad (\beta^v, \gamma^v, \theta^v, \mu^v, \rho^v, \delta^v) \in \mathbb{V} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\eta \geq 0 \quad (5.32)$$

$$\eta \leq M, \quad (5.33)$$

em que M é um limitante superior para o componente da função objetivo do problema original que foi colocado no subproblema. Neste trabalho, considera-se M igual à soma das receitas de todos os pares de demanda.

Como mencionado no Capítulo 3, o problema mestre (5.29)-(5.33) é equivalente ao problema original e, em geral, possui um número exponencial de restrições. Para contornar essa dificuldade, será considerado inicialmente $\mathbb{V}$ igual ao conjunto vazio e, iterativamente, resolve-se o problema mestre relaxado e o subproblema dual de Benders, adicionando novos pontos extremos a $\mathbb{V}$, sempre que uma solução para o dual de SP é obtida. Relembre que uma solução do PM fornece um limitante superior válido para o problema e que a combinação do valor ótimo do dual de SP com o valor ótimo do PM associado às variáveis binárias fixadas produz um limitante inferior válido. Esse processo iterativo é realizado até que ocorra uma convergência entre os limitantes superior e inferior para a solução ótima.

Um esboço do método de decomposição de Benders clássico, aplicado ao PLCML, é descrito no Algoritmo 1. Nesse algoritmo, $\nu(\text{PM})$ e $\nu(\text{SPD})$ denotam o valor da solução ótima corrente do problema mestre e do subproblema dual de Benders, respectivamente; LS e LI são os limitantes superior e inferior atuais, respectivamente; ε é o *gap* de otimalidade definido pelo usuário. Além disso, (h^e, z^e) e $(\beta^e, \gamma^e, \theta^e, \mu^e, \rho^e, \delta^e)$ são as soluções obtidas do PM e do dual de SP na iteração e , respectivamente, e $\mathbb{V}^e$ é a restrição do conjunto $\mathbb{V}$, contendo os pontos extremos gerados até a iteração e .

Conforme já mencionado nas seções 2.4 e 3.3, o algoritmo de Benders tem sido aplicado com sucesso em uma ampla gama de problemas. No entanto, uma aplicação direta do método de Benders clássico pode exigir muito tempo computacional e uma

Algoritmo 1 Método de Decomposição de Benders Clássico

```

1: Sejam  $LS = +\infty, LI = -\infty, gap = +\infty, e = 0, \mathbb{V}^e = \emptyset$ .
2: while ( $gap > \varepsilon$ ) do
3:   Resolva o PM (5.29)-(5.33) e obtenha  $(h^e, z^e)$  e  $\nu(\text{PM})$ 
4:    $LS \leftarrow \nu(\text{PM})$ 
5:   Resolva o dual de SP (5.19)-(5.27) e obtenha  $(\beta^e, \gamma^e, \theta^e, \mu^e, \rho^e, \delta^e)$  e  $\nu(\text{SPD})$ 
6:    $\mathbb{V}^{e+1} \leftarrow \mathbb{V}^e \cup \{(\beta^e, \gamma^e, \theta^e, \mu^e, \rho^e, \delta^e)\}$ 
7:    $LI \leftarrow \max \left\{ LI, \nu(\text{SPD}) - \sum_{k \in N} s_k h_k^e - \sum_{k \in N} \sum_{m \in N, m \neq k} g_{km} z_{km}^e \right\}$ 
8:    $gap \leftarrow (LS - LI) / LS$ 
9:    $e \leftarrow e + 1$ 
10: end while

```

quantidade excessiva de memória (Magnanti e Wong, 1981).

Na próxima seção serão apresentadas estratégias para melhorar a versão clássica do método de decomposição de Benders que serão utilizadas nos algoritmos propostos.

5.2 Aprimoramentos para a decomposição de Benders

A eficiência computacional do algoritmo de decomposição de Benders geralmente está relacionada com as características da formulação à qual ele está associado, com o esforço computacional necessário para resolver o problema mestre e o subproblema dual de Benders e com a qualidade dos cortes gerados a cada iteração. Assim, muitas técnicas para melhorar o desempenho do método têm sido propostas na literatura.

Geoffrion e Graves (1974) geraram cortes de Benders sem resolver o problema mestre até a otimalidade, considerando soluções viáveis que diferem do seu valor ótimo por uma tolerância pré-fixada. McDaniel e Devine (1977) propuseram uma relaxação das restrições de integralidade do problema mestre durante as primeiras iterações do método, permitindo também gerar cortes sem resolver o problema por completo. Mais recentemente, Contreras et al. (2011b) incluíram testes de redução nas iterações internas do algoritmo e a utilização de cortes não dominados. Taherkhani e Alumur (2019) também utilizaram testes de redução e uma pré-fixação de variáveis para reduzir o tamanho do problema e o esforço computacional.

Magnanti e Wong (1981) propuseram uma estratégia para melhorar a convergência do método para os casos em que o dual do subproblema é degenerado. Eles formularam um problema que permite gerar cortes Pareto-ótimos, isto é, cortes que não são dominados por outro, usando a noção de *core points*. Papadakos (2008) apresentou um método melhorado para a geração de cortes Pareto-ótimos e provou que

é possível produzir este tipo de corte a partir de pontos que não são exclusivamente *core points* do espaço de soluções do problema mestre.

Nos problemas que possuem uma estrutura decomponível adequada, uma das técnicas utilizadas para reduzir o número de iterações do algoritmo é a adição de múltiplos cortes a cada iteração (Birge e Louveaux, 1988).

Para que o problema mestre não precise ser resolvido do início a cada iteração, uma estratégia também usada é a geração de cortes dentro de uma árvore de *Branch-and-Cut* a partir de um único problema mestre (Codato e Fischetti, 2006; Naoum-Sawaya e Elhedhli, 2013; Martins de Sá et al., 2015).

Neste trabalho, foram empregados três recursos para melhorar o desempenho computacional do método:

- (i) a estratégia de múltiplos cortes;
- (ii) a geração de cortes não dominados; e
- (iii) o uso da decomposição de Benders dentro de uma estrutura de *Branch-and-Cut*.

Estes procedimentos são discutidos a seguir.

5.2.1 Estratégia de múltiplos cortes

O recurso de múltiplos cortes consiste em adicionar vários cortes de Benders ao problema mestre a cada iteração. Como o subproblema de Benders (5.7)-(5.18) pode ser decomposto em n^2 subproblemas menores, duas estratégias podem ser consideradas. A primeira consiste em adicionar n cortes de Benders por iteração, ou seja, um para cada origem i . Assim, para qualquer ponto extremo $(\beta^v, \gamma^v, \theta^v, \mu^v, \rho^v, \delta^v) \in \mathbb{V}$, o seguinte conjunto de cortes pode ser definido:

$$\eta_i \leq \sum_{j \in N} \left[\beta_{ij}^v + \gamma_{ij}^v + \sum_{k \in N} h_k \theta_{ijk}^v + \sum_{m \in N} h_m \mu_{ijm}^v + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km} \rho_{ijkm}^v \right], \forall i \in N. \quad (5.34)$$

Neste caso, a variável η na função objetivo do problema mestre (5.29) é substituída por $\sum_{i \in N} \eta_i$.

A segunda estratégia é adicionar n^2 cortes ao PM a cada iteração, isto é, para qualquer ponto extremo $(\beta^v, \gamma^v, \theta^v, \mu^v, \rho^v, \delta^v) \in \mathbb{V}$, o seguinte conjunto de cortes de Benders, um para cada par de origem e destino (i, j) , pode ser definido:

$$\eta_{ij} \leq \beta_{ij}^v + \gamma_{ij}^v + \sum_{k \in N} h_k \theta_{ijk}^v + \sum_{m \in N} h_m \mu_{ijm}^v + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km} \rho_{ijkm}^v, \forall i, j \in N. \quad (5.35)$$

A variável η na função objetivo do problema mestre (5.29), neste caso, é substituída por $\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \eta_{ij}$.

5.2.2 Inserção de cortes não dominados

Um dos fatores que influenciam diretamente a eficiência do algoritmo de decomposição de Benders é a qualidade dos cortes que são gerados. Em geral, quanto mais fortes são os cortes de Benders, menos iterações são necessárias para atingir a convergência do método. Em muitas aplicações, o subproblema dual de Benders é degenerado, possuindo soluções ótimas alternativas. Portanto, para que cortes fortes sejam gerados, a escolha de uma solução do dual de SP deve ser feita de maneira criteriosa a cada iteração; caso contrário, o método pode apresentar uma baixa taxa de convergência.

Para acelerar a convergência do método de decomposição de Benders, vamos considerar um procedimento apresentado por Papadakos (2008) para a geração de cortes não dominados. No contexto do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, temos a seguinte definição para cortes não dominados.

Definição 5.2.1. Um corte de Benders (5.35) associado a $(\beta^{v_1}, \gamma^{v_1}, \theta^{v_1}, \mu^{v_1}, \rho^{v_1}, \delta^{v_1}) \in \mathbb{V}$ domina o corte correspondente a $(\beta^{v_2}, \gamma^{v_2}, \theta^{v_2}, \mu^{v_2}, \rho^{v_2}, \delta^{v_2}) \in \mathbb{V}$ quando

$$\begin{aligned} & \beta_{ij}^{v_1} + \gamma_{ij}^{v_1} + \sum_{k \in N} h_k \theta_{ijk}^{v_1} + \sum_{m \in N} h_m \mu_{ijm}^{v_1} + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km} \rho_{ijkm}^{v_1} \\ & \leq \beta_{ij}^{v_2} + \gamma_{ij}^{v_2} + \sum_{k \in N} h_k \theta_{ijk}^{v_2} + \sum_{m \in N} h_m \mu_{ijm}^{v_2} + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km} \rho_{ijkm}^{v_2}, \forall (h, z) \in \mathbb{Y}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

com a desigualdade estrita para pelo menos um ponto $(h, z) \in \mathbb{Y}$, em que $\mathbb{Y} = \{(h, z) : (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) \text{ são satisfeitas}\}$.

Definição 5.2.2. Um corte de Benders é chamado Pareto-ótimo quando ele não é dominado por nenhum outro corte.

O procedimento apresentado por Papadakos (2008) é um aprimoramento de um método proposto originalmente por Magnanti e Wong (1981), no qual os cortes Pareto-ótimos são gerados a partir de um subproblema que depende da solução do dual de SP e de um *core point* do espaço de soluções do problema mestre, ou seja, um ponto pertencente ao interior relativo da casca convexa do espaço de soluções viáveis do PM. Em particular, para o PLCML, abordado neste trabalho, a definição de *core points* é dada a seguir.

Definição 5.2.3. Um ponto $(h^0, z^0) \in \mathbb{Y}$ é um *core point* de $\mathbb{Y}$ quando ele pertence ao interior relativo da casca convexa de $\mathbb{Y}$.

Para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, o subproblema introduzido por Magnanti e Wong (1981) para gerar cortes Pareto-ótimos a cada iteração é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (\beta_{ij} + \gamma_{ij}) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_k^0 \theta_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} h_m^0 \mu_{ijm} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^0 \rho_{ijkm} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\text{s.a.} \quad (5.20) - (5.27) \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (\beta_{ij} + \gamma_{ij}) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_k^e \theta_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} h_m^e \mu_{ijm} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^e \rho_{ijkm} = \nu(\text{SPD}), \end{aligned} \quad (5.39)$$

em que (h^0, z^0) é um *core point* de $\mathbb{Y}$ e $\nu(\text{SPD})$ é o valor ótimo do subproblema dual de Benders associado à solução (h^e, z^e) do problema mestre, obtida na iteração e . Embora esse subproblema forneça um corte não dominado, a sua eficiência está condicionada ao tempo necessário para resolvê-lo. A restrição (5.39) também é um fator preponderante na resolução desse subproblema, uma vez que ela está sujeita a instabilidades numéricas.

Papadakos (2008) propôs um novo subproblema para a geração de cortes de Benders não dominados, que é derivado do subproblema original de Magnanti-Wong. Ele mostrou que é possível desconsiderar a restrição (5.39), de modo que o subproblema não dependa mais de uma solução do dual de SP, e que não é necessário usar exclusivamente *core points* do espaço de soluções do PM para a obtenção de cortes Pareto-ótimos. Esse subproblema foi chamado de subproblema independente de Magnanti-Wong e utiliza pontos de Magnanti-Wong, definidos abaixo.

Definição 5.2.4. Um ponto é de Magnanti-Wong se ele produz cortes Pareto-ótimos quando aplicado a qualquer um dos subproblemas definidos por Magnanti e Wong (1981) ou por Papadakos (2008).

Observe que *core points* são exemplos de pontos de Magnanti-Wong, pois eles geram cortes Pareto-ótimos quando são utilizados em ambos subproblemas. Adicionalmente, como esse processo de geração de cortes não dominados é independente do dual de SP, ele pode ser utilizado para inserir cortes no problema mestre desde a

primeira iteração do método de decomposição de Benders, o que não pode ser feito na versão original, proposta por Magnanti e Wong (1981).

O subproblema independente de Magnanti-Wong para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro pode, então, ser declarado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (\beta_{ij} + \gamma_{ij}) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} h_k^0 \theta_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} h_m^0 \mu_{ijm} \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^0 \rho_{ijkm} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\text{s.a.} \quad (5.20) - (5.27), \quad (5.41)$$

em que (h^0, z^0) é um ponto de Magnanti-Wong.

Para muitos problemas, encontrar bons *core points* ou pontos de Magnanti-Wong não é uma tarefa fácil (Mercier et al., 2005). No entanto, Papadakos (2008) mostrou que qualquer combinação convexa de um ponto inicial de Magnanti-Wong e um ponto pertencente ao espaço de soluções viáveis do PM é também um ponto de Magnanti-Wong.

Neste trabalho, consideramos o ponto $h_k^0 = 0,5, \forall k \in N$, e $z_{km}^0 = 0,4, \forall k, m \in N, k \neq m$, que é um *core point* de $\mathbb{Y}$, como sendo o ponto inicial de Magnanti-Wong. Sua atualização, a cada iteração, é feita por

$$h_{e+1}^0 = (1 - \lambda)h_e^0 + \lambda h^e, \quad (5.42)$$

$$z_{e+1}^0 = (1 - \lambda)z_e^0 + \lambda z^e, \quad (5.43)$$

em que (h^e, z^e) corresponde à solução ótima do problema mestre relaxado na iteração e e $0 < \lambda < 1$. Empiricamente, $\lambda = 0,5$ fornece os melhores resultados (Papadakos, 2008; Mercier et al., 2005; Xu et al., 2017).

Como o subproblema dual de SP é sempre factível para o PLCML, então a atualização feita em (5.42)-(5.43) fornece um ponto de Magnanti-Wong válido para o problema em todas as iterações do método de decomposição de Benders.

O Algoritmo 2 mostra o esboço de uma variante do método de decomposição de Benders com a estratégia de geração de cortes Pareto-ótimos proposto por Papadakos, em que $\nu(\text{SP})$ representa o valor ótimo do subproblema de Benders.

Observe no Algoritmo 2 que apenas cortes Pareto-ótimos são adicionados ao problema mestre e que o subproblema de Benders (SP) é resolvido exclusivamente para atualizar o valor do limitante inferior, utilizando, para isso, o valor ótimo da sua função objetivo. Para se obter o valor de $\nu(\text{SP})$, o algoritmo de Floyd-Warshall (Floyd, 1962) foi utilizado nos experimentos computacionais, permitindo encontrar, de forma

Algoritmo 2 Decomposição de Benders baseada em Papadakos (2008)

```

1: Sejam  $LS = +\infty, LI = -\infty, gap = +\infty, e = 0, \mathbb{V}^e = \emptyset, \lambda = 0.5$ .
2: Encontre um ponto inicial de Magnanti-Wong  $(h^0, z^0)$ .
3: while ( $gap > \varepsilon$ ) do
4:   Resolva o subproblema independente de Magnanti-Wong (5.40)-(5.41) e
      obtenha  $(\beta^e, \gamma^e, \theta^e, \mu^e, \rho^e, \delta^e)$ 
5:    $\mathbb{V}^{e+1} \leftarrow \mathbb{V}^e \cup \{(\beta^e, \gamma^e, \theta^e, \mu^e, \rho^e, \delta^e)\}$ 
6:   Resolva o PM (5.29)-(5.33) e obtenha  $(h^e, z^e)$  e  $\nu(\text{PM})$ 
7:    $LS \leftarrow \nu(\text{PM})$ 
8:   Resolva o subproblema de Benders (5.7)-(5.18) e obtenha  $\nu(\text{SP})$ 
9:    $LI \leftarrow \max \left\{ LI, \nu(\text{SP}) - \sum_{k \in N} s_k h_k^e - \sum_{k \in N} \sum_{m \in N, m \neq k} g_{km} z_{km}^e \right\}$ 
10:  Atualize o ponto de Magnanti-Wong usando (5.42)-(5.43)
11:   $gap \leftarrow (LS - LI)/LS$ 
12:   $e \leftarrow e + 1$ 
13: end while

```

eficiente, os caminhos mais curtos entre os pares de demanda.

O valor de $\nu(\text{SP})$ pode ser determinado da seguinte forma. Seja C_{ij} o custo mínimo de transporte da origem $i \in N$ até o destino $j \in N$. Seja P_{ij} o lucro unitário associado ao par $i, j \in N$, que pode ser calculado como

$$P_{ij} = \max\{0, r_{ij} - C_{ij}\}.$$

Então, $\nu(\text{SP})$ pode ser dado por:

$$\nu(\text{SP}) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} P_{ij}.$$

A determinação de C_{ij} pode ser feita usando o algoritmo de Floyd-Warshall da seguinte forma. Sejam $H^1 \subset N$ o conjunto de concentradores ativos e $Z^0 \subset N \times N$ o conjunto de arcos entre concentradores inativos. Ao invés de aplicar o algoritmo em uma rede composta por todos os nós, o algoritmo de Floyd-Warshall é aplicado para determinar os menores custos de transportes entre todos os pares de concentradores na rede no nível dos concentradores, assumindo que o custo de transporte nos arcos entre concentradores não ativos é suficientemente grande para não serem considerados. Então, seja C_{km}^{FW} o menor custo unitário de transporte entre os pares de concentradores $k, m \in H^1$. Assim, C_{ij} é determinado por:

$$C_{ij} = \min_{k, m \in H^1} \{c_{ik} + C_{km}^{FW} + c_{mj}\}.$$

O Algoritmo 3 sintetiza esse procedimento.

Algoritmo 3 Encontrando o custo mínimo de transporte entre todos os pares de nós

```

1: for all  $(k, m) \in H^1 \times H^1$  do
2:   if  $(k, m) \in Z^0$  then
3:      $C_{km}^{FW} \leftarrow \infty$ 
4:   else
5:      $C_{km}^{FW} \leftarrow \alpha c_{km}$ 
6:   end if
7: end for
8: for all  $k \in H^1, (i, j) \in H^1 \times H^1$  do
9:    $C_{ij}^{FW} = \min\{C_{ij}^{FW}, C_{ik}^{FW} + C_{kj}^{FW}\}$ 
10: end for
11: for all  $(i, j) \in N \times N$  do
12:    $C_{ij} = \min_{k, m \in H^1} \{c_{ik} + C_{km}^{FW} + c_{mj}\}$ 
13: end for

```

Observação 5.2.1. Um método alternativo para resolver os subproblemas de Benders e obter o valor de $v(\text{SP})$ é mostrado na Seção A.2 do Apêndice A. Trata-se de um algoritmo especializado que permite resolver o subproblema dual de Benders (SPD).

5.2.3 Abordagem Benders *Branch-and-Cut*

A abordagem Benders *Branch-and-Cut* consiste em adicionar cortes de Benders dentro de uma estrutura padrão do algoritmo *Branch-and-Cut*. Esse procedimento tem sido empregado em muitos trabalhos, nos quais a adição de cortes na árvore é feita de várias maneiras distintas.

Fortz e Poss (2009) e Gelareh e Nickel (2011) apresentaram uma estrutura de Benders *Branch-and-Cut* em que os cortes de Benders são adicionados para cada potencial solução incumbente. Naoum-Sawaya e Elhedhli (2013), por sua vez, utilizaram uma estrutura em que os cortes de Benders são inseridos em cada nó da árvore. Adulyasak et al. (2015) e Martins de Sá et al. (2015) propuseram uma abordagem de Benders *Branch-and-Cut* considerando três estratégias de geração de cortes: (i) adicionar cortes de Benders apenas para potenciais soluções incumbentes; (ii) adicionar cortes de Benders para qualquer potencial solução incumbente e para qualquer solução fracionária no nó raiz; e (iii) adicionar cortes de Benders para qualquer solução. Recentemente, Martins de Sá et al. (2018a) também empregaram a estratégia (ii) para um problema de localização de concentradores robusto, com alocação múltipla e rede incompleta. Todas essas estratégias resultam em uma única iteração do método de decomposição de Benders.

No presente trabalho, utilizamos uma abordagem Benders *Branch-and-Cut* considerando as três estratégias de geração de cortes (i), (ii) e (iii), adotadas por Adulya-

sak et al. (2015) e Martins de Sá et al. (2015), e uma quarta estratégia, na qual os cortes de Benders são adicionados na árvore a partir de soluções fracionárias no nó raiz. Essa última estratégia possibilita a inserção de cortes na árvore, paralelamente às iterações da decomposição de Benders. Neste caso, os cortes são adicionados na árvore durante a resolução dos problemas mestres relaxados de cada iteração. Em todas essas estratégias são adicionados apenas cortes Pareto-ótimos (de acordo com o apresentado na Subseção 5.2.2), tanto na árvore do algoritmo *Branch-and-Cut* quanto no problema mestre.

5.3 Experimentos computacionais

Serão apresentados nessa seção vários experimentos computacionais para verificar o desempenho e as limitações dos algoritmos desenvolvidos. As configurações dos parâmetros são dadas na Subseção 5.3.1 e o detalhamento dos testes realizados e os resultados obtidos são apresentados na Subseção 5.3.2.

5.3.1 Configurações dos parâmetros

O desempenho dos algoritmos propostos nesta seção é testado com o conjunto de dados do *Australian Post* (AP) (Ernst e Krishnamoorthy, 1996) e pode ser obtido na *OR Library* (Beasley, 1990). Esse conjunto de dados possui instâncias com até 200 nós e disponibiliza uma matriz de demanda (w_{ij}) assimétrica, as coordenadas de cada nó para o cálculo da distância Euclidiana entre os pares de nós da rede e valores para os custos fixos de instalação de concentradores (s_k), divididos em duas categorias *loose* (L) e *tight* (T). O custo de transporte para rotear uma unidade de demanda entre cada par de nós (c_{ij}) é dado pelo valor da distância entre eles dividido por 1000.

Para a receita (r_{ij}) entre cada par de origem e destino consideramos três valores: 20, 30 e 50. Esses valores foram definidos por Taherkhani e Alumur (2019). Foi assumido que o custo de instalação de arcos entre concentradores (g_{km}) é constante e igual a 10% da média de todos os custos fixos de instalação de concentradores, de acordo com a categoria empregada (L ou T). Não foram considerados custos de coleta e distribuição por unidade de demanda. Assim como feito com as instâncias CAB, na Seção 4.4.1, em todos os testes desta seção, a receita por unidade de demanda é considerada independente da localização do par de nós a ser atendido e o fator de desconto $\alpha \in \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$.

Nos testes computacionais foram utilizadas instâncias com até 150 nós. Além das instâncias de tamanho 10, 20, 25, 40, 50 e 100 nós, disponibilizadas no conjunto

de dados AP, também fazemos uso de instâncias com 75, 125 e 150 nós. Essas novas instâncias foram geradas de acordo com o processo utilizado por Mokhtar et al. (2019). Os custos fixos de instalação dos concentradores foram obtidos aleatoriamente, respeitando-se a ordem de grandeza dos custos das instâncias com tamanho imediatamente inferior à instância considerada, isto é, os custos fixos das instâncias com 75 nós foram obtidos randomicamente entre o menor e o maior valor dos custos fixos das instâncias com 50 nós. De modo similar, os custos fixos das instâncias com tamanho 125 foram obtidos com as instâncias de tamanho 100, e os custos fixos para as instâncias com 150 nós foram calculados a partir dos custos fixos das instâncias com 125 nós.

Todos os experimentos foram realizados em um computador Intel Core i7-7500U, 2.70 GHz, com 16 GB de RAM, utilizando o ambiente Linux. Todas as variantes testadas foram codificadas em C++ e o *solver* CPLEX 12.10 foi utilizado para resolver o problema mestre, o subproblema independente de Magnanti-Wong e os subproblemas de Benders das versões BD, BD- n e BD- n^2 , descritas na próxima seção. Foi considerado um *gap* de otimalidade igual a 10^{-7} . Todas as versões do método de decomposição de Benders, utilizadas nos testes a seguir, estão disponíveis em <https://github.com/fabricioneo/plcml>.

5.3.2 Testes computacionais e análise dos resultados

Os experimentos computacionais foram realizados em quatro etapas. Nas duas primeiras etapas, verificamos o desempenho de diversas variantes do método de decomposição de Benders e de versões da abordagem Benders *Branch-and-Cut* para resolver o problema de localização de concentradores com maximização do lucro com instâncias de 10 a 40 nós. Esses primeiros testes foram feitos para encontrar os métodos mais promissores de cada uma das abordagens para resolver o problema. Na terceira etapa, o melhor algoritmo de cada uma das abordagens foi comparado com o *solver* CPLEX e o método de decomposição de Benders padrão do CPLEX, a fim de avaliar o esforço computacional para resolver instâncias com até 100 nós. Na última etapa, aplicamos o melhor algoritmo apontado nos experimentos anteriores para resolver instâncias de tamanho 125 e 150 nós, com o propósito de identificar o seu comportamento e limitações ao lidar com instâncias de grandes dimensões do problema. Foi considerado, para as duas primeiras etapas, um tempo computacional máximo de 6 horas e, para a terceira e quarta etapas, foi definido um tempo computacional máximo de 24 horas.

5.3.2.1 Primeira etapa de experimentos

Na primeira etapa, comparamos a versão clássica do método de decomposição de Benders (BD) com duas variantes que utilizam a estratégia de múltiplos cortes: (i) BD- n , na qual n cortes são adicionados a cada iteração; e (ii) BD- n^2 , em que n^2 cortes são adicionados, um para cada par de origem e destino. Um resumo dos resultados é apresentado na Tabela 5.1. Essa tabela mostra o número de problemas resolvidos até a otimalidade (Ótimo), o tempo médio de CPU em segundos para resolver o problema e a média de iterações (Iter). As instâncias foram agrupadas de acordo com os quatro valores utilizados para o fator de desconto nos arcos entre concentradores (o resultado completo é apresentado na Tabela B.1 do Apêndice B).

Tabela 5.1: Comparação entre as Versões com Único Corte e Múltiplos Cortes

Instância	Receita	BD			BD- n			BD- n^2		
		Ótimo	Tempo (s)	Iter	Ótimo	Tempo (s)	Iter	Ótimo	Tempo (s)	Iter
10L	20	4/4	283,04	133,00	3/4	5,519,03	22,00	4/4	4,40	10,00
10L	30	3/4	5,664,84	261,67	3/4	5,525,79	29,67	4/4	8,89	14,00
10L	50	3/4	5,726,79	563,00	2/4	10,822,93	23,00	4/4	106,69	16,50
10T	20	4/4	988,98	112,75	3/4	5,407,69	18,00	4/4	8,42	12,50
10T	30	3/4	5,509,43	240,00	3/4	5,509,14	33,00	4/4	14,88	14,75
10T	50	3/4	5,533,60	517,00	3/4	6,662,16	47,33	4/4	84,96	17,00
20L	20	0/4	21600,00	—	3/4	5531,69	20,00	4/4	85,18	9,75
20L	30	0/4	21600,00	—	2/4	10954,83	25,00	4/4	758,33	13,25
20L	50	0/4	21600,00	—	2/4	11364,51	41,00	4/4	959,92	16,00
20T	20	0/4	21600,00	—	4/4	1654,44	18,00	4/4	20,43	8,25
20T	30	0/4	21600,00	—	3/4	6325,48	41,33	4/4	557,15	14,50
20T	50	0/4	21600,00	—	2/4	10914,63	32,00	4/4	716,58	15,75
25L	20	0/4	21600,00	—	3/4	7335,49	29,33	4/4	877,60	11,25
25L	30	0/4	21600,00	—	2/4	12666,17	45,50	3/4	6814,71	13,00
25L	50	0/4	21600,00	—	1/4	16361,56	37,00	3/4	10489,92	16,00
25T	20	0/4	21600,00	—	4/4	5395,29	8,00	4/4	36,13	7,75
25T	30	0/4	21600,00	—	3/4	6045,06	32,67	4/4	732,44	14,25
25T	50	0/4	21600,00	—	3/4	9439,67	51,33	4/4	4511,05	18,00
40L	20	0/4	21600,00	—	2/4	10859,67	15,50	3/4	6164,20	9,00
40L	30	0/4	21600,00	—	1/4	16384,17	31,00	2/4	12458,93	12,00
40L	50	0/4	21600,00	—	1/4	18335,87	48,00	1/4	16335,46	12,00
40T	20	0/4	21600,00	—	4/4	5312,35	24,75	4/4	854,47	9,00
40T	30	0/4	21600,00	—	3/4	7008,97	24,00	3/4	6039,98	9,67
40T	50	0/4	21600,00	—	2/4	11421,10	32,00	2/4	11145,20	13,50
Média		20/96	17187,78	304,57	62/96	8864,90	30,39	85/96	3324,41	12,82

Nota. —, tempo limite excedido para todas as instâncias.

A Tabela 5.1 mostra que o método clássico de Benders, que adiciona um corte por iteração, conseguiu resolver apenas instâncias com 10 nós, dentro do tempo limite considerado. Além disso, para essas instâncias, a quantidade de iterações gastas por esta versão é muito superior em relação às variantes com múltiplos cortes. Observe que nenhum desses métodos foi capaz de resolver todas as 96 instâncias dentro do tempo máximo definido. No entanto, o método BD- n^2 , que adiciona n^2 cortes por iteração, foi a versão que resolveu a maior quantidade de problemas até a otimalidade e apresentou o menor tempo e o menor número de iterações. Por essa razão, a estratégia de adicionar n^2 cortes foi adotada para todos os testes subsequentes.

Ainda na primeira etapa, foi testada a versão que faz uso de cortes Pareto-ótimos segundo o Algoritmo 2, denominada BDMW- n^2 . Os resultados obtidos são exibidos na Tabela 5.2 (os resultados completos estão disponíveis na Tabela B.2 do Apêndice B). Essa tabela mostra que a adição de cortes Pareto-ótimos melhora significativamente o desempenho do algoritmo. Todas as instâncias testadas foram resolvidas até a otimalidade e houve uma diminuição expressiva tanto no tempo computacional quanto na quantidade de iterações. Isso reforça o quanto a qualidade dos cortes influencia no desempenho do método de decomposição de Benders.

Tabela 5.2: Inclusão de Cortes Pareto-Ótimos nas Versões com n^2 Cortes

Instância	Receita	BD- n^2			BDMW- n^2		
		Ótimo	Tempo (s)	Iter	Ótimo	Tempo (s)	Iter
10L	20	4/4	4,40	10,00	4/4	0,31	5,00
10L	30	4/4	8,89	14,00	4/4	0,18	4,25
10L	50	4/4	106,69	16,50	4/4	0,25	4,75
10T	20	4/4	8,42	12,50	4/4	0,37	6,25
10T	30	4/4	14,88	14,75	4/4	0,38	6,00
10T	50	4/4	84,96	17,00	4/4	0,41	6,25
20L	20	4/4	85,18	9,75	4/4	2,34	5,50
20L	30	4/4	758,33	13,25	4/4	4,99	6,50
20L	50	4/4	959,92	16,00	4/4	5,94	7,25
20T	20	4/4	20,43	8,25	4/4	1,74	5,75
20T	30	4/4	557,15	14,50	4/4	4,59	7,00
20T	50	4/4	716,58	15,75	4/4	10,70	7,50
25L	20	4/4	877,60	11,25	4/4	5,30	6,25
25L	30	3/4	6814,71	13,00	4/4	9,42	7,50
25L	50	3/4	10489,92	16,00	4/4	9,75	7,25
25T	20	4/4	36,13	7,75	4/4	2,86	4,75
25T	30	4/4	732,44	14,25	4/4	9,43	7,50
25T	50	4/4	4511,05	18,00	4/4	15,86	7,75
40L	20	3/4	6164,20	9,00	4/4	38,80	6,75
40L	30	2/4	12458,93	12,00	4/4	154,83	8,75
40L	50	1/4	16335,46	12,00	4/4	205,07	10,25
40T	20	4/4	854,47	9,00	4/4	23,00	6,00
40T	30	3/4	6039,98	9,67	4/4	34,46	7,25
40T	50	2/4	11145,20	13,50	4/4	69,07	9,75
Média		85/96	3324,41	12,82	96/96	25,42	6,74

5.3.2.2 Segunda etapa de experimentos

O segundo conjunto de testes foi realizado para comparar métodos que utilizam a abordagem Benders *Branch-and-Cut*, apresentada na Subseção 5.2.3. Nesses métodos, em geral, uma grande quantidade de cortes de Benders são adicionados nos nós da árvore de *Branch-and-Cut* ($O(n^2)$ cortes). Com o objetivo de reduzir essa quantidade de cortes adicionados, uma filtragem dos cortes é aplicada. Em vez de adicionar todos os cortes de Benders obtidos a partir da solução do dual de SP, o algoritmo retém apenas aqueles que são violados pela solução atual do PM. Essa filtragem foi utilizada nos experimentos feitos por Martins de Sá et al. (2015), em que foi relatada

uma diminuição da quantidade de cortes adicionados, bem como uma redução no tempo de CPU gasto para resolver os problemas. Nos nossos experimentos, essas boas características também foram observadas.

Usando o mecanismo de filtragem dos cortes, comparamos quatro estratégias para adicionar cortes de Benders na árvore de *Branch-and-Cut*. A primeira estratégia consiste em adicionar cortes obtidos exclusivamente por soluções inteiras (BDCFI). A segunda estratégia adiciona cortes apenas para soluções fracionárias no nó raiz (BDCFR). A junção dessas duas estratégias configura a terceira estratégia adotada (BDCF). A última estratégia consiste em adicionar cortes em qualquer nível da árvore, a partir de qualquer tipo de solução, inteira ou fracionária (BDCFA). Um resumo dos resultados obtidos é mostrado na Tabela 5.3, na qual as instâncias foram novamente agrupadas de acordo com os valores de α (os resultados detalhados estão disponíveis na Tabela B.3 do Apêndice B). Essa tabela exhibe o tempo de CPU médio, em segundos, gasto pelos métodos para resolver os problemas até a otimalidade, a média de cortes adicionados na árvore de *Branch-and-Cut* (Cortes) e a média da quantidade de nós explorados na árvore (Nós).

Tabela 5.3: Comparação de quatro estratégias para adicionar cortes na árvore de *Branch-and-Cut*: apenas para soluções inteiras (BDCFI), apenas para soluções fracionárias no nó raiz (BDCFR), para todas as soluções inteiras e fracionárias no nó raiz (BDCF) e para todas soluções inteiras e fracionárias (BDCFA)

Instância	Receita	BDCFI			BDCFR			BDCF			BDCFA		
		Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós
10L	20	0,32	250,25	11,25	0,22	463,75	0,00	0,29	292,25	0,00	0,29	292,25	0,00
10L	30	0,34	278,75	7,50	0,23	498,50	0,00	0,31	307,50	0,00	0,31	307,50	0,00
10L	50	0,40	301,00	22,00	0,21	501,00	0,00	0,35	324,50	0,00	0,34	324,50	0,00
10T	20	0,46	293,00	35,00	0,32	602,75	0,00	0,49	356,75	0,25	0,48	356,75	0,25
10T	30	0,49	352,00	12,50	0,33	628,25	0,00	0,49	425,00	0,25	0,49	425,00	0,25
10T	50	0,49	363,00	4,50	0,38	636,50	0,00	0,54	447,50	1,25	0,53	452,75	0,25
20L	20	2,90	1024,25	14,75	2,31	2458,00	0,00	2,56	1232,50	0,00	2,57	1232,50	0,00
20L	30	9,98	1655,25	292,50	5,35	3481,50	0,75	4,51	1959,75	0,00	4,53	1959,75	0,00
20L	50	8,26	1838,75	237,50	6,48	3893,25	0,00	4,98	2189,25	0,00	4,97	2189,25	0,00
20T	20	2,34	951,50	0,00	1,88	2284,25	0,00	2,35	1023,25	0,00	2,36	1023,25	0,00
20T	30	5,83	1725,25	1,75	4,50	3417,50	1,25	4,68	1956,25	0,00	4,69	1956,25	0,00
20T	50	9,21	2093,25	87,25	4,72	3357,50	4,25	4,61	2395,25	0,00	4,62	2395,25	0,00
25L	20	7,41	1808,75	12,50	4,65	3452,25	0,00	7,26	2023,00	0,00	7,29	2023,00	0,00
25L	30	21,53	2693,00	90,50	8,06	5135,00	0,00	9,66	3021,00	0,00	9,63	3021,00	0,00
25L	50	18,57	3124,25	215,00	9,09	4870,25	5,25	10,88	3681,50	0,00	10,93	3681,50	0,00
25T	20	3,66	1431,25	0,00	2,70	2765,25	0,00	3,69	1431,25	0,00	3,68	1431,25	0,00
25T	30	9,83	2652,50	0,00	7,95	4811,00	0,00	10,03	3063,00	0,00	10,03	3063,00	0,00
25T	50	12,07	3200,75	7,50	8,08	5034,00	0,00	10,19	3664,00	0,00	10,19	3664,00	0,00
40L	20	62,09	5153,75	16,25	31,34	10339,25	0,00	48,13	5705,25	0,00	47,75	5705,25	0,00
40L	30	146,19	8285,75	97,50	56,94	13636,50	0,00	96,20	9844,75	0,00	95,64	9844,75	0,00
40L	50	327,01	11849,25	306,75	62,46	14448,75	0,00	97,44	11867,75	0,00	96,74	11867,75	0,00
40T	20	26,14	4456,25	0,00	22,33	9144,75	0,00	26,33	4521,75	0,00	26,16	4521,75	0,00
40T	30	47,97	7215,00	0,00	36,41	11567,00	0,00	46,60	7244,00	0,00	46,37	7244,00	0,00
40T	50	75,81	9333,25	11,50	53,76	15481,75	0,00	62,09	10014,75	0,00	61,60	10014,75	0,00
Média		33,30	3013,75	61,83	13,78	5121,19	0,48	18,94	3291,32	0,07	18,84	3291,54	0,03

A Tabela 5.3 mostra que a estratégia BDCFI, que adiciona cortes de Benders apenas advindos soluções inteiras, adiciona o menor número de cortes. Em contrapartida, esta versão é a que mais explora os nós da árvore e demanda o maior tempo computacional para resolver as instâncias. Observa-se que as outras versões permanecem no nó raiz para praticamente todas as instâncias, apresentando uma média de nós explorados menor do que um. Pode-se ver também que a quantidade de cortes

Tabela 5.4: Comparação das melhores variantes da decomposição de Benders com o CPLEX e o Benders do CPLEX usando o conjunto de dados AP - Parte 1

Instância	Receita	$\alpha = 0,2$					$\alpha = 0,4$				
		CPLEX Tempo (s)	BD-cpx Tempo (s)	BD-cpx1 Tempo (s)	BDMW- n^2 Tempo (s)	BDCFR Tempo (s)	CPLEX Tempo (s)	BD-cpx Tempo (s)	BD-cpx1 Tempo (s)	BDMW- n^2 Tempo (s)	BDCFR Tempo (s)
10L	20	1,02	0,57	0,42	0,83	0,50	0,86	0,61	0,36	0,21	0,17
10L	30	1,03	0,87	0,68	0,34	0,35	0,73	0,57	0,43	0,14	0,22
10L	50	1,26	0,43	0,28	0,55	0,27	0,76	0,40	0,24	0,14	0,17
10T	20	1,85	0,85	0,73	0,85	0,53	1,18	0,63	0,49	0,23	0,23
10T	30	1,96	0,93	0,77	0,65	0,49	1,39	0,66	0,53	0,33	0,29
10T	50	2,07	0,92	0,65	0,64	0,50	1,43	0,50	0,30	0,32	0,28
20L	20	134,26	21,39	11,98	5,39	5,18	101,70	12,89	6,88	1,83	1,91
20L	30	121,90	30,03	13,68	12,09	13,02	140,94	23,00	14,68	4,84	4,39
20L	50	131,81	14,66	8,82	11,90	16,91	129,23	10,17	6,10	6,93	3,55
20T	20	133,94	12,20	6,38	3,16	3,05	72,83	7,23	4,08	1,90	1,93
20T	30	124,91	59,61	26,51	9,53	9,64	126,19	20,35	12,13	4,68	3,43
20T	50	146,60	18,34	9,91	31,79	5,90	125,18	12,96	7,32	6,66	4,51
25L	20	3164,13	102,55	62,16	10,39	7,15	1572,35	69,64	25,91	6,60	6,85
25L	30	4500,43	180,94	51,35	20,16	14,88	1888,68	73,53	30,59	7,70	6,63
25L	50	4577,06	50,51	21,93	15,50	19,17	2800,55	59,56	23,40	13,20	7,99
25T	20	3284,25	25,32	9,55	4,37	3,92	733,74	17,99	8,14	2,93	2,81
25T	30	8060,80	185,64	73,65	22,01	14,68	3253,37	120,88	33,29	5,39	5,64
25T	50	10722,74	89,28	37,94	42,46	17,30	4085,72	58,22	22,49	11,39	7,08
40L	20	mem	6794,29	1992,74	94,70	58,35	mem	1268,10	270,34	28,19	34,67
40L	30	mem	3502,71	1842,67	513,07	106,70	mem	1122,06	672,91	51,96	53,66
40L	50	mem	723,75	412,50	451,59	74,92	mem	802,11	260,12	247,78	97,30
40T	20	mem	601,17	127,48	37,57	35,10	mem	130,32	58,84	22,67	22,51
40T	30	mem	1884,99	823,48	53,06	55,02	mem	830,30	287,52	30,91	39,19
40T	50	mem	965,49	360,54	100,39	77,54	mem	757,10	246,94	105,85	55,77
50L	20	mem	mem	12339,07	161,11	148,99	mem	mem	931,93	81,70	87,25
50L	30	mem	mem	5451,71	298,94	334,89	mem	mem	2921,75	269,33	179,65
50L	50	mem	mem	2560,89	921,96	329,77	mem	mem	976,23	596,23	265,10
50T	20	mem	mem	429,29	64,00	64,35	mem	mem	198,49	56,42	56,35
50T	30	mem	mem	2701,35	207,24	219,72	mem	mem	795,69	107,99	114,27
50T	50	mem	mem	1003,68	553,88	289,18	mem	mem	735,18	206,27	165,83
75L	20	mem	mem	mem	1605,41	2277,41	mem	mem	mem	1087,00	1348,26
75L	30	mem	mem	mem	2409,20	3516,02	mem	mem	mem	1973,44	1988,41
75L	50	mem	mem	mem	8502,26	3464,41	mem	mem	mem	5367,35	2366,14
75T	20	mem	mem	mem	965,96	931,39	mem	mem	mem	629,95	627,04
75T	30	mem	mem	mem	2142,82	2298,20	mem	mem	mem	1214,21	1175,24
75T	50	mem	mem	mem	2056,07	2374,03	mem	mem	mem	1545,68	1561,35
100L	20	mem	mem	mem	8885,35	9427,82	mem	mem	mem	7596,66	6299,13
100L	30	mem	mem	mem	tempo (0,01 %)	25615,63	mem	mem	mem	12684,55	6411,47
100L	50	mem	mem	mem	tempo (2,41 %)	21249,75	mem	mem	mem	44446,88	12380,15
100T	20	mem	mem	mem	2972,80	3470,80	mem	mem	mem	2459,90	2435,28
100T	30	mem	mem	mem	5300,22	5981,44	mem	mem	mem	3424,76	3435,93
100T	50	mem	mem	mem	9333,83	8729,69	mem	mem	mem	3834,67	4295,65

Notas. tempo, tempo limite de 24 h excedido; mem, 16 GB de memória excedida.

adicionados pelas versões BDCF e BDCFA é a mesma, exceto para um único conjunto de instâncias. Embora adicione uma quantidade de cortes elevada, o algoritmo BDFR, que adiciona cortes apenas de soluções fracionárias no nó raiz, apresentou o melhor tempo computacional.

5.3.2.3 Terceira etapa de experimentos

A terceira etapa dos testes tem como objetivo comparar os melhores algoritmos obtidos nas etapas anteriores com o *solver* CPLEX e o método de decomposição de Benders padrão do CPLEX. Também foi incluído nessa etapa uma versão do método de Benders do *solver*, em que a quantidade de *threads* utilizadas pelo processador foi limitada a um, a fim de equiparar com as nossos métodos que fazem uso de uma única *thread*. Os resultados com as instâncias mais desafiadoras, correspondentes a $\alpha = 0.2$ e $\alpha = 0.4$, são apresentados na Tabela 5.4, enquanto os resultados com $\alpha = 0.6$ e $\alpha = 0.8$ são dados na Tabela 5.5. Essas tabelas reportam os tempos registrados

Tabela 5.5: Comparação das melhores variantes da decomposição de Benders com o CPLEX e o Benders do CPLEX usando o conjunto de dados AP - Parte 2

Instância	Receita	$\alpha = 0,6$					$\alpha = 0,8$				
		CPLEX Tempo (s)	BD-cpx Tempo (s)	BD-cpx1 Tempo (s)	BDMW- n^2 Tempo (s)	BDCFR Tempo (s)	CPLEX Tempo (s)	BD-cpx Tempo (s)	BD-cpx1 Tempo (s)	BDMW- n^2 Tempo (s)	BDCFR Tempo (s)
10L	20	0,47	0,39	0,24	0,10	0,08	0,30	0,31	0,19	0,11	0,11
10L	30	0,70	0,58	0,32	0,10	0,09	0,52	0,53	0,31	0,15	0,24
10L	50	0,74	0,42	0,19	0,14	0,18	0,63	0,38	0,23	0,17	0,21
10T	20	0,79	0,60	0,46	0,24	0,31	0,62	0,49	0,35	0,16	0,20
10T	30	1,83	0,94	0,71	0,36	0,36	0,57	0,45	0,31	0,17	0,18
10T	50	1,77	1,02	0,65	0,43	0,60	0,81	0,39	0,25	0,23	0,14
20L	20	29,22	6,70	3,67	1,22	1,23	12,82	3,93	2,58	0,93	0,92
20L	30	82,55	13,24	6,78	1,76	2,22	30,39	7,42	4,22	1,27	1,77
20L	50	93,91	8,19	5,32	2,24	2,80	62,53	6,47	4,33	2,69	2,66
20T	20	22,54	4,59	2,75	0,98	1,20	13,28	4,21	2,68	0,91	1,34
20T	30	93,88	13,78	6,96	2,76	2,87	35,54	10,05	6,00	1,40	2,04
20T	50	105,60	7,25	4,82	2,84	6,91	48,80	6,91	4,98	1,50	1,57
25L	20	277,72	32,88	12,42	2,72	3,12	42,25	12,70	6,72	1,49	1,47
25L	30	870,13	48,07	34,87	5,68	6,26	357,97	38,16	14,76	4,13	4,46
25L	50	1072,55	32,96	15,81	5,92	5,15	393,82	24,02	12,85	4,36	4,03
25T	20	122,67	8,07	5,10	2,12	2,09	32,96	7,76	4,88	2,00	1,96
25T	30	993,60	51,00	22,98	5,86	6,66	346,46	42,52	20,94	4,46	4,83
25T	50	1159,56	44,55	17,01	5,93	4,49	403,03	25,99	15,33	3,66	3,43
40L	20	mem	368,24	134,12	20,11	20,11	mem	148,61	71,74	12,20	12,22
40L	30	mem	1112,99	313,34	33,08	40,06	mem	329,24	121,08	21,22	27,32
40L	50	mem	472,81	160,03	83,97	49,27	mem	284,74	103,16	36,94	28,33
40T	20	mem	75,86	35,21	16,54	16,54	mem	88,90	33,69	15,20	15,17
40T	30	mem	432,24	166,02	32,77	30,78	mem	351,67	128,58	21,09	20,66
40T	50	mem	357,87	145,76	43,77	49,38	mem	264,70	122,51	26,25	32,36
50L	20	mem	mem	452,19	50,03	50,28	mem	mem	237,06	29,86	29,77
50L	30	mem	mem	2082,21	205,96	121,95	mem	mem	572,51	94,95	227,77
50L	50	mem	mem	847,42	499,04	445,13	mem	mem	348,08	77,77	82,92
50T	20	mem	mem	104,81	40,78	40,85	mem	mem	105,09	37,27	37,27
50T	30	mem	mem	397,40	72,45	86,61	mem	mem	495,01	51,49	58,82
50T	50	mem	mem	452,05	111,50	115,27	mem	mem	382,61	64,33	61,67
75L	20	mem	mem	mem	728,64	732,49	mem	mem	mem	490,42	577,37
75L	30	mem	mem	mem	1199,67	1215,75	mem	mem	mem	844,79	932,62
75L	50	mem	mem	mem	2117,18	2571,40	mem	mem	mem	945,28	1108,66
75T	20	mem	mem	mem	541,62	545,76	mem	mem	mem	492,38	490,22
75T	30	mem	mem	mem	764,62	872,35	mem	mem	mem	669,03	644,32
75T	50	mem	mem	mem	1009,15	1197,38	mem	mem	mem	722,94	818,08
100L	20	mem	mem	mem	2453,42	2979,99	mem	mem	mem	1612,14	1874,36
100L	30	mem	mem	mem	7873,04	4758,21	mem	mem	mem	3100,93	3290,31
100L	50	mem	mem	mem	13704,64	6389,96	mem	mem	mem	4487,94	3889,53
100T	20	mem	mem	mem	1762,81	1781,70	mem	mem	mem	1613,23	1610,26
100T	30	mem	mem	mem	2444,66	2457,55	mem	mem	mem	2073,76	2059,14
100T	50	mem	mem	mem	3185,67	3667,19	mem	mem	mem	2290,08	2299,77

Nota. mem, 16 GB de memória excedida.

para resolver as instâncias do conjunto de dados AP com até 100 nós pelo CPLEX, pelo método de decomposição de Benders do CPLEX usando a configuração padrão (BD-cpx) e restrito a uma *thread* (BD-cpx1), e também pelos dois métodos mais promissores identificados nos testes feitos anteriormente, o algoritmo de Benders com a adição n^2 cortes Pareto-ótimos por iteração (BDMW- n^2), e a estratégia Benders *Branch-and-Cut* que adiciona cortes Pareto-ótimos a partir de soluções fracionárias no nó raiz (BDCFR). Os menores tempos registrados para cada instância estão destacados em negrito. Para as instâncias que não foram resolvidas até a otimalidade é apresentado o valor do *gap*.

Os resultados apontados nas Tabelas 5.4 e 5.5 mostram que o CPLEX foi capaz de resolver apenas instâncias com até 25 nós. Usando a configuração padrão, o Benders do CPLEX resolveu instâncias com até 40 nós e, limitado a uma *thread*, ele foi capaz de solucionar problemas com até 50 nós. O método BDMW- n^2 registrou um desempenho efetivo e não resolveu apenas dois problemas até a otimalidade,

considerando o tempo limite de 24 horas (100L-30 e 100L-50 com $\alpha = 0,2$). O melhor desempenho foi obtida pelo método BDCFR, em que todas as instâncias foram resolvidas até a otimalidade, registrando tempos razoáveis. Note que o maior tempo registrado por este método foi de aproximadamente 12 h, que corresponde à metade do tempo limite definido para esses testes.

Em todos os experimentos realizados, à medida que a quantidade de nós aumenta, as instâncias com custos fixos de instalação de concentradores *loose* demandam mais tempo de resolução do que os problemas com custo *tight*. Na literatura, em que a maioria dos problemas de localização de concentradores são abordados sob o ponto de vista dos custos, ocorre o contrário. As instâncias do conjunto de dados AP apontadas por serem mais desafiadoras, em geral, são aquelas associadas com os custos *tight* (Mokhtar et al., 2019). Essa particularidade registrada com as instâncias AP, ao se abordar os problemas com a maximização do lucro, também pode ser observada nos resultados relatados por Taherkhani e Alumur (2019), em que foram utilizadas instâncias AP com 40 nós e $\alpha = 0.75$.

5.3.2.4 Quarta etapa de experimentos

Por fim, os testes da última etapa foram realizados com a finalidade de investigar o desempenho e o comportamento do método BDCFR, quando aplicado para solucionar instâncias de tamanho 125 e 150, considerando as limitações computacionais. A Tabela 5.6 exibe os resultados obtidos e apresenta o *gap* para as instâncias que não foram resolvidas até a otimalidade. Para os problemas solucionados, também são apresentados o valor do lucro máximo e a localização dos concentradores. De acordo com essa tabela, o método conseguiu resolver quase todos os problemas com 125 nós, com exceção de uma única instância correspondente a $\alpha = 0.2$, custos fixos de instalação *Loose* e receita igual a 50. Também foi possível obter a solução da maioria das instâncias com 150 nós, em especial, para as instâncias com custos fixos *tight*.

Na Tabela 5.6, nota-se um comportamento similar ao obtido com as instâncias CAB (veja a Tabela 4.3), de forma que o aumento da receita ou um maior desconto nos arcos entre concentradores (i.e., um menor valor de α) propiciam a instalação de uma maior quantidade de concentradores na rede. Nas soluções com custo *tight* em que foram instalados dois ou mais concentradores na rede, observamos que nenhum arco entre concentradores foi instalado. Isso acontece porque o custo de instalação dos arcos entre concentradores não é compensado pela sua utilização.

A Figura 5.1 mostra a disposição dos nós das instâncias de tamanho 125 e 150, onde foram destacadas as localizações dos concentradores obtidos nas soluções com custo *tight*. Observe na Figura 5.1a que o nó 85, único concentrador instalado em

Tabela 5.6: Soluções obtidas com o método BDCFR

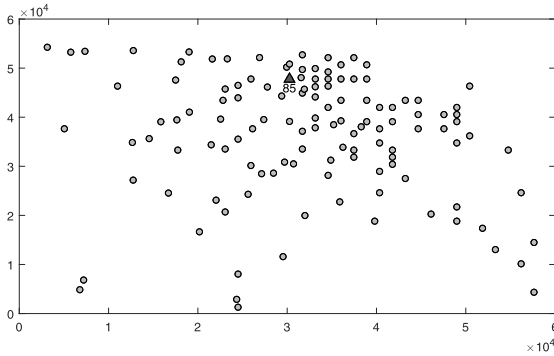
(a) Instâncias AP com 125 nós

Instância	Receita	α	Lucro	Localização dos concentradores	BDCFR Tempo (s)
125L	20	0,2	19751,55	34, 66, 79, 86	26482,87
125L	20	0,4	16272,93	35, 79, 86	12272,01
125L	20	0,6	15028,67	35, 79, 86	8180,95
125L	20	0,8	14966,38	35, 79, 86	5693,27
125L	30	0,2	54503,08	6, 35, 66, 79, 86	53161,89
125L	30	0,4	49301,78	34, 66, 79, 86	21207,46
125L	30	0,6	45861,48	34, 66, 79, 86	14901,48
125L	30	0,8	44820,26	34, 63, 79, 86	7325,15
125L	50	0,2	—	—	mem (15,94%)
125L	50	0,4	126112,19	6, 35, 66, 79, 86	28117,28
125L	50	0,6	120985,83	34, 66, 80, 86	17584,78
125L	50	0,8	119696,69	34, 63, 79, 86	10761,85
125T	20	0,2	7169,77	85	8600,38
125T	20	0,4	7169,77	85	6907,87
125T	20	0,6	7169,77	85	4863,38
125T	20	0,8	7169,77	85	4306,39
125T	30	0,2	29586,11	85	10352,58
125T	30	0,4	29586,11	85	8333,74
125T	30	0,6	29586,11	85	6955,91
125T	30	0,8	29586,11	85	5645,32
125T	50	0,2	93251,38	85	16541,83
125T	50	0,4	93251,38	85	11164,57
125T	50	0,6	93251,38	85	7742,55
125T	50	0,8	93251,38	85	6421,03

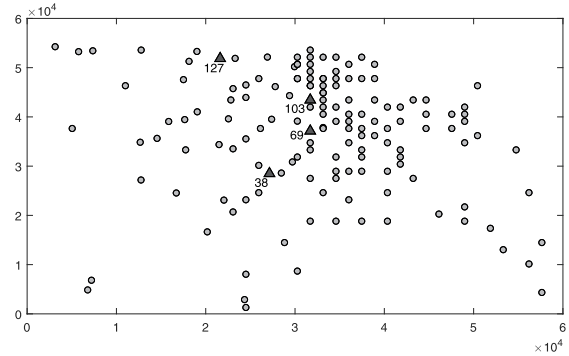
(b) Instâncias AP com 150 nós

Instância	Receita	α	Lucro	Localização dos concentradores	BDCFR Tempo (s)
150L	20	0,2	—	—	mem (0,01%)
150L	20	0,4	15557,64	38, 81, 101	30078,62
150L	20	0,6	14446,68	39, 101	29523,28
150L	20	0,8	14434,49	39, 101	13859,46
150L	30	0,2	—	—	mem (34,35%)
150L	30	0,4	—	—	mem (17,15%)
150L	30	0,6	45100,57	38, 81, 93, 101	43851,14
150L	30	0,8	43931,25	38, 81, 94, 101	26252,31
150L	50	0,2	—	—	mem (15,92%)
150L	50	0,4	—	—	mem (10,89%)
150L	50	0,6	—	—	mem (0,01%)
150L	50	0,8	118924,32	38, 81, 94, 101	29908,91
150T	20	0,2	10913,35	103, 127	33412,04
150T	20	0,4	10913,35	103, 127	21305,05
150T	20	0,6	10913,35	103, 127	16679,75
150T	20	0,8	10913,35	103, 127	15581,67
150T	30	0,2	38270,84	69, 103, 127	64565,21
150T	30	0,4	38270,84	69, 103, 127	25887,18
150T	30	0,6	38270,84	69, 103, 127	17370,94
150T	30	0,8	38270,84	69, 103, 127	14019,36
150T	50	0,2	—	—	mem (1,02%)
150T	50	0,4	111248,30	38, 69, 103, 127	35371,05
150T	50	0,6	111248,30	38, 69, 103, 127	25300,32
150T	50	0,8	111248,30	38, 69, 103, 127	17870,28

Nota. mem, 16 GB de memória excedida.



(a) 125 nós



(b) 150 nós

Figura 5.1: Disposição dos nós das instâncias AP com tamanho 125 e 150.

todas as instâncias 125T, está localizado em uma região com alta densidade de nós. Além disso, a quantidade de demanda que entra e sai desse nó representa quase 30% da demanda total da rede. Segundo [Ernst e Krishnamoorthy \(1996\)](#), este nó representa um distrito comercial central. Isso justifica a instalação deste único concentrador, independentemente do valor de α e da receita, já que, para estas instâncias, os custos são mais reduzidos e não favorecem a instalação de concentradores e arcos entre concentradores na rede. Por outro lado, nem sempre o nó da rede com o maior fluxo de entrada e saída de demanda é instalado. As instâncias 150T ilustram esta situação, onde o nó que recebe e envia a maior quantidade de demanda não foi instalado. Veja na Figura 5.1b que os concentradores instalados cobrem boa parte da região que contém o maior número de nós. Neste caso, do ponto de vista do lucro, esta configuração foi mais vantajosa em comparação à instalação de um único

concentrador, como foi o caso das instâncias 125T.

5.4 Conclusões

Neste capítulo foram propostos algoritmos baseados no método de decomposição de Benders para solucionar o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, em que a rede de concentradores é incompleta. Recursos foram introduzidos para melhorar o desempenho da versão clássica de Benders e várias estratégias foram abordadas. Em particular, duas variantes se mostraram mais eficientes: (i) algoritmo de Benders com múltiplos cortes e adição de cortes Pareto-ótimos a partir de pontos de Magnanti-Wong; e (ii) aplicação de uma abordagem Benders *branch-and-cut*, em que cortes Pareto-ótimos, também obtidos por meio de pontos de Magnanti-Wong, são adicionados na árvore de *Branch-and-Cut* a partir de soluções fracionárias no nó raiz.

Vários testes computacionais foram realizados para verificar o desempenho dos algoritmos desenvolvidos, considerando diferentes configurações para os parâmetros do problema, utilizando o conjunto de dados AP. Os algoritmos também foram comparados com o *solver* CPLEX e o método de decomposição de Benders do CPLEX. Os resultados mostraram que as melhores versões conseguiram resolver, em tempo hábil, o dobro de instâncias que podem ser resolvidas pelo método de Benders aplicado pelo *solver* e quatro vezes mais a quantidade de instâncias que foram resolvidas pelo CPLEX. Além disso, a melhor versão identificada, que incorpora a decomposição de Benders em um *framework* do algoritmo *Branch-and-Cut*, foi capaz de resolver até a otimalidade instâncias com até 150 nós.

Os resultados dos experimentos realizados evidenciam o quão desafiador é a obtenção da solução do problema de localização de concentradores, com as características consideradas neste trabalho. Isso motiva não apenas o desenvolvimento de métodos exatos eficazes, mas também na busca por algoritmos heurísticos com boa performance. No Capítulo 6 são apresentados algoritmos baseados na metaheurística *Iterated Local Search* (ILS) capazes de resolver instâncias maiores do problema.

Capítulo 6

Algoritmos heurísticos baseados em ILS aplicados ao Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro

Neste capítulo, são propostos dois algoritmos heurísticos baseados em *Iterated Local Search* (ILS) para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro. Na Seção 6.1 é realizada uma breve introdução sobre abordagens heurísticas aplicadas aos PLCs. A Seção 6.2 apresenta a descrição completa dos algoritmos desenvolvidos. Em particular, são detalhados os seguintes aspectos: a representação e avaliação de uma solução para o PLCML, a geração de uma solução inicial, as estruturas de vizinhança utilizadas, e os procedimentos de busca local e perturbação. Os experimentos computacionais realizados e os resultados obtidos são reportados na Seção 6.3. Nesta seção também são apresentadas uma análise das estruturas de vizinhança utilizadas no procedimento de busca local e uma comparação estatística entre os algoritmos desenvolvidos. Na Seção 6.4 são apresentadas as conclusões do capítulo. Destacamos que este capítulo é fortemente baseado no artigo [Oliveira et al. \(2023\)](#), publicado como parte dos requisitos obrigatórios para conclusão desta tese.

6.1 Introdução

Como discutido no Capítulo 1, os problemas de localização de concentradores são classificados como NP-difíceis ([Alumur e Kara, 2008](#); [Campbell e O’Kelly, 2012](#)) e a resolução de instâncias de grandes dimensões desses problemas muitas vezes requer o uso de métodos heurísticos.

Vários tipos de abordagens heurísticas têm sido utilizadas para resolvê-los, incluindo métodos de busca local (Rodríguez-Martín e Salazar-González, 2006), busca tabu (Calik et al., 2009; Ghaffarinasab, 2020), algoritmos evolutivos e genéticos (Kratika et al., 2011; Shang et al., 2021), pesquisa de vizinhança variável (Davari et al., 2013; Todosijević et al., 2017), relaxação Lagrangiana (Contreras e Fernández, 2009) e outras heurísticas (Hoff et al., 2017; Dai et al., 2019).

Neste estudo, propomos dois algoritmos heurísticos baseados em métodos de busca local, ou seja, métodos que consistem em explorar o espaço de soluções através de perturbações em soluções localmente ótimas. Mais especificamente, o primeiro algoritmo utiliza a metaheurística *Iterated Local Search* (ILS) (Lourenço et al., 2003) em sua versão padrão. O segundo algoritmo, denominado *Enhanced Iterated Local Search* (E-ILS), é uma adaptação do método ILS que emprega uma maior intensificação na busca. Esta adaptação foi inicialmente utilizada por Reinsma et al. (2018). Os dois algoritmos utilizam como procedimento de busca local o método *Random Variable Neighborhood Descent* (RVND), proposto por Souza et al. (2010) e Subramanian et al. (2010). Esses algoritmos foram propostos devido ao sucesso da aplicação de métodos de busca local em outros tipos de problemas de localização de concentradores, como o método ILS-VND empregado por Martins de Sá et al. (2018a).

Extensivos experimentos computacionais foram realizados usando instâncias de referência da área de localização de concentradores, contendo até 500 nós. Além disso, é apresentado o resultado de testes estatísticos realizados para comparar os dois algoritmos desenvolvidos.

Vale ressaltar ainda que o único trabalho na literatura que aplicou métodos heurísticos para o PLC com as mesmas características do abordado nesta tese foi o de Zhang et al. (2023). Nesse trabalho, os autores propuseram um algoritmo heurístico baseado em VNS e apresentaram resultados computacionais para instâncias contendo até 60 nós. Embora utilizem estruturas de vizinhança semelhantes, os algoritmos heurísticos baseados no ILS aqui propostos são diferentes do VNS apresentado por Zhang et al. (2023). Existem várias diferenças metodológicas entre eles, como, por exemplo, a construção da solução inicial, a avaliação da solução obtida e o procedimento de perturbação utilizado para evitar que a busca fique presa em ótimos locais.

6.2 Descrição dos algoritmos propostos

Para lidar com instâncias de grandes dimensões do problema de localização de concentradores com maximização do lucro, propomos dois algoritmos heurísticos baseados em busca local: *Iterated Local Search* (ILS) e *Enhanced Iterated Local Search* (E-ILS). Ambos os algoritmos utilizam o método *Random Variable Neighborhood Des-*

cent (RVND) para a busca local, que realiza trocas sistemáticas das estruturas de vizinhança. Esses algoritmos diferem entre si na forma como é feita a exploração do espaço de soluções. Enquanto o ILS altera o local de busca a cada iteração sem melhora, o E-ILS permanece na mesma região por mais tempo, realizando assim uma maior intensificação.

Esta seção está organizada da seguinte forma. A Subseção 6.2.1 apresenta como uma solução é representada e avaliada. Um método simples para gerar uma solução inicial é apresentado na Subseção 6.2.2. Na Subseção 6.2.3 são detalhadas as estruturas de vizinhança utilizadas para explorar o espaço de soluções. As Subseções 6.2.4 e 6.2.5 detalham o método de busca local e o procedimento de perturbação, respectivamente, aplicados nos algoritmos. Por fim, as Subseções 6.2.6 e 6.2.7 apresentam os algoritmos ILS e E-ILS aplicados ao problema.

6.2.1 Representação e avaliação da solução

Uma solução para o PLCML é representada por $s = (H, Z)$, sendo H um conjunto de nós indicando os concentradores instalados e Z um conjunto de arestas indicando os arcos entre concentradores ativos. A Figura 6.1 mostra uma rede de concentradores e a representação da solução associada com essa rede.

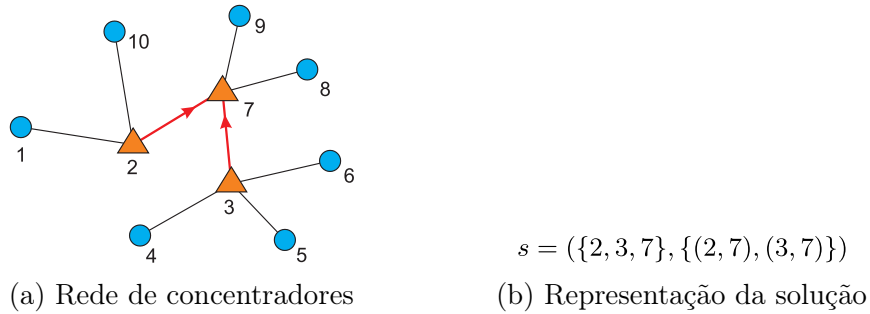


Figura 6.1: Exemplo da representação de uma solução para o PLCML.

Observe que, na representação da solução, não é necessário indicar a alocação de nós não-concentradores aos concentradores, pois os fluxos de demanda selecionados para serem atendidos devem ser roteados pelo caminho mais curto entre cada par de nós de demanda. Além de simplificar a representação, este fato também permite avaliar uma solução para o problema. Dados os conjuntos de concentradores e arcos entre concentradores instalados, a avaliação da solução pode ser realizada calculando o caminho mais curto entre todos os pares origem e destino que geram lucro com o atendimento de sua demanda.

O valor de FO de uma solução s , denotado por $f(s)$, pode ser determinado da seguinte forma. Seja C_{ij} o custo mínimo de transporte para rotear uma unidade de

fluxo da origem $i \in N$ até o destino $j \in N$. Seja P_{ij} o lucro unitário associado ao par $i, j \in N$, que pode ser calculado como

$$P_{ij} = \max\{0, r_{ij} - C_{ij}\}, \quad (6.1)$$

O valor de C_{ij} pode ser determinado usando o algoritmo de Floyd-Warshall, como descrito no Algoritmo 3 do Capítulo 5. Então, $f(s)$ é dada por:

$$f(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} P_{ij} - \sum_{k \in H} s_k - \sum_{(k,m) \in Z} g_{km}. \quad (6.2)$$

6.2.2 Solução inicial (com um único concentrador)

Uma solução inicial para o PLCML foi gerada considerando a melhor solução obtida com a instalação de um único concentrador na rede. Este procedimento é descrito no Algoritmo 4, que tem, como entrada, os parâmetros do problema, exceto o custo fixo de instalação de arcos entre concentradores (g_{km}) e o fator de desconto constante (α), já que apenas um concentrador será instalado.

Este algoritmo retorna a solução inicial s^0 e seu valor de FO, denotado por ϕ . Primeiro, a solução inicial é inicializada com o conjunto vazio, e o valor de FO da solução e uma variável auxiliar são inicializados em zero (linhas 1–3). No *loop* principal do algoritmo (linhas 4–16), o lucro total é calculado iterativamente, considerando a instalação de cada nó como o único concentrador da rede, e o melhor valor de solução encontrado é, então, armazenado. Primeiro, a variável auxiliar recebe o custo fixo de instalação do nó atual como concentrador (5). Depois disso, para cada par (i, j) , é calculado o lucro obtido com o atendimento de sua demanda (linhas 6–11). Se esse lucro for positivo, então seu valor é adicionado à variável auxiliar. Como estamos interessados em maximizar o valor do lucro, o par de nós origem e destino que geram lucros menores ou iguais a zero não é considerado e, portanto, não será atendido. Após este procedimento, é verificado se o lucro obtido ao tomar o nó atual como nó concentrador é melhor do que o melhor valor registrado anteriormente (linhas 12–15). Caso isso aconteça, a melhor solução encontrada e seu valor são atualizados. Finalmente, o algoritmo retorna a solução inicial e seu correspondente valor (linha 17).

6.2.3 Estruturas de vizinhança

Neste trabalho, o espaço de soluções é explorado aplicando seis tipos de movimentos a partir de uma solução $s = (H, Z)$. Cada movimento dá origem a uma estrutura de vizinhança $\mathcal{N}_i, i = 1, \dots, 6$. Para avaliar a complexidade de cada estrutura de

Algoritmo 4 Solução inicial: melhor solução com um único concentrador

Entrada: $N, r_{ij}, w_{ij}, c_{ij}, s_k$
Saída: Solução inicial s^0 , Valor da solução inicial: ϕ

```

1:  $s^0 \leftarrow (\emptyset, \emptyset)$ 
2:  $\phi \leftarrow 0$ 
3:  $\phi_{\text{aux}} \leftarrow 0$ 
4: for all  $k \in N$  do
5:    $\phi_{\text{aux}} \leftarrow -s_k$ 
6:   for all  $(i, j) \in N \times N$  do
7:      $l_{ij} \leftarrow (r_{ij} - c_{ik} - c_{kj})w_{ij}$ 
8:     if  $l_{ij} > 0$  then
9:        $\phi_{\text{aux}} \leftarrow \phi_{\text{aux}} + l_{ij}$ 
10:    end if
11:  end for
12:  if  $\phi_{\text{aux}} \geq \phi$  then
13:     $\phi \leftarrow \phi_{\text{aux}}$ 
14:     $s^0 \leftarrow (\{k\}, \emptyset)$ 
15:  end if
16: end for
17: return  $s^0, \phi$ 

```

vizinhança, ou seja, o número de vizinhos de uma determinada solução s , considere que $H^0 \subset N$ e $Z^0 \subset N \times N$ denotam os conjuntos de concentradores inativos e arcos entre concentradores inativos, respectivamente. Assim, as estruturas de vizinhança são detalhadas a seguir.

- $\mathcal{N}_1(s)$: conjunto de soluções que podem ser obtidas a partir da solução s instalando um novo concentrador. O número de soluções nesta vizinhança é $|H^0|$.
- $\mathcal{N}_2(s)$: conjunto de soluções que podem ser obtidas da solução s removendo um concentrador instalado. Neste caso, os arcos entre concentradores incidentes sobre esse concentrador também são removidos. O número de soluções nesta vizinhança é $|H|$.
- $\mathcal{N}_3(s)$: conjunto de soluções que podem ser obtidas a partir da solução s instalando um arco entre concentradores conectando concentradores instalados. O número de soluções nesta vizinhança é $|Z^0|$.
- $\mathcal{N}_4(s)$: conjunto de soluções que podem ser obtidas a partir da solução s removendo um arco entre concentradores. O número de soluções nesta vizinhança é $|Z|$.
- $\mathcal{N}_5(s)$: conjunto de soluções que podem ser obtidas a partir da solução s instalando um novo concentrador e conectando-o a todos os outros concentradores

da rede. O número de soluções nesta vizinhança é $|H^0|$.

- $\mathcal{N}_6(s)$: conjunto de soluções que podem ser obtidas da solução s trocando um concentrador instalado por um desinstalado. Neste caso, os arcos de concentradores incidentes nesse concentrador removido também são removidos. O número de soluções nesta vizinhança é $|H| \times |H^0|$.

6.2.4 Busca local

Os algoritmos propostos empregam um procedimento de busca local baseado em uma variante do algoritmo *Variable Neighborhood Descent* (VND) (Hansen et al., 2017), que realiza uma troca sistemática das estruturas de vizinhança apresentadas na Subseção 6.2.3, utilizando a estratégia *best improvement*. Dado um conjunto ordenado de estruturas de vizinhança, o procedimento de busca local é realizado da seguinte forma. A partir da primeira estrutura de vizinhança, sempre que uma busca local na vizinhança atual não melhora a solução, é realizada uma busca local na próxima estrutura de vizinhança. Além disso, quando uma solução melhor é encontrada, o algoritmo reinicia na primeira vizinhança, de acordo com a ordem pré-determinada.

Neste trabalho, a busca local utiliza o método *Random Variable Neighborhood Descent* (RVND) (Souza et al., 2010; Subramanian et al., 2010). No RVND, apresentado no Algoritmo 5, a ordem de exploração das vizinhanças é gerada aleatoriamente no início do algoritmo. Esta estratégia difere do VND, em que esta ordem é previamente estabelecida, geralmente de acordo com a ordem de complexidade das vizinhanças.

A vantagem de utilizar o RVND em vez da versão clássica do VND, reside principalmente no fato de que a aleatoriedade da ordem das vizinhanças pode ser favorável na resolução de instâncias do problema, uma vez que elas apresentam características diferentes; assim, diferentes ordens podem ser mais convenientes. Além disso, como observado por Subramanian et al. (2010), a melhor ordem de vizinhanças para uma instância não necessariamente é a mesma para outra instância.

6.2.5 Perturbação

Seja k o nível de perturbação em uma determinada iteração. O procedimento de perturbação realizado na solução atual consiste em aplicar, de forma sucessiva e aleatória sobre uma solução, k movimentos na vizinhança $\mathcal{N}_6$. O algoritmo 6 detalha este procedimento. Inicialmente é feita uma cópia da solução atual na solução s' , que armazenará a solução perturbada no final do procedimento (linha 1), e o contador i do número de perturbações é iniciado com o valor 1 (linha 2). A perturbação na solução s' é realizada da seguinte forma. Enquanto o contador é menor ou igual à quantidade

Algoritmo 5 *Random Variable Neighborhood Descent* - RVND

Entrada: Solução s , Conjunto de vizinhanças $\mathcal{N}$
Saída: Solução refinada s

```

1:  $\mathcal{NR} \leftarrow \mathcal{N}$  em ordem aleatória
2:  $i \leftarrow 1$ 
3: while  $i \leq |\mathcal{N}|$  do
4:   Encontre o melhor vizinho  $s' \in \mathcal{NR}_i(s)$ 
5:   if  $f(s') > f(s)$  then
6:      $s \leftarrow s'$ 
7:      $i \leftarrow 1$ 
8:   else
9:      $i \leftarrow i + 1$ 
10:  end if
11: end while
12: return  $s$ 

```

k de perturbações, uma solução s'' na vizinhança $\mathcal{N}_6(s')$ é selecionada aleatoriamente (linha 4). Então, a solução perturbada e o contador do número de perturbações são atualizados (linhas 5–6). O procedimento termina retornando a solução perturbada (linha 8).

Algoritmo 6 Perturbação

Entrada: Solução atual s , Estrutura de vizinhança $\mathcal{N}_6$, Nível de perturbação k
Saída: Solução perturbada s'

```

1:  $s' \leftarrow s$ 
2:  $i \leftarrow 1$ 
3: while  $i \leq k$  do
4:   Selecione aleatoriamente uma solução vizinha  $s'' \in \mathcal{N}_6(s')$ 
5:    $s' \leftarrow s''$ 
6:    $i \leftarrow i + 1$ 
7: end while
8: return  $s'$ 

```

6.2.6 Iterated Local Search (ILS)

O procedimento *Iterated Local Search* (ILS) (Lourenço et al., 2001, 2003) é uma metaheurística simples, que explora o espaço de soluções através de perturbações em soluções localmente ótimas. Em vez de explorar todo o espaço de soluções, a ideia principal deste método é realizar a busca em um subespaço menor, considerando apenas soluções que sejam localmente ótimas.

O procedimento de perturbação aplicado pelo método, que permite obter uma solução localmente ótima a partir de outra solução localmente ótima, precisa ser forte

o suficiente para permitir que a busca local explore diferentes regiões do espaço de soluções e fraco o suficiente para evitar reinicializações aleatórias. Desta forma, o ILS combina dois elementos muito importantes: intensificação e diversificação. A intensificação consiste em explorar adequadamente uma determinada região do espaço de soluções, enquanto a diversificação envolve a alteração da região de busca. Esses elementos são geralmente obtidos de acordo com a intensidade da perturbação aplicada às soluções, de modo que perturbações mais fracas permitem que uma região seja melhor explorada, e perturbações mais fortes favorecem a investigação de regiões distintas.

A metaheurística ILS tem sido aplicada com sucesso para resolver problemas de localização de concentradores. Guan et al. (2018) propôs um algoritmo ILS para lidar com o problema de localização de concentradores de alocação única não capacitado. Para resolver um problema de localização de concentradores sob congestionamento, Karimi-Mamaghan et al. (2020) propôs um algoritmo ILS baseado em aprendizagem. O algoritmo desenvolvido por eles incorpora técnicas de aprendizado de máquina com a heurística ILS, sendo uma área de pesquisa muito promissora (Karimi-Mamaghan et al., 2022).

O algoritmo 7 descreve o método denominado ILS-RVND, aplicado ao PLCML. O algoritmo possui, como entrada, o número máximo de iterações sem melhora, denotado por $iterMax$. Na primeira etapa do algoritmo, o nível de perturbação, dado por k , e o número de iterações, denotado por $iter$, são inicializados (linhas 1 e 2). Então, uma solução inicial s^0 é gerada usando o Algoritmo 4. Após isso, o algoritmo realiza uma busca local em s^0 utilizando o RVND, descrito no Algoritmo 5, obtendo uma solução refinada s (linha 4). O restante do algoritmo é composto por uma estrutura de repetição para melhorar o valor da solução atual até atingir o número máximo de iterações sem melhora, dado por $iterMax$ (linhas 5–16), em que o número de iterações é incrementado em uma unidade na linha 6. A cada iteração, o procedimento de perturbação, apresentado no Algoritmo 6, é aplicado à solução atual, obtendo uma solução s' (linha 7). Então, uma solução s'' é alcançada aplicando o RVND à solução s' (linha 8). Depois disso, é verificado se a solução s'' é melhor que a solução s (linha 9). Se isso for verdade, então a solução s é atualizada para s'' e os contadores do número de iterações e do nível de perturbação são zerados (linhas 10 a 12). Caso contrário, o nível de perturbação k é aumentado (linhas 13 a 15). O algoritmo termina retornando a melhor solução obtida durante este procedimento.

Algoritmo 7 ILS-RVND

Entrada: $iterMax$
Saída: s

```

1:  $k \leftarrow 1$ 
2:  $iter \leftarrow 0$ 
3:  $s^0 \leftarrow \text{SolucaoInicial}()$  ▷ De acordo com o Algoritmo 4
4:  $s \leftarrow \text{RVND}(s^0, \mathcal{N})$  ▷ De acordo com o Algoritmo 5
5: while  $iter \leq iterMax$  do
6:    $iter \leftarrow iter + 1$ 
7:    $s' \leftarrow \text{Perturbacao}(s, \mathcal{N}_6, k)$  ▷ De acordo com o Algoritmo 6
8:    $s'' \leftarrow \text{RVND}(s', \mathcal{N})$  ▷ De acordo com o Algoritmo 5
9:   if  $f(s'') > f(s)$  then
10:     $s \leftarrow s''$ 
11:     $iter \leftarrow 0$ 
12:     $k \leftarrow 1$ 
13:   else
14:     $k \leftarrow k + 1$ 
15:   end if
16: end while
17: return  $s$ 

```

6.2.7 Enhanced Iterated Local Search (E-ILS)

A metaheurística *Enhanced Iterated Local Search* (E-ILS) (Reinsma et al., 2018) é uma adaptação do método *Iterated Local Search* (ILS). A diferença entre elas refere-se à forma como o nível de perturbação é atualizado. No ILS, o nível de perturbação é aumentado sempre que não há melhoria na solução atual. No entanto, esta estratégia do ILS pode levar a uma perda da qualidade da solução, devido à mudança abrupta na região de busca, uma vez que a perturbação ocorre de forma aleatória. Por outro lado, no E-ILS, o nível de perturbação só aumenta após algumas tentativas malsucedidas de melhoria. Esta estratégia do E-ILS permite que uma melhor investigação seja realizada em uma determinada região do espaço de soluções, possibilitando uma intensificação mais precisa durante a execução do algoritmo.

O método E-ILS-RVND, implementado para resolver o problema abordado neste trabalho, é apresentado no Algoritmo 8. Este algoritmo tem, como entradas, o número máximo de iterações sem melhora, dado por $iterMax$, e o número máximo de vezes no mesmo nível de perturbação, dado por $timesMax$. Inicialmente, o número de iterações sem melhora, denotado por $iter$, o nível de perturbação, denotado por k , e o número de vezes dentro do mesmo nível de perturbação, denotado por $ntimes$, são inicializados (linhas 1–3). Depois disso, uma solução inicial s^0 é gerada usando o Algoritmo 4 (linha 4). Em seguida, é realizada uma busca local na solução inicial, utilizando o RVND (Algoritmo 5), e a solução retornada é então armazenada em s .

Algoritmo 8 E-ILS-RVND

Entrada: $iterMax$, $timesMax$
Saída: s

```

1:  $k \leftarrow 1$ 
2:  $iter \leftarrow 0$ 
3:  $ntimes \leftarrow 1$ 
4:  $s^0 \leftarrow \text{SolucaoInicial}()$  ▷ De acordo com o Algoritmo 4
5:  $s \leftarrow \text{RVND}(s^0, \mathcal{N})$  ▷ De acordo com o Algoritmo 5
6: while  $iter \leq iterMax$  do
7:    $iter \leftarrow iter + 1$ 
8:    $s' \leftarrow \text{Perturbacao}(s, \mathcal{N}_6, k)$  ▷ De acordo com o Algoritmo 6
9:    $s'' \leftarrow \text{RVND}(s', \mathcal{N})$  ▷ De acordo com o Algoritmo 5
10:  if  $f(s'') > f(s)$  then
11:     $s \leftarrow s''$ 
12:     $iter \leftarrow 0$ 
13:     $k \leftarrow 1$ 
14:     $ntimes \leftarrow 1$ 
15:  else
16:    if  $ntimes \geq timesMax$  then
17:       $k \leftarrow k + 1$ 
18:       $ntimes \leftarrow 1$ 
19:    else
20:       $ntimes \leftarrow ntimes + 1$ 
21:    end if
22:  end if
23: end while
24: return  $s$ 

```

Posteriormente, o algoritmo entra em um *loop*, com o objetivo de melhorar o valor da solução atual até que o número de iterações sem melhora seja igual a $iterMax$ (linhas 6–23). No início do *loop*, a contagem de iterações sem melhora é incrementada (linha 7). Depois disso, uma solução s' é obtida através do procedimento de perturbação aplicado à solução s , conforme descrito no Algoritmo 6 (linha 8). Então, uma busca local é realizada na solução s' , e a solução refinada é armazenada em s'' (linha 9). Se a solução s'' for melhor que a solução s , então a solução s é atualizada para s'' , e o contador de iterações sem melhora, o nível de perturbação e o número de vezes no mesmo nível de perturbação são redefinidos (linhas 10–14). Se o valor de FO de s'' não for melhor que o valor de FO da solução s , então é verificado se o número de vezes no mesmo nível de perturbação atingiu seu valor máximo (linhas 16–21). Se isso ocorrer, então o nível de perturbação é aumentado em uma unidade e o número de vezes dentro do mesmo nível de perturbação é zerado. Caso contrário, $ntimes$ é atualizado. Ao final do procedimento, o algoritmo retorna a melhor solução s obtida.

6.3 Experimentos computacionais

Esta seção apresenta os resultados dos experimentos computacionais realizados utilizando os algoritmos propostos (ILS-RVND e E-ILS-RVND), aplicados ao PLCML. Os algoritmos foram implementados na linguagem C++ e executados em um computador Intel Core i7-7500U, 2,70 GHz, com 16 GB de RAM, utilizando ambiente Linux. Os parâmetros dos algoritmos heurísticos foram calibrados pela ferramenta IRACE (*Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration*) (López-Ibañez et al., 2016). A ferramenta IRACE fornece uma implementação do algoritmo *F-race* iterado (Birattari et al., 2010) e outras variantes do algoritmo, que incluem, por exemplo, mecanismos para evitar convergência prematura. Foi utilizada a versão padrão do IRACE. As implementações dos dois algoritmos heurísticos propostos, ILS-RVND e E-ILS-RVND, estão disponíveis em <https://github.com/fabricioneo/plcml>.

Os experimentos computacionais foram realizados usando o conjunto de dados AP (Ernst e Krishnamoorthy, 1996), que inclui instâncias com até 200 nós (apresentado na Seção 5.3.1 do Capítulo 5); e os conjuntos de dados propostos por Contreras et al. (2011b), que possuem instâncias com até 500 nós. As subseções 6.3.1 e 6.3.2 detalham e relatam os experimentos usando as instâncias AP e as instâncias de Contreras et al. (2011b), respectivamente.

Observação 6.3.1. *Embora a comparação dos resultados dos algoritmos propostos neste capítulo com os resultados do algoritmo apresentado por Zhang et al. (2023) não seja imediata, uma vez que os autores implementaram seu algoritmo usando outra linguagem de programação (python), executaram os experimentos em uma máquina com configuração diferente, e utilizaram apenas instâncias de pequenas dimensões do conjunto de dados CAB, na Seção A.3 do Apêndice A apresentamos os resultados de uma comparação entre os dois estudos.*

6.3.1 Testes com o conjunto de dados AP

Esta subseção apresenta os resultados dos experimentos computacionais utilizando as instâncias do conjunto de dados AP, apresentado na Seção 5.3.1 do Capítulo 5. Para os parâmetros do modelo do PLCML, foi considerada a mesma configuração descrita na Seção 5.3.1 do Capítulo 5. Os valores das demandas, dos custos de transporte entre os pares de nós da rede e dos custos fixos de instalação de concentradores (divididos em duas categorias: *loose* (L) ou *tight* (T)), são fornecidos no conjunto de dados AP. Para a receita, foram considerados três valores: 20, 30, e 50. Os custos de instalação de arcos entre concentradores foram tomados como sendo 10% da média dos custos fixos de instalação de concentradores, de acordo com a categoria L ou T.

Por fim, para o fator de desconto nos arcos entre concentradores, foram considerados os valores 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8.

Esta seção está dividida da seguinte forma. Inicialmente, a Subseção 6.3.1.1 mostra os resultados da calibração dos parâmetros dos algoritmos heurísticos. A Subseção 6.3.1.2 apresenta uma análise das estruturas de vizinhança. Para comparar o desempenho dos algoritmos, os experimentos foram realizados em duas etapas. Na Etapa 1, os testes foram realizados com instâncias contendo 40, 50, 75 e 100 nós. Enquanto isso, a Etapa 2 contemplou instâncias com 125, 150, 175 e 200 nós. A Subseção 6.3.1.3 apresenta e discute os resultados da Etapa 1. Além disso, a Subseção 6.3.1.4 apresenta os resultados de uma análise estatística do desempenho dos algoritmos baseada nos experimentos da Etapa 1. Finalmente, na Subseção 6.3.1.5 são mostrados os resultados dos experimentos computacionais referentes à Etapa 2.

6.3.1.1 Calibração dos parâmetros dos algoritmos com as instâncias AP

Os valores dos parâmetros dos dois algoritmos implementados foram calibrados pela ferramenta IRACE (*Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration*) (López-Ibañez et al., 2016). A Tabela 6.1 mostra as instâncias utilizadas, do conjunto de dados do AP, na execução do IRACE.

Tabela 6.1: Instâncias AP submetidas ao IRACE.

AP – 40			AP – 50			AP – 75			AP – 100		
Inst	α	Receita	Inst	α	Receita	Inst	α	Receita	Inst	α	Receita
40L	0,2	20	50L	0,6	20	75L	0,2	20	100L	0,6	20
40L	0,4	30	50L	0,4	30	75L	0,6	30	100L	0,2	30
40L	0,8	50	50L	0,2	50	75L	0,8	50	100L	0,4	50
40T	0,4	20	50T	0,2	20	75T	0,8	20	100T	0,4	20
40T	0,8	30	50T	0,6	30	75T	0,4	30	100T	0,2	30
40T	0,2	50	50T	0,8	50	75T	0,6	50	100T	0,8	50

Para ambos os algoritmos foi calibrado o número máximo de iterações sem melhora (*iterMax*) e, adicionalmente, para E-ILS-RVND, o parâmetro que determina o número de vezes no mesmo nível de perturbação (*timesMax*) também foi calibrado. Para a execução do IRACE, foram considerados os seguintes intervalos de valores para os parâmetros: $iterMax \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $timesMax \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Para o ILS-RVND foi retornado $iterMax = 1$, enquanto os valores retornados para E-ILS-RVND foram $iterMax = 4$ e $timesMax = 3$. Esses valores de parâmetros foram adotados para os dois algoritmos em todos os experimentos computacionais com as instâncias do conjunto de dados AP.

6.3.1.2 Análise das estruturas de vizinhança

Um conjunto de experimentos computacionais foi realizado para analisar o impacto das estruturas de vizinhança, descritas na Subseção 6.2.3, na heurística. Esses experimentos consistiram em retirar cada estrutura de vizinhança das execuções do algoritmo E-ILS-RVND, mantendo as outras cinco vizinhanças. A versão do algoritmo considerando todas as estruturas de vizinhança é denotada por N+all e a versão do algoritmo sem a estrutura de vizinhança $\mathcal{N}_i$ é denotada por N- i , $i = 1, \dots, 6$. Os experimentos utilizaram as instâncias AP com 40, 50, 75 e 100 nós, excluindo as instâncias utilizadas na calibração dos parâmetros (indicadas na Tabela 6.1). Para cada instância foram realizadas 10 execuções do algoritmo, utilizando os valores dos parâmetros indicados pelo IRACE na Subseção 6.3.1.1.

A Figura 6.2 apresenta o número de vezes que um valor ótimo foi retornado por cada versão do algoritmo. Observe que, para todos os casos, o maior número de valores ótimos foi alcançado quando todas as seis estruturas de vizinhança são utilizadas. Além disso, a remoção da vizinhança $\mathcal{N}_3$ reduziu o número de valores ótimos alcançados para instâncias com tamanhos 40 e 50. Por outro lado, a remoção da vizinhança $\mathcal{N}_1$ reduziu o número de valores ótimos, para instâncias com 75 e 100 nós.

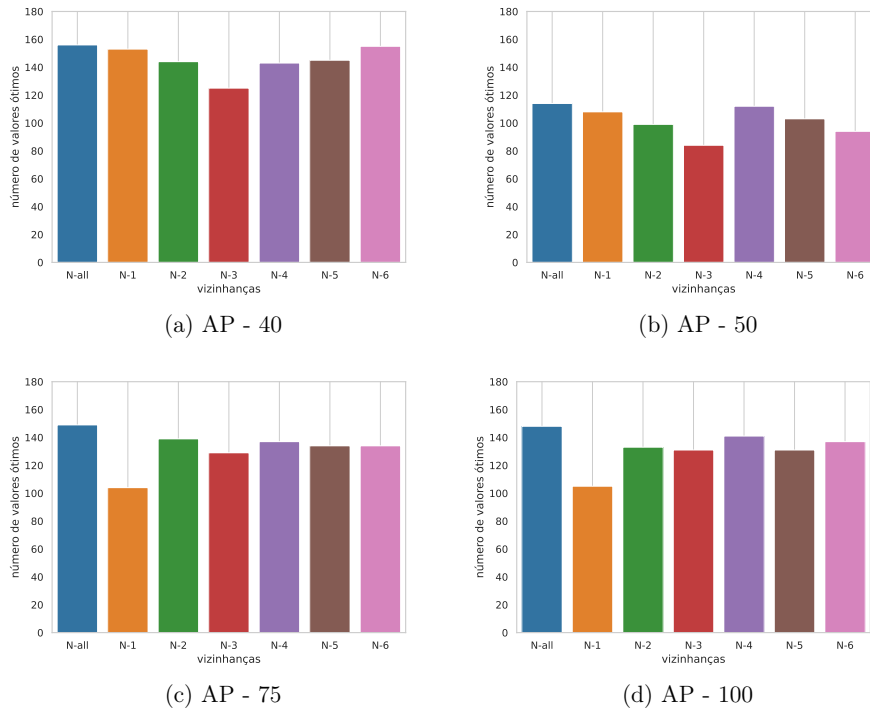


Figura 6.2: Número de valores ótimos em 10 execuções do E-ILS-RVND, considerando todas as estruturas de vizinhança (N+all) e removendo a i -ésima vizinhança (N- i), $i = 1, \dots, 6$.

Para avaliar o impacto das estruturas de vizinhança na qualidade das soluções alcançadas, a média dos intervalos entre o valor ótimo e os valores médios de FO das soluções fornecidas pelo algoritmo E-ILS-RVND, denotados por Avg_{gaps} , foi calculado. Essa média é dada por

$$Avg_{gaps} = 100 \times \left(\frac{1}{q \times r} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \frac{opt_{f(i)} - f(i,j)}{opt_{f(i)}} \right),$$

em que q denota o número de instâncias, r denota o número de execuções do algoritmo, $f(i,j)$ denota o valor de FO para a instância i na execução j , e $opt_{f(i)}$ denota o valor de FO da solução ótima para a instância i . No nosso caso, temos $q = 18$ e $r = 10$. Os resultados, em porcentagem, são mostrados na Figura 6.3.

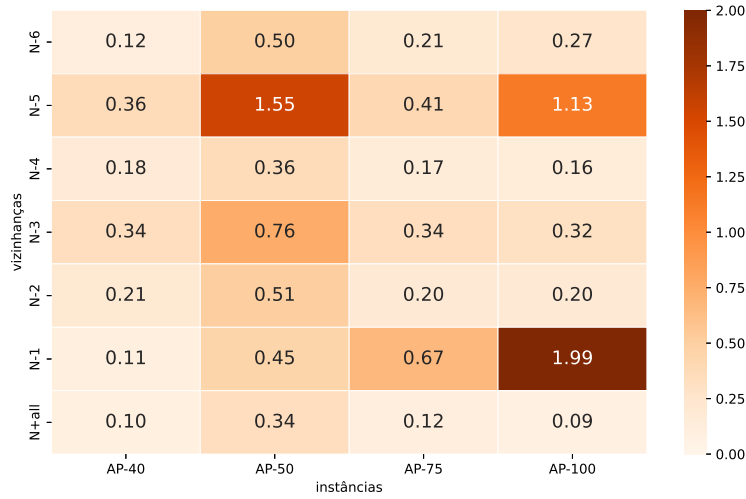


Figura 6.3: $Avg_{gaps}(\%)$ para versões do algoritmo E-ILS-RVND com todas as estruturas de vizinhança (N+all) e removendo a i -ésima vizinhança (N- i), $i = 1, \dots, 6$.

Seguindo os resultados apresentados anteriormente, os $gaps$ médios mais baixos foram alcançados ao executar o algoritmo com todas as estruturas de vizinhança. Observe que, para o conjunto de instâncias com 100 nós, o menor e o maior valor do gap médio foram obtidos ao considerar todas as estruturas de vizinhança e remover a vizinhança $\mathcal{N}_1$, respectivamente. Devido a esses resultados, todas as estruturas de vizinhança são utilizadas nos experimentos computacionais realizados a seguir.

6.3.1.3 Resultados da Etapa 1

Na Etapa 1, experimentos computacionais foram executados com instâncias de 40, 50, 75 e 100 nós. Esses experimentos foram realizados para obter uma análise preliminar do comportamento e desempenho dos métodos propostos, bem como comparar

os resultados alcançados com os apresentados na literatura. As instâncias utilizadas para calibração dos parâmetros dos algoritmos, indicadas na Tabela 6.1, foram descartadas destes experimentos.

Os resultados destes experimentos computacionais são apresentados nas Tabelas 6.2 e 6.3. A Tabela 6.2 mostra os resultados obtidos com instâncias de 40 e 50 nós, enquanto a Tabela 6.3 mostra os resultados para instâncias de tamanho 75 e 100. Nessas tabelas, a primeira coluna indica as instâncias testadas, representadas no formato $nF-\alpha-r$, em que n representa o número de nós, F representa o tipo de custo fixo para instalação de concentradores (*loose* (L) ou *tight* (T)), α representa o fator de desconto nos arcos de concentradores e r representa a receita. Em seguida, são apresentados o valor ótimo e o o tempo registrado para resolver as instâncias com o método BDCFR do Capítulo 5, que obteve o melhores tempos computacionais. As próximas colunas das tabelas mostram, para cada um dos algoritmos propostos, o melhor valor, o valor médio, o *gap* associado ao melhor valor (Δ_{best}), o *gap* associado ao valor médio (Δ_{avg}) e o tempo médio de execução, em segundos, registrado em 30 execuções dos algoritmos. O *gap* associado ao melhor valor e o *gap* associado ao valor médio foram calculados por:

$$\Delta_{best} = 100 \times \frac{\text{Valor ótimo} - \text{Melhor valor}}{\text{Valor ótimo}} \quad (6.3)$$

$$\Delta_{avg} = 100 \times \frac{\text{Valor ótimo} - \text{Valor médio}}{\text{Valor ótimo}}. \quad (6.4)$$

Estes valores representam, respectivamente, os desvios percentuais do melhor valor de FO e do valor de FO médio obtidos para cada instância em relação ao valor de FO ótimo. Assim, quanto mais próximos de zero estiverem esses valores, melhores serão os resultados alcançados pelos algoritmos.

A Tabela 6.2 indica que os algoritmos heurísticos propostos obtiveram bons resultados para instâncias com 40 e 50 nós. O valor ótimo foi obtido para quase todas as instâncias. O ILS-RVND não atingiu a solução ótima em quatro instâncias, enquanto o E-ILS-RVND não atingiu a solução ótima em apenas uma. Os valores médios foram próximos ou iguais ao valor ótimo para a maioria dos casos. Este fato se reflete nos baixos valores registrados para o *gap* médio de ambos os algoritmos, exceto em alguns casos que apresentam valores pequenos para α . Em geral, as instâncias com valores mais baixos de α são mais desafiadoras, uma vez que um desconto maior nos arcos entre concentradores incentiva a instalação de mais concentradores e arcos entre concentradores na rede. Vê-se também nesta tabela que o E-ILS-RVND apresentou melhores valores para o *gap* médio do que o ILS-RVND. Em relação ao tempo computacional, os valores registrados pelos algoritmos propostos são inferiores aos

Tabela 6.2: Resultados para as instâncias AP com 40 e 50 nós – 30 execuções.

Instâncias	Benders		ILS-RVND					E-ILS-RVND				
	Valor ótimo	Tempo (s)	Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)	Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)
40L-0,4-20	14635,61	34,67	14635,61	14543,83	0,00	0,63	0,45	14635,61	14593,00	0,00	0,29	2,65
40L-0,6-20	14099,19	20,11	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,17	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,63
40L-0,8-20	14099,19	12,22	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,15	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,59
40T-0,2-20	6404,58	35,10	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,18	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,60
40T-0,6-20	6404,58	16,54	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,15	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,53
40T-0,8-20	6404,58	15,17	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,15	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,46
40L-0,2-30	52299,43	106,70	52299,43	51688,43	0,00	1,17	4,62	52299,43	52021,38	0,00	0,53	14,45
40L-0,6-30	44213,55	40,06	44213,55	44213,55	0,00	0,00	1,83	44213,55	44213,55	0,00	0,00	6,29
40L-0,8-30	42990,07	27,32	42990,07	42990,07	0,00	0,00	1,32	42990,07	42981,96	0,00	0,02	4,26
40T-0,2-30	36135,48	55,02	36135,48	35993,61	0,00	0,39	0,76	36135,48	36135,48	0,00	0,00	2,54
40T-0,4-30	33918,82	39,19	33918,82	33918,82	0,00	0,00	0,55	33918,82	33918,82	0,00	0,00	2,00
40T-0,6-30	32709,49	30,78	32709,49	32709,49	0,00	0,00	0,58	32709,49	32709,49	0,00	0,00	1,74
40L-0,2-50	130906,36	74,92	130240,82	129053,68	0,51	1,42	5,47	130747,04	129880,77	0,12	0,78	37,55
40L-0,4-50	124056,22	97,30	124056,22	123690,01	0,00	0,30	5,32	124056,22	123955,55	0,00	0,08	19,66
40L-0,6-50	120056,17	49,27	120056,17	119646,85	0,00	0,34	4,60	120056,17	119900,24	0,00	0,13	12,76
40T-0,4-50	107847,14	55,77	107847,14	107838,95	0,00	0,01	0,96	107847,14	107845,35	0,00	0,00	3,60
40T-0,6-50	105857,00	49,38	105857,00	105857,00	0,00	0,00	0,61	105857,00	105857,00	0,00	0,00	2,05
40T-0,8-50	105603,50	32,36	105603,50	105603,50	0,00	0,00	0,56	105603,50	105603,50	0,00	0,00	1,74
50L-0,2-20	17666,95	148,99	17666,95	17383,42	0,00	1,60	3,63	17666,95	17425,21	0,00	1,37	13,67
50L-0,4-20	14588,82	87,25	14588,82	14588,82	0,00	0,00	1,30	14588,82	14588,82	0,00	0,00	3,47
50L-0,8-20	13920,55	29,77	13920,55	13920,55	0,00	0,00	0,30	13920,55	13920,55	0,00	0,00	1,12
50T-0,4-20	8001,47	56,35	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,29	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,93
50T-0,6-20	8001,47	40,85	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,31	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,93
50T-0,8-20	8001,47	37,27	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,29	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,92
50L-0,2-30	53200,19	334,89	53066,89	51896,89	0,25	2,45	16,06	53200,19	52854,48	0,00	0,65	62,84
50L-0,6-30	43763,67	121,95	43763,67	43357,24	0,00	0,93	8,59	43763,67	43577,47	0,00	0,43	24,74
50L-0,8-30	42566,95	227,77	42566,95	42566,95	0,00	0,00	6,13	42566,95	42566,95	0,00	0,00	15,28
50T-0,2-30	34513,57	219,72	34513,57	33225,54	0,00	3,73	1,96	34513,57	34162,25	0,00	1,02	7,07
50T-0,4-30	31911,87	114,27	31911,87	31681,42	0,00	0,72	1,36	31911,87	31750,56	0,00	0,51	4,57
50T-0,8-30	31220,52	58,82	31220,52	31220,52	0,00	0,00	1,25	31220,52	31220,52	0,00	0,00	3,61
50L-0,4-50	124770,82	265,10	124770,82	124134,13	0,00	0,51	19,35	124770,82	124267,84	0,00	0,40	61,06
50L-0,6-50	119972,77	445,13	119902,39	119440,87	0,06	0,44	16,49	119972,77	119707,89	0,00	0,22	53,70
50L-0,8-50	118299,45	82,92	118299,45	118214,17	0,00	0,07	8,90	118299,45	118287,27	0,00	0,01	21,00
50T-0,2-50	110962,98	289,18	110858,78	109713,87	0,09	1,13	3,85	110962,98	110226,98	0,00	0,66	17,47
50T-0,4-50	106451,33	165,83	106451,33	106285,12	0,00	0,16	1,71	106451,33	106439,17	0,00	0,01	6,04
50T-0,6-50	105260,70	115,27	105260,70	104824,69	0,00	0,41	1,43	105260,70	104933,70	0,00	0,31	5,25
Média	—	100,92	—	—	0,03	0,46	3,38	—	—	0,00	0,21	11,60

registrados pelo método exato.

Os resultados da Tabela 6.3 mostram que os algoritmos propostos também obtiveram bom desempenho para instâncias com 75 e 100 nós. Quanto à qualidade da solução produzida, o E-ILS-RVND atingiu o valor ótimo em todas as instâncias testadas, e o ILS-RVND apenas não atingiu o ótimo em duas instâncias (100L-0,2-50 e 75L-0,4-50). Foram obtidos valores médios próximos dos valores ótimos, como evidenciam os pequenos *gaps* médios. Assim como observado na Tabela 6.2, o E-ILS-RVND registrou valores mais baixos para o *gap* médio do que o ILS-RVND. Para estas instâncias, de tamanho 75 e 100, os tempos computacionais obtidos pelos algoritmos heurísticos são muito inferiores aos apresentados pelo método de decomposição de Benders, principalmente para instâncias com maior economia de escala. Por exemplo, o tempo médio de execução registrado pelo ILS-RVND é 145 vezes menor que o obtido com o método exato.

A Figura 6.4 apresenta uma visualização gráfica dos tempos computacionais gas-

Tabela 6.3: Resultados para as instâncias AP com 75 e 100 nós – 30 execuções.

Instâncias	Benders		ILS-RVND					E-ILS-RVND				
	Valor ótimo	Tempo (s)	Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)	Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)
75L-0,4-20	15004,99	1348,26	15004,99	14864,97	0,00	0,93	5,25	15004,99	14930,70	0,00	0,50	21,24
75L-0,6-20	14058,46	732,49	14058,46	14058,46	0,00	0,00	1,03	14058,46	14058,46	0,00	0,00	4,41
75L-0,8-20	14058,46	577,37	14058,46	14058,46	0,00	0,00	1,06	14058,46	14058,46	0,00	0,00	4,17
75T-0,2-20	1144,13	931,39	1144,13	1144,13	0,00	0,00	0,83	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,91
75T-0,4-20	1144,13	627,04	1144,13	1144,13	0,00	0,00	0,85	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,91
75T-0,6-20	1144,13	545,76	1144,13	1144,13	0,00	0,00	0,81	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,84
75L-0,2-30	53570,37	3516,02	53570,37	53075,54	0,00	0,92	42,25	53570,37	53283,50	0,00	0,54	115,87
75L-0,4-30	48097,70	1988,41	48097,70	47590,01	0,00	1,06	31,17	48097,70	47708,07	0,00	0,81	112,47
75L-0,8-30	43645,17	932,62	43645,17	43645,17	0,00	0,00	21,60	43645,17	43645,17	0,00	0,00	51,52
75T-0,2-30	25999,62	2298,20	25999,62	25999,62	0,00	0,00	2,72	25999,62	25999,62	0,00	0,00	8,91
75T-0,6-30	25999,62	872,35	25999,62	25999,62	0,00	0,00	2,90	25999,62	25999,62	0,00	0,00	8,00
75T-0,8-30	25999,62	644,32	25999,62	25999,62	0,00	0,00	2,73	25999,62	25999,62	0,00	0,00	8,27
75L-0,2-50	131831,98	3464,41	131831,98	130596,85	0,00	0,94	72,01	131831,98	130771,82	0,00	0,80	193,11
75L-0,4-50	125133,91	2366,14	125097,05	124581,66	0,03	0,44	45,30	125133,91	124852,08	0,00	0,23	194,81
75L-0,6-50	120693,62	2571,40	120693,62	120605,87	0,00	0,07	46,10	120693,62	120638,19	0,00	0,05	126,84
75T-0,2-50	99186,32	2374,03	99186,32	99186,32	0,00	0,00	6,73	99186,32	99186,32	0,00	0,00	19,69
75T-0,4-50	99186,32	1561,35	99186,32	99186,32	0,00	0,00	5,92	99186,32	99186,32	0,00	0,00	18,58
75T-0,8-50	99186,32	818,08	99186,32	99186,32	0,00	0,00	5,39	99186,32	99186,32	0,00	0,00	15,85
100L-0,2-20	17616,73	9427,82	17616,73	16904,36	0,00	4,04	31,70	17616,73	17295,80	0,00	1,82	156,61
100L-0,4-20	14211,00	6299,13	14211,00	14211,00	0,00	0,00	9,23	14211,00	14211,00	0,00	0,00	38,13
100L-0,8-20	13603,42	1874,36	13603,42	13603,42	0,00	0,00	3,50	13603,42	13603,42	0,00	0,00	9,94
100T-0,2-20	2116,57	3470,80	2116,57	2116,57	0,00	0,00	2,41	2116,57	2116,57	0,00	0,00	6,79
100T-0,6-20	2116,57	1781,70	2116,57	2116,57	0,00	0,00	2,26	2116,57	2116,57	0,00	0,00	7,08
100T-0,8-20	2116,57	1610,26	2116,57	2116,57	0,00	0,00	2,12	2116,57	2116,57	0,00	0,00	6,59
100L-0,4-30	47173,46	6411,47	47173,46	46775,31	0,00	0,84	67,55	47173,46	47077,29	0,00	0,20	265,53
100L-0,6-30	43747,51	4758,21	43747,51	43728,59	0,00	0,04	63,05	43747,51	43741,20	0,00	0,01	182,42
100L-0,8-30	42790,52	3290,31	42790,52	42790,52	0,00	0,00	38,12	42790,52	42790,52	0,00	0,00	101,23
100T-0,4-30	25271,32	3435,93	25271,32	25271,32	0,00	0,00	5,96	25271,32	25271,32	0,00	0,00	19,78
100T-0,6-30	25271,32	2457,55	25271,32	25271,32	0,00	0,00	6,33	25271,32	25271,32	0,00	0,00	21,1
100T-0,8-30	25271,32	2059,14	25271,32	25271,32	0,00	0,00	6,97	25271,32	25271,32	0,00	0,00	17,59
100L-0,2-50	130437,81	21249,75	130421,44	128476,56	0,01	1,50	125,42	130437,81	129730,18	0,00	0,54	580,39
100L-0,6-50	119319,31	6389,96	119319,31	119226,65	0,00	0,08	84,75	119319,31	119268,86	0,00	0,04	259,29
100L-0,8-50	117676,01	3889,53	117676,01	117674,98	0,00	0,00	57,93	117676,01	117673,95	0,00	0,00	139,02
100T-0,2-50	98113,77	8729,69	98113,77	98113,77	0,00	0,00	15,15	98113,77	98113,77	0,00	0,00	49,99
100T-0,4-50	98113,77	4295,65	98113,77	98113,77	0,00	0,00	16,33	98113,77	98113,77	0,00	0,00	40,51
100T-0,6-50	98113,77	3667,19	98113,77	98113,77	0,00	0,00	14,63	98113,77	98113,77	0,00	0,00	41,91
Média	—	3424,11	—	—	0,00	0,30	23,56	—	—	0,00	0,15	79,34

tos pelo método de decomposição de Benders e pelos algoritmos desenvolvidos. A escala logarítmica foi utilizada devido à diferença na ordem de grandeza dos valores obtidos. Conforme discutido anteriormente, esta figura mostra que, em todos os casos analisados, os algoritmos heurísticos registraram tempos de execução significativamente menores em comparação ao método exato e que essa diferença tende a aumentar com o tamanho das instâncias. O ILS-RVND teve os menores tempos computacionais. Este comportamento já era esperado devido ao resultado da calibração dos parâmetros indicado pelo IRACE ($iterMax = 1$) e ao fato de o critério de parada ser o número máximo de iterações sem melhora. A Figura 6.4 também mostra que as instâncias com menores valores para α são as que consomem mais tempo de processamento.

Conforme discutido no Capítulo 5, para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro, as instâncias AP com custo *tight* são menos desafiadoras do que instâncias de custo *loose*. Note que a variação de α não influen-

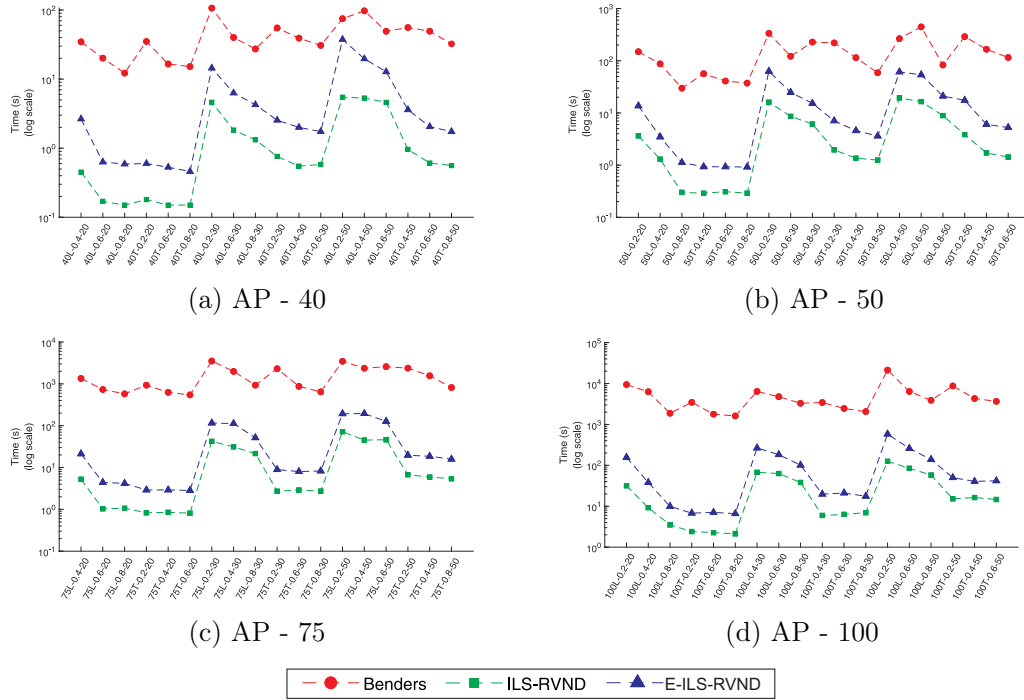


Figura 6.4: Tempo gasto pelo método de decomposição de Benders e tempos médios registrados pelos algoritmos heurísticos propostos com instâncias AP - 40 a 100 nós.

cia os valores ótimos destas instâncias, uma vez que arcos entre concentradores não são instalados na rede nestes casos. As tabelas 6.2 e 6.3 também mostram que, em geral, os algoritmos heurísticos gastam menos tempo resolvendo essas instâncias.

Portanto, os resultados apresentados nas Tabelas 6.2 e 6.3 sugerem que os dois algoritmos propostos possuem desempenho satisfatório e são muito promissores, pois são capazes de gerar boas soluções em tempos computacionais aceitáveis (de acordo com a dimensão das instâncias). Observe também que, para 58% das instâncias presentes nessas tabelas, ambos os algoritmos atingiram os valores ótimos em todas as execuções.

Para complementar a análise dos algoritmos desenvolvidos, investigamos sua convergência em algumas instâncias do conjunto de dados AP. Para esta análise, escolhemos uma instância de cada dimensão, na qual o E-ILS-RVND registrou os piores valores para os *gaps* médios reportados nas Tabelas 6.2 e 6.3. Assim, as instâncias selecionadas foram 40L-0,2-50, 50L-0,2-20, 75L-0,4-30 e 100L-0,2-20. Os resultados são exibidos na Figura 6.5, que mostra os *gaps* relativos ao valor ótimo da função objetivo em tempos de execução normalizados 0-1, sendo 0 o início dos algoritmos e 1 o fim. Para cada instância, são mostrados os resultados obtidos em 30 execuções dos algoritmos. Esta figura permite concluir que o algoritmo E-ILS-RVND possui uma convergência mais rápida e acentuada que o ILS-RVND para todas as instâncias analisadas.

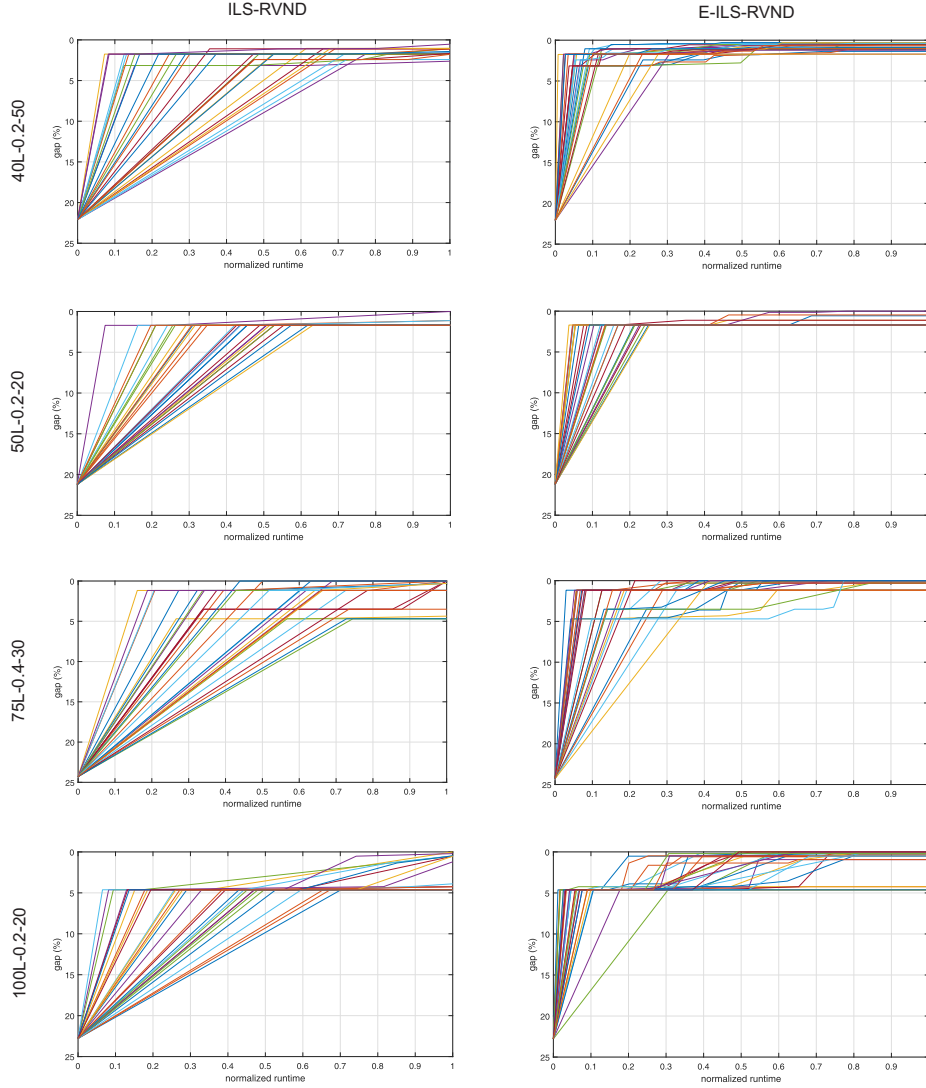


Figura 6.5: Convergência dos algoritmos propostos em algumas instâncias do conjunto de dados AP.

Para complementar os testes realizados nesta seção, são apresentados, na Seção A.4 do Apêndice A, resultados com o algoritmo ILS-RVND considerando $iterMax = 4$, ou seja, o mesmo valor utilizado para o E-ILS-RVND.

6.3.1.4 Comparação estatística dos algoritmos propostos

Para comparar os algoritmos propostos, foram realizados testes estatísticos utilizando os valores dos *gaps* médios (Δ_{avg}) obtidos para instâncias AP, com 40, 50, 75 e 100 nós. A Figura 6.6 mostra o gráfico boxplot desses valores, reportados nas Tabelas 6.2 e 6.3. Observe que a distribuição dos valores de Δ_{avg} é assimétrica para ambos os algoritmos e que o ILS-RVND possui maior variabilidade do que o E-ILS-RVND.

A Tabela 6.4 mostra os p -valores do teste de normalidade Shapiro-Wilk (Shapiro e Wilk, 1965), com 95% de confiança, aplicados aos *gaps* médios obtidos por cada

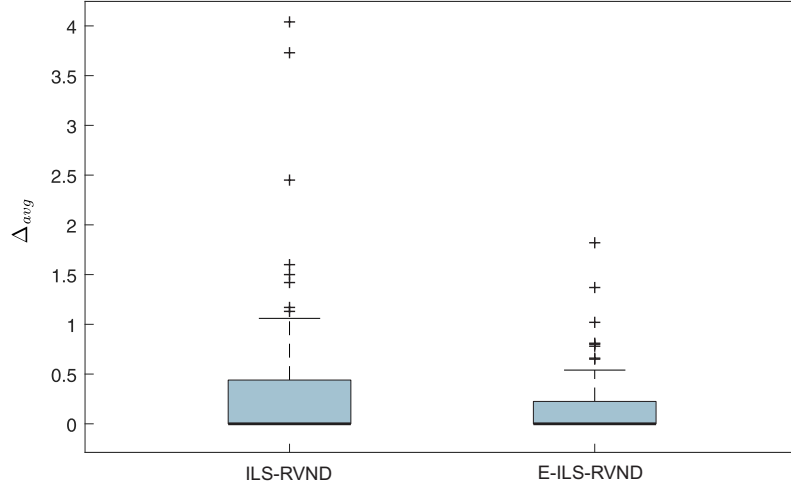


Figura 6.6: Boxplot para os *gaps* médios das instâncias AP com 40, 50, 75 e 100 nós.

algoritmo e também para a diferença desses valores. De acordo com os resultados desta tabela, a hipótese de normalidade dos dados pode ser rejeitada.

Tabela 6.4: Teste de normalidade de Shapiro-Wilk com 95% de confiança usando os valores dos *gaps* médios.

	Δ_{avg}^{ILS}	Δ_{avg}^{E-ILS}	$\Delta_{avg}^{ILS} - \Delta_{avg}^{E-ILS}$
<i>p</i> -valores	1.951e-13	8.051e-13	1.071e-14

Portanto, para analisar esses dados, foi aplicado o Teste *Paired Wilcoxon Signed-Rank* (Wilcoxon, 1945), utilizando o procedimento proposto por Pratt (Pratt, 1959) para lidar com a quantidade significativa de zeros presentes em nossos conjuntos de dados. Foi considerado um nível de confiança de 95% e as hipóteses testadas foram:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{A mediana dos } \textit{gaps} \text{ médios do ILS-RVND é igual à mediana} \\ \quad \text{dos } \textit{gaps} \text{ médios do E-ILS-RVND.} \\ H_1 : \text{A mediana dos } \textit{gaps} \text{ médios do ILS-RVND é maior do que a} \\ \quad \text{mediana dos } \textit{gaps} \text{ médios do E-ILS-RVND.} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

O *p*-valor obtido como resultado desse teste foi igual a 2.794e-09. Esse resultado significa que a hipótese nula foi rejeitada pelo teste de hipóteses e, portanto, pode-se dizer que existem evidências estatísticas, com 95% de confiança, de que o valor mediano dos *gaps* do ILS-RVND é maior do que o valor mediano dos *gaps* do E-ILS-RVND. Desse modo, concluímos que existe uma diferença significativa entre os algoritmos implementados em relação aos *gaps* médios e que os menores valores dessa estatística, e consequentemente, os melhores valores médios, foram obtidos pelo E-ILS-RVND.

Tabela 6.5: Resultados para as instâncias AP com 125 e 150 nós em uma única execução dos algoritmos heurísticos.

(a) AP - 125								(b) AP - 150									
Instâncias	Benders		ILS-RVND			E-ILS-RVND			Instâncias	Benders		ILS-RVND			E-ILS-RVND		
	Valor ótimo	Tempo (s)	Valor obtido	$\Delta(\%)$	Tempo (s)	Valor obtido	$\Delta(\%)$	Tempo (s)		Valor ótimo	Tempo (s)	Valor obtido	$\Delta(\%)$	Tempo (s)	Valor obtido	$\Delta(\%)$	Tempo (s)
125L-0.2-20	19751.55	26482.87	19659.82	0.46	113.05	19751.55	0.00	735.44	150L-0.2-20	—	mem	18739.29	—	285.22	18973.30	—	729.78
125L-0.4-20	16272.93	12272.01	16272.93	0.00	23.34	16272.93	0.00	601.82	150L-0.4-20	15557.64	30078.62	15243.01	2.02	19.55	15557.64	0.00	194.00
125L-0.6-20	15028.67	8180.95	15028.67	0.00	20.20	15028.67	0.00	77.65	150L-0.6-20	14446.68	29523.28	14446.68	0.00	29.05	14446.68	0.00	138.36
125L-0.8-20	14966.38	5693.27	14966.38	0.00	24.19	14966.38	0.00	88.84	150L-0.8-20	14434.49	13859.46	14434.49	0.00	16.76	14434.49	0.00	57.00
125T-0.2-20	7169.77	8600.38	7169.77	0.00	12.52	7169.77	0.00	17.97	150T-0.2-20	10913.35	33412.04	10913.35	0.00	16.62	10913.35	0.00	54.92
125T-0.4-20	7169.77	6907.87	7169.77	0.00	4.83	7169.77	0.00	11.31	150T-0.4-20	10913.35	21305.05	10913.35	0.00	23.89	10913.35	0.00	83.73
125T-0.6-20	7169.77	4863.38	7169.77	0.00	5.02	7169.77	0.00	14.77	150T-0.6-20	10913.35	16679.75	10913.35	0.00	15.34	10913.35	0.00	71.19
125T-0.8-20	7169.77	4306.39	7169.77	0.00	11.87	7169.77	0.00	14.57	150T-0.8-20	10913.35	15581.67	10913.35	0.00	23.77	10913.35	0.00	172.65
125L-0.2-30	54503.08	53161.89	54503.08	0.00	289.63	54503.08	0.00	1078.72	150L-0.2-30	—	mem	53534.30	—	493.97	53534.30	—	1323.67
125L-0.4-30	49301.78	21207.46	48996.37	0.62	103.80	49301.78	0.00	469.95	150L-0.4-30	—	mem	48341.55	—	423.38	48416.84	—	1505.64
125L-0.6-30	45861.48	14901.48	45006.25	0.56	114.13	45828.04	0.07	234.34	150L-0.6-30	—	43851.14	45095.07	—	182.24	45095.07	—	901.81
125L-0.8-30	44820.26	7325.15	44820.26	0.00	83.20	44820.26	0.00	175.02	150L-0.8-30	43931.25	26252.31	43931.25	0.00	105.01	43931.25	0.00	294.23
125T-0.2-30	29586.11	10352.58	29586.11	0.00	4.56	29586.11	0.00	17.85	150T-0.2-30	—	64565.21	38270.84	—	36.77	38270.84	—	118.20
125T-0.4-30	29586.11	8333.74	29586.11	0.00	3.56	29586.11	0.00	8.43	150T-0.4-30	38270.84	25887.18	38270.84	0.00	37.04	38270.84	0.00	155.21
125T-0.6-30	29586.11	6955.91	29586.11	0.00	3.92	29586.11	0.00	16.01	150T-0.6-30	38270.84	17370.94	38270.84	0.00	42.16	38270.84	0.00	270.40
125T-0.8-30	29586.11	5645.32	29586.11	0.00	5.75	29586.11	0.00	14.53	150T-0.8-30	38270.84	14019.36	38270.84	0.00	45.15	38270.84	0.00	104.52
125L-0.2-50	—	mem	129067.23	—	162.69	132339.32	—	861.93	150L-0.2-50	—	mem	131483.79	—	322.46	131798.37	—	2774.00
125L-0.4-50	126103.54	28117.28	124072.92	1.61	246.25	125672.24	0.34	381.05	150L-0.4-50	—	mem	124640.80	—	266.50	125363.36	—	1950.75
125L-0.6-50	120985.82	17584.78	121371.50	-0.32	404.60	121250.65	-0.22	408.82	150L-0.6-50	—	mem	120622.81	—	101.43	120720.20	—	869.58
125L-0.8-50	119696.69	10761.85	119696.69	0.00	61.21	119696.69	0.00	376.70	150L-0.8-50	118924.32	29908.91	118924.32	0.00	102.62	118924.32	0.00	314.40
125T-0.2-50	93251.38	16541.83	93251.38	0.00	3.97	93251.38	0.00	14.27	150T-0.2-50	—	mem	112647.50	—	46.21	112647.50	—	261.60
125T-0.4-50	93251.38	11164.57	93251.38	0.00	3.60	93251.38	0.00	21.08	150T-0.4-50	111248.30	35371.05	111248.30	0.00	62.88	111248.30	0.00	253.51
125T-0.6-50	93251.38	7742.55	93251.38	0.00	10.53	93251.38	0.00	16.11	150T-0.6-50	111248.30	25300.32	111248.30	0.00	96.22	111248.30	0.00	293.66
125T-0.8-50	93251.38	6421.03	93251.38	0.00	3.01	93251.38	0.00	12.47	150T-0.8-50	111248.30	17870.28	111248.30	0.00	80.86	111248.30	0.00	205.51
Média	—	13196.72	—	0.13	71.64	—	0.01	236.24	Média	—	27108.03	—	0.13	119.80	—	0.00	545.76

Nota. mem, 16 GB de memória excedido pelo método exato.

6.3.1.5 Resultados da Etapa 2

Nesta etapa, foram realizados experimentos computacionais utilizando as instâncias AP com 125, 150, 175 e 200 nós. Esses testes foram realizados para analisar o desempenho dos algoritmos propostos ao lidar com instâncias de maiores dimensões. Os resultados desta etapa, referentes a uma única execução dos algoritmos, são apresentados nas Tabelas 6.5 e 6.6.

A Tabela 6.5 mostra os resultados para instâncias com 125 e 150 nós. Como anteriormente, são apresentados os resultados obtidos com o método BDCFR do Capítulo 5, para as instâncias em que o algoritmo de decomposição de Benders foi capaz de resolver. Para ambos os algoritmos aqui propostos, são reportados o valor da função objetivo para a solução obtida pelo algoritmo (Valor obtido), o *gap* relativo entre o valor alcançado pelo algoritmo e o valor ótimo da função objetivo registrado pelo método exato (Δ), calculado por:

$$\Delta = 100 \times \frac{\text{Valor ótimo} - \text{Valor obtido pelo algoritmo}}{\text{Valor ótimo}}, \quad (6.6)$$

e o tempo de CPU despendido para as instâncias testadas (Tempo).

Os resultados nas Tabelas 6.5a e 6.5b mostram que os dois algoritmos desenvolvidos foram capazes de resolver todas as instâncias testadas, enquanto o método exato não resolveu 9 delas, por exceder os 16 GB de memória disponíveis. Em relação à qualidade das soluções produzidas, vê-se que o *gap* relativo à solução ótima (calculado apenas para as instâncias resolvidas pelo algoritmo de Benders) foi igual a zero para a maioria dos casos. Isso significa que os algoritmos foram capazes de obter o valor ótimo, com uma única execução, para a maioria dessas instâncias. Para a

Tabela 6.6: Resultados para as instâncias AP com 175 e 200 nós em uma única execução dos algoritmos heurísticos.

(a) AP - 175					(b) AP - 200				
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND	
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)		Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)
175L-0,2-20	19167,00	259,14	19210,26	1276,93	200L-0,2-20	17821,16	623,40	17821,16	969,42
175L-0,4-20	15657,97	278,95	15144,71	117,81	200L-0,4-20	14046,07	44,28	14046,07	110,22
175L-0,6-20	14551,17	12,91	14551,17	44,10	200L-0,6-20	13529,70	37,66	13529,70	86,63
175L-0,8-20	14551,17	29,92	14551,17	51,17	200L-0,8-20	13529,70	13,53	13529,70	45,33
175T-0,2-20	14054,94	92,60	14054,94	341,65	200T-0,2-20	7392,64	39,48	7392,64	167,61
175T-0,4-20	14054,94	83,84	14054,94	543,05	200T-0,4-20	7392,64	35,58	7392,64	250,60
175T-0,6-20	14054,94	89,37	14054,94	263,83	200T-0,6-20	7392,64	39,36	7392,64	209,99
175T-0,8-20	14054,94	159,46	14054,94	238,73	200T-0,8-20	7392,64	37,10	7392,64	257,03
175L-0,2-30	53748,27	381,50	53589,90	1250,67	200L-0,2-30	52407,80	1521,70	51673,85	2169,97
175L-0,4-30	48493,12	372,78	48493,12	698,45	200L-0,4-30	47196,18	384,77	47342,11	3458,44
175L-0,6-30	45583,63	113,52	45583,63	1088,18	200L-0,6-30	43723,12	308,19	44199,47	2211,10
175L-0,8-30	44655,02	412,45	44655,02	952,29	200L-0,8-30	43210,86	327,22	43210,86	586,86
175T-0,2-30	42592,04	271,12	42592,04	259,47	200T-0,2-30	35317,26	435,97	35317,26	949,72
175T-0,4-30	42592,04	91,71	42592,04	186,74	200T-0,4-30	35317,26	300,23	35317,26	810,99
175T-0,6-30	42592,04	86,88	42592,04	221,34	200T-0,6-30	35317,26	246,19	35317,26	559,84
175T-0,8-30	42592,04	137,67	42592,04	207,10	200T-0,8-30	35317,26	267,67	35317,26	694,00
175L-0,2-50	130316,46	794,28	131500,97	4964,69	200L-0,2-50	128770,70	565,30	130289,39	7211,59
175L-0,4-50	124929,44	555,34	125049,72	1806,91	200L-0,4-50	123258,31	993,45	123693,40	4064,11
175L-0,6-50	119295,45	351,52	121181,71	2158,86	200L-0,6-50	119353,97	156,95	119353,97	921,04
175L-0,8-50	119621,18	218,36	119621,18	804,21	200L-0,8-50	118105,97	364,34	118105,97	1141,47
175T-0,2-50	117120,33	307,13	117120,33	387,83	200T-0,2-50	109833,88	442,85	109833,88	890,81
175T-0,4-50	116629,93	274,11	116629,93	665,10	200T-0,4-50	109676,37	442,92	109676,37	935,93
175T-0,6-50	116629,93	288,14	116629,93	762,75	200T-0,6-50	109676,37	357,82	109676,37	1545,97
175T-0,8-50	116629,93	261,31	116629,93	735,57	200T-0,8-50	109676,37	904,77	109676,37	1449,05
Média	—	246,83	—	834,48	Média	—	370,45	—	1320,74

instância 125L-0,6-50, tanto o ILS-RVND quanto o E-ILS-RVND encontraram resultados melhores do que aqueles alcançados pelo método exato devido à tolerância do *gap* de otimalidade. Além disso, vemos que os tempos computacionais gastos pelos algoritmos heurísticos são muito melhores que os tempos computacionais registrados pelo método exato, especialmente para as instâncias mais complexas. Novamente, os tempos computacionais do ILS-RVND foram inferiores aos tempos computacionais do E-ILS-RVND. Por outro lado, os valores de Δ obtidos pelo E-ILS-RVND foram melhores que os obtidos pelo ILS-RVND.

A Tabela 6.6 mostra os resultados dos experimentos computacionais usando instâncias com 175 e 200 nós. São exibidos os valores da função objetivo da solução encontrada com uma única execução dos algoritmos (Valor obtido) e o tempo de processamento gasto para resolver cada instância (Tempo). Ressaltamos que o maior tamanho de instância resolvido até o momento na literatura para o PLCML, com as características consideradas neste trabalho, é de 150 nós e, por esse motivo, não há valores de referência para realizar uma comparação com os resultados aqui apresentados, como feito anteriormente. As Tabelas 6.6a e 6.6b mostram que o E-ILS-RVND obteve soluções melhores ou iguais às encontradas pelo ILS-RVND para a maioria dos casos. Este desempenho ligeiramente melhor está de acordo com as observações feitas na Subseção 6.3.1.4 relativamente à qualidade das soluções fornecidas pelos algoritmos desenvolvidos. Além disso, a versão E-ILS também registrou os maiores tempos computacionais.

6.3.2 Testes com os conjuntos de dados de Contreras et al. (2011b)

Para avaliar o desempenho e as limitações dos algoritmos propostos, foram realizados testes computacionais com um grupo de instâncias, que contém instâncias com até 500 nós. Este grupo de instâncias, proposto por Contreras et al. (2011b), consiste em três conjuntos de dados, denominados Conjuntos I, II e III. A composição desses conjuntos considera três níveis distintos para a quantidade de fluxo de demanda originado nos nós da rede: nível baixo (LL), nível médio (ML) e nível alto (HL). O fluxo total originado nos nós LL, ML e HL pertencentes aos intervalos $[1, 10]$, $[10, 100]$ e $[100, 1000]$, respectivamente. O Conjunto I é composto por 2% de nós HL, 38% de nós ML e 60% de nós LL. O Conjunto II tem 30% de nós HL, 35% de nós ML e 35% de nós LL. Finalmente, no Conjunto III, o número de nós HL, ML e LL é 0%, 1% e 99% do número total de nós, respectivamente. Foram testadas instâncias do Conjunto I com 50, 100, 200, 300, 400 e 500 nós e instâncias dos Conjuntos II e III de tamanho 50, 100, 150 e 200.

Esses conjuntos de dados fornecem a quantidade de demanda entre os pares de origem e destino (w_{ij}), o custo de transporte entre os pares de nós da rede (c_{ij}) e os custos fixos de instalação de concentradores (s_k). Para receita, foram considerados os valores $r_{ij} \in \{2, 3, 5\}$. Conforme definido para as instâncias AP, os custos fixos para instalação de arcos entre concentradores (g_{km}) foram considerados como sendo 10% da média de todos os custos fixos de instalação de concentradores, e o fator de desconto constante nos arcos entre concentradores (α) foi tomado igual a 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8.

Esta seção está dividida como segue. A Subseção 6.3.2.1 apresenta os resultados da calibração dos parâmetros dos algoritmos heurísticos, realizada com o IRACE, usando as instâncias dos conjuntos de dados de Contreras et al. (2011b). Os resultados dos testes computacionais realizados com essas instâncias são reportados na Subseção 6.3.2.2.

6.3.2.1 Calibração dos parâmetros dos algoritmos com as instâncias de Contreras et al. (2011b)

Como as características do grupo de instâncias de Contreras et al. (2011b) são diferentes daquelas apresentadas pelas instâncias AP, uma nova calibração dos parâmetros dos algoritmos foi realizada, usando o IRACE, considerando instâncias deste novo grupo. A Tabela 6.7 mostra as instâncias utilizadas na calibração.

Para a execução do IRACE foram consideradas as seguintes faixas de valores para os parâmetros: $iterMax \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $timesMax \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Foram retornados pelo IRACE os valores $iterMax = 1$, para o algoritmo ILS-RVND, e $iterMax = 4$ e

Tabela 6.7: Conjunto de instâncias de Contreras et al. (2011b) submetidas ao IRACE.

Instâncias	α	Receita
50-I	0,2	2
50-I	0,4	3
50-I	0,8	5
100-I	0,2	2
100-I	0,6	3
100-I	0,4	5

$timesMax = 2$, para o algoritmo E-ILS-RVND.

6.3.2.2 Resultados dos experimentos com as instâncias de Contreras et al. (2011b)

Os resultados dos experimentos computacionais realizados com as instâncias dos conjuntos de dados propostos por Contreras et al. (2011b) são apresentados nas Tabelas 6.8, 6.9 e 6.10, que mostram os valores obtidos e o tempo de execução de cada algoritmo para as instâncias pertencentes aos Conjuntos I, II e III, respectivamente. Esses valores referem-se a uma única execução dos algoritmos. Estas tabelas mostram também o desvio relativo entre os valores da função objetivo das soluções obtidas pelos algoritmos, dado por:

$$\Delta_{val} = 100 \times \frac{V_{E-ILS} - V_{ILS}}{V_{E-ILS}}, \quad (6.7)$$

sendo V_{E-ILS} e V_{ILS} os valores da função objetivo para as soluções obtidas com o E-ILS-RVND e o ILS-RVND, respectivamente. Conforme feito anteriormente, as instâncias utilizadas na calibração dos parâmetros foram excluídas.

Na Tabela 6.8, nota-se que os algoritmos propostos apresentaram um padrão de comportamento semelhante para todos os tamanhos de instâncias analisadas. Os valores obtidos por eles foram relativamente próximos na maioria dos casos, como pode ser visto pelos pequenos valores de Δ_{val} . Para alguns instâncias, foram obtidas soluções com o mesmo valor de função objetivo. O E-ILS-RVND obteve as melhores soluções para a maioria das instâncias. Porém, houve casos em que o ILS-RVND teve um desempenho mais satisfatório que o E-ILS-RVND, gerando valores de desvio negativos (destacados em negrito). Como esperado, o ILS-RVND obteve melhores tempos computacionais. Além disso, a diferença entre os tempos computacionais gastos pelos algoritmos torna-se mais expressiva à medida que a dimensão da instância aumenta.

Os resultados dos testes realizados com as instâncias dos Conjuntos II e III são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 6.9 e 6.10. Observações análogas sobre o

Tabela 6.8: Resultados para instâncias do Conjunto I com uma única execução dos algoritmos heurísticos.

(a) 50 nós - Conjunto I						(b) 100 nós - Conjunto I					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
50I-0,4-2	77217,69	12,50	77732,47	26,11	0,66	100I-0,4-2	790670,17	96,63	802917,07	217,16	1,53
50I-0,6-2	75114,36	9,44	75309,05	35,56	0,26	100I-0,6-2	763608,46	23,26	767157,51	54,24	0,46
50I-0,8-2	74523,89	2,44	74523,89	7,94	0,00	100I-0,8-2	745225,66	26,45	744299,04	33,10	-0,12
50I-0,2-3	137623,85	3,62	138232,96	91,80	0,44	100I-0,2-3	1423583,81	148,74	1423583,81	255,96	0,00
50I-0,6-3	131793,36	9,23	131690,02	10,08	-0,08	100I-0,4-3	1373862,17	59,13	1377298,93	581,56	0,25
50I-0,8-3	131008,19	2,02	131128,35	29,06	0,09	100I-0,8-3	1318680,89	48,65	1321552,28	114,17	0,22
50I-0,2-5	250906,19	30,14	251181,08	48,05	0,11	100I-0,2-5	2572347,52	66,58	2572347,52	324,51	0,00
50I-0,4-5	246669,11	10,23	247185,38	28,90	0,21	100I-0,6-5	2490303,08	98,75	2490303,08	130,72	0,00
50I-0,6-5	244292,56	7,43	244761,96	43,12	0,19	100I-0,8-5	2467444,60	11,91	2468371,23	78,70	0,04
Média	—	9,67	—	35,62	0,21	Média	—	64,46	—	198,90	0,26

(c) 200 nós - Conjunto I						(d) 300 nós - Conjunto I					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
200I-0,2-2	4631395,48	1529,50	4666588,74	5018,50	0,75	300I-0,2-2	3526706,83	1509,78	3524133,20	8780,41	-0,07
200I-0,4-2	4421528,73	707,08	4422849,27	4981,46	0,03	300I-0,4-2	3353065,27	960,52	3377016,49	16822,64	0,71
200I-0,6-2	4298026,62	821,67	4298026,62	2072,66	0,00	300I-0,6-2	3272038,48	3787,93	3277996,23	8675,06	0,18
200I-0,8-2	4243732,28	272,03	4243732,28	714,44	0,00	300I-0,8-2	3241783,16	596,07	3241783,16	2786,03	0,00
200I-0,2-3	7720479,41	1149,81	7751553,83	9681,17	0,40	300I-0,2-3	5985630,44	6375,69	6007718,34	25574,22	0,37
200I-0,4-3	7515014,17	830,14	7536319,93	5664,98	0,28	300I-0,4-3	5829035,93	1710,54	5855920,97	23611,59	0,46
200I-0,6-3	7409976,78	1520,70	7399117,69	1229,63	-0,15	300I-0,6-3	5731890,56	2727,01	5735910,27	11872,46	0,07
200I-0,8-3	7355682,44	591,09	7355682,44	927,59	0,00	300I-0,8-3	5710595,42	712,84	5710595,42	10149,97	0,00
200I-0,2-5	13909304,25	939,88	13999838,74	5683,88	0,65	300I-0,2-5	10933143,60	6475,64	10936100,20	15935,69	0,03
200I-0,4-5	13746009,64	1705,43	13752003,98	7757,97	0,04	300I-0,4-5	10778553,38	2060,72	10771288,78	17978,79	-0,07
200I-0,6-5	13622747,37	597,73	13633877,10	2492,49	0,08	300I-0,6-5	10668308,95	1207,74	10677969,98	7973,00	0,09
200I-0,8-5	13579582,75	256,31	13579582,75	1203,51	0,00	300I-0,8-5	10643731,41	4286,06	10648219,93	5029,38	0,04
Média	—	910,11	—	3952,36	0,17	Média	—	2700,88	—	12932,44	0,15

(e) 400 nós - Conjunto I						(f) 500 nós - Conjunto I					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
400I-0,2-2	10989150,28	50772,17	11086081,53	88276,80	0,87	500I-0,2-2	18188071,64	13011,14	18272245,67	34574,73	0,46
400I-0,4-2	10393134,66	24761,86	10452267,96	34680,14	0,57	500I-0,4-2	17462617,99	32533,31	17449106,51	32974,28	-0,08
400I-0,6-2	10135089,81	23951,83	10142039,10	15850,21	0,07	500I-0,6-2	16867449,69	14447,20	16890954,22	37708,11	0,14
400I-0,8-2	10026350,29	4844,62	10026350,29	8737,47	0,00	500I-0,8-2	16714075,60	4167,47	16745516,47	22799,63	0,19
400I-0,2-3	18502620,72	15377,89	18469380,75	50390,81	-0,18	500I-0,2-3	30587171,24	25850,80	30654613,37	71533,96	0,22
400I-0,4-3	17838839,26	2116,92	17983702,96	79472,15	0,81	500I-0,4-3	29836179,86	36600,85	29804132,93	50084,30	-0,11
400I-0,6-3	17614319,97	19848,56	17635370,90	29278,07	0,12	500I-0,6-3	29253593,32	11410,05	29273321,92	46675,58	0,07
400I-0,8-3	17550611,66	2903,55	17529294,36	10064,29	-0,12	500I-0,8-3	29127884,17	7334,69	29127884,17	19586,55	0,00
400I-0,2-5	33515907,53	16914,60	33584583,49	177312,48	0,20	500I-0,2-5	55419348,77	3564,65	55505871,34	122510,53	0,16
400I-0,4-5	32973773,25	17349,76	32994369,21	30014,38	0,06	500I-0,4-5	54596209,60	26141,31	54596209,60	60603,05	0,00
400I-0,6-5	32608910,67	9712,87	32650871,30	26434,39	0,13	500I-0,6-5	54014552,79	19699,53	54058234,26	110677,72	0,08
400I-0,8-5	32556499,79	4766,40	32556499,79	9751,93	0,00	500I-0,8-5	53892619,56	10684,33	53892619,56	18532,87	0,00
Média	—	16110,09	—	46688,59	0,21	Média	—	17120,44	—	52355,11	0,09

desempenho dos algoritmos na resolução das instâncias do Conjunto I podem ser feitas para estes dois conjuntos. Os valores da função objetivo das soluções encontradas pelos algoritmos para cada instância são muito próximos. As melhores soluções foram alcançadas pelo E-ILS-RVND, exceto para aqueles valores correspondentes a Δ_{val} negativos (destacados em negrito). Os tempos de execução mais curtos foram obtidos pelo ILS-RVND.

Os experimentos com esses três conjuntos de dados, que incluem instâncias de grande escala, mostram que os dois algoritmos heurísticos propostos possuem um bom desempenho computacional e foram capazes de gerar soluções para todas as instâncias testadas em tempos computacionais razoáveis. Os resultados obtidos estão de acordo com a análise estatística realizada anteriormente, na qual se destacou o E-ILS-RVND,

Tabela 6.9: Resultados para instâncias do Conjunto II com uma única execução dos algoritmos heurísticos.

(a) 50 nós - Conjunto II						(b) 100 nós - Conjunto II					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
50II-0,2-2	1078493,97	15,90	1096305,43	142,03	1,62	100II-0,2-2	6032852,76	276,26	6062719,60	1458,89	0,49
50II-0,4-2	1044987,43	10,18	1043044,74	21,37	-0,19	100II-0,4-2	5700582,26	287,03	5731602,73	531,37	0,54
50II-0,6-2	1010804,75	22,66	1011266,51	44,23	0,05	100II-0,6-2	5513735,77	143,62	5503613,22	288,17	-0,18
50II-0,8-2	997795,36	9,58	997795,36	19,40	0,00	100II-0,8-2	5410472,43	41,46	5410472,43	133,43	0,00
50II-0,2-3	1820504,31	125,74	1823909,08	210,25	0,19	100II-0,2-3	10115922,05	419,81	10153544,95	471,66	0,37
50II-0,4-3	1769953,82	35,24	1766775,85	101,03	-0,18	100II-0,4-3	9790236,13	192,09	9857119,23	671,12	0,68
50II-0,6-3	1734535,86	27,18	1734997,62	35,12	0,03	100II-0,6-3	9589165,47	43,62	9618581,28	464,94	0,31
50II-0,8-3	1721526,47	6,98	1721526,47	12,68	0,00	100II-0,8-3	9520971,77	52,79	9520971,77	111,78	0,00
50II-0,2-5	3270816,56	77,16	3267966,53	93,45	-0,09	100II-0,2-5	18378814,61	164,11	18404782,60	1011,73	0,14
50II-0,4-5	3216180,76	14,38	3217416,05	67,02	0,04	100II-0,4-5	18031300,81	82,64	18051863,15	223,52	0,11
50II-0,6-5	3178256,69	8,13	3181998,08	50,90	0,12	100II-0,6-5	17821888,65	139,92	17835111,24	582,99	0,07
50II-0,8-5	3168988,70	6,14	3168988,70	12,65	0,00	100II-0,8-5	17722352,97	97,61	17741970,45	268,55	0,11
Média	—	29,94	—	67,51	0,13	Média	—	161,75	—	518,18	0,22

(c) 150 nós - Conjunto II						(d) 200 nós - Conjunto II					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
150II-0,2-2	12993821,36	438,22	13143130,27	1106,36	1,14	200II-0,2-2	27259702,02	703,09	27482530,69	7053,16	0,81
150II-0,4-2	12395244,13	260,83	12512091,88	1307,95	0,93	200II-0,4-2	26215802,33	1717,40	26234968,77	5831,13	0,07
150II-0,6-2	11959400,21	266,65	11959400,21	147,94	0,00	200II-0,6-2	25408802,54	623,38	25543771,95	2102,02	0,53
150II-0,8-2	11747054,03	110,24	11766006,72	163,22	0,16	200II-0,8-2	25335140,22	831,89	25335140,22	1427,59	0,00
150II-0,2-3	22039402,89	755,68	22157343,46	2837,30	0,53	200II-0,2-3	46052260,84	1177,19	46087937,66	1603,46	0,08
150II-0,4-3	21519169,05	1543,64	21511651,27	1618,10	-0,03	200II-0,4-3	44874854,65	635,49	45028459,52	14027,97	0,34
150II-0,6-3	20931032,34	164,82	21049480,90	1087,10	0,56	200II-0,6-3	44260313,73	871,73	44215871,55	4852,86	-0,10
150II-0,8-3	20833281,45	402,06	20833281,45	626,38	0,00	200II-0,8-3	44094798,10	540,85	44094798,10	1434,80	0,00
150II-0,2-5	40122708,87	477,42	40228677,37	2947,76	0,26	200II-0,2-5	83639643,44	4908,87	83738733,15	3459,27	0,12
150II-0,4-5	39383521,04	216,89	39567597,54	1102,17	0,47	200II-0,4-5	82365303,87	1647,57	82542766,58	4133,30	0,21
150II-0,6-5	39032042,94	177,78	39097909,39	751,96	0,17	200II-0,6-5	81785397,85	2101,31	81730036,45	2804,91	-0,07
150II-0,8-5	38819696,76	113,87	38881709,94	903,16	0,16	200II-0,8-5	81610893,36	464,84	81614113,85	881,48	0,00
Média	—	410,68	—	1216,62	0,36	Média	—	410,68	—	4134,33	0,17

gerando os melhores valores para a função objetivo.

Por fim, vale a pena comparar os resultados obtidos entre as instâncias AP e as instâncias de [Contreras et al. \(2011b\)](#). No conjunto de dados AP, várias instâncias tiveram valores de FO coincidentes (notadamente aquelas com custo *tight* (T) e algumas com α igual a 0,6 e 0,8). Esta particularidade não é observada para as instâncias dos Conjuntos I, II e III, o que sugere que as instâncias destes conjuntos são mais desafiadoras para o problema de localização de concentradores com maximização do lucro do que as instâncias pertencentes ao conjunto de dados AP. De fato, estes conjuntos de dados apresentam diferenças significativas no que diz respeito à quantidade de fluxo que é enviada entre os nós da rede e aos custos fixos de instalação dos concentradores.

Tabela 6.10: Resultados para instâncias do Conjunto III com uma única execução dos algoritmos heurísticos.

(a) 50 nós - Conjunto III						(b) 100 nós - Conjunto III					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
50III-0,2-2	206070,12	54,53	204814,51	108,80	-0,61	100III-0,2-2	821985,68	190,02	821985,68	764,54	0,00
50III-0,4-2	195110,04	24,23	194643,67	30,84	-0,24	100III-0,4-2	766259,28	40,87	778776,32	853,59	1,61
50III-0,6-2	186661,14	3,03	187467,18	25,07	0,43	100III-0,6-2	744751,66	102,20	744751,66	398,01	0,00
50III-0,8-2	185035,52	4,65	185237,56	28,02	0,11	100III-0,8-2	736015,82	42,63	737607,81	85,90	0,22
50III-0,2-3	344245,94	33,31	344245,94	125,87	0,00	100III-0,2-3	1384128,42	169,92	1384128,42	344,65	0,00
50III-0,4-3	333285,86	32,42	332290,02	31,02	-0,30	100III-0,4-3	1339705,40	255,55	1340919,06	2097,45	0,09
50III-0,6-3	324882,00	6,16	325653,38	57,37	0,24	100III-0,6-3	1308783,64	98,69	1310031,95	430,14	0,10
50III-0,8-3	323413,39	7,94	323413,39	34,36	0,00	100III-0,8-3	1300454,66	237,65	1300454,66	191,14	0,00
50III-0,2-5	620597,59	22,33	620597,59	90,41	0,00	100III-0,2-5	2501885,36	230,74	2508413,88	380,90	0,26
50III-0,4-5	608641,66	6,02	609637,50	113,92	0,16	100III-0,4-5	2463321,44	170,61	2465204,52	592,98	0,08
50III-0,6-5	601994,65	4,97	602025,73	119,05	0,01	100III-0,6-5	2428706,43	96,73	2433069,11	432,40	0,18
50III-0,8-5	599765,03	8,29	599562,99	16,90	-0,03	100III-0,8-5	2424036,00	43,10	2422444,01	99,13	-0,07
Média	—	17,32	—	65,14	-0,02	Média	—	139,89	—	555,90	0,20

(c) 150 nós - Conjunto III						(d) 200 nós - Conjunto III					
Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}	Instâncias	ILS-RVND		E-ILS-RVND		Δ_{val}
	Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)			Valor obtido	Tempo (s)	Valor obtido	Tempo (s)	
150III-0,2-2	1816108,28	198,68	1837952,93	1435,73	1,19	200III-0,2-2	3287020,50	3891,22	3296392,35	5347,91	0,28
150III-0,4-2	1742566,28	199,00	1741313,53	802,50	-0,07	200III-0,4-2	3115130,24	1388,61	3128868,02	4515,90	0,44
150III-0,6-2	1691635,18	406,03	1688475,83	496,41	-0,19	200III-0,6-2	3027751,46	2238,30	3038468,03	3228,81	0,35
150III-0,8-2	1672855,05	165,68	1672855,05	386,76	0,00	200III-0,8-2	3015236,04	677,83	3015236,04	1445,20	0,00
150III-0,2-3	3105575,58	191,46	3104569,82	5193,47	-0,03	200III-0,2-3	5528795,05	3428,22	5559956,49	10774,30	0,56
150III-0,4-3	3009834,15	492,85	3005651,07	1005,43	-0,14	200III-0,4-3	5356800,18	548,25	5375750,42	2331,35	0,35
150III-0,6-3	2938302,93	695,78	2951480,04	1194,76	0,45	200III-0,6-3	5275152,19	286,75	5276216,22	3563,94	0,02
150III-0,8-3	2935859,26	157,95	2935859,26	980,58	0,00	200III-0,8-3	5271114,82	1306,36	5271114,82	674,14	0,00
150III-0,2-5	5605120,90	186,33	5635617,46	4395,90	0,54	200III-0,2-5	10027239,89	2960,32	10036025,67	5887,79	0,09
150III-0,4-5	5504566,90	150,13	5537871,05	3130,22	0,60	200III-0,4-5	9898139,41	2384,27	9896954,40	29780,17	-0,01
150III-0,6-5	5469178,02	142,88	5476281,28	2127,86	0,13	200III-0,6-5	9794379,70	2065,62	9806104,38	3180,40	0,12
150III-0,8-5	5461867,67	355,42	5461867,67	512,64	0,00	200III-0,8-5	9782872,38	376,98	9782872,38	893,87	0,00
Média	—	278,52	—	1805,19	0,21	Média	—	1796,06	—	5968,65	0,18

6.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados dois algoritmos heurísticos baseados em busca local e trocas sistemáticas de estruturas de vizinhança para lidar com o PLCML não capacitado e com rede incompleta. O primeiro algoritmo, denominado ILS-RVND, é uma versão clássica da metaheurística ILS que utiliza o RVND como método de busca local. O segundo, denominado E-ILS-RVND, é uma versão aprimorada do ILS, que executa uma maior intensificação nas regiões de busca. Vários experimentos computacionais foram realizados com conjuntos de dados de referência da área de localização de concentradores. Também foi realizada uma análise das estruturas de vizinhança utilizadas nos algoritmos propostos e apresentada uma comparação estatística dos algoritmos desenvolvidos.

Os resultados dos experimentos computacionais mostraram que ambos os algoritmos propostos possuem um bom desempenho e foram capazes de resolver instâncias com até 500 nós. Para o grupo de instâncias do conjunto de dados AP resolvidas com método de decomposição de Benders no Capítulo 5 (incluindo instâncias com até 150 nós), constatou-se que ambos os algoritmos atingiram a otimalidade para a maioria dos casos em tempos muito mais curtos. Notavelmente, essa diferença de tempos é mais expressiva na resolução de instâncias mais complexas e aumenta

significativamente com o número de nós na rede.

Considerando os parâmetros indicados na calibração com IRACE, o E-ILS-RVND obteve, em geral, melhores soluções que o ILS-RVND, conforme indicado pela análise estatística apresentada. Além disso, como visto na Figura 6.5, ele foi mais rápido nos testes de convergência. Por outro lado, o ILS-RVND registrou os menores tempos computacionais.

Um conjunto adicional de experimentos foi realizado para executar o algoritmo ILS-RVND com o mesmo número de iterações indicado pelo IRACE para o algoritmo E-ILS-RVND. De acordo com os resultados deste experimento, apresentados na Seção A.4 do Apêndice A, houve uma melhora na qualidade média das soluções obtidas com este algoritmo, apesar do aumento do tempo de execução. Contudo, como o PLCML é um problema de planejamento estratégico, o critério mais significativo para escolher um procedimento de solução é a obtenção de soluções de boa qualidade. Portanto, considerando que, em uma aplicação real, um maior número de iterações pode ser realizado para melhorar a qualidade das soluções, concluímos que ambos os algoritmos são igualmente promissores para resolver instâncias do PLCML que não podem ser resolvidas por métodos exatos.

Por fim, a análise das estruturas de vizinhança demonstrou que a utilização conjunta das seis estruturas de vizinhanças, tal como implementadas nos algoritmos propostos, permitiu obter melhores resultados.

Capítulo 7

Problema de Localização de Concentradores com Maximização do Lucro sob Incerteza

Este capítulo aborda o problema de localização de concentradores com maximização de lucro, considerando incerteza nas demandas e nos custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores. Na Seção 7.1 é realizada uma introdução ao capítulo. Uma formulação robusta para o problema, obtida com a abordagem proposta por [Bertsimas e Sim \(2003\)](#) é apresentada na Seção 7.2. A Seção 7.3 descreve os procedimentos de solução adotados para resolver o problema robusto. Os resultados dos experimentos computacionais são relatados na Seção 7.4. Por fim, as considerações finais são apresentadas na Seção 7.5.

7.1 Introdução

O projeto de uma rede de concentradores envolve muitas decisões estratégicas. De acordo com a área de aplicação, essas decisões podem estar associadas a altos investimentos financeiros e, conseqüentemente, precisam ser mantidas por um período de tempo considerável. No entanto, durante esse período, causas imprevisíveis podem levar a mudanças nas condições operacionais e estruturais da rede. Por exemplo, a quantidade de demanda pode ser maior ou menor do que seu valor esperado, a topologia da rede pode ser modificada devido a questões políticas, geográficas ou ambientais, impactando diretamente nos custos de instalação dos concentradores e dos arcos entre concentradores. Nessas condições, tratar apenas o modelo determinístico do problema pode resultar em decisões equivocadas e onerosas. Portanto, considerar questões de incerteza nos processos de decisão inerentes aos problemas de localiza-

ção de concentradores se faz necessário para obtenção de modelos mais confiáveis e realistas.

A otimização com considerações de incerteza geralmente é abordada na literatura segundo duas correntes de pesquisa: otimização estocástica e otimização robusta. Na otimização estocástica, os parâmetros incertos são descritos através de distribuições de probabilidade conhecidas e essas distribuições podem ser usadas para otimizar o valor da função objetivo. Na otimização robusta, por outro lado, nenhuma informação probabilística sobre os parâmetros incertos é disponibilizada. Neste caso, a incerteza nos dados pode ser descrita usando um conjunto finito de cenários ou pode ser modelada assumindo que os valores dos parâmetros incertos pertencem a intervalos predefinidos.

Neste trabalho, são utilizadas ferramentas e técnicas da otimização robusta para lidar com o PLCML que considera incerteza nas demandas entre os pares de origem e destino e nos custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores. A metodologia adotada é baseada na abordagem proposta por [Bertsimas e Sim \(2003\)](#), descrita na Seção 3.4 do Capítulo 3. É apresentado um modelo robusto para o problema, o qual permite controlar o grau de conservadorismo da solução. Para resolver este modelo foram desenvolvidos dois métodos: (i) um método exato de decomposição de Benders, que foi adaptado da melhor versão (BDCFR) identificada nos experimentos computacionais do Capítulo 5 realizados com o problema determinístico; (ii) um algoritmo heurístico baseado em busca local e troca sistemática de estruturas de vizinhança, adaptado do algoritmo E-ILS-RVND do Capítulo 6, que também foi utilizado para resolver o caso determinístico do problema.

Vários experimentos computacionais foram realizados para investigar o desempenho dos métodos propostos. Foram utilizadas as instâncias do conjunto de dados CAB (apresentado na Seção 4.4.1), o conjunto de dados AP (detalhado na Seção 5.3.1) e os conjuntos de dados disponibilizado por [Contreras et al. \(2011b\)](#) (descritos na Seção 6.3.2). Os resultados obtidos comprovam a boa performance dos métodos empregados. Com o método exato, foram resolvidas instâncias do problema com até 150 nós. Por outro lado, com o algoritmo heurístico, foram encontradas soluções para instâncias contendo até 500 nós.

Além disso, análises são fornecidas a fim de investigar o impacto que a incerteza na demanda e nos custos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores provoca na configuração da rede e como alteram o valor da função objetivo, ou seja, como a incerteza nesses parâmetros influencia o lucro da rede.

Por fim, vale ressaltar que este é o primeiro trabalho a abordar questões de incerteza para o problema de localização de concentradores com as características aqui consideradas (detalhadas na Seção 4.1). Como visto na Seção 2.3, o único trabalho

da literatura com objetivo voltado ao lucro e que incorpora incerteza nos dados é o de [Taherkhani et al. \(2021\)](#). Nesse estudo, os autores trataram um PLC capacitado, no qual a receita e as demandas foram consideradas incertas. Eles propuseram modelos robusto-estocásticos e desenvolveram um método de decomposição de Benders especializado para resolver instâncias do problema com até 75 nós.

7.2 Formulação robusta para o PLCML

A estratégia de otimização robusta adotada neste trabalho é baseada no estudo de [Bertsimas e Sim \(2003\)](#) (veja a Seção 3.4). Ao contrário do modelo de [Soyster \(1973\)](#), que atribui aos parâmetros incertos seus piores valores, nesta abordagem assume-se que apenas um subconjunto desses parâmetros se desviará de seus valores nominais, de modo a impactar adversamente a solução do problema. Esse procedimento permite obter cenários menos conservadores e mais reais, uma vez que é improvável que todos os parâmetros incertos assumam seus piores valores simultaneamente.

Uma solução ótima robusta para o PLCML abordado nesta tese fornece uma boa estimativa da rentabilidade associada à implantação e operação da rede de concentradores. A obtenção de uma solução robusta é importante, por exemplo, no projeto de redes de transporte aéreo. Essas redes frequentemente precisam ser modificadas, devido a fatores internos e externos ao mercado, como oscilação na demanda e readequação de rotas. Desse modo, a relação entre receita e custo é essencial para a viabilidade e manutenção desse tipo de rede.

A formulação robusta para o PLCML, apresentada a seguir, foi desenvolvida com base na Formulação 2 (descrita na Seção 4.2.2 do Capítulo 4), obtida para a versão determinística do problema. Desse modo, a formulação robusta faz uso das variáveis binárias para localização dos concentradores (h_k) e arcos entre concentradores (z_{km}) e das variáveis que mapeiam fluxo na rede ($a_{ijk}, b_{ijm}, x_{ijkm}$) utilizadas na Formulação 2, além de incorporar todas as suas restrições.

Sejam $W = \{(i, j) : i, j \in N\}$ o conjunto dos pares de nós de demanda e $E = \{(k, m) : k, m \in N, m \neq k \text{ e } h_k = h_m = 1\}$ o conjunto de arestas conectando os concentradores. Considere as variáveis aleatórias $\tilde{w}_{ij}$ como a demanda a ser roteada entre os pares $(i, j) \in W$; $\tilde{s}_k$ como o custo fixo de instalação de um concentrador $k \in N$; e $\tilde{g}_{km}$ como o custo fixo de instalação de um arco entre concentradores $(k, m) \in E$, tomando valores nos intervalos $[w_{ij} - \hat{w}_{ij}, w_{ij} + \hat{w}_{ij}]$, $[s_k - \hat{s}_k, s_k + \hat{s}_k]$ e $[g_{km} - \hat{g}_{km}, g_{km} + \hat{g}_{km}]$, respectivamente. Considere também $\Gamma \in [0, |W \cup N \cup E|]$ um parâmetro real, representando o *budget* de incerteza, que controla o número de coeficientes que terão seus valores nominais alterados. É importante notar que, embora os parâmetros da demanda $\tilde{w}_{ij}$ e os parâmetros dos custos fixos de instalação de concentradores $\tilde{s}_k$ e de

arcos entre concentradores $\tilde{g}_{km}$ tenham sido inseridos no mesmo *budget* de incerteza, esta abordagem permite analisar casos separados, no qual existem incertezas apenas em alguns destes parâmetros, como, por exemplo, apenas na demanda ou apenas nos custos de configuração da rede.

O parâmetro Γ é usado para controlar o nível de robustez nos coeficientes $\tilde{w}_{ij}$, $\tilde{s}_k$ e $\tilde{g}_{km}$. Um valor mais baixo para Γ resulta em uma solução menos conservadora, enquanto, inversamente, um valor mais elevado produz uma solução totalmente avessa ao risco, ou seja, uma solução muito conservadora. Na abordagem de [Bertsimas e Sim \(2003\)](#), esse parâmetro indica que pelo menos $\lfloor \Gamma \rfloor$ coeficientes incertos podem assumir seu valor inferior (pior), enquanto um único parâmetro pode desviar apenas uma fração de $(\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor)$ de seu valor nominal. A formulação robusta para o PLCML, considerada neste trabalho, pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk} - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm} - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha C_{km} x_{ijkm} \right] - \sum_{k \in N} s_k h_k - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} \\
& + \min_{\substack{\{S_w \cup S_s \cup S_g \subset W \cup N \cup E: \\ |S_w \cup S_s \cup S_g| = \lfloor \Gamma \rfloor\}}} \left\{ \sum_{(i,j) \in S_w} (-\hat{w}_{ij}) \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk} - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm} - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha C_{km} x_{ijkm} \right] \right. \\
& - \sum_{k \in S_s} \hat{s}_k h_k - \sum_{(k,m) \in S_g} \hat{g}_{km} z_{km} + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \min \left\{ \min_{\{(u,v) \in W \setminus S_w\}} \left\{ (-\hat{w}_{uv}) \left[\sum_{k \in N} (r_{uv} - c_{uk}) a_{uvk} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{m \in N} c_{vj} b_{uvm} - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha C_{km} x_{uvkm} \right] \right\}, \min_{\{l \in N \setminus S_s\}} \{-\hat{s}_l h_l\}, \min_{\{(p,q) \in E \setminus S_g\}} \{-\hat{g}_{pq} z_{pq}\} \right\} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\text{suj. a } (4.6) - (4.9), (4.13) - (4.21) \tag{7.2}$$

sendo $S_w \subset W$, $S_s \subset N$, $S_g \subset E$.

A função objetivo visa maximizar o pior valor de função objetivo de acordo com um determinado *budget* de incerteza. Este modelo de otimização robusto fornece uma estimativa do lucro total real da rede de concentradores obtido com os pares de origem e destino que foram selecionados para serem atendidos.

A formulação (7.1)-(7.2) é um problema de programação inteira mista não linear, que é mais difícil de ser resolvido que o problema nominal representado pela Formulação 2. As não linearidades decorrem do subproblema de minimização interno na função objetivo (7.1). No entanto, esse modelo pode ser linearizado, substituindo o subproblema de minimização interno por sua contraparte linear. Para um vetor de variáveis factíveis $(h^t, z^t, a^t, b^t, x^t)$, o subproblema de minimização interno na função objetivo (7.1) pode ser representado por meio da seguinte função:

$$\begin{aligned}
\beta(h^t, z^t, a^t, b^t, x^t) = & \min_{\substack{S_w \cup S_s \cup S_g \subset W \cup N \cup E: \\ |S_w \cup S_s \cup S_g| = \lfloor \Gamma \rfloor}} \left\{ \sum_{(i,j) \in S_w} (-\hat{w}_{ij}) \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk}^t - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm}^t \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{ijkm}^t \right] - \sum_{k \in S_s} \hat{s}_k h_k^t - \sum_{(k,m) \in S_g} \hat{g}_{km} z_{km}^t + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \min \left\{ \right. \right. \\
& \min_{(u,v) \in W \setminus S_w} \left\{ (-\hat{w}_{uv}) \left[\sum_{k \in N} (r_{uv} - c_{uk}) a_{uvk}^t - \sum_{m \in N} c_{vm} b_{uvkm}^t - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{uvkm}^t \right] \right\}, \\
& \left. \left. \min_{l \in N \setminus S_s} \{-\hat{s}_l h_l^t\}, \min_{(p,q) \in E \setminus S_g} \{-\hat{g}_{pq} z_{pq}^t\} \right\} \right\}, \quad (7.3)
\end{aligned}$$

O valor de β pode ser calculado com a ajuda das seguintes definições e variáveis. Seja $S_w^* \cup S_s^* \cup S_g^* \cup \{e^*\}$ uma solução ótima associada com a função de minimização interna anterior, em que $S_w^* \cup S_s^* \cup S_g^* \subset W \cup N \cup E$, com $|S_w^* \cup S_s^* \cup S_g^*| < \Gamma$, corresponde aos $\lfloor \Gamma \rfloor$ parâmetros assumindo seus piores valores e $e^* \in (W \cup N \cup E) \setminus (S_w^* \cup S_s^* \cup S_g^*)$ corresponde ao único parâmetro tomando a fração de $(\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor)$ do seu valor nominal. Defina também as variáveis $0 \leq v_{ij}^w \leq 1, (i,j) \in W, 0 \leq v_k^s \leq 1, k \in N$ e $0 \leq v_{km}^g \leq 1, (k,m) \in E$ para representar a quantidade ótima que os correspondentes valores nominais das demandas w_{ij} , dos custos fixos de instalação de concentradores s_k e dos custos fixos de instalação de arcos entre concentradores g_{km} podem variar dentro do intervalo de incerteza, respectivamente. Quando v_{ij}^w, v_k^s e v_{km}^g são iguais a 0, significa que o parâmetro correspondente não sofreu variação em relação ao seu valor nominal; por outro lado, se qualquer uma dessas variáveis for igual a 1, significa que o referido parâmetro atingiu seu pior valor possível, isto é, o parâmetro de demanda atinge seu menor valor e os parâmetros dos custos fixos assumem seus maiores valores. Desse modo, para cada vetor de solução $(h^t, z^t, a^t, b^t, x^t)$, o seguinte problema linear para calcular o valor de β pode ser obtido:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j) \in W} (-\hat{w}_{ij} v_{ij}^w) \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk}^t - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm}^t - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{ijkm}^t \right] \\
& - \sum_{k \in N} \hat{s}_k v_k^s h_k^t - \sum_{(k,m) \in E} \hat{g}_{km} v_{km}^g z_{km}^t \quad (7.4)
\end{aligned}$$

$$\text{suj. a} \quad \sum_{(i,j) \in W} v_{ij}^w + \sum_{k \in N} v_k^s + \sum_{(k,m) \in E} v_{km}^g \leq \Gamma \quad (7.5)$$

$$0 \leq v_{ij}^w \leq 1 \quad \forall (i,j) \in W \quad (7.6)$$

$$0 \leq v_k^s \leq 1 \quad \forall k \in N \quad (7.7)$$

$$0 \leq v_{km}^g \leq 1 \quad \forall (k,m) \in E, \quad (7.8)$$

em que a restrição (7.5) garante que a variação total dos parâmetros de seus valores nominais não exceda o *budget* de incerteza Γ .

Proposição 7.2.1. *O problema (7.4)-(7.8) pode ser resolvido por inspeção.*

Demonstração. Seja C_{ij}^* o caminho com menor custo do nó i para o nó j . O problema (7.4)-(7.8) pode ser facilmente resolvido ordenando os parâmetros $-\hat{w}_{ij}(r_{ij} - C_{ij}^*)$, $-\hat{s}_k$ e $-\hat{g}_{km}$ em uma ordem crescente, de modo a obter uma lista ordenada com os índices desses parâmetros dada por $V = \{(i,j), k, (k,m) : (i,j) \in W, k \in N, (k,m) \in E\}$. Então, os valores ótimos das variáveis v_{ij}^w, v_k^s e v_{km}^g podem ser obtidos com os três passos a seguir: (i) para os $\lfloor \Gamma \rfloor$ primeiros índices e de V , defina as variáveis $v_e = 1$; (ii) Para o índice na posição $(\lfloor \Gamma \rfloor + 1)$ da lista V , defina a variável $v_e = \Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor$; (iii) Para o restante das variáveis, considere $v_e = 0$. $\square$

Da teoria de dualidade, o problema linear (7.4)-(7.8) tem um problema linear dual associado a ele, que tem o mesmo valor ótimo para a função objetivo, desde que o problema primal possua uma solução ótima. Logo, o valor de $\beta(h^t, z^t, a^t, b^t, x^t)$ também pode ser obtido por meio do dual do problema (7.4)-(7.8). Associando a variável $q \geq 0$ para a restrição (7.5), e as variáveis $p_{ij}^w \geq 0, (i,j) \in W$, $p_k^s \geq 0, k \in N$ e $p_{km}^g, (k,m) \in E$ para as restrições (7.6), (7.7) e (7.8), respectivamente, o dual pode ser escrito como

$$\max \quad -q\Gamma - \sum_{(i,j) \in W} p_{ij}^w - \sum_{k \in N} p_k^s - \sum_{(k,m) \in E} p_{km}^g \quad (7.9)$$

$$\text{sujeito a} \quad -q - p_{ij}^w \leq -\hat{w}_{ij} \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk}^t - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm}^t - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{ijkm}^t \right] \quad \forall (i,j) \in W \quad (7.10)$$

$$-q - p_k^s \leq -\hat{s}_k h_k^t \quad \forall k \in N \quad (7.11)$$

$$-q - p_{km}^g \leq -\hat{g}_{km} z_{km}^t \quad \forall (k,m) \in E \quad (7.12)$$

$$q \geq 0 \quad (7.13)$$

$$p_{ij}^w \geq 0 \quad \forall (i,j) \in W \quad (7.14)$$

$$p_k^s \geq 0 \quad \forall k \in N \quad (7.15)$$

$$p_{km}^g \geq 0 \quad \forall (k,m) \in E. \quad (7.16)$$

Desse modo, o problema robusto linearizado, equivalente ao inicial, é dado por:

$$\max \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk} - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm} - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{ijkm} \right] - \sum_{k \in N} s_k h_k - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km}$$

$$-q\Gamma - \sum_{(i,j) \in W} p_{ij}^w - \sum_{k \in N} p_k^s - \sum_{(k,m) \in E} p_{km}^g \quad (7.17)$$

$$\text{subj. a } (4.6) - (4.9), (4.13) - (4.21) \quad (7.18)$$

$$(7.13) - (7.16) \quad (7.19)$$

$$-q - p_{ij} \leq -\hat{w}_{ij} \left[\sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk} - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm} - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{ijkm} \right] \quad \forall (i,j) \in W \quad (7.20)$$

$$-q - p_k^s \leq -\hat{s}_k h_k \quad \forall k \in N \quad (7.21)$$

$$-q - p_{km}^g \leq -\hat{g}_{km} z_{km} \quad \forall (k,m) \in E. \quad (7.22)$$

Observe que esta abordagem de otimização robusta considera os parâmetros incertos variando em um intervalo, com limites inferior e superior. Isso permite obter um modelo computacionalmente tratável, uma vez que a sua complexidade não é maior do que a contraparte do modelo determinístico. Além disso, a formulação robusta (7.17)-(7.22) tem a vantagem de manter a estrutura do problema original da Formulação 2, que é um modelo de programação linear inteira mista. Os métodos de solução utilizados para resolver este modelo são detalhados na próxima seção.

7.3 Métodos de solução para o problema robusto

7.3.1 Método de decomposição de Benders

A reformulação de Benders para o modelo robusto (7.17)-(7.22) é apresentada a seguir. O procedimento de partição considerado deixa os conjuntos de variáveis (h, z, p^w, p^s, p^g, q) , associados com a localização dos concentradores, a ativação dos arcos entre concentradores, a robustez da demanda, a robustez dos custos de configuração da rede e a variável q no problema mestre (PM); e deixa as demais variáveis (a, b, x) relativas ao roteamento dos fluxos no subproblema de Benders (SP). A variável q é deixada propositalmente no PM para garantir que o SP possa ser decomposto para cada par $(i,j) \in W$, facilitando a sua resolução. A vantagem desta partição está no fato de manter todos os parâmetros robustos juntos no PM, reduzindo a troca de informações entre o PM e o dual de SP.

Do modo como foi estabelecida a partição das variáveis, tem-se que o SP é um problema linear de roteamento quando o PM fixa as variáveis h e z com valores h^e e z^e , respectivamente, em alguma iteração e do método de decomposição de Benders. Como o roteamento dos fluxos de demanda é independente, o SP pode ser representado para cada par $(i,j) \in W$ como:

$$\max \sum_{k \in N} (r_{ij} - c_{ik}) a_{ijk} - \sum_{m \in N} c_{mj} b_{ijm} - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} x_{ijkm} \quad (7.23)$$

$$\text{su. a } \sum_{k \in N} a_{ijk} \leq 1 \quad (7.24)$$

$$\sum_{m \in N} b_{ijm} \leq 1 \quad (7.25)$$

$$a_{ijk} - b_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijmk} - \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijkm} = 0 \quad \forall k \in N \quad (7.26)$$

$$a_{ijk} \leq h_k^e \quad \forall k \in N \quad (7.27)$$

$$b_{ijm} \leq h_m^e \quad \forall m \in N \quad (7.28)$$

$$x_{ijkm} \leq z_{km}^e \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (7.29)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (7.30)$$

$$a_{ijk} \geq 0 \quad \forall k \in N \quad (7.31)$$

$$b_{ijm} \geq 0 \quad \forall m \in N. \quad (7.32)$$

Associando as variáveis duais $\sigma_{ij} \geq 0, \varphi_{ij} \geq 0, \delta_{ijk} \in \mathbb{R}, \theta_{ijk} \geq 0, \mu_{ijm} \geq 0$ e $\rho_{ijkm} \geq 0$ com as restrições (7.24)-(7.29), respectivamente, o subproblema dual de SP para cada par (i, j) é dado por:

$$\min \quad \sigma_{ij} + \varphi_{ij} + \sum_{k \in N} h_k^e \theta_{ijk} + \sum_{m \in N} h_m^e \mu_{ijm} + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^e \rho_{ijkm} \quad (7.33)$$

$$\text{su. a } \sigma_{ij} + \delta_{ijk} + \theta_{ijk} \geq r_{ij} - c_{ik} \quad \forall k \in N \quad (7.34)$$

$$\varphi_{ij} - \delta_{ijm} + \mu_{ijm} \geq -c_{mj} \quad \forall m \in N \quad (7.35)$$

$$\delta_{ijm} - \delta_{ijk} + \rho_{ijkm} \geq -\alpha c_{km} \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (7.36)$$

$$\sigma_{ij}, \varphi_{ij} \geq 0 \quad (7.37)$$

$$\theta_{ijk} \geq 0 \quad \forall k \in N \quad (7.38)$$

$$\mu_{ijm} \geq 0 \quad \forall m \in N \quad (7.39)$$

$$\rho_{ijkm} \geq 0 \quad \forall k, m \in N, k \neq m \quad (7.40)$$

$$\delta_{ijk} \in \mathbb{R} \quad \forall k \in N. \quad (7.41)$$

Observe que, para todo par $(i, j) \in W$, o SP, dado por (7.23)-(7.32), é sempre viável e limitado, uma vez que o atendimento da demanda é realizado apenas quando gera lucro. Pelo Teorema da Dualidade Forte, segue que o subproblema dual de SP, dado por (7.33)-(7.41), é sempre viável, e que o valor da sua solução ótima é também limitado.

Os cortes de Benders de otimalidade, para cada par $(i, j) \in W$, podem ser obtidos a partir da função objetivo do SP dual com o auxílio da variável $\eta_{ij} \geq 0$, responsável por superestimar o lucro obtido pelo roteamento do fluxo de demanda para cada par de origem e destino. Sejam $\sigma_{ij}^e, \varphi_{ij}^e, \theta_{ijk}^e, \mu_{ijm}^e$ e ρ_{ijkm}^e os valores correspondentes para as variáveis do SP dual em alguma iteração e , então os cortes de Benders, para cada par $(i, j) \in W$, são expressos por:

$$\eta_{ij} \leq \sigma_{ij}^e + \varphi_{ij}^e + \sum_{k \in N} h_k \theta_{ijk}^e + \sum_{m \in N} h_m \mu_{ijm}^e + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km} \rho_{ijkm}^e, \quad \forall (i, j) \in W, \quad (7.42)$$

O problema mestre é, então, dado por:

$$\max \quad \sum_{(i,j) \in W} w_{ij} \eta_{ij} - \sum_{k \in N} s_k h_k - \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} g_{km} z_{km} - q\Gamma - \sum_{(i,j) \in W} p_{ij}^w - \sum_{k \in N} p_k^s - \sum_{(k,m) \in E} p_{km}^g \quad (7.43)$$

$$\text{sujeito a} \quad (4.6) - (4.9) \quad (7.44)$$

$$(7.13) - (7.16) \quad (7.45)$$

$$(7.21) - (7.22) \quad (7.46)$$

$$(7.42) \quad (7.47)$$

$$-q - p_{ij} \leq -\hat{w}_{ij} \eta_{ij} \quad \forall (i, j) \in W. \quad (7.48)$$

Nos experimentos computacionais do Capítulo 5, a versão do método de decomposição de Benders BDCFR, que adiciona cortes de Benders apenas para soluções fracionárias no nó raiz foi a que registrou os melhores resultados para o caso determinístico do PLCML. Por esse motivo, as características e aprimoramentos dessa versão foram considerados no método de decomposição de Benders aplicado ao problema robusto, aqui denotado simplesmente por BD.

7.3.2 Algoritmo heurístico E-ILS-RVND aplicado ao problema robusto

Considerando o desafio de resolver instâncias de grandes dimensões do PLCML com incerteza, abordado neste capítulo, adaptamos o algoritmo heurístico E-ILS-RVND (apresentado no Capítulo 6), anteriormente aplicado ao caso nominal do problema. As alterações ocorreram em apenas dois componentes do algoritmo: (i) na função de avaliação de uma solução do problema; e (ii) na geração de uma solução inicial.

O valor da função objetivo de uma solução do problema robusto foi calculado de acordo com o procedimento mostrado na Proposição 7.2.1. Para usar esse procedimento, é necessário conhecer qual é o menor custo de transporte entre cada par de nós da rede, que pode ser obtido com o Algoritmo 3 do Capítulo 5. Observe que os caminhos utilizados para rotear a demanda não dependem dos parâmetros incertos.

Uma solução inicial para o problema robusto foi gerada considerando a melhor

Algoritmo 9 Solução inicial: melhor solução robusta com um único concentrador**Entrada:** $N, r_{ij}, w_{ij}, \hat{w}_{ij}, c_{ij}, s_k, \hat{s}_k, \Gamma$ **Saída:** Solução robusta inicial s^0 , Valor objetivo da solução robusta inicial ϕ

```

1:  $s^0 \leftarrow (\emptyset, \emptyset)$ 
2:  $\phi \leftarrow 0$ 
3:  $\phi_{\text{aux}} \leftarrow 0$ 
4:  $I \leftarrow \emptyset$ 
5: for all  $k \in N$  do
6:    $\phi_{\text{aux}} \leftarrow -s_k$ 
7:    $I \leftarrow \{k\}$ 
8:   for all  $(i, j) \in N \times N$  do
9:     if  $(r_{ij} - c_{ik} - c_{kj})(w_{ij} - \hat{w}_{ij}) > 0$  then
10:        $\phi_{\text{aux}} \leftarrow (r_{ij} - c_{ik} - c_{kj})w_{ij}$ 
11:        $I \leftarrow I \cup \{(i, j)\}$ 
12:     end if
13:   end for
14:   Coloque  $I$  em ordem crescente dos valores de  $-\hat{s}_k$  e  $(r_{ij} - c_{ik} - c_{kj})(-\hat{w}_{ij})$ 
15:   for os primeiros  $\lfloor \Gamma \rfloor$  índices de  $I$  do
16:     if o índice é de um parâmetro de instalação de concentradores then
17:        $\phi_{\text{aux}} \leftarrow -\hat{s}_k$ 
18:     else
19:        $\phi_{\text{aux}} \leftarrow (r_{ij} - c_{ik} - c_{kj})(-\hat{w}_{ij})$ 
20:     end if
21:   end for
22:   for o índice de posição  $\lfloor \Gamma \rfloor + 1$  of  $I$  do
23:     if o índice é de um parâmetro de instalação de concentradores then
24:        $\phi_{\text{aux}} \leftarrow (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor)(-\hat{s}_k)$ 
25:     else
26:        $\phi_{\text{aux}} \leftarrow (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor)(r_{ij} - c_{ik} - c_{kj})(-\hat{w}_{ij})$ 
27:     end if
28:   end for
29:   if  $\phi_{\text{aux}} \geq \phi$  then
30:      $\phi \leftarrow \phi_{\text{aux}}$ 
31:      $s^0 \leftarrow (\{k\}, \emptyset)$ 
32:   end if
33: end for
34: return  $s^0, \phi$ 

```

solução que contém apenas um concentrador instalado na rede. Tomando cada nó como único concentrador instalado, verifica-se, inicialmente, quais pares de nós serão atendidos e quais parâmetros terão os valores desviados dos nominais, ou seja, reduzidos aos seus piores valores. Em seguida, o lucro total associado aos pares que foram selecionados para serem atendidos é calculado e a solução com o maior lucro é escolhida. Esse procedimento é detalhado no Algoritmo 9.

O Algoritmo 9 possui, como entrada, os parâmetros do problema, com exceção dos relacionados com a instalação de arcos entre concentradores, uma vez que apenas um concentrador será instalado. Esse algoritmo retorna a solução robusta inicial s^0 e o seu valor, denotado por ϕ . Entre as linhas 1 e 4 é realizada a inicialização da solução inicial com o conjunto vazio, o valor da solução e o de uma variável auxiliar são inicializados com zero e um conjunto auxiliar de índices I é tomado inicialmente como o conjunto vazio. Em seguida, considerando cada nó da rede como concentrador, nas linhas 6 e 7 a variável auxiliar ϕ_{aux} e o conjunto de índices I recebem o custo da instalação do referido nó como concentrador e o seu índice, respectivamente. Entre as linhas 8 e 13 são verificados quais pares de nós serão atendidos, i.e., quais pares geram lucro e, então, o valor de ϕ_{aux} e o conjunto de índices I são atualizados com os valores associados aos pares selecionados. Entre as linhas 14 e 28 são determinados os parâmetros que terão seus valores nominais alterados (com base no cálculo indicado na Proposição 7.2.1) e seus valores são inseridos na variável auxiliar ϕ_{aux} . Por fim, a solução como o maior lucro é escolhida através do procedimento realizado entre as linhas 29 e 32.

As demais estruturas do algoritmo E-ILS-RVND foram mantidas, incluindo as seis estruturas de vizinhança e o procedimento de busca local como sendo o RVND. Por este motivo, essa versão do algoritmo usada para resolver instâncias do problema robusto será denotada nos experimentos computacionais a seguir com a mesma notação utilizada anteriormente.

7.4 Experimentos computacionais

Nesta seção são apresentados os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho do método de decomposição de Benders (BD) e do algoritmo heurístico E-ILS-RVND propostos e para analisar as soluções obtidas para o caso robusto do PLCML. Os algoritmos foram implementados na linguagem C++ e executados em um computador Intel Core i7-7500U, 2.70 GHz, com 16 GB de RAM, usando o ambiente Linux. Na decomposição de Benders, o solver CPLEX 12.10 foi usado para resolver os problemas lineares e lineares inteiros mistos. As implementações de ambos os métodos desenvolvidos para o problema robusto estão disponíveis em <https://github.com/fabricioneo/plcml>.

Dados os valores nominais para os parâmetros de demanda w_{ij} , custo fixo de instalação de concentradores s_k e custo fixo de instalação de arcos entre concentradores g_{km} , os intervalos de incerteza associados a eles foram considerados como $[(1 - \varepsilon_w)w_{ij}, (1 + \varepsilon_w)w_{ij}]$, $[(1 - \varepsilon_s)s_k, (1 + \varepsilon_s)s_k]$ e $[(1 - \varepsilon_g)g_{km}, (1 + \varepsilon_g)g_{km}]$, respectivamente, sendo ε_w , ε_s e ε_g fatores usados para controlar a amplitude de vari-

ação dos valores nominais. Em outras palavras, esses fatores determinam o raio de cada intervalo. Neste trabalho, consideramos que $\varepsilon_w = \varepsilon_s = \varepsilon_g = \delta$, com $\delta \in \{0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6\}$.

Para controlar o grau de conservadorismo do problema, o escalar $0 \leq \gamma \leq 1$ foi utilizado para representar a porcentagem de parâmetros que podem se desviar de seus valores nominais. Por exemplo, $\gamma = 0.1$ indica que o *budget* de incerteza Γ é igual a 10% do número total de parâmetros incertos. Desse modo, quando $\gamma = 0$ o problema nominal, isto é, sem incerteza nos dados, é obtido. Por outro lado, quando $\gamma = 1$, obtém-se um problema no qual todos os parâmetros incertos estão incluídos em Γ . Para o fator de desconto constante α , aplicado nos arcos entre concentradores, foram definidos os valores $\{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$.

Nos experimentos computacionais foram usadas instâncias dos conjuntos de dados utilizados nos testes executados nos capítulos anteriores desta tese: o conjunto de dados CAB; o conjunto de dados AP e os Conjuntos I, II e III propostos por [Contreras et al. \(2011b\)](#). A configuração dos parâmetros e os testes realizados com cada um deles são detalhados nas Seções 7.4.1, 7.4.2 e 7.4.3.

7.4.1 Experimentos com o conjunto de dados CAB

A configuração dos parâmetros considerada neste capítulo para o conjunto de dados CAB ([O’Kelly, 1986](#)) é detalhada a seguir. Como feito anteriormente, os valores da demanda foram divididos por $\sum_{(i,j) \in W} w_{ij}$, de modo que a soma total das demandas seja igual a um. Os valores da receita (r_{ij}), obtidos com o roteamento das demandas de cada par de nós, foram gerados por $r_{ij} = \tau c_{ij}$, sendo τ uma variável aleatória contínua seguindo uma distribuição uniforme $\tau \sim U[0.8, 1.2]$. Os custos fixos de instalação de concentradores (s_k) utilizados foram propostos por [Camargo et al. \(2008\)](#) e seus valores foram divididos por 10000. Por fim, os custos fixos de instalação de arcos entre concentradores (g_{km}) foram calculados como sendo 10% da média aritmética entre os custos fixos de instalação dos concentradores k e m , ou seja, $g_{km} = 0.1 \left(\frac{s_k + s_m}{2} \right)$. Observe que os valores para a receita e para os custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores foram estabelecidos de modo distinto aos utilizados nos capítulos anteriores desta tese. Isso foi realizado com o intuito de tornar as instâncias testadas mais gerais e próximas da realidade.

Os experimentos realizados nesta seção, com o conjunto de dados CAB, tem por objetivo analisar como a incerteza nos dados impacta a configuração da rede de concentradores e o valor do lucro total da rede. Vários testes são apresentados a seguir. Foram consideradas situações onde os parâmetros de demanda, de custos fixos de instalação de concentradores e de custos fixos de instalação de arcos entre

concentradores estão sob incerteza simultaneamente e também casos onde a incerteza incide em cada tipo de parâmetro separadamente.

A Figura 7.1 mostra a configuração da rede de concentradores para o caso nominal e dois casos robustos, um com $\gamma = 0,3$ e $\delta = 0,3$ e outro com $\gamma = 0,3$ e $\delta = 0,6$, para cada um dos valores de α . Neste caso, todos os três tipos de parâmetros (demanda, custos de instalação de concentradores e custos de instalação de arcos entre concentradores) foram considerados sob incerteza. Observe que todas as soluções robustas diferem das nominais. Em particular, nas soluções robustas, há uma menor quantidade de concentradores e arcos entre concentradores instalados na rede. Essa redução na quantidade de concentradores e arcos entre concentradores instalados também é observada com o aumento do raio do intervalo de incerteza (δ) de 0,3 para 0,6, exceto no último caso, em que $\alpha = 0,8$. A diferença obtida nas configurações da rede entre os cenários mostra a importância de se considerar o problema robusto. Quando as decisões são tomadas sem considerar incerteza, pode ser necessário um possível redesenho futuro da rede, o que impactará diretamente no lucro total obtido, uma vez que pode ser necessário gastar mais dinheiro na abertura de novos arcos entre concentradores, ao mesmo tempo que contabilizará perdas na infra-estrutura investida, com o fechamento de concentradores e arcos entre concentradores previamente instalados.

Para investigar melhor o efeito da quantidade de parâmetros incertos e do raio do intervalo de incerteza sobre a configuração da rede de concentradores em relação à configuração da rede do problema nominal, foi calculado um fator denominado índice de semelhança. Esse índice é dado pela razão entre o número de concentradores e arcos entre concentradores em comum nas duas configurações da rede, pelo número total de concentradores e arcos entre concentradores instalados nas redes em conjunto. Desse modo, o índice de semelhança entre duas redes é dado por:

$$I = \frac{\text{número de concentradores e arcos entre concentradores em comum}}{\text{número total de concentradores e arcos entre concentradores}}. \quad (7.49)$$

Temos que I pertence ao intervalo $[0, 1]$, de modo que, valores próximos de 1, indicam que as redes possuem mais concentradores e arcos entre concentradores em comum, enquanto valores próximos de 0 apontam que as redes possuem configurações mais distintas. A Figura 7.2 exibe os valores do índice de semelhança obtido entre a configuração da rede do problema nominal, com as configurações da rede obtidas com a variação de γ e δ .

A Figura 7.2 mostra que, como esperado, um aumento simultâneo dos valores de γ e δ provoca uma diminuição do índice de semelhança, indicando um maior

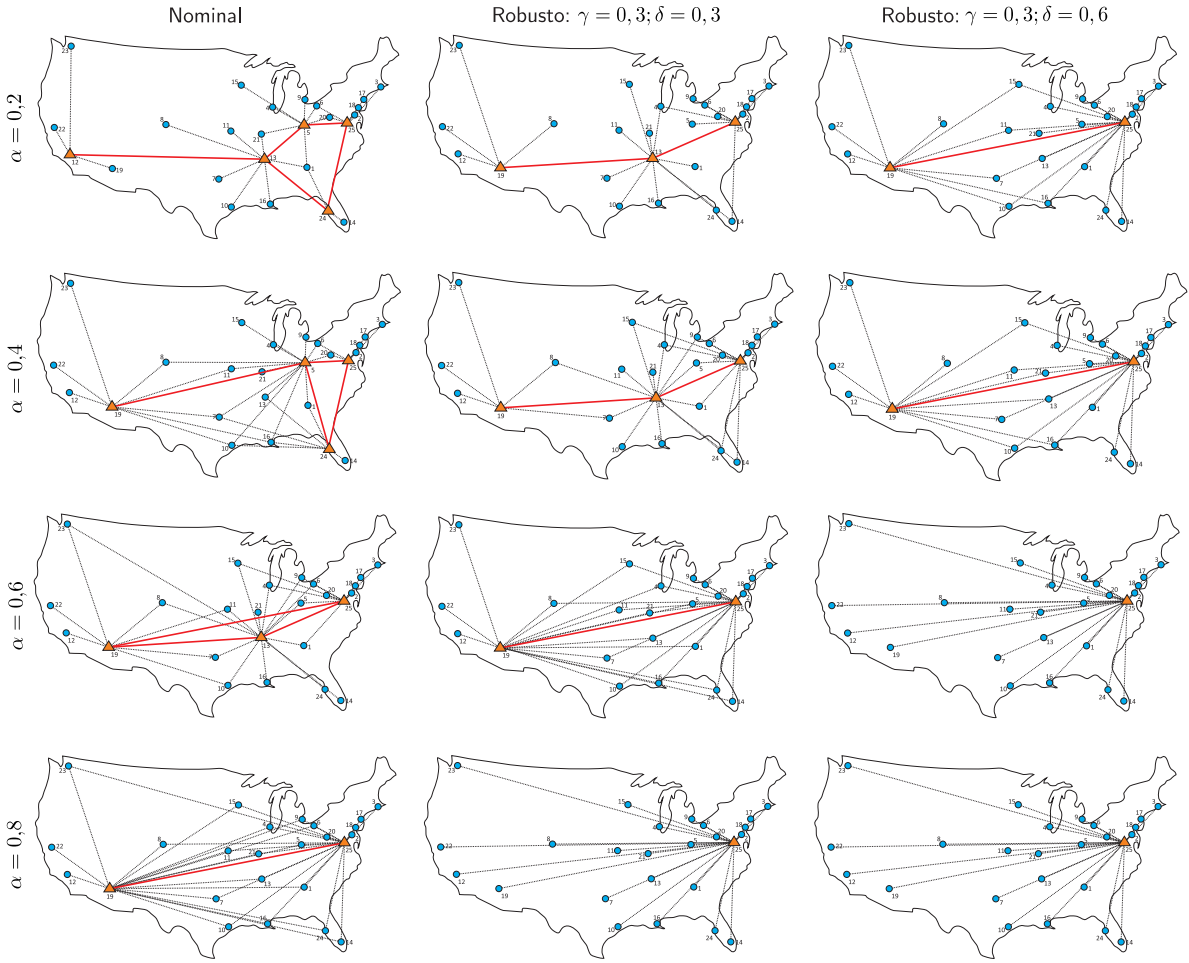


Figura 7.1: Configurações da rede de concentradores com o conjunto de dados CAB.

distanciamento entre as configurações das redes dos problemas com e sem incerteza. Observa-se também que, ao fixar o valor de γ e aumentar o valor de δ , o valor do índice de semelhança sofre uma diminuição ou permanece constante, na maioria dos casos. Os valores constantes significam que os concentradores e arcos entre concentradores instalados na rede da solução robusta tendem a permanecer inalterados, mesmo com a variação de δ ou de γ . Desse modo, ao compará-los com a solução nominal, obtém-se a mesma porcentagem de concentradores e arcos entre concentradores em comum. Isso mostra que uma solução do problema com incerteza direciona quais concentradores e arcos entre concentradores são mais favoráveis a serem instalados, mesmo diante de uma variação dos parâmetros.

O efeito causado pela incerteza nos dados sobre o valor do lucro total da rede e sobre a porcentagem de pares de origem e destino atendidos podem ser vistos na Figura 7.3. A Figura 7.3a mostra o valor médio do lucro da rede, com um intervalo de confiança de 95%. Tais valores foram obtidos com o agrupamento dos dados em relação aos valores de δ , tomados no conjunto $\{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6\}$. As maiores

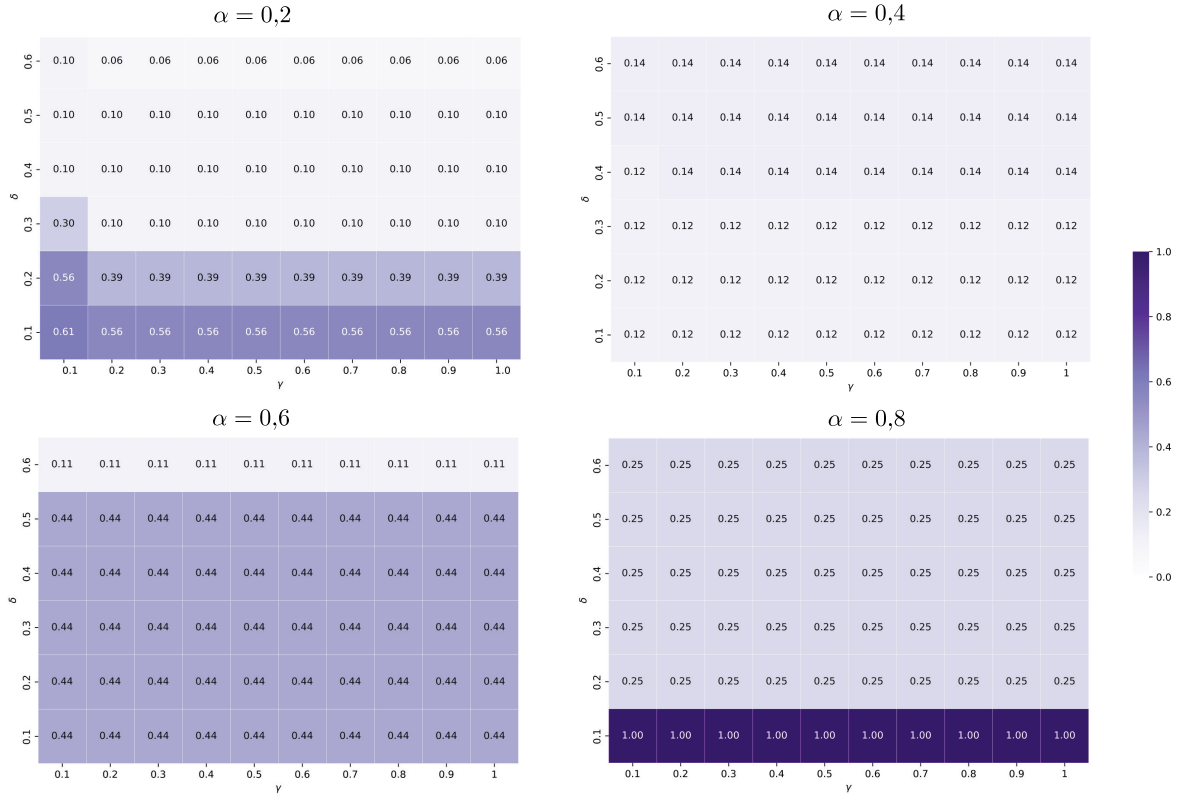


Figura 7.2: Índice de semelhança entre a rede do problema nominal e a rede do problema robusto, em função de γ e δ .

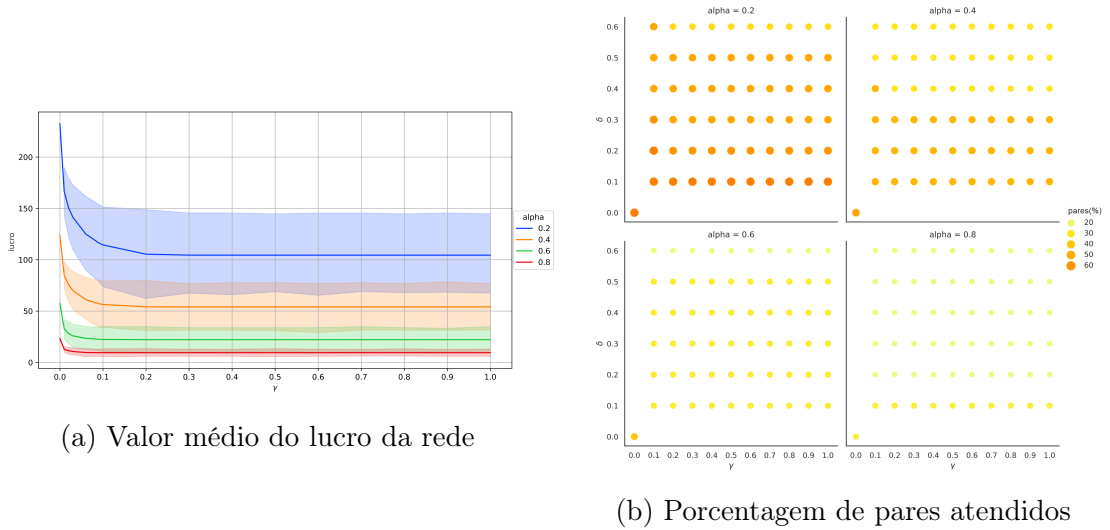


Figura 7.3: Lucro médio da rede e percentual de pares atendidos em relação ao número de parâmetros incertos.

reduções no valor do lucro médio ocorre quando γ está no intervalo $[0,0; 0,3]$, ou seja, ao considerar até 30% dos parâmetros pertencentes ao *budget* de incerteza. Valores de γ maiores do que 0,3 tendem a não afetar o valor do lucro, pois nestes casos, as

soluções obtidas permanecem inalteradas. Isso é uma consequência da característica do problema de maximização do lucro, em que os pares de origem e destino tem sua demanda atendida apenas quando é lucrativo. Os pares de origem e destino que são selecionados para terem sua demanda atendida na rede no caso em que a quantidade de parâmetros incertos é próxima de 30% continuam sendo os mesmos escolhidos no caso em que o número de parâmetros incertos é maior do que 30%, assim como os concentradores e arcos entre concentradores instalados na rede. Ao aumentar a quantidade de parâmetros que estarão sob incerteza, estão sendo modificados os valores dos parâmetros dos pares de origem e destino que não foram selecionados para serem atendidos e, por isso, a solução e o valor do lucro não sofrem alteração. A Figura 7.3b evidencia esse fato, mostrando que a porcentagem de pares que são selecionados para serem atendidos tende a ficar constante com o aumento de γ . Além disso, nota-se que o aumento de δ provoca uma redução na quantidade de pares atendidos, pois o atendimento da demanda de alguns pares passa a não gerar lucro diante da intensidade de incerteza considerada nos parâmetros.

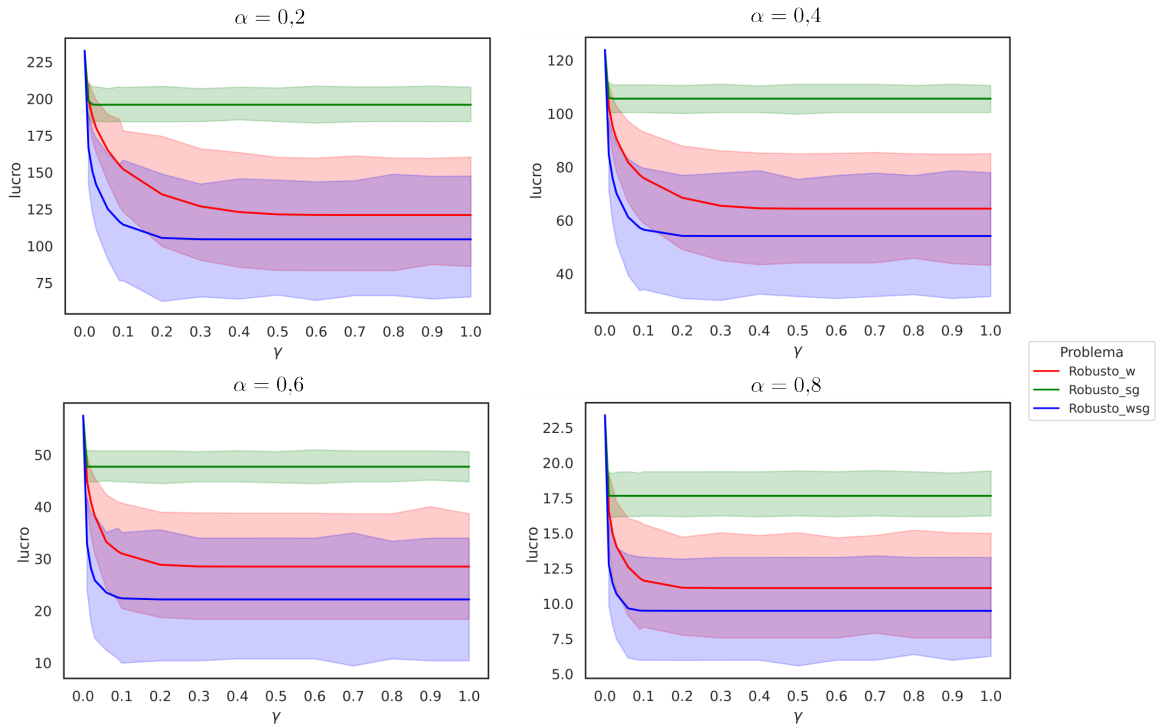


Figura 7.4: Valor médio do lucro da rede no problema com incerteza nos parâmetros de demanda (w), com incerteza nos parâmetros de custo de instalação de concentradores e arcos entre concentradores (sg) e com incerteza em todos os parâmetros simultaneamente (wsg).

Na Figura 7.4 é apresentada uma comparação do valor médio do lucro da rede considerando três tipos de problemas robustos: (i) Robusto_w: incerteza apenas nos parâmetros de demanda; (ii) Robusto_sg: incerteza apenas nos parâmetros de

custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores e, (iii) Robusto_wsg: incerteza nos três tipos de parâmetros simultaneamente. Como feito anteriormente, são apresentados os valores médios do lucro, obtidos com o agrupamento dos valores de $\delta \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6\}$. Essa figura mostra que uma queda mais acentuada no lucro da rede ocorre quando os três tipos de parâmetros são considerados incertos. Por outro lado, o menor impacto no lucro é obtido quando apenas os custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores são incertos. Nota-se também que o fluxo de demanda a ser roteado na rede desempenha um papel muito importante na composição da receita, e consequentemente, no lucro na rede. A incerteza nesses dados causa também uma redução bastante acentuada no valor da função objetivo. Assim como antes, nota-se que o valor do lucro tende a se estabilizar quando γ é maior ou igual a 0,3, para os casos em que $\alpha = 0,2$ ou $\alpha = 0,4$, e quando γ é maior ou igual a 0,2 para os outros dois valores de α .

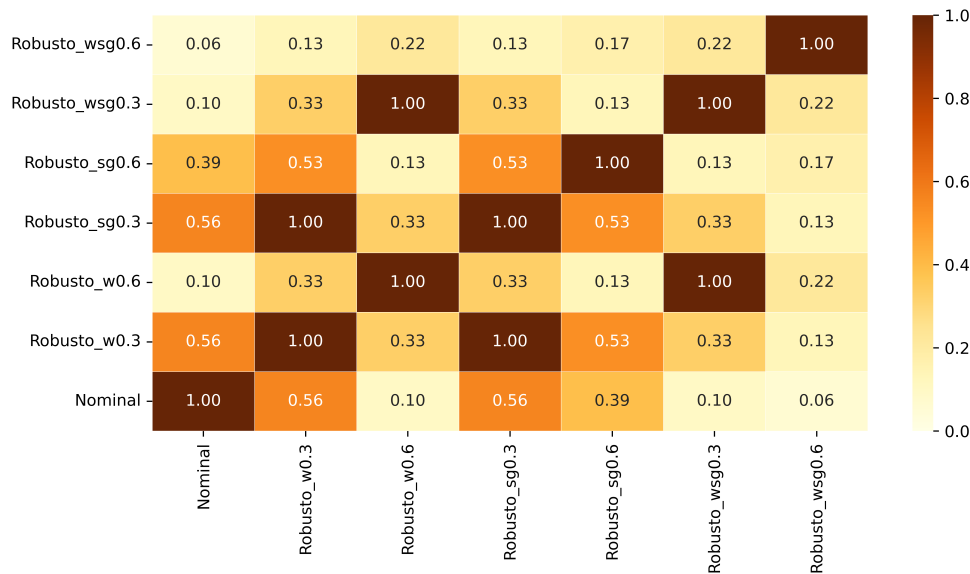


Figura 7.5: Índice de semelhança entre o problema nominal e os problemas robustos com incerteza apenas nas demandas (w), com incerteza apenas nos custos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores (sg) e com incerteza nos três parâmetros juntos (wsg), considerando $\gamma \in \{0,3; 0,6\}$.

Para complementar o estudo, comparou-se também a configuração da rede entre o problema nominal e os três tipos de problemas robustos considerados anteriormente, utilizando o índice de semelhança I , calculado de acordo com a expressão (7.49). A Figura 7.5 mostra os valores obtidos, em que δ foi fixado igual a 0,3 e γ foi tomado com valores pertencentes ao conjunto $\{0,3; 0,6\}$, para cada um dos tipos de problemas

robustos. De modo geral, vemos que os valores do índice de semelhança obtidos ao comparar problemas distintos são menores do que 0,6, indicando a existência de uma diferença considerável entre as configurações das redes, ou seja, que os concentradores e arcos entre concentradores instalados em cada uma delas diferem de forma significativa. Em relação ao problema nominal, os menores índices de semelhança são obtidos quando comparamos ele com o problema robusto que inclui incerteza nos três tipos de parâmetros simultaneamente. Percebe-se também que o problema robusto com incerteza apenas na demanda e $\gamma = 0,6$ possui uma grande diferença em relação ao problema nominal. Os menores índices de semelhança registrados foram obtidos em relação ao problema robusto com incerteza nos três tipos de parâmetros e $\gamma = 0,6$. Por fim, veja que o problema robusto com incerteza apenas na demanda e o problema robusto com incerteza apenas nos custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores, ambos com $\gamma = 0,3$, possuem os mesmos concentradores e arcos entre concentradores instalados na rede.

7.4.2 Experimentos com o conjunto de dados AP

O conjunto de dados AP (Ernst e Krishnamoorthy, 1996), apresentado na Seção 5.3.1 do Capítulo 5, foi utilizado nos testes computacionais desta seção, considerando a configuração dos parâmetros descrita a seguir. Os valores das demandas, dos custos de transporte e dos custos fixos de instalação de concentradores são fornecidos no conjunto de dados. Os custos fixos de instalação de um arco entre concentradores foi calculado como sendo 10% da média aritmética dos custos fixos de instalação dos concentradores que estão em sua extremidade, assim como feito para o conjunto de dados CAB, na seção anterior. A receita foi considerada independente da localização entre origem e destino e foram utilizados três valores fixos 20, 30 e 50. Por fim, nos testes apresentados nesta seção, o valor do raio do intervalo de incerteza foi fixado igual $\delta = 0,3$.

Os testes realizados nesta seção tem como objetivo principal analisar o desempenho dos métodos de solução apresentados na Seção 7.3. Foram utilizadas instâncias com os seguintes tamanhos: 40, 50, 75, 100, 125, 150, 175 e 200.

Os valores dos parâmetros *iterMax* e *timesMax*, que representam, respectivamente, o número máximo de iterações sem melhora e a quantidade de vezes no mesmo nível de perturbação do algoritmo heurístico E-ILS-RVND, foram calibrados utilizando a ferramenta IRACE (*Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration*) (López-Ibañez et al., 2016). Nesse treinamento, foram consideradas as seguintes faixas de valores para os parâmetros: $iterMax \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $timesMax \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Foram obtidos os seguintes valores $iterMax = 2$ e $timesMax = 5$. A relação de instân-

Tabela 7.1: Instâncias AP usadas na calibração dos parâmetros *iterMax* e *timesMax* pelo IRACE.

40L_0,2_30_0,0	40T_0,4_50_0,3	50L_0,6_50_0,6	75L_0,2_20_0,6	75T_0,4_20_0,6	100L_0,6_50_0,0
40L_0,2_30_0,3	40T_0,4_50_1,0	50L_0,8_20_0,3	75L_0,2_30_0,3	75T_0,4_30_0,3	100L_0,8_20_0,3
40L_0,2_50_0,3	40T_0,6_20_0,6	50L_0,8_30_0,0	75L_0,2_30_1,0	75T_0,6_50_0,0	100L_0,8_30_0,6
40L_0,4_20_0,6	40T_0,6_30_0,0	50L_0,8_50_1,0	75L_0,4_50_0,3	75T_0,6_50_0,3	100L_0,8_50_1,0
40L_0,4_30_0,6	40T_0,6_30_0,3	50T_0,2_30_0,3	75L_0,4_50_0,6	75T_0,6_50_1,0	100T_0,2_20_0,6
40L_0,4_50_0,6	40T_0,8_20_0,6	50T_0,2_50_0,0	75L_0,4_50_1,0	75T_0,8_20_0,0	100T_0,2_30_0,3
40L_0,6_20_0,3	40T_0,8_30_0,0	50T_0,2_50_1,0	75L_0,6_20_0,0	75T_0,8_30_1,0	100T_0,2_50_1,0
40L_0,6_20_1,0	40T_0,8_50_0,6	50T_0,4_20_0,6	75L_0,6_30_0,6	75T_0,8_50_1,0	100T_0,4_20_1,0
40L_0,6_30_0,0	50L_0,2_20_0,0	50T_0,4_30_0,6	75L_0,6_50_0,0	100L_0,2_20_0,0	100T_0,4_30_0,6
40L_0,8_30_1,0	50L_0,2_20_0,6	50T_0,4_50_0,6	75L_0,8_20_0,3	100L_0,2_30_0,0	100T_0,4_50_0,3
40L_0,8_50_0,0	50L_0,2_50_1,0	50T_0,6_20_0,0	75L_0,8_20_1,0	100L_0,2_50_0,3	100T_0,6_20_0,3
40L_0,8_50_1,0	50L_0,4_20_0,3	50T_0,6_20_0,3	75L_0,8_30_0,0	100L_0,4_20_1,0	100T_0,6_30_1,0
40T_0,2_20_0,3	50L_0,4_30_0,0	50T_0,6_30_1,0	75T_0,2_20_0,6	100L_0,4_30_0,3	100T_0,6_50_0,0
40T_0,2_30_1,0	50L_0,4_50_0,6	50T_0,8_20_0,0	75T_0,2_30_0,0	100L_0,4_50_0,6	100T_0,8_20_0,0
40T_0,2_50_0,0	50L_0,6_30_0,3	50T_0,8_30_1,0	75T_0,2_30_0,6	100L_0,6_20_0,6	100T_0,8_30_0,0
40T_0,4_20_1,0	50L_0,6_30_1,0	50T_0,8_50_0,3	75T_0,4_20_0,3	100L_0,6_30_1,0	100T_0,8_50_0,6

cias utilizadas nessa calibração é mostrada na Tabela 7.1 e estão exibidas de acordo com o seguinte formato “inst_ α _ r_{ij} _ γ ”. Por exemplo, a primeira entrada dessa tabela “40L_0,2_30_0,0”, indica que foi utilizada a instância AP de 40 nós, com custos fixos *loose* (L), considerando o fator de desconto nos arcos entre concentradores igual a $\alpha = 0,2$, receita igual a $r_{ij} = 30$ e a porcentagem de parâmetros robustos igual a $\gamma = 0,0$. Essas instâncias utilizadas na calibração dos dois parâmetros do algoritmo não foram incluídas nos testes computacionais.

A Tabela 7.2 mostra um resumo dos resultados obtidos com as instâncias de tamanho até 100. Os valores exibidos são as médias obtidas após agrupar as instâncias pelos valores da receita $r_{ij} \in \{20, 30, 50\}$ e dos valores de $\gamma \in \{0,0; 0,3; 0,6; 1,0\}$. Os resultados completos podem ser vistos nas Tabelas B.4, B.5, B.6 e B.7 do Apêndice B. São mostrados os tempos de CPU gastos com o método de decomposição de Benders do solver CPLEX (BD-CPLEX), usando a configuração padrão, e dos métodos de solução aqui propostos, o método exato de decomposição de Benders (BD) e o algoritmo heurístico (E-ILS-RVND). Os dados referentes ao E-ILS-RVND foram obtidos considerando 30 execuções do algoritmo. Também são exibidos para ele os valores do *gap* associado com o melhor valor (Δ_{best}) e do *gap* associado ao valor médio (Δ_{avg}), calculados como no Capítulo 6 através das equações (6.3) e (6.4), respectivamente.

Podemos ver na Tabela 7.2 que ambos os métodos de solução propostos (BD e E-ILS-RVND) apresentaram um bom desempenho computacional para resolver as instâncias com até 100 nós, uma vez que foram registrados tempos computacionais aceitáveis e valores baixos para os *gaps* calculados. Os tempos gastos pelo método de decomposição de Benders desenvolvido foram muito inferiores aos tempos registrados pelo método de Benders do CPLEX. Além disso, note que o BD-CPLEX foi capaz de solucionar apenas instâncias com 40 e 50 nós, excedendo os 16 GB de memória disponíveis para as instâncias com 75 e 100 nós. Em relação ao algoritmo heurístico,

Tabela 7.2: Resumo dos resultados obtidos com as instâncias AP contendo 40, 50, 75 e 100 nós.

(a) AP-40							(b) AP-50						
Inst	α	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND			Inst	α	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
		Tempo (s)	Tempo (s)	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo (s)			Tempo (s)	Tempo (s)	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo (s)
40L	0,2	149,26	69,79	0,10	0,36	6,00	50L	0,2	656,55	404,44	0,00	0,54	15,64
40L	0,4	134,28	59,38	0,00	0,19	5,95	50L	0,4	363,66	143,72	0,00	0,15	11,34
40L	0,6	75,62	33,93	0,00	0,03	3,11	50L	0,6	238,49	120,83	0,00	0,13	10,16
40L	0,8	60,77	25,92	0,00	0,00	2,40	50L	0,8	156,88	79,94	0,00	0,01	5,29
40T	0,2	87,34	45,01	0,00	0,40	2,85	50T	0,2	220,80	126,96	0,00	0,42	5,93
40T	0,4	55,44	27,40	0,00	0,72	1,87	50T	0,4	244,53	92,98	0,00	0,25	4,55
40T	0,6	50,70	27,19	0,00	0,38	1,63	50T	0,6	139,96	70,60	0,00	0,05	3,29
40T	0,8	43,84	23,14	0,00	0,41	1,54	50T	0,8	127,37	47,04	0,00	0,04	3,12
Média	—	82,15	38,97	0,01	0,31	3,17	Média	—	268,53	135,81	0,00	0,20	7,41

(c) AP-75							(d) AP-100						
Inst	α	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND			Inst	α	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
		Tempo (s)	Tempo (s)	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo (s)			Tempo (s)	Tempo (s)	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo (s)
75L	0,2	Mem	6754,72	0,00	0,77	79,27	100L	0,2	Mem	2,1267,79	0,00	0,47	125,61
75L	0,4	Mem	1511,85	0,00	0,31	44,57	100L	0,4	Mem	8859,71	0,00	0,19	94,91
75L	0,6	Mem	990,07	0,00	0,07	25,03	100L	0,6	Mem	4575,11	0,00	0,01	49,06
75L	0,8	Mem	804,37	0,00	0,01	19,38	100L	0,8	Mem	2820,46	0,00	0,00	45,47
75T	0,2	Mem	1150,69	0,00	0,07	12,55	100T	0,2	Mem	6509,29	0,00	0,21	43,19
75T	0,4	Mem	857,50	0,00	0,00	10,61	100T	0,4	Mem	2831,77	0,00	0,00	27,73
75T	0,6	Mem	671,51	0,00	0,00	8,24	100T	0,6	Mem	2249,22	0,00	0,00	19,41
75T	0,8	Mem	605,60	0,00	0,00	8,72	100T	0,8	Mem	1839,57	0,00	0,00	18,82
Média	—	—	1668,29	0,00	0,16	26,05	Média	—	—	6369,12	0,00	0,11	53,03

Mem: 16 GB de memória excedido.

destacam-se os excelentes tempos registrados quando comparados aos tempos obtidos com ambos os métodos de decomposição de Benders. Nota-se também que o algoritmo heurístico obteve boa precisão na obtenção da solução ótima do problema. Com exceção das instâncias de tamanho 40, em todas as demais o E-ILS-RVND foi capaz de atingir a solução ótima. Ademais, observe que os *gaps* relativos ao valor médio também são pequenos, indicando a obtenção de soluções relativamente próximas da solução ótima nas execuções do algoritmo. Como observado nos capítulos anteriores para o caso nominal, as instâncias que demandaram mais tempo computacional são aquelas que possuem custos *loose* (L) e oferecem um maior fator de desconto na instalação de arcos entre concentradores, isto é, as instâncias com $\alpha = 0,2$.

Embora não esteja evidente na Tabela 7.2, vale destacar que as instâncias com 40 nós, custos *tight* (T) e receita igual a 20 apresentaram soluções robustas ótimas com lucro nulo, para $\gamma \in \{0,3; 0,6; 1,0\}$. Nesses casos, como a receita por unidade de demanda entre os pares de origem e destino possui um valor baixo e os custos fixos são apertados, não é vantajoso, sob o ponto de vista do lucro, projetar uma rede de concentradores para atender os pares de nós, quando há a presença de incerteza nos dados.

Um resumo com os resultados obtidos com as instâncias de 125 e 150 nós são exibidos na Tabela 7.3. Como feito anteriormente, os dados foram agrupados de acordo com os valores da receita e da quantidade de parâmetros incertos. Os resultados completos, sem a condensação dos dados, podem ser vistos no Apêndice B, nas Tabelas B.8 e B.9. A Tabela 7.3 mostra para o método de decomposição de Benders, a

quantidade de instâncias solucionadas e o tempo médio. Para o algoritmo heurístico, é exibida a média dos *gaps* e dos tempos gastos para resolver as instâncias. Neste caso, os dados referentes ao E-ILS-RVND são relativos a uma única execução do algoritmo para cada instância testada. Os valores do *gap* apresentados se referem às instâncias que também puderam ser solucionadas pelo método de decomposição de Benders, calculados de acordo com a equação (6.6).

Tabela 7.3: Resumo dos resultados obtidos com as instâncias AP contendo 125 e 150 nós.

(a) AP-125						(b) AP-150					
Inst	BD			E-ILS-RVND		Inst	BD			E-ILS-RVND	
	α	#	Inst Res	Tempo (s)	Δ (%)		α	#	Inst Res	Tempo (s)	Δ (%)
125L	0,2	6/12	22925,80	0,07	387,05	150L	0,2	0/12	Mem	—	495,72
125L	0,4	6/12	9144,54	0,07	204,75	150L	0,4	0/12	Mem	—	285,27
125L	0,6	12/12	8624,68	0,00	136,74	150L	0,6	3/12	12321,39	0,00	228,38
125L	0,8	12/12	6432,93	0,00	103,63	150L	0,8	4/12	10108,38	0,00	204,32
125T	0,2	12/12	7618,43	0,00	30,16	150T	0,2	3/12	23183,70	0,00	366,90
125T	0,4	12/12	6652,91	0,00	22,17	150T	0,4	0/12	Mem	—	203,40
125T	0,6	12/12	5577,56	0,00	25,65	150T	0,6	3/12	15175,00	0,00	210,30
125T	0,8	12/12	5055,61	0,00	29,18	150T	0,8	3/12	11026,63	0,00	177,91
Média/Soma		84/96	9004,06	0,02	117,42	Média/Soma		16/96	14362,94	0,00	271,53

Mem: 16 GB de memória excedido.

Na Tabela 7.3 vê-se que o método de decomposição de Benders não conseguiu resolver todas as instâncias com 125 e 150 nós, extrapolando a quantidade de memória disponível na máquina utilizada. Para cada tamanho, foram testadas 96 instâncias. Foram resolvidas 84 instâncias contendo 125 nós e apenas 16 instâncias com 150 nós. Observe que o BD não resolveu nenhuma das instâncias 150L, com $\alpha = 0,2$ e $\alpha = 0,4$ e também 150T, considerando $\alpha = 0,4$. Esse resultado indica uma limitação do método exato proposto, levando em consideração o tamanho da instância testada e os requisitos de *hardware* disponíveis. Por outro lado, o algoritmo E-ILS-RVND apresentou boa performance na resolução dessas instâncias. Os tempos computacionais registrados foram baixos, principalmente quando comparados ao casos que foram resolvidos pelo BD, e além disso, os *gaps* calculados foram nulos para a maioria das instâncias, evidenciando que o algoritmo foi capaz de atingir a solução ótima para as instâncias em uma única execução.

Para finalizar esta seção, a Tabela 7.4 traz os resultados alcançados com uma única execução do algoritmo E-ILS-RVND para as instâncias contendo 175 e 200 nós. São mostrados o valor da função objetivo, isto é, o lucro da rede, e o tempo gasto para resolver cada uma das instâncias.

Note que os tempos para resolver as instâncias de tamanho 175 e 200 começam a ficar mais expressivos, notadamente para aquelas com o maior valor de receita considerado ($r_{ij} = 50$). Também observamos um comportamento com o valor do lucro da rede semelhante ao visto nos testes realizados com as instâncias CAB na Seção 7.4.1. De fato, para a maioria dos casos, o aumento do valor de γ acima de

Tabela 7.4: Resultados obtidos com uma única execução do E-ILS-RVND para instâncias AP com 175 e 200 nós.

α	Rec	γ	AP-175L		AP-175T		AP-200L		AP-200T	
			Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)
0,2	20	0,0	19446,30	295,05	16824,44	1164,35	17772,01	1097,22	8322,69	261,50
0,2	20	0,3	8799,10	166,89	7773,54	549,46	7902,33	145,51	3110,36	96,86
0,2	20	0,6	8799,10	114,16	7951,68	928,43	7902,33	65,93	3110,36	103,45
0,2	20	1,0	8799,10	122,03	7951,68	749,17	7902,33	63,21	3110,36	63,42
0,4	20	0,0	15594,64	822,15	14199,23	325,02	14010,17	211,06	7392,64	130,22
0,4	20	0,3	8726,80	27,68	6960,22	113,00	7902,33	62,51	3110,36	48,31
0,4	20	0,6	8726,80	63,08	6960,22	191,50	7902,33	89,75	3110,36	89,02
0,4	20	1,0	8726,80	140,04	6960,22	68,59	7902,33	122,88	3110,36	153,92
0,6	20	0,0	14551,17	38,86	14071,75	214,79	13529,70	48,18	7392,64	92,27
0,6	20	0,3	8726,80	59,17	6960,22	192,97	7902,33	120,39	3110,36	55,46
0,6	20	0,6	8726,80	74,18	6960,22	162,48	7902,33	111,08	3110,36	47,02
0,6	20	1,0	8726,80	35,65	6960,22	75,11	7902,33	171,42	3110,36	78,86
0,8	20	0,0	14551,17	26,76	14054,94	177,14	13529,70	90,37	7392,64	105,67
0,8	20	0,3	8726,80	62,17	6960,22	74,23	7902,33	236,70	3110,36	94,09
0,8	20	0,6	8726,80	26,25	6960,22	83,02	7902,33	92,67	3110,36	173,78
0,8	20	1,0	8726,80	39,29	6960,22	87,53	7902,33	206,66	3110,36	50,63
0,2	30	0,0	54030,38	875,35	49430,84	4368,68	51653,33	1412,42	40758,15	789,18
0,2	30	0,3	31586,58	474,18	29593,21	1160,62	29830,09	806,93	20957,14	429,95
0,2	30	0,6	31395,45	472,80	29479,90	1137,53	29729,86	915,94	20865,99	676,76
0,2	30	1,0	31395,45	454,35	29479,90	4226,09	29729,86	693,83	20865,99	431,02
0,4	30	0,0	48766,18	1145,99	45147,96	3894,72	46965,62	763,52	36153,62	1474,12
0,4	30	0,3	28748,72	304,75	27804,16	2858,66	27419,59	269,75	19442,92	544,27
0,4	30	0,6	28624,77	376,48	27721,26	2748,11	27401,09	780,32	19404,96	362,11
0,4	30	1,0	28624,77	426,42	27676,37	2485,11	27401,09	2363,94	19404,96	341,92
0,6	30	0,0	45781,10	1033,13	42879,20	1164,19	43853,81	5409,16	35317,26	718,58
0,6	30	0,3	27115,36	192,23	26964,45	3016,28	26302,71	1694,71	19266,26	254,86
0,6	30	0,6	27096,66	289,95	26906,06	3389,59	26291,94	2561,05	19265,83	187,43
0,6	30	1,0	27096,66	138,87	26906,06	1740,99	26291,94	1254,14	19265,83	225,88
0,8	30	0,0	44655,02	1150,21	42592,04	1981,55	43210,86	4193,21	35317,26	580,19
0,8	30	0,3	26784,84	144,91	26837,27	1691,62	26016,13	498,94	19266,26	167,23
0,8	30	0,6	26772,71	99,92	26786,95	1240,80	26009,63	819,23	19265,83	270,61
0,8	30	1,0	26772,71	269,65	26786,95	809,51	26009,63	1081,85	19265,83	162,02
0,2	50	0,0	131167,28	2104,70	127212,38	4676,38	128953,33	4576,75	118536,81	13186,91
0,2	50	0,3	86668,06	1122,06	83860,72	1980,62	84214,15	2407,86	75605,95	1314,72
0,2	50	0,6	85272,00	943,77	82768,16	1048,74	82982,17	2641,84	74399,99	1028,08
0,2	50	1,0	85011,70	1063,02	83141,63	1040,93	83170,24	2944,91	74399,99	1869,50
0,4	50	0,0	125177,29	2580,64	121883,01	2074,71	123448,87	2509,73	112438,84	2096,99
0,4	50	0,3	82735,20	673,83	80140,22	534,11	80854,42	2142,40	72490,56	643,64
0,4	50	0,6	81709,95	1478,67	79251,03	985,88	79917,27	2285,08	71171,55	371,68
0,4	50	1,0	81709,95	770,83	79503,40	947,08	79917,27	1974,83	71171,55	498,88
0,6	50	0,0	121223,18	1699,89	117715,44	576,22	119488,73	2859,79	110142,40	2534,89
0,6	50	0,3	80607,39	477,00	78855,75	671,17	78984,12	795,48	71374,23	898,84
0,6	50	0,6	79677,05	343,31	78028,94	424,52	78213,61	2089,64	70464,67	396,78
0,6	50	1,0	79677,05	811,97	77996,66	267,35	78213,61	1918,28	70464,67	444,29
0,8	50	0,0	119670,08	930,42	116632,48	666,94	118088,02	5296,16	109676,37	1802,08
0,8	50	0,3	79786,85	557,70	78585,23	292,00	78281,82	858,21	71296,83	747,00
0,8	50	0,6	78897,43	260,01	77775,51	275,64	77540,10	300,13	70464,67	621,34
0,8	50	1,0	78897,43	253,98	77775,51	363,66	77540,10	236,29	70464,67	444,24
Média			45462,9	542,38	43741,41	1247,85	44116,55	1339,41	36801,52	795,01

0,3, não altera a solução obtida e, consequentemente, não modifica o valor do lucro da rede (veja os valores destacados em negrito). Como apontado anteriormente, essa característica mostra que uma vez definidos os concentradores e arcos entre concentradores a serem instalados, bem como quais pares de nós compensam ser atendidos, considerando uma porcentagem de aproximadamente 30% de parâmetros incertos, tal configuração tende a não se alterar com o aumento de γ .

De modo geral, os resultados apresentados com o conjunto de dados AP mostram que o método exato BD foi capaz de resolver de forma eficiente e com tempos razoáveis

todas as instâncias com até 100 nós. Além de se mostrar eficiente na resolução dessas instâncias, o algoritmo heurístico E-ILS-RVND se destacou também quando aplicado às instâncias maiores, uma vez que foram registrados valores pequenos para os gaps e tempos computacionais satisfatórios.

7.4.3 Experimentos com os conjuntos de dados propostos por Contreras et al. (2011b)

Nesta seção são apresentados os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho do algoritmo E-ILS-RVND quando submetido a instâncias maiores. Os testes foram executados com o grupo de instâncias proposto por Contreras et al. (2011b), apresentado na Seção 6.3.2 do Capítulo 6. Nos testes foram utilizadas instâncias do Conjunto I contendo 50, 100, 150 200, 300 e 500 nós e, dos Conjuntos II e III instâncias de tamanho 50, 100, 150 e 200.

São fornecidos nesses conjuntos de dados a quantidade de demanda entre os pares de origem e destino, os custos de transporte entre os nós da rede e os custos fixos de instalação de concentradores. De modo análogo aos testes realizados com as instâncias AP, para a receita foram considerados três valores $r_{ij} \in \{2,3,5\}$ e os custos fixos de instalação dos arcos entre concentradores foi obtido como sendo 10% da média dos custos fixos de instalação dos concentradores que estão na sua extremidade. O valor de δ foi fixado em 0,3 e os valores de $\gamma \in \{0,0; 0,3; 0,6; 1,0\}$, assim como considerado nos experimentos com o conjunto de dados AP na seção anterior.

Como as instâncias desses conjuntos de dados possuem características distintas das apresentadas pelas instâncias AP, uma nova calibração dos parâmetros do algoritmo E-ILS-RVND foi executada com o IRACE. A Tabela 7.5 mostra a relação das instâncias utilizadas na calibração e estão exibidas de acordo com o formato “inst_α_r_{ij}_γ”, onde inst indica a quantidade de nós juntamente com o conjunto ao qual ela pertence I, II ou III. Essas instâncias utilizadas na calibração dos parâmetros não foram incluídas nos experimentos realizados.

Tabela 7.5: Grupo de instâncias de Contreras et al. (2011b) usadas na calibração dos parâmetros *iterMax* e *timesMax* com o IRACE.

50I_0,2_3_0,0	50II_0,2_2_0,0	50III_0,2_3_0,0	100I_0,2_2_0,3	100II_0,2_5_0,3	100III_0,4_2_0,0
50I_0,2_3_0,3	50II_0,2_2_0,3	50III_0,2_3_0,6	100I_0,2_2_0,6	100II_0,2_5_0,6	100III_0,4_2_0,6
50I_0,2_3_0,6	50II_0,2_2_0,6	50III_0,2_3_1,0	100I_0,2_2_1,0	100II_0,2_5_1,0	100III_0,4_2_1,0
50I_0,4_2_0,0	50II_0,4_5_0,0	50III_0,6_2_0,0	100I_0,4_5_0,0	100II_0,4_3_0,0	100III_0,6_5_0,3
50I_0,4_2_0,6	50II_0,4_5_0,3	50III_0,6_2_0,3	100I_0,4_5_0,3	100II_0,4_3_0,6	100III_0,6_5_0,6
50I_0,4_2_1,0	50II_0,4_5_0,6	50III_0,6_2_1,0	100I_0,4_5_1,0	100II_0,4_3_1,0	100III_0,6_5_1,0
50I_0,8_5_0,3	50II_0,8_3_0,3	50III_0,6_5_0,3	100I_0,6_3_0,0	100II_0,8_2_0,0	100III_0,8_3_0,0
50I_0,8_5_0,6	50II_0,8_3_0,6	50III_0,6_5_0,6	100I_0,6_3_0,6	100II_0,8_2_0,3	100III_0,8_3_0,3
50I_0,8_5_1,0	50II_0,8_3_1,0	50III_0,6_5_1,0	100I_0,6_3_1,0	100II_0,8_2_0,6	100III_0,8_3_1,0

Foram utilizadas nessa calibração dos parâmetros as mesmas faixas de valores con-

sideradas anteriormente, ou seja, $iterMax \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $timesMax \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Foram obtidos os seguintes valores $iterMax = 2$ e $timesMax = 3$.

Um resumo dos resultados obtidos com as instâncias contendo até 200 nós é mostrado na Tabela 7.6. Essa tabela exibe a média dos tempos (em segundos) registrados por uma única execução do E-ILS-RVND para resolver as instâncias, que foram agrupadas em relação aos valores da receita e aos valores de γ . Os resultados para cada uma das instâncias individualmente podem ser vistos nas Tabelas B.10, B.11, B.12 e B.13 do Apêndice B.

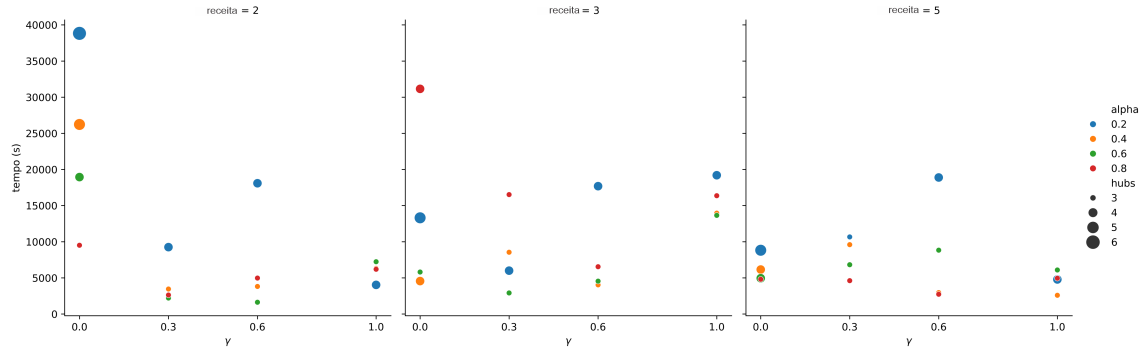
Tabela 7.6: Resumo dos tempos do E-ILS-RVND aplicado as instâncias de Contreras et al. (2011b) com até 200 nós.

α	Tempo em segundos de uma única execução do E-ILS-RVND											
	50-I	50-II	50-III	100-I	100-II	100-III	150-I	150-II	150-III	200-I	200-II	200-III
0,2	28,51	44,90	46,04	254,56	485,77	320,64	1287,06	1323,86	1515,45	3086,23	3579,66	4660,21
0,4	21,92	26,34	42,07	145,18	292,61	236,37	1065,74	867,69	930,97	2452,63	4324,42	2619,47
0,6	20,35	16,84	44,32	143,13	217,43	215,49	739,39	1062,83	1086,07	1419,10	1373,94	1311,90
0,8	12,12	12,17	9,74	79,57	109,82	126,17	409,55	386,50	388,83	863,25	747,00	1161,67
Média	20,72	25,06	35,54	155,61	276,41	224,67	875,44	910,22	980,33	1955,30	2506,25	2438,31

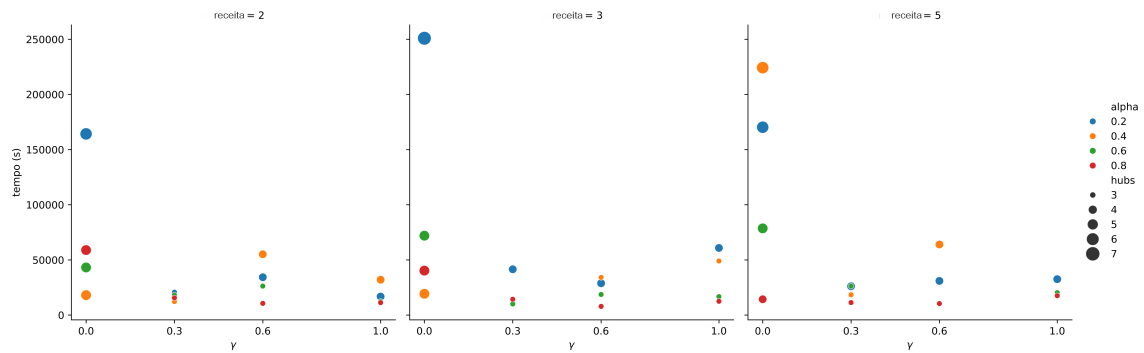
Os valores apresentados na Tabela 7.6 mostram que o E-ILS-RVND conseguiu retornar soluções para instâncias dos três conjuntos de dados em tempos relativamente razoáveis. A maior média apresentada foi de 4660,21 segundos na resolução das instância com 200 nós e fator de desconto nos arcos entre concentradores igual a $\alpha = 0,2$. As instâncias pertencentes aos conjuntos II e III demandaram maior esforço computacional do que as do conjunto I. Além disso, observa-se que os tempos registrados para cada um dos tamanhos considerados são maiores do que aqueles obtidos nos testes da Seção 7.4.2 com as instâncias AP. Isso se deve ao fato dos Conjuntos I, II e III terem propriedades distintas das instâncias AP, como apontado por Contreras et al. (2011b).

Os resultados obtidos com as instâncias do Conjunto I de tamanho 300 e 500 podem ser vistos na Figura 7.6. Ela exibe os tempos computacionais gastos em uma única execução do E-ILS-RVND para resolver cada uma das instâncias. Também pode ser visualizado o número de concentradores instalados na rede em cada uma das soluções alcançadas, indicado pelo tamanho do círculo que representa cada uma das instâncias resolvidas. Os resultados completos obtidos para cada uma das instâncias podem ser vistos na Tabela B.14 do Apêndice B.

A Figura 7.6 mostra que, de modo geral, houve um aumento muito expressivo nos tempos gastos pelo E-ILS-RVND para resolver as instâncias contendo 300 e 500 nós em relação aos tempos despendidos com as instâncias dos Conjuntos I, II e III de tamanho até 200. Em relação à variação do valor de γ , nota-se que a maioria das instâncias que representam o problema nominal, isto é, as instâncias com $\gamma = 0$, demandaram tempos computacionais mais elevados do que aquelas que retratam o



(a) 300 nós - Conjunto I



(b) 500 nós - Conjunto I

Figura 7.6: Resultados com instâncias de 300 e 500 nós obtidos com uma única execução do E-ILS-RVND.

problema robusto. Além disso, nota-se que o número de concentradores instalados na rede tende a diminuir com o aumento da quantidade de parâmetros incertos. Essa figura evidencia, como esperado, que, na maior parte dos casos, as instâncias com um maior fator de desconto nos arcos entre concentradores, ou seja, com menores valores de α , são as que necessitam de maior esforço computacional na obtenção de uma solução. Esse comportamento observado nas configurações da rede com esse grupo de instâncias é similar ao visto com as instâncias CAB na Subseção 7.4.1.

7.5 Conclusões

Este capítulo abordou o PLCML que considera incerteza nas demandas entre os pares de origem e destino e nos custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores. Um modelo de otimização robusta é apresentado para lidar com a incerteza nos parâmetros. Tal modelo permite controlar o grau de conservadorismo do problema por meio de um *budget* de incerteza que determina a quantidade de parâmetros incertos que serão considerados. Como métodos de solução para o problema, foram desenvolvidos um procedimento baseado em decomposição de Benders

e um algoritmo heurístico baseado em ILS. Ambos os métodos são adaptações das melhores versões aplicadas para resolver o problema determinístico nos Capítulos 5 e 6 desta tese. Vários experimentos computacionais foram realizados a fim de analisar o efeito que a incerteza nos dados provoca no lucro e na configuração da rede de concentradores.

Os resultados dos experimentos computacionais evidenciaram a importância de investigar o caso robusto do PLCML. Os testes realizados com o conjunto de dados CAB mostraram que as soluções nominais (determinísticas) do problema são bastante diferentes das soluções robustas. Um fator, denominado índice de semelhança, foi calculado para comparar as configurações das redes das soluções. Observou-se que um aumento na quantidade de parâmetros incertos provoca, em geral, uma redução na quantidade de concentradores e arcos entre concentradores instalados na rede. Isso indica que, quando os parâmetros analisados são incertos, um possível redesenho da rede obtida com a solução determinística precise ser realizado, o que provavelmente será uma atividade dispendiosa, impactando diretamente o lucro obtido. Um fato curioso observado é que tanto o lucro quanto a quantidade de pares atendidos tendem a se estabilizar quando a porcentagem de parâmetros incertos considerados é maior ou igual a 30%, considerando a configuração de parâmetros das instâncias utilizadas nos testes. Isso se deve à característica do problema de que os pares de nós são atendidos apenas quando são lucrativos e de que poucos concentradores e arcos entre concentradores são instalados. Desse modo, considerar mais do que 30% dos parâmetros incertos não afeta a solução, uma vez que os parâmetros adicionais que teriam seus valores nominais alterados correspondem aos nós que não foram selecionados para serem atendidos previamente e nem selecionados para serem nós concentradores.

O desempenho computacional e a limitação dos métodos de solução propostos também foram investigados. Os resultados mostraram que o método de decomposição de Benders (BD) foi capaz de resolver instâncias com até 150 nós, com tempos computacionais viáveis e inferiores aos tempos gastos pelo Benders do CPLEX, que resolveu apenas instâncias de tamanho 40 e 50. Com o algoritmo heurístico E-ILS-RVND foram resolvidas instâncias com até 500 nós. Para as instâncias do conjunto de dados AP, ele conseguiu atingir a solução ótima para praticamente todas as instâncias, apresentando *gaps* médios muito pequenos e tempos computacionais muito inferiores aos obtidos com o BD. Para os conjuntos de dados proposto por Contreras et al. (2011b), observou-se um aumento considerável nos tempos de resolução do E-ILS-RVND, uma vez que as características das instâncias desses conjuntos de dados são distintas das apresentadas pelas instâncias AP.

Capítulo 8

Conclusões finais e direções futuras

Neste capítulo são apresentadas, na Seção 8.1, as conclusões e considerações finais desta tese. Em seguida, são apresentadas propostas de trabalhos futuros, mostrando os caminhos que esta pesquisa pode seguir a partir do presente trabalho (Seção 8.2).

8.1 Conclusões finais

Este trabalho abordou o problema de localização de concentradores com maximização do lucro (PLCML), cuja rede no nível dos concentradores é incompleta e a alocação dos nós não concentradores aos concentradores é múltipla. O problema consiste em selecionar nós para se tornarem concentradores, ativar arcos entre os concentradores, selecionar os pares de nós que serão atendidos e definir como será realizado o roteamento dos fluxos de demanda entre eles, de modo que o lucro total associado à rede seja o maior possível. Ao contrário dos problemas clássicos de localização de concentradores, que têm objetivo voltado para a minimização dos custos, não é exigido que todos os pares de origem e destino sejam atendidos, sendo selecionados apenas quando o atendimento da sua demanda é lucrativo.

Especificamente, o problema estudado nesta tese, possui as seguintes características: (i) utiliza a estratégia de alocação múltipla, de modo que os nós não concentradores podem ser ligados a mais de um concentrador; (ii) é não capacitado, ou seja, não é imposta nenhuma limitação de capacidade nos concentradores e arcos entre concentradores da rede; (iii) possui rede incompleta, isto é, não exige que todos os concentradores sejam interligados; (iv) não permite conexões diretas entre nós não-concentradores; (v) não fixa previamente a quantidade de concentradores e arcos entre concentradores presentes na rede, sendo este número determinado pelo modelo; (vi) possui custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores; e (vii) não impõe que todos os pares de origem e destino sejam atendidos. Uma vez

que este problema incorpora no modelo decisões adicionais referentes à seleção dos pares de nós da rede que serão atendidos, ele é mais complexo do que os problemas voltados à minimização dos custos.

Conforme visto na revisão da literatura, realizada no Capítulo 2, o problema de localização de concentradores com objetivo voltado à maximização do lucro é recente na área de localização de concentradores, sendo ainda pouco explorado. Portanto, o propósito deste trabalho foi abordar e preencher essa lacuna no conhecimento.

As principais contribuições desta tese foram:

- (i) a proposição de duas novas formulações para o PLCML, bem como a investigação de suas propriedades e comparação com outro modelo da literatura;
- (ii) o desenvolvimento de métodos aprimorados de decomposição de Benders aplicados ao PLCML, capazes de solucionar instâncias contendo na rede até 150 nós (tamanho de instância ainda não solucionada na literatura para o problema com as características do abordado neste trabalho);
- (iii) o desenvolvimento de algoritmos heurísticos eficientes baseados no ILS e na troca sistemática de estruturas de vizinhança de acordo com o RVND, propostos para o PLCML;
- (iv) o estudo do PLCML com considerações de incerteza através de abordagens da otimização robusta;
- (v) a apresentação de uma formulação para o caso robusto do PLCML, que pode ser tratada computacionalmente e que permite controlar o grau de conservadorismo da solução;
- (vi) a proposição de métodos eficazes para resolver instâncias do PLCML sob incerteza.

No Capítulo 4 foram apresentadas três formulações para o PLCML, sendo a Formulação 1 proveniente da literatura (Taherkhani e Alumur, 2019) e as Formulações 2 e 3 propostas neste trabalho. Algumas propriedades foram investigadas e foram feitas comparações em relação à quantidade de variáveis e restrições presentes em cada uma. Os experimentos computacionais realizados mostraram que as formulações propostas nesta tese se destacaram. A Formulação 2 apresentou os melhores *gaps* de relaxação linear, enquanto a Formulação 3 registrou os menores tempos computacionais.

Diferentes versões do método de decomposição de Benders foram desenvolvidas no Capítulo 5 para o caso determinístico do PLCML. A decomposição de Benders com múltiplos cortes, incorporando a adição de cortes Pareto-ótimos derivados de

pontos de Magnanti-Wong; e a aplicação de uma abordagem Benders *branch-and-cut*, na qual cortes Pareto-ótimos, também derivados de pontos de Magnanti-Wong, são integrados à árvore de *Branch-and-Cut* a partir de soluções fracionárias no nó raiz, foram as variantes com os melhores desempenho computacional. Foram solucionadas instâncias do problema com até 150 nós.

Uma vez que o problema abordado neste trabalho é NP-difícil, dois algoritmos heurísticos para resolvê-lo foram apresentados no Capítulo 6. O ILS-RVND, como primeiro algoritmo, adota uma abordagem clássica da metaheurística ILS, incorporando o RVND como estratégia de busca local. Já o segundo algoritmo, denominado E-ILS-RVND, é uma versão melhorada do ILS, ao passo que realiza uma maior intensificação nas regiões de busca. De modo geral, os resultados dos experimentos computacionais mostraram que o E-ILS-RVND obteve melhor desempenho que o ILS-RVND na busca da solução ótima para o problema, conforme indicado pela análise estatística apresentada no capítulo. Por outro lado, o algoritmo ILS-RVND apresentou os menores tempos computacionais. Vale destacar que, com os algoritmos heurísticos, foram resolvidas instâncias do problema contendo até 500 nós. Uma análise das estruturas de vizinhança adotadas em ambos os algoritmos também foi realizada e apontou que os melhores resultados são obtidos quando todas elas são consideradas em conjunto, como feito nas implementações dos algoritmos desenvolvidos.

Por fim, no Capítulo 7 foi abordado o PLCML, no qual os parâmetros de demanda e custos fixos de instalação de concentradores e arcos entre concentradores foram considerados incertos. A abordagem de otimização robusta, proposta por Bertsimas e Sim (2003), foi utilizada para obter uma formulação robusta para o problema. Essa formulação permite controlar o grau de conservadorismo do problema por meio de um *budget* de incerteza que determina a porcentagem de parâmetros incertos que serão considerados no problema. Vários experimentos computacionais foram realizados a fim de analisar o impacto que a incerteza nos parâmetros considerados tem sobre o lucro associado à rede e à própria estrutura da rede. A melhor versão do método de decomposição de Benders, identificada no Capítulo 5 para o caso determinístico do problema, foi adaptada para solucionar o modelo robusto. Também o algoritmo E-ILS-RVND foi modificado para este fim. Os resultados dos experimentos computacionais indicaram que os métodos de solução propostos para o problema robusto foram eficientes e permitiram evidenciar também as suas limitações. Assim como no problema nominal, foram resolvidas instâncias com até 150 nós pelo método exato, enquanto o algoritmo heurístico resolveu instâncias com tamanho até 500. Em relação ao efeito provocado pela incerteza nos dados, observou-se que as soluções do problema robusto são bastante distintas das soluções do problema determinístico, impactando diretamente a configuração da rede e também no lucro associado a ela.

Isso mostra que, quando os parâmetros de demanda e custos de configuração da rede estão sob incerteza, pode ser necessário que a rede tenha que ser modificada para que o lucro sofra uma menor redução.

Ainda no PLCML robusto, foi observado também que tanto o lucro, quanto a quantidade de pares atendidos, tendem a permanecer inalterados quando a porcentagem de parâmetros incertos considerados é maior ou igual a 30%, considerando as instâncias utilizadas. Isso se deve ao fato de que, no problema abordado, os pares de origem e destino só têm sua demanda atendida quando ela é rentável. Em geral, ao tomar mais do 30% dos dados sob incerteza, estão sendo desviados dos seus valores nominais parâmetros que correspondem a pares de nós que não são escolhidos para serem atendidos. Assim, esse aumento na quantidade de parâmetros incertos superior a 30% não influencia a solução final para as instâncias testadas.

8.2 Trabalhos futuros

Como propostas de trabalhos futuros, sugere-se dar continuidade a esta pesquisa nas seguintes direções:

- (i) Desenvolvimento de um algoritmo híbrido, combinando algum dos algoritmos heurísticos propostos nesta tese com um método exato.
- (ii) Incorporar técnicas de aprendizado de máquina aos algoritmos heurísticos propostos, a fim de torná-los mais eficientes na resolução de instâncias de grande porte do problema de localização de concentradores com objetivo voltado ao lucro. Mais especificamente, algoritmos não supervisionados de clusterização podem ser utilizados para agrupar os nós da rede em clusters e, assim, diminuir o tamanho do problema a ser resolvido. Desse modo, ao invés de procurar concentradores em todo o conjunto de nós, eles podem ser escolhidos dentro de cada cluster formado. Tais algoritmos podem ser aplicados, por exemplo, para gerar soluções iniciais para o problema.
- (iii) Estender a versão robusta do PLCML a problemas que consideram incertas as capacidades dos concentradores e arcos entre concentradores, considerando diferentes estratégias de alocação, e também propor métodos de solução novos ou adaptados dos métodos aqui propostos para resolver o problema.
- (iv) Incorporar ao PLCML níveis de serviço associados ao tempo total de viagem. Neste tipo de problema, o tempo de viagem entre os pares de nós da rede de concentradores podem ser assumidos como incertos.

-
- (v) Considerar o PLCML robusto com a receita incerta. Tal problema pode ser abordado com programação estocástica em dois estágios e resolvido com métodos baseados na decomposição de Benders, incorporando estratégias de aprimoramento, como a inserção de cortes Pareto-ótimos e a abordagem Benders *Branch-and-Cut*.
 - (vi) Explorar o problema com maximização do lucro voltado para sustentabilidade. Neste caso, a demanda pode ser considerada incerta e técnicas de otimização estocástica podem ser aplicadas ao problema. Como métodos de solução, podem ser desenvolvidos algoritmos especializados na decomposição de Benders, de modo análogo ao abordado neste trabalho.

Referências

- Adulyasak, Y.; Cordeau, J.-F.; e Jans, R. (2015). Benders decomposition for production routing under demand uncertainty. *Operations Research*, 63, 851–867.
- Afandizadeh, S.; Ahmadinejad, M.; Abdoli, S.; e BIGdeli, H. (2023). Solving the hub location-routing problem for national postal network with an integrative approach. *Journal of Transportation Research*, . doi: 10.22034/tri.2023.385465.3128.
- Alibeyg, A.; Contreras, I.; e Fernández, E. (2016). Hub network design problems with profits. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 96, 40–59. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2016.09.008>.
- Alibeyg, A.; Contreras, I.; e Fernández, E. (2018). Exact solution of hub network design problems with profits. *European Journal of Operational Research*, 266, 57–71. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.09.024>.
- Alumur, S.; e Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190, 1–21.
- Alumur, S.; e Kara, B. Y. (2009). A hub covering network design problem for cargo applications in turkey. *Journal of the Operational Research Society*, 60, 1349–1359.
- Alumur, S. A.; Campbell, J. F.; Contreras, I.; Kara, B. Y.; Marianov, V.; e O’Kelly, M. E. (2021). Perspectives on modeling hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 291, 1–17.
- Alumur, S. A.; Kara, B. Y.; e Karasan, O. E. (2009). The design of single allocation incomplete hub networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43, 936–951.
- Alumur, S. A.; Nickel, S.; e da Gama, F. S. (2012a). Hub location under uncertainty. *Transportation Research Part B: Methodological*, 46, 529–543. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2011.11.006>.

- Alumur, S. A.; Yaman, H.; e Kara, B. Y. (2012b). Hierarchical multimodal hub location problem with time-definite deliveries. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48, 1107–1120.
- Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J.; e Sherali, H. D. (2010). *Linear Programming and Network Flows*. (4th ed.). USA: Wiley-Interscience.
- Beasley, J. E. (1990). Or library: Hub location. <http://people.brunel.ac.uk/~m.astjjb/jeb/orlib/phubinfo.html>.
- Ben-Tal, A.; e Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25, 1–13. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(99\)00016-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(99)00016-4).
- Ben-Tal, A.; e Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 88, 411–424. doi: 10.1007/PL00011380.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4, 238–252.
- Bertsimas, D.; e Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 98, 49–71. doi: <https://doi.org/10.1007/s10107-003-0396-4>.
- Bertsimas, D.; e Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations Research*, 52, 35–53. doi: 10.1287/opre.1030.0065.
- Bertsimas, D.; e Tsitsiklis, J. (1997). *Introduction to Linear Optimization*. Athena scientific.
- Birattari, M.; Yuan, Z.; Balaprakash, P.; e Stützle, T. (2010). F-race and iterated f-race: An overview. *Experimental methods for the analysis of optimization algorithms*, (pp. 311–336). doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-02538-9_13.
- Birge, J. R.; e Louveaux, F. V. (1988). A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programs. *European Journal of Operational Research*, 34, 384–392.
- Bollapragada, R.; Li, Y.; e Rao, U. S. (2006). Budget-constrained, capacitated hub location to maximize expected demand coverage in fixed-wireless telecommunication networks. *INFORMS Journal on Computing*, 18, 422–432.

- Boukani, F. H.; Farhang Moghaddam, B.; e Pishvaei, M. S. (2016). Robust optimization approach to capacitated single and multiple allocation hub location problems. *Computational and Applied Mathematics*, 35, 45–60. doi: 10.1007/s40314-014-0179-y.
- Cai, X.; McKinney, D. C.; Lasdon, L. S.; e Watkins, Jr., D. W. (2001). Solving large nonconvex water resources management models using generalized benders decomposition. *Operations Research*, 49, 235–245.
- Calik, H.; Alumur, S. A.; Kara, B. Y.; e Karasan, O. E. (2009). A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks. *Computers and Operations Research*, 36, 3088–3096.
- Camargo, R. S.; de Miranda, G.; e Løkketangen, A. (2013). A new formulation and an exact approach for the many-to-many hub location-routing problem. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 7465–7480.
- Camargo, R. S.; de Miranda Jr, G.; Ferreira, R.; e Luna, H. (2009a). Multiple allocation hub-and-spoke network design under hub congestion. *Computers & Operations Research*, 36, 3097–3106.
- Camargo, R. S.; de Miranda Jr, G.; e Ferreira, R. P. (2011). A hybrid outer-approximation/benders decomposition algorithm for the single allocation hub location problem under congestion. *Operations Research Letters*, 39, 329–337.
- Camargo, R. S.; de Miranda Jr, G.; e Luna, H. (2008). Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Computers and Operations Research*, 35, 1047–1064.
- Camargo, R. S.; de Miranda Jr, G.; e Luna, H. P. L. (2009b). Benders decomposition for hub location problems with economies of scale. *Transportation Science*, 43, 86–97.
- Camargo, R. S.; de Miranda Jr, G.; O’Kelly, M. E.; e Campbell, J. F. (2017). Formulations and decomposition methods for the incomplete hub location network design problem with and without hop-constraints. *Applied Mathematical Modelling*, 51, 274–301.
- Campbell, J. F.; Ernst, A. T.; e Krishnamoorthy, M. (2005a). Hub arc location problems: Part i: Introduction and results. *Management Science*, 51, 1540–1555.
- Campbell, J. F.; Ernst, A. T.; e Krishnamoorthy, M. (2005b). Hub arc location problems: Part ii: Formulations and optimal algorithms. *Management Science*, 51, 1556–1571.

- Campbell, J. F.; e O'Kelly, M. E. (2012). Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science*, 46, 153–169.
- Canto, S. P. (2008). Application of bender' decomposition to power plant preventive maintenance scheduling. *European Journal of Operational Research*, 184, 759–777.
- Carello, G.; Croce, F. D.; Ghirardi, M.; e Tadei, R. (2004). Solving the hub location problem in telecommunication network design: A local search approach. *Networks*, 44, 94–105.
- Çetiner, S.; Sepil, C.; e Süral, H. (2010). Hubbing and routing in postal delivery systems. *Annals of Operations Research*, 181, 109–124.
- Church, R.; e ReVelle, C. (1974). The maximal covering location problem. *Papers in Regional Science*, 32, 101–118. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01942293>.
- Codato, G.; e Fischetti, M. (2006). Combinatorial benders' cuts for mixed-integer linear programming. *Operations Research*, 54, 756–766.
- Contreras, I. (2015). Hub location problems. In G. Laporte, S. Nickel, e F. Saldaña da Gama (Eds.), *Location Science* (pp. 311–344). Springer International Publishing.
- Contreras, I.; Cordeau, J.; e Laporte, G. (2011a). Stochastic uncapacitated hub location. *European Journal of Operational Research*, 212, 518–528.
- Contreras, I.; Cordeau, J.-F.; e Laporte, G. (2011b). Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Operations Research*, 59, 1477–1490.
- Contreras, I.; Cordeau, J.-F.; e Laporte, G. (2012). Exact solution of large-scale hub location problems with multiple capacity levels. *Transportation Science*, 46, 439–459.
- Contreras, I.; Díaz, J. A.; e Fernández, E. (2011c). Branch and price for large-scale capacitated hub location problems with single assignment. *INFORMS Journal on Computing*, 23, 41–55. doi: 10.1287/ijoc.1100.0391.
- Contreras, I.; e Fernández, A., Elena; Marín (2009). Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem. *Computers and Operations Research*, 36, 3117–3127.
- Contreras, I.; e Fernández, E. (2014). Hub location as the minimization of a super-modular set function. *Operations Research*, 62, 557–570.

- Contreras, I.; Fernández, E.; e Marín, A. (2010). The tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research*, 202, 390–400.
- Costa, A. M. (2005). A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers and Operations Research*, 32, 1429 – 1450.
- Dai, W.; Zhang, J.; Sun, X.; e Wandelt, S. (2019). Hubbi: Iterative network design for incomplete hub location problems. *Computers and Operations Research*, 104, 394–414.
- Davari, S.; Zarandi, M. H. F.; e Turksen, I. B. (2013). The incomplete hub-covering location problem considering imprecise location of demands. *Scientia Iranica*, 20, 983–991.
- Eiselt, H.; e Marianov, V. (2009). A conditional p-hub location problem with attraction functions. *Computers & Operations Research*, 36, 3128–3135. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.11.014>. New developments on hub location.
- Ernst, A. T.; e Krishnamoorthy, M. (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, 4, 139–154.
- Ernst, A. T.; e Krishnamoorthy, M. (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104, 100–112.
- Farahani, R. Z.; Hekmatfar, M.; Arabani, A. B.; e Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers and Industrial Engineering*, 64, 1096–1109.
- Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 5, 345.
- Fortz, B.; e Poss, M. (2009). An improved benders decomposition applied to a multi-layer network design problem. *Operations Research Letters*, 37, 359–364.
- Gelareh, S.; Monemi, R. N.; e Nickel, S. (2015). Multi-period hub location problems in transportation. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 75, 67–94.
- Gelareh, S.; e Nickel, S. (2011). Hub location problems in transportation networks. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 47, 1092–1111.

- Gelareh, S.; Nickel, S.; e Pisinger, D. (2010). Liner shipping hub network design in a competitive environment. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 46, 991–1004. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2010.05.005>.
- Geoffrion, A. M.; e Graves, G. W. (1974). Multicommodity distribution system design by benders decomposition. *Management Science*, 20, 822–844.
- Ghaffarinasab, N. (2018). An efficient matheuristic for the robust multiple allocation p-hub median problem under polyhedral demand uncertainty. *Computers & Operations Research*, 97, 31–47. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.04.021>.
- Ghaffarinasab, N. (2020). A highly efficient exact algorithm for the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem. *Decision Science Letters*, 9, 181–192.
- Ghaffarinasab, N.; Ghazanfari, M.; Saboury, A.; e Fathollah, M. (2015). The single allocation hub location problem: a robust optimisation approach. *European J of Industrial Engineering*, 9, 147–170. doi: 10.1504/EJIE.2015.068648.
- Ghaffarinasab, N.; e Kara, B. Y. (2019). Benders decomposition algorithms for two variants of the single allocation hub location problem. *Networks and Spatial Economics*, 19, 83–108.
- Ghaffarinasab, N.; Kara, B. Y.; e Campbell, J. F. (2022). The stratified p-hub center and p-hub maximal covering problems. *Transportation Research Part B: Methodological*, 157, 120–148. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2022.01.002>.
- Guan, J.; Lin, G.; e Feng, H.-B. (2018). A multi-start iterated local search algorithm for the uncapacitated single allocation hub location problem. *Applied soft computing*, 73, 230–241.
- Hansen, P.; Mladenović, N.; Todosijević, R.; e Hanafi, S. (2017). Variable neighborhood search: basics and variants. *EURO Journal of Computational Optimization*, 5, 423–454. doi: <https://doi.org/10.1007/s13675-016-0075-x>.
- Hoff, A.; Peiró, J.; Ángel Corberán; e Martí, R. (2017). Heuristics for the capacitated modular hub location problem. *Computers and Operations Research*, 86, 94–109. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.05.004>.
- Hooker, J. N. (2007). Planning and scheduling by logic-based benders decomposition. *Operations Research*, 55, 588–602.
- Hwang, Y. H.; e Lee, Y. H. (2012). Uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. *Computers & Industrial Engineering*, 63, 382–389. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2012.03.014>.

- Jaillet, P.; Song, G.; e Yu, G. (1996). Airline network design and hub location problems. *Location Science*, 4, 195–212.
- Karimi-Mamaghan, M.; Mohammadi, M.; Meyer, P.; Karimi-Mamaghan, A. M.; e Talbi, E.-G. (2022). Machine learning at the service of meta-heuristics for solving combinatorial optimization problems: A state-of-the-art. *European Journal of Operational Research*, 296, 393–422. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.04.032>.
- Karimi-Mamaghan, M.; Mohammadi, M.; Pirayesh, A.; Karimi-Mamaghan, A. M.; e Irani, H. (2020). Hub-and-spoke network design under congestion: A learning based metaheuristic. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 142, 102069. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2020.102069>.
- Kendall, G.; Bai, R.; Błazewicz, J.; Causmaecker, P. D.; Gendreau, M.; John, R.; Li, J.; McCollum, B.; Pesch, E.; Qu, R.; Sabar, N.; Berghe, G. V.; e Yee, A. (2016). Good laboratory practice for optimization research. *Journal of the Operational Research Society*, 67, 676–689. doi: 10.1057/jors.2015.77.
- Kim, H.; e O’Kelly, M. E. (2009). Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. *Geographical Analysis*, 41, 283–306.
- Kratika, J.; Milanović, M.; Stanimirović, Z.; e Tošić, D. (2011). An evolutionary-based approach for solving a capacitated hub location problem. *Applied Soft Computing*, 11, 1858–1866. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2010.05.035>.
- Kuby, M. J.; e Gray, R. G. (1993). The hub network design problem with stopovers and feeders: The case of federal express. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 27, 1–12.
- Labbé, M.; e Yaman, H. (2008). Solving the hub location problem in a star-star network. *Networks*, 51, 19–33.
- Lasdon, L. S. (1970). *Optimization Theory for Large Systems*. (1st ed.). New York: Macmillan.
- Lee, C.-H.; e Ro, D.-W., Hyung-Bong; Tcha (1993). Topological design of a two-level network with ring-star configuration. *Computers and Operations Research*, 20, 625–637.
- Li, S.; Fang, C.; e Wu, Y. (2020). Robust hub location problem with flow-based set-up cost. *IEEE Access*, 8, 66178–66188. doi: 10.1109/ACCESS.2020.2985377.

- Lin, C.-C.; e Lee, S.-C. (2018). Hub network design problem with profit optimization for time-definite ltl freight transportation. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 114, 104–120. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2018.03.007>.
- Lin, C. C.; Lin, J. Y.; e Chen, Y. C. (2012). The capacitated p-hub median problem with integral constraints: An application to a chinese air cargo network. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 2777–2787.
- Lourenço, H.; Martin, O.; e Stützle, T. (2001). A beginner’s introduction to iterated local search. In *Proceedings of the 4th Metaheuristic International Conference*. Porto, Portugal.
- Lourenço, H.; Martin, O.; e Stützle, T. (2003). Iterated local search. In F. Glover, e G. Kochenberger (Eds.), *Handbook of Metaheuristics* (pp. 321–353). Boston, MA: International Series in Operations Research & Management Science volume 57.
- Lozkins, A.; Krasilnikov, M.; e Bure, V. (2019). Robust uncapacitated multiple allocation hub location problem under demand uncertainty: minimization of cost deviations. *Journal of Industrial Engineering International*, (pp. 199–207). doi: <https://doi.org/10.1007/s40092-019-00329-9>.
- López-Ibañez, M.; Dubois-Lacoste, J.; Cáceres, L. P.; Birattari, M.; e Stützle, T. (2016). The irace package: Iterated racing for automatic algorithm configuration. *Operations Research Perspectives*, 3, 43–58. doi: <https://doi.org/10.1016/j.orp.2016.09.002>.
- Lüer-Villagra, A.; e Marianov, V. (2013). A competitive hub location and pricing problem. *European Journal of Operational Research*, 231, 734–744. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.006>.
- Magnanti, T. L.; e Wong, R. T. (1981). Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29, 464–484.
- Marianov, V.; Serra, D.; e ReVelle, C. (1999). Location of hubs in a competitive environment. *European Journal of Operational Research*, 114, 363–371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00195-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00195-7).
- Martin, R. K. (1999). *Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach*. (1st ed.). New York: Springer Science+Business Media, LLC.

- Martins de Sá, E.; de Camargo, R. S.; e de Miranda, G. (2013). An improved benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research*, 226, 185–202.
- Martins de Sá, E.; Contreras, I.; Cordeau, J.-F.; de Camargo, R. S.; e de Miranda, G. (2015). The hub line location problem. *Transportation Science*, 49, 500–518.
- Martins de Sá, E.; Morabito, R.; e de Camargo, R. S. (2018a). Benders decomposition applied to a robust multiple allocation incomplete hub location problem. *Computers & Operations Research*, 89, 31–50. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.08.001>.
- Martins de Sá, E.; Morabito, R.; e de Camargo, R. S. (2018b). Efficient benders decomposition algorithms for the robust multiple allocation incomplete hub location problem with service time requirements. *Expert Systems with Applications*, 93, 50–61. doi: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.10.005>.
- McDaniel, D.; e Devine, M. (1977). A modified benders' partitioning algorithm for mixed integer programming. *Management Science*, 24, 312–319.
- Meraklı, M.; e Yaman, H. (2016). Robust intermodal hub location under polyhedral demand uncertainty. *Transportation Research Part B: Methodological*, 86, 66–85. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2016.01.010>.
- Meraklı, M.; e Yaman, H. (2017). A capacitated hub location problem under hose demand uncertainty. *Computers & Operations Research*, 88, 58–70. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.06.011>.
- Mercier, A.; Cordeau, J.-F.; e Soumis, F. (2005). A computational study of benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem. *Computers and Operations Research*, 32, 1451–1476.
- Mokhtar, H.; Krishnamoorthy, M.; e Ernst, A. T. (2019). The 2-allocation p-hub median problem and a modified benders decomposition method for solving hub location problems. *Computers and Operations Research*, 104, 375 – 393.
- Najy, W.; e Diabat, A. (2020). Benders decomposition for multiple-allocation hub-and-spoke network design with economies of scale and node congestion. *Transportation Research Part B: Methodological*, 133, 62 – 84.
- Naoum-Sawaya, J.; e Elhedhli, S. (2013). An interior-point benders based branch-and-cut algorithm for mixed integer programs. *Annals of Operations Research*, 210, 33–55.

- Nemhauser, G.; e Wolsey, L. (1999). *Integer and Combinatorial Optimization*. USA: Wiley-Interscience.
- Nickel, S.; Schöbel, A.; e Sonneborn, T. (2001). Hub location problems in urban traffic networks. In M. Pursula, e J. Niittymäki (Eds.), *Mathematical Methods on Optimization in Transportation Systems* (pp. 95–107). Springer.
- O’Kelly, M. E. (1986). The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20, 92–106.
- O’Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32, 393–404.
- O’Kelly, M. E. (1992). Hub facility location with fixed costs. *Papers in Regional Science*, 71, 293–306.
- O’Kelly, M. E.; Luna, H. P. L.; de Camargo, R. S.; e de Miranda, G. (2015). Hub location problems with price sensitive demands. *Networks and Spatial Economics*, 15, 917–945.
- O’Kelly, M. E.; e Miller, H. J. (1994). The hub network design problem. *Journal of Transport Geography*, 2, 31–40.
- Oliveira, F. A.; de Sá, E. M.; e de Souza, S. R. (2022). Benders decomposition applied to profit maximizing hub location problem with incomplete hub network. *Computers & Operations Research*, 142, 105715. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.105715>.
- Oliveira, F. A.; de Sá, E. M.; de Souza, S. R.; e Souza, M. J. F. (2023). Ils-based algorithms for the profit maximizing uncapacitated hub network design problem with multiple allocation. *Computers & Operations Research*, 157, 106252. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106252>.
- Öztürk, C.; Tuzkaya, G.; e Bulkan, S. (2021). Centrality based solution approaches for median-type incomplete hub location problems. *Computers and Industrial Engineering*, 156, 107275. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107275>.
- Papadakos, N. (2008). Practical enhancements to the magnanti–wong method. *Operations Research Letters*, 36, 444–449.
- Peker, M.; e Kara, B. Y. (2015). The p-hub maximal covering problem and extensions for gradual decay functions. *Omega*, 54, 158–172. doi: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.01.009>.

- Pessoa, L. S.; Santos, A. C.; e Resende, M. G. C. (2016). A biased random-key genetic algorithm for the tree of hubs location problem. *Optimization Letters*, 11, 1371–1384.
- Pratt, J. W. (1959). Remarks on zeros and ties in the wilcoxon signed rank procedures. *Journal of the American Statistical Association*, 54, 655–667. doi: 10.2307/2282543.
- Rahmaniani, R.; Crainic, T. G.; Gendreau, M.; e Rei, W. (2017). The benders decomposition algorithm: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 259, 801 – 817.
- Rahmati, R.; Bashiri, M.; Nikzad, E.; e Siadat, A. (2022). A two-stage robust hub location problem with accelerated benders decomposition algorithm. *International Journal of Production Research*, 60, 5235–5257. doi: 10.1080/00207543.2021.1953179.
- Rahmati, R.; Neghabi, H.; Bashiri, M.; e Salari, M. (2023a). Stochastic green profit-maximizing hub location problem. *Journal of the Operational Research Society*, 0, 1–23. doi: 10.1080/01605682.2023.2175734.
- Rahmati, R.; Neghabi, H.; Bashiri, M.; e Salari, M. (2023b). Stochastic regional-based profit-maximizing hub location problem: A sustainable overview. *Omega*, 121, 102921. doi: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2023.102921>.
- Reinsma, J. A.; Penna, P. H. V.; e Souza, M. J. F. (2018). Um algoritmo simples e eficiente para resolução do problema do caixeiro viajante generalizado (in portuguese). In *Anais do 50º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro, Brazil: Galoá. Available at <https://proceedings.science/sbpo/papers/um-algoritmo-simples-e-eficiente-para-resolucao-do-problema-do-caixeiro-viajante-generalizado>.
- Rodríguez-Martín, I.; e Salazar-González, J.-J. (2006). An iterated local search heuristic for a capacitated hub location problem. In G. Laporte, S. Nickel, e F. Saldanha da Gama (Eds.), *Hybrid Metaheuristics* (pp. 70–81). Springer. doi: https://doi.org/10.1007/11890584_6.
- Roshanaei, V.; Luong, C.; Aleman, D. M.; e Urbach, D. (2017). Propagating logic-based benders' decomposition approaches for distributed operating room scheduling. *European Journal of Operational Research*, 257, 439–455.
- Shahabi, M.; e Unnikrishnan, A. (2014). Robust hub network design problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 70, 356–373. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2014.08.003>.

- Shang, X.; Yang, K.; Jia, B.; e Gao, Z. (2021). Distributionally robust cluster-based hierarchical hub location problem for the integration of urban and rural public transport system. *Computers & Industrial Engineering*, 155, 107181. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107181>.
- Shapiro, S. S.; e Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52, 591–611. doi: 10.1093/biomet/52.3-4.591.
- Shen, H.; Liang, Y.; e Shen, Z.-J. M. (2020). Reliable Hub Location Model for Air Transportation Networks Under Random Disruptions. *Manufacturing & Service Operations Management*, 23, 388–406. doi: <https://doi.org/10.1287/msom.2019.0845>.
- Shiripour, S.; Hematian, M.; e Mahdavi-Amiri, N. (2023). A robust optimization model for dynamic virtual hub location problem under uncertainty using an m/m/c/k queuing model: two metaheuristic algorithms. *Oper Res Int J*, 23. doi: <https://doi.org/10.1007/s12351-023-00765-x>.
- Souza, M.; Coelho, I.; Ribas, S.; Santos, H.; e Merschmann, L. (2010). A hybrid heuristic algorithm for the open-pit-mining operational planning problem. *European Journal of Operational Research*, 207, 1041–1051. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.05.031>.
- Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21. doi: 10.1287/opre.21.5.1154.
- Subramanian, A.; Drummond, L.; Bentes, C.; Ochi, L.; e Farias, R. (2010). A parallel heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Computers & Operations Research*, 37, 1899–1911. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2009.10.011>. Metaheuristics for Logistics and Vehicle Routing.
- Taherkhani, G.; e Alumur, S. A. (2019). Profit maximizing hub location problems. *Omega*, 86, 1–15. doi: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2018.05.016>.
- Taherkhani, G.; Alumur, S. A.; e Hosseini, M. (2021). Robust stochastic models for profit-maximizing hub location problems. *Transportation Science*, 55(6), 1322–1350. doi: 10.1287/trsc.2021.1064.
- Taherkhani, T.; Alumur, S. A.; e Hosseini, M. (2020). Benders decomposition for the profit maximizing capacitated hub location problem with multiple demand classes. *Transportation Science*, 54(6), 1446–1470. doi: 10.1287/trsc.2020.1003.

- Tan, P. Z.; e Kara, B. Y. (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks*, 49, 28–39.
- Tiwari, R.; Jayaswal, S.; e Sinha, A. (2021). Competitive hub location problem: Model and solution approaches. *Transportation Research Part B: Methodological*, 146, 237–261. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2021.01.012>.
- Todosijević, R.; Urošević, D.; Mladenović, N.; e Hanafi, S. (2017). A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated r-allocation p-hub median problem. *Optimization Letters*, 11, 1109–1121. doi: 10.1007/s11590-015-0867-6.
- Wandelt, S.; Dai, W.; Zhang, J.; e Sun, X. (2022). Toward a reference experimental benchmark for solving hub location problems. *Transportation Science*, 56, 543–564.
- Wang, S.; Chen, Z.; e Liu, T. (2020). Distributionally robust hub location. *Transportation Science*, 54. doi: 10.1287/trsc.2019.0948.
- Wieberneit, N. (2008). Service network design for freight transportation: a review. *OR Spectrum*, 30, 77–112.
- Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1, 80–83. doi: 10.2307/3001968.
- Xu, Y.; Dai, W.; Sun, X.; e Wandelt, S. (2017). Improved benders decomposition for capacitated hub location problem with incomplete hub networks. In *2017 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)* (pp. 1–8).
- Yaman, H. (2008). Star p-hub median problem with modular arc capacities. *Computers and Operations Research*, 35, 3009–3019.
- Yaman, H. (2011). Allocation strategies in hub networks. *European Journal of Operational Research*, 211, 442–451.
- Yaman, H.; e Elloumi, S. (2012). Star p-hub center problem and star p-hub median problem with bounded path lengths. *Computers and Operations Research*, 39, 2725–2732.
- Yoon, M.-G.; e Current, J. (2008). The hub location and network design problem with fixed and variable arc costs: Formulation and dual-based solution heuristic. *Journal of the Operational Research Society*, 59, 80–89.
- Zetina, C. A.; Contreras, I.; Cordeau, J.-F.; e Nikbakhsh, E. (2017). Robust uncapacitated hub location. *Transportation Research Part B: Methodological*, 106, 393–410. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2017.06.008>.

-
- Zhang, C.; Sun, X.; Dai, W.; e Wandelt, S. (2023). Solving hub location problems with profits using variable neighborhood search. *Transportation Research Record*, 2677, 1675–1695. doi: 10.1177/03611981221105501.
- Zhang, J. L.; e Ponnambalam, K. (2006). Hydro energy management optimization in a deregulated electricity market. *Optimization and Engineering*, 7, 47–61.
- Zhu, Y.; e Kuno, T. (2003). Global optimization of nonconvex minlp by a hybrid branch-and-bound and revised general benders decomposition approach. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 42, 528–539.

Apêndice A

Resultados Complementares

A.1 Complemento para a demonstração da Proposição 5.1.1

Seja $s_2 = (h, z, y, f)$, a solução definida na Proposição 5.1.1, a partir de uma solução $s_1 \in P_1$. A prova de que s_2 pertence a P_2 e possui o mesmo valor de função objetivo que s_1 é dada abaixo.

Proposição A.1.1. *Sejam s_1 e s_2 as soluções dadas na Proposição 5.1.1. Então, a solução s_2 pertence a P_2 e possui o mesmo valor de função objetivo que s_1 .*

Demonstração. Seja R o conjunto de pares (k, m) tais que k e m são, respectivamente, o primeiro e o último concentrador de uma rota usada para servir o par (i, j) , conforme definido na Proposição 5.1.1. Para verificar que $s_2 \in P_2$, basta mostrar que ela satisfaz as restrições (4.2)-(4.11). Por construção, as restrições (4.6)-(4.11) são satisfeitas. O conjunto de restrições (4.2) também é satisfeito, pois:

$$\sum_{k \in N} \sum_{m \in N} y_{ijkm} = \sum_{(k,m) \in R} y_{ijkm} = \sum_{k: (k,m) \in R} a_{ijk} = \sum_{k \in N} a_{ijk} \leq 1, \forall i, j \in N.$$

Para as restrições (4.3), temos quatro casos a considerar. Dados $i, j, k \in N$, temos que se a demanda do par (i, j) for atendida, então isso ocorrerá ao longo de um caminho no qual o hub k : (i) é o único concentrador do caminho; (ii) é o primeiro hub do caminho; (iii) é o último hub do caminho; (iv) não pertence ao caminho. Caso ocorra (i) ou (ii), temos que

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} y_{ijmk} = \sum_{m \in N} y_{ijkm} + 0 = \sum_{m: (k,m) \in R} y_{ijkm} = a_{ijk} \leq h_k.$$

Se o caso (iii) ocorre, então:

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} y_{ijmk} = 0 + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} y_{ijmk} = \sum_{\substack{m: (m,k) \in R \\ m \neq k}} y_{ijmk} = b_{ijk} \leq h_k.$$

Finalmente, se o caso (iv) ocorre, então

$$\sum_{m \in N} y_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} y_{ijmk} = 0 \leq h_k.$$

Assim, o conjunto de restrições (4.3) é satisfeito por s_2 .

Para verificar que s_2 satisfaz as restrições (4.4), veja que, por hipótese,

$$a_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijmk} = b_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijkm}, \quad \forall i, j, k \in N.$$

Portanto, para todo $i, k \in N$, temos que

$$\sum_{j \in N} w_{ij} \left(a_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijmk} \right) = \sum_{j \in N} w_{ij} \left(b_{ijk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} x_{ijkm} \right).$$

isto é,

$$\sum_{j \in N} w_{ij} a_{ijk} + \sum_{j \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} w_{ij} x_{ijmk} = \sum_{j \in N} w_{ij} b_{ijk} + \sum_{j \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} w_{ij} x_{ijkm}.$$

Por (5.2), (5.3) e (5.4), tem-se

$$\sum_{j \in N} \sum_{m \in N} w_{ij} y_{ijkm} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{imk} = \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} w_{ij} y_{ijmk} + \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} f_{ikm}, \quad \forall i, k \in N.$$

Para o conjunto de restrições (4.5), pode ser visto que

$$f_{ikm} = \sum_{j \in N} w_{ij} x_{ijkm} \leq \sum_{j \in N} w_{ij} z_{km}, \quad \forall i, k, m \in N, k \neq m,$$

pois, por hipótese, $x_{ijkm} \leq z_{km}$, para todo $i, k, m \in N, k \neq m$.

Para verificar que o valor da função objetivo produzido por s_2 é igual ao valor obtido por s_1 , basta notar que são válidas as seguintes igualdades:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} r_{ij} w_{ij} a_{ijk} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} r_{ij} w_{ij} \left(\sum_{m: (k,m) \in R} y_{ijkm} \right)$$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} r_{ij} w_{ij} y_{ijk m},$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} w_{ij} a_{ijk} &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} c_{ik} w_{ij} \left(\sum_{m: (k, m) \in R} y_{ijk m} \right) \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} c_{ik} w_{ij} y_{ijk m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} b_{ijm} &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} \left(\sum_{k: (k, m) \in R} y_{ijk m} \right) \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{m \in N} c_{mj} w_{ij} y_{ijk m} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} w_{ij} x_{ijk m} &= \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} \left(\sum_{j \in N} w_{ij} x_{ijk m} \right) \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} \alpha c_{km} f_{ikm}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução s_2 pertencente a P_2 possui o mesmo valor de função objetivo que s_1 . Isso finaliza a demonstração. $\square$

A.2 Algoritmo Especializado para o Subproblema Dual de Benders

No método de decomposição de Benders, o valor da função objetivo dos subproblemas foi obtido com o auxílio do algoritmo de Floyd-Warshall (Floyd, 1962), aplicado aos subproblemas primais (SPs). Esse valor pode ser calculado também usando métodos de solução especializados. A seguir, apresentamos um algoritmo especializado para resolver o subproblema dual de Benders (SPD) e obter o valor de $v(\text{SP})$.

O subproblema dual (5.19)-(5.27) pode ser decomposto em n^2 subproblemas, um para cada par de origem e destino. Por simplicidade, as variáveis duais β_{ij} , γ_{ij} , θ_{ijk} , μ_{ijm} e ρ_{ijkm} serão denotadas, respectivamente, por β , γ , θ_k , μ_m e ρ_{km} . Assim, cada um desses subproblemas, em uma determinada iteração u do método de decomposição de Benders, é dado por:

$$\min \quad \beta + \gamma + \sum_{k \in N} h_k^u \theta_k + \sum_{m \in N} h_m^u \mu_m + \sum_{k \in N} \sum_{\substack{m \in N \\ m \neq k}} z_{km}^u \rho_{km} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{sujeito a} \quad \beta + \delta_k + \theta_k \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik}) \quad k \in N \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma - \delta_m + \mu_m \geq -w_{ij}c_{mj} \quad m \in N \quad (\text{A.3})$$

$$\delta_m - \delta_k + \rho_{km} \geq -\alpha w_{ij}c_{km} \quad k, m \in N, k \neq m \quad (\text{A.4})$$

$$\beta, \gamma \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\theta_k \geq 0 \quad k \in N \quad (\text{A.6})$$

$$\mu_m \geq 0 \quad m \in N \quad (\text{A.7})$$

$$\rho_{km} \geq 0 \quad k, m \in N, k \neq m \quad (\text{A.8})$$

$$\delta_k \in \mathbb{R} \quad k \in N \quad (\text{A.9})$$

Sejam $H^1 = \{k : h_k^u = 1\}$ o conjunto dos concentradores abertos; $H^0 = \{k : h_k^u = 0\}$ o conjunto dos concentradores fechados; $Z^1 = \{(k, m) : z_{km}^u = 1\}$ o conjunto dos arcos entre concentradores ativos; e $Z^0 = \{(k, m) : z_{km}^u = 0\}$ o conjunto dos arcos entre concentradores inativos.

Se uma solução para esse subproblema é tal que $\gamma = 0$, $\theta_k = 0$, para todo $k \in H^1$, $\mu_m = 0$, para todo $m \in N$ e $\rho_{km} = 0$, para todo $(k, m) \in Z^1$, então o subproblema se reduz a minimizar β , sujeito a (A.2)-(A.9).

Assim, considerando $\gamma = 0$ e $\mu_m = 0$, para todo $m \in N$, da expressão (A.3) tem-se que:

$$\delta_m \leq w_{ij}c_{mj}, \quad \forall m \in N. \quad (\text{A.10})$$

Da expressão (A.4), deve-se ter:

$$\delta_m - \delta_k \geq -\alpha w_{ij} c_{km}, \forall (k, m) \in Z^1. \quad (\text{A.11})$$

Além disso, da expressão (A.2), segue que:

$$\beta \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik}) - \delta_k, \forall k \in H^1. \quad (\text{A.12})$$

As relações obtidas nas inequações (A.10), (A.11) e (A.12) motivam o Algoritmo 10 dado a seguir, para obter a solução do subproblema dual.

Algoritmo 10 Solução do Subproblema Dual

```

1:  $\gamma = 0, \mu_m = 0, \forall m \in N$ 
2: for all  $k \in N$  do
3:    $\delta_k = w_{ij} c_{kj}$ 
4:    $l_k = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik})$ 
5: end for
6: for all  $(k, m) \in Z^1$  do
7:   if  $\delta_m - \delta_k < -\alpha w_{ij} c_{km}$  then
8:      $\delta_k = \delta_m + \alpha w_{ij} c_{km}$  e reinicia o for da linha 6.
9:   end if
10: end for
11: if  $H^1 = \emptyset$  then
12:    $\beta = 0$ 
13: else
14:    $\beta = \max_{k \in H^1} \{l_k - \delta_k, 0\}$ 
15: end if
16: for all  $k \in N$  do
17:    $\theta_k = \max\{l_k - \beta - \delta_k, 0\}$ 
18: end for
19: for all  $\{(k, m) \in N \times N, k \neq m\}$  do
20:    $\rho_{km} = \max\{\delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij} c_{km}, 0\}$ 
21: end for

```

As três proposições apresentadas a seguir mostram que a solução obtida pelo Algoritmo 10 é uma solução ótima para o subproblema dual. A Proposição A.2.1 garante que esse algoritmo termina após um número finito de passos. A Proposição A.2.2 mostra que a solução obtida pelo algoritmo é uma solução viável para o subproblema dual e a Proposição A.2.3 assegura a otimalidade da solução obtida.

Proposição A.2.1. *O Algoritmo 10 termina após um número finito de passos.*

Demonstração. Para ver que esse algoritmo é encerrado após um número finito de passos, basta mostrar que o *loop* entre as linhas 6 e 10 termina após um número

finito de execuções. Observe que esse *loop* calcula o menor custo de transporte entre os concentradores que são origem de arcos entre concentradores ativos até o destino final. O menor custo de transporte entre esses concentradores e o destino final é obtido através da identificação do caminho mais curto entre eles. A condicional da linha 7 permite identificar qual das seguintes possibilidades é mais vantajosa: (i) utilizar um caminho direto entre um desses concentradores e nó de destino; ou (ii) utilizar um caminho que sai desses concentradores e utiliza um ou mais arcos entre concentradores ativos até o destino final. Caso um caminho mais curto seja identificado, então um menor custo de transporte é obtido e o seu valor é atualizado. Neste caso, o *loop* é reiniciado para verificar se o custo associado a algum outro concentrador precisa ser atualizado. Como existe uma quantidade finita de arcos entre concentradores ativos e para cada concentrador correspondente existe uma distância mínima até o nó de destino, então, após uma quantidade finita de execuções, esse *loop* é encerrado. $\square$

O Exemplo A.2.1 a seguir, ilustra o cálculo realizado entre as linhas 6 e 10 do Algoritmo 10.

Exemplo A.2.1. Considere a rede de concentradores da Figura A.1, em que os nós 2, 3 e 4 são concentradores e os números indicados nos arcos da rede representam os respectivos custos de transporte.

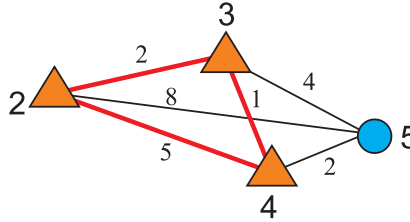


Figura A.1: A.2.1: Rede com concentradores nos nós 2, 3 e 4.

Suponha que o conjunto dos arcos entre concentradores ativos é dado por $Z^1 = \{(2,3), (2,4), (3,4)\}$ e que nó de destino é o nó 5. Vamos aplicar o loop entre as linhas 6 e 10 do Algoritmo 10 para determinar o menor custo de transporte para rotear uma unidade de demanda entre o concentrador 2 e nó de destino 5 (indicado por δ_2) e também entre o concentrador 3 e o nó de destino 5 (denotado por δ_3).

Do Algoritmo 10, segue que, inicialmente, os valores dos custos de transporte dos concentradores ativos 2, 3 e 4 até o nó de destino 5 são dados, respectivamente, por $\delta_2 = 8$, $\delta_3 = 4$ e $\delta_4 = 2$, que correspondem aos custos do caminho direto entre cada um desses concentradores até o destino final.

Aplicando o loop entre as linhas 6 e 10 nos elementos do conjunto Z^1 (considerados na mesma sequência dada anteriormente), obtemos quatro execuções, detalhadas a seguir.

1ª Execução

- Arco $(2, 3)$: Neste caso, temos que $\delta_3 - \delta_2 = -4 < -2 = -c_{23}$, logo o valor de δ_2 é atualizado para $\delta_2 = \delta_3 + c_{23} = 4 + 2 = 6$. Isso significa que é mais vantajoso utilizar o caminho $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$, ao invés do caminho $2 \rightarrow 5$. Como o valor de δ_2 foi atualizado, o loop é reiniciado.

2ª Execução

- Arco $(2, 3)$: Temos que $\delta_3 - \delta_2 = -2 = -2 = -c_{23}$, logo o valor de δ_2 não é atualizado.
- Arco $(2, 4)$: Temos que $\delta_4 - \delta_2 = -4 > -5 = -c_{24}$, logo o valor de δ_2 não é atualizado.
- Arco $(3, 4)$: Temos que $\delta_4 - \delta_3 = -2 < -1 = -c_{34}$, logo o valor de δ_3 é atualizado para $\delta_3 = \delta_4 + c_{34} = 2 + 1 = 3$. Isso significa que é mais vantajoso utilizar o caminho $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ao invés do caminho $3 \rightarrow 5$. Como o valor de δ_3 foi atualizado, o loop é reiniciado para verificar, neste caso, se o custo do concentrador 2 também será atualizado.

3ª Execução

- Arco $(2, 3)$: Com os valores atuais, temos que $\delta_3 - \delta_2 = -3 < -2 = -c_{23}$, logo o valor de δ_2 é atualizado para $\delta_2 = \delta_3 + c_{23} = 3 + 2 = 5$. Isso significa que é mais vantajoso utilizar o caminho $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$, ao invés do caminho anterior $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. Como o valor de δ_2 foi atualizado, o loop é reiniciado.

4ª Execução

Nesta execução, nenhum dos custos será atualizado:

- Arco $(2, 3)$: $\delta_3 - \delta_2 = -2 = -c_{23}$
- Arco $(2, 4)$: $\delta_4 - \delta_2 = -3 > -5 = -c_{24}$
- Arco $(3, 4)$: $\delta_4 - \delta_3 = -1 = -c_{34}$

e o loop é finalizado. Portanto, ao final da execução, obtém-se que o menor custo de transporte entre o concentrador 2 e o nó de destino 5 é dado por $\delta_2 = 5$ (utilizando o caminho $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$) e o custo mínimo entre o concentrador 3 e o nó final 5 é dado por $\delta_3 = 3$ (correspondente ao caminho $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$).

Proposição A.2.2. Seja $s = (\beta, \gamma, \theta, \mu, \delta, \rho)$ a solução obtida pelo Algoritmo 10. Então, s é uma solução para o subproblema dual (A.1)-(A.9).

Demonstração. Será mostrado que s é uma solução viável para o subproblema dual.

Se $H^1 = \emptyset$, então $\beta = \gamma = \mu = 0$, $\delta_k = w_{ij}c_{kj}$, para todo $k \in N$, $\theta_k = \max\{w_{ij}(r_{ij} - c_{ik}) - \delta_k, 0\}$, para todo $k \in N$ e $\rho_{km} = \max\{\delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{km}, 0\}$, para todo $k, m \in N, k \neq m$. É fácil ver que esses valores satisfazem todas as restrições (A.2)-(A.9).

Se $H^1 \neq \emptyset$, então temos que $\gamma = 0, \mu = 0$, $\beta = \max_{k \in H^1} \{l_k - \delta_k, 0\}$, $\theta_k = \max\{l_k - \beta - \delta_k, 0\}$, $\rho_{km} = \max\{\delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{km}, 0\}$, onde $l_k = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik})$ e $\delta_k \in \{w_{ij}c_{kj}, \delta_m + \alpha w_{ij}c_{km}, \text{ para algum } m \neq k\}$. Logo, as restrições (A.5)-(A.9) são satisfeitas. A seguir será mostrado que as restrições (A.2)-(A.4) também são satisfeitas.

Para todo $k \in N$, tem-se que $\theta_k = \max\{l_k - \beta - \delta_k, 0\}$. Se $\theta_k = 0$, então $l_k - \beta - \delta_k \leq 0$, ou seja, $\beta + \delta_k \geq l_k$. Logo:

$$\beta + \delta_k + \theta_k = \beta + \delta_k \geq l_k = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik}).$$

Se $\theta_k = l_k - \beta - \delta_k$, então:

$$\beta + \delta_k + \theta_k = \beta + \delta_k + (l_k - \beta - \delta_k) = l_k = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik}).$$

Portanto, s satisfaz o conjunto de restrições (A.2).

Será mostrado que s satisfaz as restrições (A.3). Sabe-se que $\gamma = 0$ e $\mu_k = 0$, para todo $k \in N$. Seja $k \in N$, tem-se dois casos a considerar: (i) $\delta_k = w_{ij}c_{kj}$ e (ii) $\delta_k = \delta_m + \alpha w_{ij}c_{km}$, para algum $m \in N$, com $m \neq k$. No caso (i), é imediato que:

$$\gamma - \delta_k + \mu_k = -\delta_k = -w_{ij}c_{kj}.$$

Caso ocorra (ii), então tem-se por construção que $\delta_m + \alpha w_{ij}c_{km} < w_{ij}c_{kj}$. Então:

$$\gamma - \delta_k + \mu_k = -\delta_k = -\delta_m - \alpha w_{ij}c_{km} > -w_{ij}c_{kj}.$$

Logo, o conjunto de restrições (A.3) é verificado por s .

Por fim, será mostrado que s satisfaz as restrições (A.4). Sejam $k, m \in N$, com $k \neq m$. Tem-se que $\rho_{km} = \max\{\delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{km}, 0\}$. Se $\rho_{km} = 0$, então $\delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{km} \leq 0$, ou seja, $\delta_m - \delta_k \geq -\alpha w_{ij}c_{km}$. Logo:

$$\delta_m - \delta_k + \rho_{km} = \delta_m - \delta_k \geq -\alpha w_{ij}c_{km}.$$

Se $\rho_{km} = \delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{km}$, segue que

$$\delta_m - \delta_k + \rho_{km} = \delta_m - \delta_k + (\delta_k - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{km}) = -\alpha w_{ij}c_{km}.$$

Do exposto acima, segue que s é uma solução viável para o subproblema dual. $\square$

Proposição A.2.3. *Seja $s = (\beta, \gamma, \theta, \mu, \delta, \rho)$ a solução obtida pelo Algoritmo 10. Então, s é uma solução ótima para o subproblema dual (A.1)-(A.9).*

Demonstração. Se H^1 é vazio, temos que $\nu(s) = 0$, onde $\nu(z)$ representa o valor da função objetivo em z . Então, neste caso, temos que $\nu(s) \leq \nu(z)$, para qualquer z viável.

Considere o caso em que H^1 é não vazio e seja $\tilde{s} = (\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\mu}, \tilde{\delta}, \tilde{\rho})$ uma solução viável para o subproblema dual. Vamos mostrar que $\nu(s) \leq \nu(\tilde{s})$.

Temos que $\beta = \max_{k \in H^1} \{l_k - \delta_k, 0\}$, onde $l_k = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik})$ e $\delta_k \in \{w_{ij}c_{kj}, \delta_m + \alpha w_{ij}c_{km}, \text{ para algum } m \neq k\}$. Se $\beta = 0$, então é claro que $\nu(s) = \beta = 0 \leq \nu(\tilde{s})$.

Suponha que $\beta > 0$. Temos dois casos a considerar. No primeiro caso, suponha que $\beta = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik'})$, com $k' \in H^1$. Como $\tilde{s}$ é uma solução viável para o subproblema, temos que

$$\tilde{\beta} + \tilde{\delta}_{k'} + \tilde{\theta}_{k'} \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik'})$$

e

$$\tilde{\gamma} - \tilde{\delta}_{k'} + \tilde{\mu}_{k'} \geq -w_{ij}c_{k'j}.$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos

$$\tilde{\beta} + \tilde{\theta}_{k'} + \tilde{\gamma} + \tilde{\mu}_{k'} \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik'} - c_{k'j}) = \beta.$$

Logo,

$$\beta \leq \tilde{\beta} + \tilde{\theta}_{k'} + \tilde{\gamma} + \tilde{\mu}_{k'} \leq \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} + \sum_{k \in H^1} (\tilde{\theta}_k + \tilde{\mu}_k) + \sum_{(k,m) \in Z^1} \tilde{\rho}_{km},$$

ou seja, $\nu(s) \leq \nu(\tilde{s})$.

No segundo caso, suponha que $\beta = w_{ij}(r_{ij} - c_{ik'}) - \delta_m - \alpha w_{ij}c_{k'm}$, com $k', m \in H^1$, $k' \neq m$ e $\delta_m = w_{ij}c_{mj}$. Como $\tilde{s}$ é uma solução viável para o subproblema, temos que

$$\tilde{\beta} + \tilde{\delta}_{k'} + \tilde{\theta}_{k'} \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik'}),$$

$$\tilde{\gamma} - \tilde{\delta}_m + \tilde{\mu}_m \geq -w_{ij}c_{mj},$$

$$\tilde{\delta}_m - \tilde{\delta}_{k'} + \tilde{\rho}_{k'm} \geq -\alpha w_{ij}c_{k'm}.$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} + \tilde{\theta}_{k'} + \tilde{\mu}_m + \tilde{\rho}_{k'm} \geq w_{ij}(r_{ij} - c_{ik'}) - w_{ij}c_{mj} - \alpha w_{ij}c_{k'm} = \beta.$$

Logo,

$$\beta \leq \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} + \tilde{\theta}_{k'} + \tilde{\mu}_m + \tilde{\rho}_{k'm} \leq \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} + \sum_{k \in H^1} (\tilde{\theta}_k + \tilde{\mu}_k) + \sum_{(k,m) \in Z^1} \tilde{\rho}_{km},$$

ou seja, $\nu(s) \leq \nu(\tilde{s})$.

Logo, em todos os casos, obtemos que $\nu(s) \leq \nu(\tilde{s})$ e, portanto, s é uma solução ótima para o subproblema dual. $\square$

O Algoritmo 10 foi utilizado para obter o valor $\nu(\text{SP})$ da função objetivo dos subproblemas no método de decomposição de Benders dado pelo Algoritmo 2.

Nos testes apresentados a seguir, foi empregado o método BDCFR, o mais promissor identificado no Capítulo 5, em que é usado o esquema Benders *Branch-and-Cut* e os cortes Pareto-ótimos, segundo a abordagem de Papadakos (2008). De modo análogo aos testes realizados no Capítulo 5, foram utilizadas as instâncias AP com 50 nós, considerando os dois tipos de custos *tight* e *loose*, com as receitas tomando os valores $\{20, 30, 50\}$ e $\alpha \in \{0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$. Os experimentos foram realizados em um computador com as mesmas configurações dos testes realizados nos capítulos anteriores.

Em todas as instâncias testadas, o Algoritmo 10 convergiu para a solução ótima e apresentou um excelente desempenho em relação ao tempo computacional, como pode ser observado na Tabela A.1. Essa tabela mostra os tempos computacionais (em segundos) gastos para obter a solução dos subproblemas de Benders (Tempo SP) utilizando o CPLEX, o algoritmo de Floyd-Warshall e o algoritmo especializado proposto. Também são exibidos, em segundos, os tempos totais registrados para solucionar as instâncias testadas (Tempo Total).

A Tabela A.1 mostra que os tempos registrados ao usar o Algoritmo 10 são próximos dos tempos gastos ao se usar a abordagem de Floyd-Warshall, empregada nos experimentos do Capítulo 5. Vê-se também que os tempos registrados usando os algoritmos são inferiores aos tempos obtidos com o CPLEX, sendo a diferença bem significativa, neste caso.

O Algoritmo 10 possui uma vantagem em relação à utilização do algoritmo de Floyd-Warshall. Além de fornecer o valor ótimo do subproblema de Benders, ele gera uma solução ótima para o subproblema dual, que pode ser utilizada para criar novos cortes de Benders válidos, o que não pode ser feito usando o método de Floyd-Warshall.

Portanto, os resultados apresentados mostram que o algoritmo especializado para resolver o subproblema dual de Benders é promissor em relação ao tempo computacional e proporciona uma ferramenta de geração de cortes de Benders que pode ser

Tabela A.1: Tempo Computacional com Diferentes Abordagens de Solução para o Subproblema de Benders

Instância	Receita	α	CPLEX		Floyd-Warshall		Alg Especializado	
			Tempo SP (s)	Tempo Total (s)	Tempo SP (s)	Tempo Total (s)	Tempo SP (s)	Tempo Total (s)
50L	20	0,2	73,1553	238,52	0,0135	147,24	0,0266	146,41
50L	20	0,4	43,0832	140,27	0,0059	85,11	0,0195	85,32
50L	20	0,6	23,2534	70,20	0,0025	47,21	0,0132	46,91
50L	20	0,8	16,6426	45,38	0,0008	28,95	0,0088	28,95
50L	30	0,2	47,4044	104,12	0,0017	56,52	0,0132	56,22
50L	30	0,4	33,7186	84,63	0,0012	50,68	0,0131	50,65
50L	30	0,6	23,4986	61,71	0,0009	38,25	0,0088	38,10
50L	30	0,8	20,7763	56,92	0,0009	36,72	0,0088	36,28
50L	50	0,2	92,9871	374,03	0,0263	338,65	0,0394	337,78
50L	50	0,4	54,9118	257,02	0,0164	185,35	0,0290	185,25
50L	50	0,6	42,0920	188,86	0,0164	160,51	0,0302	159,46
50L	50	0,8	38,7014	231,82	0,0124	179,45	0,0233	178,23
50T	20	0,2	105,5950	320,17	0,0088	224,73	0,0280	221,49
50T	20	0,4	61,7891	189,93	0,0068	131,15	0,0241	131,23
50T	20	0,6	33,4497	119,42	0,0027	84,79	0,0135	84,03
50T	20	0,8	28,4618	86,78	0,0027	58,12	0,0136	57,99
50T	30	0,2	99,0841	396,11	0,0308	330,05	0,0423	329,23
50T	30	0,4	54,6263	234,63	0,0198	214,96	0,0279	214,82
50T	30	0,6	37,3247	261,89	0,0175	328,24	0,0276	326,63
50T	30	0,8	37,2383	131,83	0,0139	94,32	0,0235	93,97
50T	50	0,2	88,1186	469,08	0,0123	370,76	0,0261	363,75
50T	50	0,4	54,4685	216,86	0,0079	173,78	0,0238	172,53
50T	50	0,6	50,0639	173,51	0,0082	123,44	0,0268	123,43
50T	50	0,8	27,5100	86,13	0,0036	59,91	0,0093	59,60
Média			49,4981	189,16	0,0097	147,87	0,0217	147,01

explorada para aprimorar a decomposição de Benders.

A.3 Comparação do algoritmo E-ILS-RVND com o algoritmo VNS de Zhang et al. (2023)

Apresentamos nesta seção uma comparação entre o algoritmo E-ILS-RVND e os resultados indicados por Zhang et al. (2023), obtidos com um algoritmo VNS com conjunto de dados CAB. É importante destacar que esta comparação possui algumas limitações, pois Zhang et al. (2023) executou os experimentos em uma máquina com configuração diferente da máquina utilizada neste trabalho e implementou o algoritmo utilizando outra linguagem de programação (python). Além disso, Zhang et al. (2023) executou experimentos computacionais usando apenas instâncias do conjunto de dados CAB, que são instâncias de tamanho menor em comparação com o conjunto de instâncias AP e o conjunto de instâncias proposto por Contreras et al. (2011b).

Os testes foram realizados com o conjunto de dados CAB com 25 nós. As configurações dos parâmetros foram as mesmas usadas por Zhang et al. (2023). Para a receita foram considerados três valores $r_{ij} \in \{1000, 1500, 2000\}$, respectivamente referidos como receita baixa, receita média e receita alta. Os custos de instalação de concentradores foram considerados como $s_k \in \{50, 100, 150\}$, também chamados de custos baixo (L), médio (M) e alto (H), respectivamente. O custo para instalação dos arcos entre concentradores foi considerado como sendo $0,10 \cdot s_k$, para cada tipo de custo considerado. Os valores de α foram 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8.

Como este estudo e o estudo desenvolvido por Zhang et al. (2023) utilizaram máquinas diferentes, ajustamos o tempo de execução apresentado por Zhang et al. (2023) utilizando o *software* PassmarMark, disponível em <https://www.cpubenchmark.net/singleCompare.php>, que fornece a marca da CPU de cada máquina. O tempo ajustado é obtido multiplicando o tempo de execução apresentado por Zhang et al. (2023) por um fator de ajuste dado pela razão entre o valor do CPU Mark do computador que eles usaram pelo valor do CPU Mark do computador usado em nossos experimentos computacionais. Encontramos um fator de ajuste de 0,896.

A Tabela A.2 mostra os resultados indicados por Zhang et al. (2023), incluindo os tempos de execução ajustados, e aqueles obtidos com E-ILS-RVND, referentes a 20 execuções. Em Zhang et al. (2023), ao invés de apresentar os valores médios, como feito nos experimentos do Capítulo 6 deste trabalho, os autores apresentam os resultados dos valores medianos para os gaps. Esta tabela apresenta o gap mediano (Δ_{med}), o tempo de execução médio e o tempo de execução médio ajustado para o VNS de Zhang et al. (2023). Para o E-ILS-RVND, esta tabela apresenta o gap associado ao melhor valor encontrado (Δ_{best}), o gap mediano (Δ_{med}) e o tempo médio de execução. Os valores desta tabela mostram que, embora os gaps medianos do E-ILS-RVND não sejam todos nulos, tal como obtidos pelo VNS, atingiu o valor ótimo

em todos os casos. Além disso, os tempos de execução registrados pelo E-ILS-RVND foram notavelmente inferiores em comparação com o outro método.

Tabela A.2: Resultados para as instâncias com 25 nós do conjunto de dados CAB considerando 20 execuções

Custos	α	Valor ótimo	VNS - (Zhang et al., 2023)			E-ILS-RVND		
			Δ_{med} (%)	Tempo médio (s)	Tempo ajust. (s)	Δ_{best} (%)	Δ_{med} (%)	Tempo médio (s)
Receita alta								
L	0,2	1162,92	0,00	250,24	224,22	0,00	0,00	10,62
	0,4	1008,46	0,00	179,21	160,57	0,00	0,99	9,69
	0,6	898,24	0,00	115,65	103,62	0,00	0,00	5,73
	0,8	839,40	0,00	80,50	72,13	0,00	0,01	2,79
M	0,2	911,27	0,00	66,07	59,20	0,00	0,35	2,87
	0,4	803,73	0,00	32,35	28,99	0,00	0,52	2,46
	0,6	717,73	0,00	30,15	27,01	0,00	0,18	2,33
	0,8	690,90	0,00	28,91	25,90	0,00	0,00	0,52
H	0,2	738,08	0,00	28,35	25,40	0,00	0,73	2,00
	0,4	633,73	0,00	26,53	23,77	0,00	0,42	1,79
	0,6	599,18	0,00	36,64	32,83	0,00	0,00	0,22
	0,8	599,18	0,00	34,56	30,97	0,00	0,00	0,23
Receita média								
L	0,2	665,79	0,00	140,74	126,10	0,00	2,54	7,78
	0,4	520,25	0,00	74,89	67,10	0,00	0,11	5,28
	0,6	439,14	0,00	48,80	43,72	0,00	0,00	1,10
	0,8	424,73	0,00	59,04	52,90	0,00	0,00	0,73
M	0,2	426,89	0,00	58,24	52,18	0,00	0,00	2,03
	0,4	348,40	0,00	25,47	22,82	0,00	0,00	0,73
	0,6	327,82	0,00	24,73	22,16	0,00	0,00	0,73
	0,8	324,73	0,00	40,03	35,87	0,00	0,00	0,42
H	0,2	266,41	0,00	19,41	17,39	0,00	1,71	0,43
	0,4	259,89	0,00	26,28	23,55	0,00	0,00	0,22
	0,6	259,89	0,00	15,64	14,01	0,00	0,00	0,19
	0,8	259,89	0,00	12,33	11,05	0,00	0,00	0,21
Receita baixa								
L	0,2	197,97	0,00	60,58	54,28	0,00	2,77	2,45
	0,4	156,90	0,00	20,35	18,23	0,00	0,00	0,48
	0,6	141,69	0,00	22,11	19,81	0,00	0,00	0,54
	0,8	132,16	0,00	37,03	33,18	0,00	0,00	0,49
M	0,2	69,02	0,00	22,04	19,75	0,00	0,00	0,39
	0,4	65,28	0,00	8,75	7,84	0,00	0,00	0,17
	0,6	65,28	0,00	8,07	7,23	0,00	0,00	0,16
	0,8	65,28	0,00	7,91	7,09	0,00	0,00	0,15
H	0,2	15,28	0,00	10,45	9,36	0,00	0,00	0,20
	0,4	15,28	0,00	9,14	8,19	0,00	0,00	0,17
	0,6	15,28	0,00	9,83	8,81	0,00	0,00	0,16
	0,8	15,28	0,00	11,30	10,12	0,00	0,00	0,15

A.4 Resultados adicionais com o algoritmo heurístico ILS-RVND

Para complementar a análise entre os algoritmos propostos no Capítulo 6, realizamos experimentos adicionais com o algoritmo ILS-RVND, considerando o número máximo de iterações igual a 4 ($iterMax = 4$), que é o mesmo valor utilizado para o algoritmo E-ILS-RVND (indicado na calibração de parâmetros com IRACE). Os resultados para 30 execuções são mostrados nas Tabelas A.3 e A.4.

De acordo com as duas tabelas, podemos concluir que ao aumentar o número máximo de iterações do ILS-RVND, este apresentou valores para os gaps médios inferiores aos obtidos pelo algoritmo E-ILS-RVND. Por outro lado, os tempos despendidos pelo E-ILS-RVND para resolver as instâncias foram, em geral, melhores que os tempos registrados pelo ILS-RVND.

Tabela A.3: Restultados para as instâncias AP com 40 e 50 nós (30 execuções).

Instâncias	Valor ótimo	ILS-RVND ($iterMax = 4$)					E-ILS-RVND				
		Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)	Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)
40L-0,4-20	14635,61	14635,61	14573,33	0,00	0,43	2,79	14635,61	14593,00	0,00	0,29	2,65
40L-0,6-20	14099,19	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,67	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,63
40L-0,8-20	14099,19	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,57	14099,19	14099,19	0,00	0,00	0,59
40T-0,2-20	6404,58	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,65	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,60
40T-0,6-20	6404,58	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,49	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,53
40T-0,8-20	6404,58	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,49	6404,58	6404,58	0,00	0,00	0,46
40L-0,2-30	52299,43	52299,43	52134,67	0,00	0,32	20,03	52299,43	52021,38	0,00	0,53	14,45
40L-0,6-30	44213,55	44213,55	44213,55	0,00	0,00	7,84	44213,55	44213,55	0,00	0,00	6,29
40L-0,8-30	42990,07	42990,07	42990,07	0,00	0,00	6,58	42990,07	42981,96	0,00	0,02	4,26
40T-0,2-30	36135,48	36135,48	36135,48	0,00	0,00	3,14	36135,48	36135,48	0,00	0,00	2,54
40T-0,4-30	33918,82	33918,82	33918,82	0,00	0,00	2,67	33918,82	33918,82	0,00	0,00	2,00
40T-0,6-30	32709,49	32709,49	32709,49	0,00	0,00	1,91	32709,49	32709,49	0,00	0,00	1,74
40L-0,2-50	130906,36	130906,36	129817,67	0,00	0,83	42,16	130747,04	129880,77	0,12	0,78	37,55
40L-0,4-50	124056,22	124056,22	123896,66	0,00	0,13	25,86	124056,22	123955,55	0,00	0,08	19,66
40L-0,6-50	120056,17	120056,17	119997,31	0,00	0,05	20,13	120056,17	119900,24	0,00	0,13	12,76
40T-0,4-50	107847,14	107847,14	107847,14	0,00	0,00	3,36	107847,14	107845,35	0,00	0,00	3,60
40T-0,6-50	105857,00	105857,00	105857,00	0,00	0,00	2,48	105857,00	105857,00	0,00	0,00	2,05
40T-0,8-50	105603,50	105603,50	105603,50	0,00	0,00	2,48	105603,50	105603,50	0,00	0,00	1,74
50L-0,2-20	17666,95	17366,52	17366,52	1,70	1,70	10,36	17666,95	17425,21	0,00	1,37	13,67
50L-0,4-20	14588,82	14588,82	14588,82	0,00	0,00	4,26	14588,82	14588,82	0,00	0,00	3,47
50L-0,8-20	13920,55	13920,55	13920,55	0,00	0,00	1,16	13920,55	13920,55	0,00	0,00	1,12
50T-0,4-20	8001,47	8001,47	8001,47	0,00	0,00	1,07	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,93
50T-0,6-20	8001,47	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,95	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,93
50T-0,8-20	8001,47	8001,47	8001,47	0,00	0,00	1,03	8001,47	8001,47	0,00	0,00	0,92
50L-0,2-30	53200,19	53200,19	52731,78	0,00	0,88	69,71	53200,19	52854,48	0,00	0,65	62,84
50L-0,6-30	43763,67	43763,67	43700,59	0,00	0,14	47,56	43763,67	43577,47	0,00	0,43	24,74
50L-0,8-30	42566,95	42566,95	42566,95	0,00	0,00	22,06	42566,95	42566,95	0,00	0,00	15,28
50T-0,2-30	34513,57	34513,57	34080,34	0,00	1,26	9,60	34513,57	34162,25	0,00	1,02	7,07
50T-0,4-30	31911,87	31911,87	31842,74	0,00	0,22	5,18	31911,87	31750,56	0,00	0,51	4,57
50T-0,8-30	31220,52	31220,52	31220,52	0,00	0,00	3,93	31220,52	31220,52	0,00	0,00	3,61
50L-0,4-50	124770,82	124770,82	124520,43	0,00	0,20	81,15	124770,82	124267,84	0,00	0,40	61,06
50L-0,6-50	119972,77	119972,77	119829,88	0,00	0,12	83,82	119972,77	119707,89	0,00	0,22	53,70
50L-0,8-50	118299,45	118299,45	118299,45	0,00	0,00	29,41	118299,45	118287,27	0,00	0,01	21,00
50T-0,2-50	110962,98	110858,78	110580,05	0,09	0,35	28,39	110962,98	110226,98	0,00	0,66	17,47
50T-0,4-50	106451,33	106451,33	106439,17	0,00	0,01	7,94	106451,33	106439,17	0,00	0,01	6,04
50T-0,6-50	105260,70	105260,70	105011,55	0,00	0,24	7,53	105260,70	104933,70	0,00	0,31	5,25
Média	—	—	—	0,05	0,19	15,54	—	—	0,00	0,21	11,60

Tabela A.4: Resultados para as instâncias AP com 75 e 100 nós (30 execuções).

Instâncias	Valor ótimo	ILS-RVND ($iterMax = 4$)					E-ILS-RVND				
		Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)	Melhor valor	Valor médio	Δ_{best} (%)	Δ_{avg} (%)	Tempo médio (s)
75L-0,4-20	15004,99	15004,99	14948,20	0,00	0,38	26,17	15004,99	14930,70	0,00	0,50	21,24
75L-0,6-20	14058,46	14058,46	14058,46	0,00	0,00	4,07	14058,46	14058,46	0,00	0,00	4,41
75L-0,8-20	14058,46	14058,46	14058,46	0,00	0,00	4,13	14058,46	14058,46	0,00	0,00	4,17
75T-0,2-20	1144,13	1144,13	1144,13	0,00	0,00	3,26	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,91
75T-0,4-20	1144,13	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,86	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,91
75T-0,6-20	1144,13	1144,13	1144,13	0,00	0,00	3,01	1144,13	1144,13	0,00	0,00	2,84
75L-0,2-30	53570,37	53570,37	53289,72	0,00	0,52	178,32	53570,37	53283,50	0,00	0,54	115,87
75L-0,4-30	48097,70	48097,70	48024,68	0,00	0,15	188,45	48097,70	47708,07	0,00	0,81	112,47
75L-0,8-30	43645,17	43645,17	43645,17	0,00	0,00	80,36	43645,17	43645,17	0,00	0,00	51,52
75T-0,2-30	25999,62	25999,62	25999,62	0,00	0,00	10,76	25999,62	25999,62	0,00	0,00	8,91
75T-0,6-30	25999,62	25999,62	25999,62	0,00	0,00	11,30	25999,62	25999,62	0,00	0,00	8,00
75T-0,8-30	25999,62	25999,62	25999,62	0,00	0,00	10,96	25999,62	25999,62	0,00	0,00	8,27
75L-0,2-50	131831,98	131831,98	131015,40	0,00	0,62	280,48	131831,98	130771,82	0,00	0,80	193,11
75L-0,4-50	125133,91	125133,91	124975,94	0,00	0,13	246,75	125133,91	124852,08	0,00	0,23	194,81
75L-0,6-50	120693,62	120693,62	120647,48	0,00	0,04	172,75	120693,62	120638,19	0,00	0,05	126,84
75T-0,2-50	99186,32	99186,32	99186,32	0,00	0,00	24,01	99186,32	99186,32	0,00	0,00	19,69
75T-0,4-50	99186,32	99186,32	99186,32	0,00	0,00	23,73	99186,32	99186,32	0,00	0,00	18,58
75T-0,8-50	99186,32	99186,32	99186,32	0,00	0,00	23,35	99186,32	99186,32	0,00	0,00	15,85
100L-0,2-20	17616,73	17616,73	17333,28	0,00	1,61	204,87	17616,73	17295,80	0,00	1,82	156,61
100L-0,4-20	14211,00	14211,00	14211,00	0,00	0,00	42,89	14211,00	14211,00	0,00	0,00	38,13
100L-0,8-20	13603,42	13603,42	13603,42	0,00	0,00	9,92	13603,42	13603,42	0,00	0,00	9,94
100T-0,2-20	2116,57	2116,57	2116,57	0,00	0,00	6,25	2116,57	2116,57	0,00	0,00	6,79
100T-0,6-20	2116,57	2116,57	2116,57	0,00	0,00	6,59	2116,57	2116,57	0,00	0,00	7,08
100T-0,8-20	2116,57	2116,57	2116,57	0,00	0,00	8,33	2116,57	2116,57	0,00	0,00	6,59
100L-0,4-30	47173,46	47173,46	47083,85	0,00	0,19	333,71	47173,46	47077,29	0,00	0,20	265,53
100L-0,6-30	43747,51	43747,51	43744,36	0,00	0,01	241,59	43747,51	43741,20	0,00	0,01	182,42
100L-0,8-30	42790,52	42790,52	42790,52	0,00	0,00	123,83	42790,52	42790,52	0,00	0,00	101,23
100T-0,4-30	25271,32	25271,32	25271,32	0,00	0,00	22,74	25271,32	25271,32	0,00	0,00	19,78
100T-0,6-30	25271,32	25271,32	25271,32	0,00	0,00	28,93	25271,32	25271,32	0,00	0,00	21,10
100T-0,8-30	25271,32	25271,32	25271,32	0,00	0,00	24,79	25271,32	25271,32	0,00	0,00	17,59
100L-0,2-50	130437,81	130437,81	129382,70	0,00	0,81	497,93	130437,81	129730,18	0,00	0,54	580,39
100L-0,6-50	119319,31	119319,31	119283,14	0,00	0,03	346,62	119319,31	119268,86	0,00	0,04	259,29
100L-0,8-50	117676,01	117676,01	117674,98	0,00	0,00	197,42	117676,01	117673,95	0,00	0,00	139,02
100T-0,2-50	98113,77	98113,77	98113,77	0,00	0,00	53,27	98113,77	98113,77	0,00	0,00	49,99
100T-0,4-50	98113,77	98113,77	98113,77	0,00	0,00	58,27	98113,77	98113,77	0,00	0,00	40,51
100T-0,6-50	98113,77	98113,77	98113,77	0,00	0,00	66,09	98113,77	98113,77	0,00	0,00	41,91
Média	—	—	—	0,00	0,12	99,13	—	—	0,00	0,15	79,34

Apêndice B

Tabelas de Resultados Detalhadas

B.1 Tabelas referentes ao Capítulo 5

Tabela B.1: Comparação das Versões com Único Corte e Múltiplos Cortes

Instância	Receita	α	BD		BD- n		BD- n^2	
			Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter
10L	20	0,2	1118,80	388	tempo	tempo	14,93	19
10L	20	0,4	10,09	84	475,00	46	2,16	10
10L	20	0,6	2,35	40	0,81	12	0,34	6
10L	20	0,8	0,90	20	0,31	8	0,16	5
10L	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	29,31	22
10L	30	0,4	1030,00	555	480,48	46	3,57	13
10L	30	0,6	21,65	143	21,24	27	1,90	12
10L	30	0,8	7,71	87	1,44	16	0,76	9
10L	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	417,90	29
10L	50	0,4	950,48	712	tempo	tempo	5,56	15
10L	50	0,6	71,40	317	90,52	31	2,41	12
10L	50	0,8	285,26	660	1,20	15	0,89	10
10T	20	0,2	3943,27	305	tempo	tempo	29,45	21
10T	20	0,4	8,08	73	28,92	27	3,20	13
10T	20	0,6	2,37	41	1,41	17	0,70	9
10T	20	0,8	2,20	32	0,43	10	0,32	7
10T	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	47,70	22
10T	30	0,4	401,76	443	417,60	51	8,81	17
10T	30	0,6	28,50	189	18,15	36	2,62	13
10T	30	0,8	7,45	88	0,81	12	0,40	7
10T	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	322,82	28
10T	50	0,4	228,56	516	4966,38	77	12,41	17
10T	50	0,6	134,29	479	80,90	48	4,05	15
10T	50	0,8	171,55	556	1,37	17	0,57	8
20L	20	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	293,51	14
20L	20	0,4	tempo	tempo	514,25	36	39,43	10
20L	20	0,6	tempo	tempo	10,30	16	5,85	8
20L	20	0,8	tempo	tempo	2,20	8	1,93	7
20L	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	2385,08	19
20L	30	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	583,60	15
20L	30	0,6	tempo	tempo	608,81	37	58,99	11
20L	30	0,8	tempo	tempo	10,52	13	5,65	8

Continua na próxima página.

Tabela B.1 – Continuação da página anterior

Instância	Receita	α	BD		BD- n		BD- n^2	
			Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter
20L	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	2632,35	21
20L	50	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	1041,71	18
20L	50	0,6	tempo	tempo	2198,37	55	145,72	14
20L	50	0,8	tempo	tempo	59,68	27	19,90	11
20T	20	0,2	tempo	tempo	6598,23	36	67,71	11
20T	20	0,4	tempo	tempo	14,07	17	9,22	8
20T	20	0,6	tempo	tempo	3,06	10	3,11	7
20T	20	0,8	tempo	tempo	2,39	9	1,67	7
20T	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	1917,79	20
20T	30	0,4	tempo	tempo	3577,31	66	272,62	15
20T	30	0,6	tempo	tempo	112,19	37	30,89	13
20T	30	0,8	tempo	tempo	12,43	21	7,31	10
20T	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	2244,52	25
20T	50	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	563,47	16
20T	50	0,6	tempo	tempo	439,86	43	51,38	13
20T	50	0,8	tempo	tempo	18,65	21	6,95	9
25L	20	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	3174,05	14
25L	20	0,4	tempo	tempo	7713,95	62	316,82	15
25L	20	0,6	tempo	tempo	22,97	17	15,37	9
25L	20	0,8	tempo	tempo	5,05	9	4,16	7
25L	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
25L	30	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	5419,71	16
25L	30	0,6	tempo	tempo	7349,30	60	210,08	13
25L	30	0,8	tempo	tempo	115,37	31	29,03	10
25L	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
25L	50	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	19480,50	20
25L	50	0,6	tempo	tempo	tempo	tempo	802,04	15
25L	50	0,8	tempo	tempo	646,24	37	77,12	13
25T	20	0,2	tempo	tempo	21561,84	2	122,06	11
25T	20	0,4	tempo	tempo	9,93	12	15,13	8
25T	20	0,6	tempo	tempo	5,21	9	4,30	6
25T	20	0,8	tempo	tempo	4,19	9	3,04	6
25T	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	2468,10	19
25T	30	0,4	tempo	tempo	2467,79	48	351,44	14
25T	30	0,6	tempo	tempo	93,56	31	84,74	13
25T	30	0,8	tempo	tempo	18,89	19	25,47	11
25T	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	16754,70	27
25T	50	0,4	tempo	tempo	15340,84	86	1113,75	19
25T	50	0,6	tempo	tempo	776,62	43	146,52	14
25T	50	0,8	tempo	tempo	41,22	25	29,22	12
40L	20	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40L	20	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	2830,11	12
40L	20	0,6	tempo	tempo	201,17	20	201,27	9
40L	20	0,8	tempo	tempo	37,49	11	25,41	6
40L	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40L	30	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40L	30	0,6	tempo	tempo	tempo	tempo	6378,37	14
40L	30	0,8	tempo	tempo	736,67	31	257,35	10
40L	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40L	50	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40L	50	0,6	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40L	50	0,8	tempo	tempo	8543,49	48	541,82	12
40T	20	0,2	tempo	tempo	21146,45	72	3209,89	16
40T	20	0,4	tempo	tempo	62,03	13	155,79	9

Continua na próxima página.

Tabela B.1 – *Continuação da página anterior*

Instância	Receita	α	BD		BD- n		BD- n^2	
			Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter
40T	20	0,6	tempo	tempo	21,33	7	36,39	6
40T	20	0,8	tempo	tempo	19,57	7	15,81	5
40T	30	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40T	30	0,4	tempo	tempo	6269,42	41	2359,83	13
40T	30	0,6	tempo	tempo	127,42	20	152,42	9
40T	30	0,8	tempo	tempo	39,03	11	47,68	7
40T	50	0,2	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40T	50	0,4	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo	tempo
40T	50	0,6	tempo	tempo	2384,76	44	1255,49	16
40T	50	0,8	tempo	tempo	99,64	20	125,30	11

tempo: 6h de tempo limite excedido.

Tabela B.2: Inclusão de Cortes Pareto-Ótimos nas Versões com n^2 Cortes

Instância	Receita	α	BD- n^2		BDMW- n^2	
			Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter
10L	20	0,2	14,93	19	0,83	8
10L	20	0,4	2,16	10	0,21	5
10L	20	0,6	0,34	6	0,10	3
10L	20	0,8	0,16	5	0,11	4
10L	30	0,2	29,31	22	0,34	5
10L	30	0,4	3,57	13	0,14	4
10L	30	0,6	1,90	12	0,10	3
10L	30	0,8	0,76	9	0,15	5
10L	50	0,2	417,90	29	0,55	6
10L	50	0,4	5,56	15	0,14	4
10L	50	0,6	2,41	12	0,14	4
10L	50	0,8	0,89	10	0,17	5
10T	20	0,2	29,45	21	0,85	8
10T	20	0,4	3,20	13	0,23	5
10T	20	0,6	0,70	9	0,24	7
10T	20	0,8	0,32	7	0,16	5
10T	30	0,2	47,70	22	0,65	7
10T	30	0,4	8,81	17	0,33	6
10T	30	0,6	2,62	13	0,36	6
10T	30	0,8	0,40	7	0,17	5
10T	50	0,2	322,82	28	0,64	7
10T	50	0,4	12,41	17	0,32	6
10T	50	0,6	4,05	15	0,43	7
10T	50	0,8	0,57	8	0,23	5
20L	20	0,2	293,51	14	5,39	7
20L	20	0,4	39,43	10	1,83	6
20L	20	0,6	5,85	8	1,22	5
20L	20	0,8	1,93	7	0,93	4
20L	30	0,2	2385,08	19	12,09	8
20L	30	0,4	583,60	15	4,84	7
20L	30	0,6	58,99	11	1,76	6
20L	30	0,8	5,65	8	1,27	5
20L	50	0,2	2632,35	21	11,90	8
20L	50	0,4	1041,71	18	6,93	8
20L	50	0,6	145,72	14	2,24	6
20L	50	0,8	19,90	11	2,69	7
20T	20	0,2	67,71	11	3,16	8
20T	20	0,4	9,22	8	1,90	7
20T	20	0,6	3,11	7	0,98	4
20T	20	0,8	1,67	7	0,91	4
20T	30	0,2	1917,79	20	9,53	7
20T	30	0,4	272,62	15	4,68	8
20T	30	0,6	30,89	13	2,76	8
20T	30	0,8	7,31	10	1,40	5
20T	50	0,2	2244,52	25	31,79	10
20T	50	0,4	563,47	16	6,66	8
20T	50	0,6	51,38	13	2,84	7
20T	50	0,8	6,95	9	1,50	5
25L	20	0,2	3174,05	14	10,39	8
25L	20	0,4	316,82	15	6,60	9
25L	20	0,6	15,37	9	2,72	5
25L	20	0,8	4,16	7	1,49	3
25L	30	0,2	tempo	tempo	20,16	8

Continua na próxima página.

Tabela B.2 – Continuação da página anterior

Instância	Receita	α	BD- n^2		BDMW- n^2	
			Tempo (s)	Iter	Tempo (s)	Iter
25L	30	0,4	5419,71	16	7,70	8
25L	30	0,6	210,08	13	5,68	7
25L	30	0,8	29,03	10	4,13	7
25L	50	0,2	tempo	tempo	15,50	7
25L	50	0,4	19480,50	20	13,20	8
25L	50	0,6	802,04	15	5,92	7
25L	50	0,8	77,12	13	4,36	7
25T	20	0,2	122,06	11	4,37	6
25T	20	0,4	15,13	8	2,93	5
25T	20	0,6	4,30	6	2,12	4
25T	20	0,8	3,04	6	2,00	4
25T	30	0,2	2468,10	19	22,01	9
25T	30	0,4	351,44	14	5,39	6
25T	30	0,6	84,74	13	5,86	8
25T	30	0,8	25,47	11	4,46	7
25T	50	0,2	16754,70	27	42,46	10
25T	50	0,4	1113,75	19	11,39	8
25T	50	0,6	146,52	14	5,93	7
25T	50	0,8	29,22	12	3,66	6
40L	20	0,2	tempo	tempo	94,70	10
40L	20	0,4	2830,11	12	28,19	7
40L	20	0,6	201,27	9	20,11	6
40L	20	0,8	25,41	6	12,20	4
40L	30	0,2	tempo	tempo	513,07	12
40L	30	0,4	tempo	tempo	51,96	9
40L	30	0,6	6378,37	14	33,08	8
40L	30	0,8	257,35	10	21,22	6
40L	50	0,2	tempo	tempo	451,59	10
40L	50	0,4	tempo	tempo	247,78	11
40L	50	0,6	tempo	tempo	83,97	11
40L	50	0,8	541,82	12	36,94	9
40T	20	0,2	3209,89	16	37,57	8
40T	20	0,4	155,79	9	22,67	6
40T	20	0,6	36,39	6	16,54	5
40T	20	0,8	15,81	5	15,20	5
40T	30	0,2	tempo	tempo	53,06	8
40T	30	0,4	2359,83	13	30,91	7
40T	30	0,6	152,42	9	32,77	8
40T	30	0,8	47,68	7	21,09	6
40T	50	0,2	tempo	tempo	100,39	9
40T	50	0,4	tempo	tempo	105,85	13
40T	50	0,6	1255,49	16	43,77	10
40T	50	0,8	125,30	11	26,25	7

tempo: 6h de tempo limite excedido.

Tabela B.3: Comparação de quatro estratégias para adicionar cortes na árvore de *Branch-and-Cut*: apenas para soluções inteiras (BDCFI), apenas para soluções fracionárias no nó raiz (BDCFR), para todas as soluções inteiras e fracionárias no nó raiz (BDCF) e para todas soluções inteiras e fracionárias (BDCFA)

Instância	Receita	α	BDCFI			BDCFR			BDCF			BDCFA		
			Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós
10L	20	0,2	0,69	431	45	0,50	811	0	0,58	531	0	0,59	531	0
10L	20	0,4	0,26	237	0	0,17	423	0	0,26	279	0	0,25	279	0
10L	20	0,6	0,16	172	0	0,08	300	0	0,17	198	0	0,17	198	0
10L	20	0,8	0,15	161	0	0,11	321	0	0,16	161	0	0,15	161	0
10L	30	0,2	0,69	447	30	0,35	699	0	0,53	498	0	0,52	498	0
10L	30	0,4	0,26	231	0	0,22	444	0	0,26	246	0	0,26	246	0
10L	30	0,6	0,16	203	0	0,09	300	0	0,18	246	0	0,18	246	0
10L	30	0,8	0,23	234	0	0,24	551	0	0,27	240	0	0,26	240	0
10L	50	0,2	0,82	466	88	0,27	569	0	0,57	541	0	0,56	541	0
10L	50	0,4	0,27	228	0	0,17	413	0	0,25	240	0	0,25	240	0
10L	50	0,6	0,27	261	0	0,18	446	0	0,27	265	0	0,24	265	0
10L	50	0,8	0,25	249	0	0,21	576	0	0,29	252	0	0,29	252	0
10T	20	0,2	1,01	507	140	0,53	742	0	0,90	612	1	0,89	612	1
10T	20	0,4	0,35	275	0	0,23	557	0	0,38	383	0	0,35	383	0
10T	20	0,6	0,33	210	0	0,31	670	0	0,42	235	0	0,41	235	0
10T	20	0,8	0,16	180	0	0,20	442	0	0,27	197	0	0,27	197	0
10T	30	0,2	0,84	458	20	0,49	718	0	0,69	526	0	0,72	526	0
10T	30	0,4	0,42	349	13	0,29	632	0	0,30	420	0	0,30	420	0

Continua na próxima página.

Tabela B.3 – Continuação da página anterior

Instância	Receita	α	BDCFI			BDCFR			BDCF			BDCFA		
			Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós
10T	30	0,6	0,49	331	17	0,36	661	0	0,71	444	1	0,69	444	1
10T	30	0,8	0,21	270	0	0,18	502	0	0,24	310	0	0,23	310	0
10T	50	0,2	0,85	498	4	0,50	795	0	0,87	593	0	0,87	593	0
10T	50	0,4	0,46	325	0	0,28	612	0	0,38	412	0	0,36	412	0
10T	50	0,6	0,44	349	14	0,60	740	0	0,67	461	5	0,66	482	1
10T	50	0,8	0,22	280	0	0,14	399	0	0,24	324	0	0,23	324	0
20L	20	0,2	6,07	1802	59	5,18	4037	0	5,30	2516	0	5,32	2516	0
20L	20	0,4	3,08	903	0	1,91	2195	0	2,51	1022	0	2,50	1022	0
20L	20	0,6	1,35	707	0	1,23	2000	0	1,36	707	0	1,36	707	0
20L	20	0,8	1,08	685	0	0,92	1600	0	1,08	685	0	1,08	685	0
20L	30	0,2	27,95	2467	1130	13,02	5714	3	9,25	3389	0	9,36	3389	0
20L	30	0,4	6,89	1835	40	4,39	3413	0	3,95	2091	0	3,94	2091	0
20L	30	0,6	3,02	1254	0	2,22	2486	0	2,76	1294	0	2,75	1294	0
20L	30	0,8	2,06	1065	0	1,77	2313	0	2,07	1065	0	2,08	1065	0
20L	50	0,2	15,10	2210	830	16,91	6657	0	7,43	3097	0	7,41	3097	0
20L	50	0,4	10,28	1989	120	3,55	2919	0	5,87	2375	0	5,85	2375	0
20L	50	0,6	4,41	1681	0	2,80	3087	0	3,73	1717	0	3,75	1717	0
20L	50	0,8	3,25	1475	0	2,66	2910	0	2,89	1568	0	2,88	1568	0
20T	20	0,2	4,39	1369	0	3,05	3090	0	4,20	1651	0	4,24	1651	0
20T	20	0,4	1,92	911	0	1,93	2800	0	1,93	911	0	1,92	911	0
20T	20	0,6	1,57	781	0	1,20	1614	0	1,58	781	0	1,58	781	0
20T	20	0,8	1,49	745	0	1,34	1633	0	1,68	750	0	1,71	750	0

Continua na próxima página.

Tabela B.3 – Continuação da página anterior

Instância	Receita	α	BDCFI			BDCFR			BDCF			BDCFA		
			Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós
20T	30	0,2	11,88	2392	0	9,64	4913	5	8,30	3363	0	8,33	3363	0
20T	30	0,4	4,12	1892	0	3,43	3267	0	3,41	1746	0	3,42	1746	0
20T	30	0,6	3,79	1352	0	2,87	3263	0	3,77	1352	0	3,77	1352	0
20T	30	0,8	3,52	1265	7	2,04	2227	0	3,23	1364	0	3,25	1364	0
20T	50	0,2	23,30	2932	340	5,90	4096	0	8,35	3733	0	8,39	3733	0
20T	50	0,4	7,23	2251	9	4,51	3606	0	3,85	2331	0	3,84	2331	0
20T	50	0,6	3,56	1681	0	6,91	3751	17	3,38	1784	0	3,36	1784	0
20T	50	0,8	2,73	1509	0	1,57	1977	0	2,86	1733	0	2,89	1733	0
25L	20	0,2	14,70	3029	50	7,15	4145	0	15,40	3864	0	15,50	3864	0
25L	20	0,4	7,52	1844	0	6,85	4963	0	6,23	1866	0	6,27	1866	0
25L	20	0,6	5,49	1289	0	3,12	2826	0	5,51	1289	0	5,46	1289	0
25L	20	0,8	1,91	1073	0	1,47	1875	0	1,88	1073	0	1,92	1073	0
25L	30	0,2	60,53	3988	320	14,88	6650	0	14,77	4670	0	14,78	4670	0
25L	30	0,4	11,27	2631	29	6,63	4754	0	10,44	3043	0	10,31	3043	0
25L	30	0,6	6,64	2273	0	6,26	5017	0	7,81	2286	0	7,80	2286	0
25L	30	0,8	7,68	1880	13	4,46	4119	0	5,60	2085	0	5,62	2085	0
25L	50	0,2	34,68	4037	720	19,17	6884	21	15,01	5108	0	15,13	5108	0
25L	50	0,4	24,02	3415	140	7,99	5129	0	11,61	3827	0	11,67	3827	0
25L	50	0,6	9,08	2701	0	5,15	4008	0	10,06	3081	0	10,07	3081	0
25L	50	0,8	6,50	2344	0	4,03	3460	0	6,84	2710	0	6,85	2710	0
25T	20	0,2	5,52	1923	0	3,92	3421	0	5,64	1923	0	5,55	1923	0
25T	20	0,4	4,28	1396	0	2,81	2640	0	4,28	1396	0	4,31	1396	0

Continua na próxima página.

Tabela B.3 – Continuação da página anterior

Instância	Receita	α	BDCFI			BDCFR			BDCF			BDCFA		
			Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós
25T	20	0,6	2,48	1225	0	2,09	2500	0	2,47	1225	0	2,49	1225	0
25T	20	0,8	2,35	1181	0	1,96	2500	0	2,36	1181	0	2,37	1181	0
25T	30	0,2	16,31	3568	0	14,68	6692	0	15,28	4695	0	15,32	4695	0
25T	30	0,4	7,96	2688	0	5,64	4610	0	8,21	2909	0	8,25	2909	0
25T	30	0,6	8,41	2415	0	6,66	4395	0	8,97	2516	0	8,92	2516	0
25T	30	0,8	6,63	1939	0	4,83	3547	0	7,64	2132	0	7,64	2132	0
25T	50	0,2	23,14	4276	30	17,30	7868	0	18,16	5436	0	18,09	5436	0
25T	50	0,4	14,03	3518	0	7,08	5174	0	8,90	3496	0	8,97	3496	0
25T	50	0,6	6,16	2707	0	4,49	3962	0	8,36	3135	0	8,33	3135	0
25T	50	0,8	4,96	2302	0	3,43	3132	0	5,34	2589	0	5,35	2589	0
40L	20	0,2	154,86	8074	65	58,35	14171	0	106,43	10034	0	105,57	10034	0
40L	20	0,4	56,13	5145	0	34,67	11186	0	48,46	5391	0	48,17	5391	0
40L	20	0,6	22,48	3964	0	20,11	9600	0	22,70	3964	0	22,42	3964	0
40L	20	0,8	14,87	3432	0	12,22	6400	0	14,91	3432	0	14,85	3432	0
40L	30	0,2	400,66	13168	370	106,70	17950	0	225,34	17440	0	223,30	17440	0
40L	30	0,4	93,70	7811	20	53,66	13743	0	76,65	9225	0	76,92	9225	0
40L	30	0,6	57,14	6988	0	40,06	13325	0	52,77	7110	0	52,46	7110	0
40L	30	0,8	33,25	5176	0	27,32	9528	0	30,05	5604	0	29,88	5604	0
40L	50	0,2	894,34	18079	880	74,92	14989	0	179,74	16977	0	178,54	16977	0
40L	50	0,4	274,10	12544	329	97,30	18443	0	99,65	13545	0	98,84	13545	0
40L	50	0,6	81,68	8962	18	49,27	14060	0	66,16	9493	0	65,97	9493	0
40L	50	0,8	57,90	7812	0	28,33	10303	0	44,22	7456	0	43,59	7456	0

Continua na próxima página.

Tabela B.3 – Continuação da página anterior

Instância	Receita	α	BDCFI			BDCFR			BDCF			BDCFA		
			Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós	Tempo (s)	Cortes	Nós
40T	20	0,2	42,61	5814	0	35,10	10979	0	43,04	6076	0	42,72	6076	0
40T	20	0,4	25,07	4433	0	22,51	9600	0	25,23	4433	0	24,97	4433	0
40T	20	0,6	19,20	3868	0	16,54	8000	0	19,29	3868	0	19,27	3868	0
40T	20	0,8	17,67	3710	0	15,17	8000	0	17,74	3710	0	17,66	3710	0
40T	30	0,2	81,53	9561	0	55,02	13927	0	75,47	9677	0	74,99	9677	0
40T	30	0,4	40,77	6891	0	39,19	12923	0	41,00	6891	0	40,81	6891	0
40T	30	0,6	40,08	6537	0	30,78	10946	0	40,29	6537	0	40,23	6537	0
40T	30	0,8	29,48	5871	0	20,66	8472	0	29,63	5871	0	29,44	5871	0
40T	50	0,2	145,96	12099	40	77,54	16856	0	96,44	13103	0	95,37	13103	0
40T	50	0,4	69,78	9853	4	55,77	15683	0	69,71	10448	0	69,32	10448	0
40T	50	0,6	46,16	8165	2	49,38	16954	0	41,79	8792	0	41,49	8792	0
40T	50	0,8	41,34	7216	0	32,36	12434	0	40,43	7716	0	40,21	7716	0

B.2 Tabelas referentes ao Capítulo 7

Tabela B.4: Resultados com AP-40

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
40L	0,2	20	0,30	7857,51	104,31	43,37	0,00	0,00	0,77
40L	0,2	20	0,60	7857,51	74,70	37,47	0,00	0,00	0,87
40L	0,2	20	1,00	7857,51	67,38	37,17	0,00	0,00	0,72
40L	0,4	20	0,00	14591,33	70,06	38,63	0,00	0,43	1,58
40L	0,4	20	0,30	7857,51	99,40	17,50	0,00	0,00	0,75
40L	0,4	20	1,00	7857,51	49,55	17,26	0,00	0,00	0,80
40L	0,6	20	0,00	14099,19	44,85	19,71	0,00	0,00	0,44
40L	0,6	20	0,30	7857,51	42,58	13,06	0,00	0,00	0,70
40L	0,6	20	0,60	7857,51	40,18	13,17	0,00	0,00	0,68
40L	0,8	20	0,00	14099,19	31,96	12,47	0,00	0,00	0,46
40L	0,8	20	0,30	7857,51	66,25	12,35	0,00	0,00	0,73
40L	0,8	20	0,60	7857,51	33,06	12,58	0,00	0,00	0,78
40L	0,2	30	0,00	52166,88	202,32	136,19	0,15	0,56	10,07
40L	0,2	30	0,60	29872,71	175,47	54,44	0,00	0,00	4,69
40L	0,2	30	1,00	29872,71	146,43	54,18	0,00	0,01	4,73
40L	0,4	30	0,00	47253,98	107,43	71,04	0,00	0,25	9,59
40L	0,4	30	0,30	27615,98	154,09	69,69	0,00	0,00	4,50
40L	0,4	30	1,00	27250,18	70,94	40,78	0,00	0,38	3,96
40L	0,6	30	0,30	25941,96	100,88	62,95	0,00	0,00	2,16
40L	0,6	30	0,60	25852,08	71,37	27,36	0,00	0,00	2,36
40L	0,6	30	1,00	25852,08	56,89	27,11	0,00	0,00	2,37
40L	0,8	30	0,00	42990,07	53,20	27,90	0,00	0,00	3,56
40L	0,8	30	0,30	25672,56	73,01	38,32	0,00	0,00	1,79
40L	0,8	30	0,60	25608,61	53,52	20,33	0,00	0,00	2,00
40L	0,2	50	0,00	130932,43	228,07	72,64	0,73	1,48	16,94
40L	0,2	50	0,60	83355,50	218,21	96,27	0,00	0,55	7,33
40L	0,2	50	1,00	83355,50	126,43	96,38	0,00	0,67	7,82
40L	0,4	50	0,00	123841,19	158,18	130,98	0,00	0,30	14,29
40L	0,4	50	0,30	82795,82	375,70	97,61	0,00	0,21	9,69
40L	0,4	50	1,00	80028,37	123,20	50,92	0,00	0,18	8,38
40L	0,6	50	0,30	80613,14	151,21	63,28	0,00	0,06	6,80
40L	0,6	50	0,60	78019,06	85,90	39,48	0,00	0,04	6,44
40L	0,6	50	1,00	78019,06	86,68	39,25	0,00	0,13	6,07
40L	0,8	50	0,30	79870,94	102,51	33,68	0,00	0,00	3,97
40L	0,8	50	0,60	77392,64	67,57	38,17	0,00	0,00	4,21
40L	0,8	50	1,00	77392,64	65,81	37,48	0,00	0,00	4,08
40T	0,2	20	0,00	6542,34	58,69	40,32	0,00	0,00	1,29
40T	0,2	20	0,60	0,00	40,92	14,71	0,00	0,00	0,01
40T	0,2	20	1,00	0,00	37,78	14,69	0,00	0,00	0,01
40T	0,4	20	0,00	6404,58	44,43	21,37	0,00	0,00	0,51
40T	0,4	20	0,30	0,00	35,14	13,77	0,00	0,00	0,01
40T	0,4	20	0,60	0,00	33,78	13,76	0,00	0,00	0,01
40T	0,6	20	0,00	6404,58	31,55	16,29	0,00	0,00	0,46
40T	0,6	20	0,30	0,00	30,19	12,91	0,00	0,00	0,01
40T	0,6	20	1,00	0,00	28,13	13,01	0,00	0,00	0,01
40T	0,8	20	0,00	6404,58	30,84	15,59	0,00	0,00	0,46
40T	0,8	20	0,30	0,00	26,88	12,30	0,00	0,00	0,01
40T	0,8	20	1,00	0,00	25,03	12,47	0,00	0,00	0,01
40T	0,2	30	0,00	36422,31	99,76	63,22	0,00	0,17	2,15
40T	0,2	30	0,30	17234,56	109,82	55,35	0,00	0,00	2,27

Continua na próxima página.

Tabela B.4 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
40T	0,2	30	0,60	17042,96	69,27	39,56	0,00	0,00	2,35
40T	0,4	30	0,00	34205,64	51,56	33,88	0,00	0,00	2,07
40T	0,4	30	0,60	15617,84	51,71	28,05	0,00	0,00	2,23
40T	0,4	30	1,00	15617,84	55,35	28,12	0,00	0,00	2,20
40T	0,6	30	0,30	15289,93	56,43	33,31	0,00	0,00	1,99
40T	0,6	30	0,60	15212,41	49,14	26,17	0,00	0,00	1,67
40T	0,6	30	1,00	15212,41	44,66	26,10	0,00	0,00	1,87
40T	0,8	30	0,30	15289,93	52,33	27,96	0,00	0,00	1,68
40T	0,8	30	0,60	15212,41	44,19	24,26	0,00	0,00	1,55
40T	0,8	30	1,00	15212,41	43,58	24,26	0,00	0,00	1,82
40T	0,2	50	0,30	71729,68	199,61	100,17	0,00	1,13	5,94
40T	0,2	50	0,60	69213,19	86,17	38,61	0,00	1,32	5,48
40T	0,2	50	1,00	69213,19	84,00	38,42	0,00	1,01	6,18
40T	0,4	50	0,00	108133,96	94,79	50,90	0,00	0,05	2,99
40T	0,4	50	0,60	67241,11	68,68	28,45	0,00	2,98	3,14
40T	0,4	50	1,00	67241,11	63,54	28,29	0,00	3,50	3,65
40T	0,6	50	0,00	106000,41	62,71	48,97	0,00	0,00	2,57
40T	0,6	50	0,30	68413,88	85,36	45,04	0,00	1,31	3,43
40T	0,6	50	0,60	66238,21	68,12	22,88	0,00	2,07	2,67
40T	0,8	50	0,00	105603,50	54,65	38,31	0,00	0,00	2,24
40T	0,8	50	0,30	68413,88	63,34	32,48	0,00	1,38	3,48
40T	0,8	50	1,00	66238,21	53,70	20,65	0,00	2,28	2,58
Média					82,15	38,97	0,01	0,31	3,17

Tabela B.5: Resultados com AP-50

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
50L	0,2	20	0,30	7667,39	327,42	137,45	0,00	0,00	1,59
50L	0,2	20	0,60	7667,39	212,51	99,31	0,00	0,00	1,48
50L	0,2	20	1,00	7667,39	194,17	99,11	0,00	0,00	1,66
50L	0,4	20	0,00	14537,19	159,97	99,89	0,00	0,00	2,78
50L	0,4	20	0,60	7667,39	153,47	40,95	0,00	0,00	1,68
50L	0,4	20	1,00	7667,39	150,76	41,01	0,00	0,00	1,50
50L	0,6	20	0,00	13920,55	101,34	47,50	0,00	0,00	0,89
50L	0,6	20	0,30	7667,39	92,27	46,87	0,00	0,00	1,26
50L	0,6	20	0,60	7667,39	134,75	46,46	0,00	0,00	1,37
50L	0,8	20	0,00	13920,55	93,06	29,08	0,00	0,00	1,10
50L	0,8	20	0,60	7667,39	82,74	36,49	0,00	0,00	1,34
50L	0,8	20	1,00	7667,39	82,75	36,42	0,00	0,00	1,28
50L	0,2	30	0,30	29987,47	1211,68	1764,31	0,00	1,07	12,39
50L	0,2	30	0,60	29577,93	411,46	221,40	0,00	0,52	12,63
50L	0,2	30	1,00	29577,93	411,67	219,50	0,00	0,88	10,73
50L	0,4	30	0,30	27287,93	571,62	196,45	0,00	0,16	7,52
50L	0,4	30	0,60	27167,59	219,14	103,19	0,00	0,10	6,52
50L	0,4	30	1,00	27167,59	214,58	102,46	0,00	0,24	6,22
50L	0,6	30	0,00	43696,84	198,15	176,61	0,00	0,74	20,98
50L	0,6	30	0,30	26072,56	271,53	76,05	0,00	0,00	6,53
50L	0,6	30	0,60	25982,11	159,28	74,07	0,00	0,04	5,67
50L	0,8	30	0,30	25731,20	160,51	80,03	0,00	0,00	4,23
50L	0,8	30	0,60	25677,39	149,33	59,29	0,00	0,00	3,75
50L	0,8	30	1,00	25677,39	132,21	59,46	0,00	0,00	3,98
50L	0,2	50	0,00	131915,26	815,98	273,40	0,00	0,93	51,29
50L	0,2	50	0,30	86936,44	1523,73	560,29	0,00	0,75	28,90
50L	0,2	50	0,60	83655,31	800,34	265,22	0,00	0,69	20,10
50L	0,4	50	0,00	124665,45	502,28	208,58	0,03	0,36	44,73
50L	0,4	50	0,30	82752,72	961,52	330,77	0,00	0,21	18,47
50L	0,4	50	1,00	80123,41	339,56	170,21	0,00	0,32	12,60
50L	0,6	50	0,00	119856,01	382,22	246,00	0,00	0,33	37,39
50L	0,6	50	0,30	80393,53	585,16	292,45	0,00	0,01	9,29
50L	0,6	50	1,00	78233,45	221,75	81,43	0,00	0,01	8,04
50L	0,8	50	0,00	118270,26	191,51	120,69	0,00	0,05	21,23
50L	0,8	50	0,30	79650,66	338,87	216,90	0,00	0,00	5,05
50L	0,8	50	0,60	77568,52	180,93	81,10	0,00	0,00	5,69
50T	0,2	20	0,00	8001,47	136,43	57,61	0,00	0,00	0,98
50T	0,2	20	0,30	2542,21	127,06	56,41	0,00	0,00	1,28
50T	0,2	20	1,00	2542,21	105,81	55,92	0,00	0,00	1,44
50T	0,4	20	0,00	8001,47	102,07	50,71	0,00	0,00	0,90
50T	0,4	20	0,30	2542,21	543,38	51,60	0,00	0,00	1,28
50T	0,4	20	1,00	2542,21	94,18	50,23	0,00	0,00	1,09
50T	0,6	20	0,30	2542,21	101,76	38,90	0,00	0,00	1,34
50T	0,6	20	0,60	8001,47	78,47	38,67	0,00	0,00	1,33
50T	0,6	20	1,00	2542,21	89,49	38,51	0,00	0,00	1,22
50T	0,8	20	0,30	2542,21	82,67	36,41	0,00	0,00	1,16
50T	0,8	20	0,60	2542,21	80,61	36,64	0,00	0,00	1,34
50T	0,8	20	1,00	2542,21	77,74	36,87	0,00	0,00	1,30
50T	0,2	30	0,00	2542,21	77,63	207,97	0,00	2,82	13,50
50T	0,2	30	0,60	36163,08	299,45	110,07	0,00	0,00	3,96
50T	0,2	30	1,00	17612,22	176,95	110,13	0,00	0,00	3,32
50T	0,4	30	0,00	17612,22	172,35	107,42	0,00	1,82	6,39
50T	0,4	30	0,30	32681,84	155,06	78,89	0,00	0,00	2,34

Continua na próxima página.

Tabela B.5 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
50T	0,4	30	1,00	16920,93	306,60	69,87	0,00	0,00	2,24
50T	0,6	30	0,00	16920,93	151,50	83,09	0,00	0,00	4,21
50T	0,6	30	0,30	31220,52	158,97	66,45	0,00	0,00	2,20
50T	0,6	30	0,60	16920,93	147,83	62,52	0,00	0,00	2,36
50T	0,8	30	0,00	16920,93	152,15	58,68	0,00	0,00	3,69
50T	0,8	30	0,30	31220,52	137,95	42,66	0,00	0,00	2,24
50T	0,8	30	0,60	16920,93	156,59	40,14	0,00	0,00	2,01
50T	0,2	50	0,30	16920,93	118,92	299,10	0,00	0,09	10,87
50T	0,2	50	0,60	72334,98	701,23	122,75	0,00	0,50	9,67
50T	0,2	50	1,00	70030,01	243,69	122,64	0,00	0,41	8,38
50T	0,4	50	0,00	70030,01	250,20	189,35	0,00	0,39	13,16
50T	0,4	50	0,30	107825,53	256,77	132,48	0,00	0,00	6,19
50T	0,4	50	1,00	69850,01	320,13	106,25	0,00	0,00	7,33
50T	0,6	50	0,00	67683,44	166,56	130,42	0,00	0,47	7,13
50T	0,6	50	0,30	105654,57	158,93	95,80	0,00	0,00	5,14
50T	0,6	50	0,60	68674,59	206,14	81,02	0,00	0,00	4,71
50T	0,8	50	0,00	66654,15	173,69	60,18	0,00	0,38	6,13
50T	0,8	50	0,60	105260,70	140,07	56,05	0,00	0,00	5,12
50T	0,8	50	1,00	66654,15	144,83	55,75	0,00	0,00	5,07
Média					268,53	135,81	0,00	0,20	7,41

Tabela B.6: Resultados com AP-75

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
75L	0,2	20	0,00	18519,31	Mem	2050,00	0,00	0,55	70,06
75L	0,2	20	0,30	8057,67	Mem	1057,26	0,00	0,00	6,07
75L	0,2	20	1,00	8057,67	Mem	1125,87	0,00	0,00	6,33
75L	0,4	20	0,00	15108,57	Mem	1091,60	0,00	0,97	20,43
75L	0,4	20	0,30	8057,67	Mem	540,28	0,00	0,00	6,47
75L	0,4	20	0,60	8057,67	Mem	537,87	0,00	0,00	5,64
75L	0,6	20	0,30	8057,67	Mem	492,59	0,00	0,00	5,00
75L	0,6	20	0,60	8057,67	Mem	488,76	0,00	0,00	5,12
75L	0,6	20	1,00	8057,67	Mem	494,74	0,00	0,00	5,40
75L	0,8	20	0,00	14058,46	Mem	544,16	0,00	0,00	3,31
75L	0,8	20	0,60	8057,67	Mem	471,56	0,00	0,00	4,96
75L	0,8	20	1,00	8057,67	Mem	466,60	0,00	0,00	5,21
75L	0,2	30	0,00	53747,44	Mem	2002,45	0,00	0,57	123,02
75L	0,2	30	0,30	30661,37	Mem	40682,54	0,01	1,79	51,06
75L	0,2	30	1,00	30261,20	Mem	2750,78	0,00	1,45	46,59
75L	0,4	30	0,30	27647,78	Mem	1974,60	0,00	0,00	20,39
75L	0,4	30	0,60	27595,34	Mem	1258,02	0,00	0,00	19,47
75L	0,4	30	1,00	27595,34	Mem	1245,45	0,00	0,00	18,65
75L	0,6	30	0,00	44815,71	Mem	1340,38	0,00	0,13	66,32
75L	0,6	30	0,30	26473,29	Mem	1011,29	0,00	0,00	14,32
75L	0,6	30	1,00	26433,36	Mem	880,19	0,00	0,00	16,06
75L	0,8	30	0,30	26181,43	Mem	715,21	0,00	0,00	12,33
75L	0,8	30	0,60	26153,98	Mem	688,33	0,00	0,00	12,79
75L	0,8	30	1,00	26153,98	Mem	690,24	0,00	0,00	13,02
75L	0,2	50	0,00	132134,63	Mem	3111,94	0,00	1,08	188,52
75L	0,2	50	0,30	86940,08	Mem	4015,18	0,00	0,67	113,70
75L	0,2	50	1,00	84580,42	Mem	3996,48	0,00	0,87	108,07
75L	0,4	50	0,00	125436,57	Mem	3004,44	0,00	0,39	158,28
75L	0,4	50	0,60	80393,84	Mem	1967,02	0,00	0,64	70,12
75L	0,4	50	1,00	80393,84	Mem	1987,33	0,00	0,79	81,67
75L	0,6	50	0,30	79897,15	Mem	1692,12	0,00	0,19	40,65
75L	0,6	50	0,60	78333,64	Mem	1258,47	0,00	0,22	36,85
75L	0,6	50	1,00	78333,64	Mem	1252,12	0,00	0,10	35,57
75L	0,8	50	0,00	118980,09	Mem	972,92	0,00	0,05	64,61
75L	0,8	50	0,30	79172,87	Mem	1719,52	0,00	0,08	33,28
75L	0,8	50	0,60	77709,77	Mem	970,81	0,00	0,00	24,94
75T	0,2	20	0,00	1144,13	Mem	758,71	0,00	0,00	3,14
75T	0,2	20	0,30	0,00	Mem	511,91	0,00	0,00	0,08
75T	0,2	20	1,00	0,00	Mem	495,63	0,00	0,00	0,08
75T	0,4	20	0,00	1144,13	Mem	546,36	0,00	0,00	2,80
75T	0,4	20	0,60	0,00	Mem	444,30	0,00	0,00	0,08
75T	0,4	20	1,00	0,00	Mem	445,27	0,00	0,00	0,08
75T	0,6	20	0,00	1144,13	Mem	491,33	0,00	0,00	2,93
75T	0,6	20	0,30	0,00	Mem	407,25	0,00	0,00	0,08
75T	0,6	20	0,60	0,00	Mem	412,28	0,00	0,00	0,08
75T	0,8	20	0,30	0,00	Mem	390,11	0,00	0,00	0,08
75T	0,8	20	0,60	0,00	Mem	388,44	0,00	0,00	0,08
75T	0,8	20	1,00	0,00	Mem	389,09	0,00	0,00	0,08
75T	0,2	30	0,30	11229,36	Mem	1772,65	0,00	0,00	9,71
75T	0,2	30	0,60	11229,35	Mem	1220,27	0,00	0,00	8,24
75T	0,2	30	1,00	11229,35	Mem	1208,26	0,00	0,00	9,12
75T	0,4	30	0,00	26330,20	Mem	1188,45	0,00	0,00	12,40
75T	0,4	30	0,60	11229,35	Mem	783,02	0,00	0,00	7,37

Continua na próxima página.

Tabela B.6 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
75T	0,4	30	1,00	11229,35	Mem	787,79	0,00	0,00	7,72
75T	0,6	30	0,00	25999,62	Mem	922,76	0,00	0,00	11,84
75T	0,6	30	0,30	11229,36	Mem	909,01	0,00	0,00	6,74
75T	0,6	30	0,60	11229,35	Mem	675,85	0,00	0,00	7,59
75T	0,8	30	0,00	25999,62	Mem	617,33	0,00	0,00	10,33
75T	0,8	30	0,30	11229,36	Mem	870,95	0,00	0,00	7,84
75T	0,8	30	0,60	11229,35	Mem	631,11	0,00	0,00	8,04
75T	0,2	50	0,00	105649,11	Mem	1820,89	0,00	0,65	46,49
75T	0,2	50	0,60	62320,20	Mem	1296,86	0,00	0,00	18,05
75T	0,2	50	1,00	62320,20	Mem	1271,00	0,00	0,00	18,06
75T	0,4	50	0,00	100584,31	Mem	1370,47	0,00	0,00	34,46
75T	0,4	50	0,30	63070,67	Mem	1109,60	0,00	0,00	15,28
75T	0,4	50	1,00	61574,92	Mem	1042,27	0,00	0,00	15,33
75T	0,6	50	0,30	63070,67	Mem	754,16	0,00	0,00	15,75
75T	0,6	50	0,60	61574,92	Mem	737,39	0,00	0,00	14,54
75T	0,6	50	1,00	61574,92	Mem	733,57	0,00	0,00	14,57
75T	0,8	50	0,00	99186,32	Mem	795,98	0,00	0,00	22,93
75T	0,8	50	0,30	63070,67	Mem	689,62	0,00	0,00	14,88
75T	0,8	50	0,60	61574,92	Mem	677,76	0,00	0,00	14,25
Média						1668,29	0,00	0,16	26,05

Mem: 16 GB de memória excedida.

Tabela B.7: Resultados com AP-100

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
100L	0,2	20	0,30	7486,84	Mem	5051,28	0,00	0,00	11,84
100L	0,2	20	0,60	7486,84	Mem	4324,49	0,00	0,00	13,43
100L	0,2	20	1,00	7486,84	Mem	4313,31	0,00	0,00	14,12
100L	0,4	20	0,00	14198,42	Mem	5246,25	0,00	0,21	31,94
100L	0,4	20	0,30	7486,84	Mem	2053,75	0,00	0,00	12,19
100L	0,4	20	0,60	7486,84	Mem	2058,81	0,00	0,00	10,84
100L	0,6	20	0,00	13603,42	Mem	2768,64	0,00	0,00	8,21
100L	0,6	20	0,30	7486,84	Mem	1876,59	0,00	0,00	11,14
100L	0,6	20	1,00	7486,84	Mem	1862,49	0,00	0,00	12,23
100L	0,8	20	0,00	13603,42	Mem	1761,66	0,00	0,00	8,18
100L	0,8	20	0,60	7486,84	Mem	1498,17	0,00	0,00	11,35
100L	0,8	20	1,00	7486,84	Mem	1496,57	0,00	0,00	10,65
100L	0,2	30	0,30	29395,33	Mem	27327,40	0,00	0,28	92,40
100L	0,2	30	0,60	29238,32	Mem	11174,28	0,00	0,21	112,17
100L	0,2	30	1,00	29238,32	Mem	11263,77	0,00	0,26	94,80
100L	0,4	30	0,00	47027,45	Mem	6122,64	0,00	0,21	164,29
100L	0,4	30	0,60	26883,14	Mem	4879,08	0,00	0,09	46,72
100L	0,4	30	1,00	26883,14	Mem	4855,72	0,00	0,05	37,72
100L	0,6	30	0,00	43647,66	Mem	5224,40	0,00	0,03	132,51
100L	0,6	30	0,30	25734,25	Mem	4313,71	0,00	0,00	36,37
100L	0,6	30	0,60	25714,08	Mem	3594,48	0,00	0,00	37,92
100L	0,8	30	0,00	42790,52	Mem	3221,01	0,00	0,00	85,92
100L	0,8	30	0,30	25473,66	Mem	2937,92	0,00	0,00	31,29
100L	0,8	30	1,00	25461,41	Mem	2787,83	0,00	0,00	28,98
100L	0,2	50	0,00	130516,20	Mem	22117,76	0,00	1,14	477,18
100L	0,2	50	0,60	82667,89	Mem	60577,02	0,00	1,10	151,50
100L	0,2	50	1,00	82667,89	Mem	45260,76	0,00	1,23	163,08
100L	0,4	50	0,00	123404,66	Mem	11449,82	0,04	0,48	277,20
100L	0,4	50	0,30	80902,24	Mem	33934,60	0,00	0,43	156,86
100L	0,4	50	1,00	79461,96	Mem	9136,74	0,00	0,27	116,48
100L	0,6	50	0,30	78863,96	Mem	9971,34	0,00	0,00	64,78
100L	0,6	50	0,60	77673,68	Mem	5773,18	0,00	0,02	73,02
100L	0,6	50	1,00	77673,68	Mem	5791,17	0,00	0,05	65,33
100L	0,8	50	0,00	117646,96	Mem	3474,33	0,00	0,00	133,39
100L	0,8	50	0,30	78229,29	Mem	4374,78	0,00	0,00	55,63
100L	0,8	50	0,60	77062,48	Mem	3831,90	0,00	0,00	43,83
100T	0,2	20	0,00	2116,57	Mem	2847,16	0,00	0,00	8,40
100T	0,2	20	0,30	0,00	Mem	2037,29	0,00	0,00	0,18
100T	0,2	20	1,00	0,00	Mem	2012,49	0,00	0,00	0,18
100T	0,4	20	0,00	2116,57	Mem	2088,32	0,00	0,00	5,97
100T	0,4	20	0,30	0,00	Mem	1773,27	0,00	0,00	0,18
100T	0,4	20	0,60	0,00	Mem	1774,33	0,00	0,00	0,18
100T	0,6	20	0,00	2116,57	Mem	1894,32	0,00	0,00	6,60
100T	0,6	20	0,60	0,00	Mem	1594,06	0,00	0,00	0,18
100T	0,6	20	1,00	0,00	Mem	1593,77	0,00	0,00	0,18
100T	0,8	20	0,30	0,00	Mem	1497,07	0,00	0,00	0,18
100T	0,8	20	0,60	0,00	Mem	1496,45	0,00	0,00	0,18
100T	0,8	20	1,00	0,00	Mem	1495,86	0,00	0,00	0,18
100T	0,2	30	0,00	28805,91	Mem	4476,24	0,00	0,00	73,87
100T	0,2	30	0,60	11832,55	Mem	3333,34	0,00	0,00	14,13
100T	0,2	30	1,00	11832,55	Mem	3342,59	0,00	0,00	14,04
100T	0,4	30	0,00	25441,20	Mem	3020,72	0,00	0,00	30,68
100T	0,4	30	0,30	11832,55	Mem	2967,37	0,00	0,00	14,14

Continua na próxima página.

Tabela B.7 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD-CPLEX	BD	E-ILS-RVND		
					Tempo (s)	Tempo (s)	Gap _{best} (%)	Gap _{avg} (%)	Tempo (s)
100T	0,4	30	1,00	11832,55	Mem	2882,53	0,00	0,00	11,74
100T	0,6	30	0,00	25271,32	Mem	2179,24	0,00	0,00	25,65
100T	0,6	30	0,30	11832,55	Mem	2238,15	0,00	0,00	14,29
100T	0,6	30	0,60	11832,55	Mem	2254,34	0,00	0,00	13,34
100T	0,8	30	0,30	11832,55	Mem	1677,19	0,00	0,00	10,92
100T	0,8	30	0,60	11832,55	Mem	1634,39	0,00	0,00	14,61
100T	0,8	30	1,00	11832,55	Mem	1634,70	0,00	0,00	11,74
100T	0,2	50	0,00	105079,13	Mem	5318,27	0,00	0,10	158,00
100T	0,2	50	0,30	64628,62	Mem	31380,04	0,00	0,91	62,31
100T	0,2	50	0,60	63068,36	Mem	3836,20	0,00	0,92	57,60
100T	0,4	50	0,00	100241,88	Mem	3887,42	0,00	0,00	97,61
100T	0,4	50	0,60	60812,28	Mem	3567,25	0,00	0,00	45,01
100T	0,4	50	1,00	60812,28	Mem	3524,71	0,00	0,00	44,08
100T	0,6	50	0,30	61173,28	Mem	3049,30	0,00	0,00	38,03
100T	0,6	50	0,60	60118,13	Mem	2718,49	0,00	0,00	38,74
100T	0,6	50	1,00	60118,13	Mem	2721,34	0,00	0,00	37,69
100T	0,8	50	0,00	98113,77	Mem	2126,49	0,00	0,00	64,09
100T	0,8	50	0,30	61173,28	Mem	2542,18	0,00	0,00	33,83
100T	0,8	50	1,00	60118,13	Mem	2451,84	0,00	0,00	33,62
Média						6369,12	0,00	0,11	53,03

Mem: 16 GB de memória excedida.

Tabela B.8: Resultados com AP-125

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD	E-ILS-RVND	
					Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)
125L	0,2	20	0,00	20034,02	20251,02	0,26	185,69
125L	0,2	20	0,30	9370,97	12701,28	0,00	40,11
125L	0,2	20	0,60	9370,97	12056,12	0,00	72,25
125L	0,2	20	1,00	9370,97	12037,58	0,00	38,98
125L	0,4	20	0,00	16570,88	12119,11	0,44	114,15
125L	0,4	20	0,30	8854,32	5776,25	0,00	12,53
125L	0,4	20	0,60	8854,32	5697,81	0,00	27,19
125L	0,4	20	1,00	8854,32	5681,45	0,00	48,76
125L	0,6	20	0,00	15107,38	7218,51	0,00	162,54
125L	0,6	20	0,30	8854,32	4244,67	0,00	25,16
125L	0,6	20	0,60	8854,32	4215,41	0,00	30,16
125L	0,6	20	1,00	8854,32	4228,80	0,00	20,43
125L	0,8	20	0,00	14966,38	5272,41	0,00	52,04
125L	0,8	20	0,30	8854,32	3948,04	0,00	14,83
125L	0,8	20	0,60	8854,32	3931,02	0,00	20,32
125L	0,8	20	1,00	8854,32	3934,89	0,00	14,30
125L	0,2	30	0,00	—	Mem	—	503,00
125L	0,2	30	0,30	—	Mem	—	640,09
125L	0,2	30	0,60	—	Mem	—	343,28
125L	0,2	30	1,00	—	Mem	—	136,62
125L	0,4	30	0,00	—	Mem	—	223,19
125L	0,4	30	0,30	—	Mem	—	38,50
125L	0,4	30	0,60	29089,50	12789,63	0,00	292,94
125L	0,4	30	1,00	29089,50	12802,96	0,00	171,51
125L	0,6	30	0,00	46092,33	12821,73	0,00	229,00
125L	0,6	30	0,30	27967,49	7927,36	0,00	80,38
125L	0,6	30	0,60	27964,77	7619,73	0,00	54,89
125L	0,6	30	1,00	27964,77	7598,95	0,00	36,62
125L	0,8	30	0,00	44820,26	8288,34	0,00	327,45
125L	0,8	30	0,30	27528,66	5150,61	0,00	74,09
125L	0,8	30	0,60	27527,41	5042,66	0,00	36,22
125L	0,8	30	1,00	27527,41	5051,93	0,00	56,11
125L	0,2	50	0,00	132945,84	51476,93	0,09	1213,65
125L	0,2	50	0,30	—	Mem	—	408,27
125L	0,2	50	0,60	85633,61	29031,87	0,05	737,36
125L	0,2	50	1,00	—	Mem	—	325,26
125L	0,4	50	0,00	—	Mem	—	919,41
125L	0,4	50	0,30	—	Mem	—	121,37
125L	0,4	50	0,60	—	Mem	—	234,33
125L	0,4	50	1,00	—	Mem	—	253,17
125L	0,6	50	0,00	121813,54	16038,53	0,00	687,63
125L	0,6	50	0,30	80413,93	12868,98	0,00	72,42
125L	0,6	50	0,60	79731,16	9346,77	0,00	108,70
125L	0,6	50	1,00	79731,16	9366,66	0,00	132,95
125L	0,8	50	0,00	119734,33	10151,06	0,00	445,74
125L	0,8	50	0,30	79619,54	9696,74	0,00	63,11
125L	0,8	50	0,60	78961,36	8357,45	0,00	67,45
125L	0,8	50	1,00	78961,36	8370,05	0,00	71,89
125T	0,2	20	0,00	7169,77	6609,79	0,00	19,43
125T	0,2	20	0,30	0,00	6769,29	0,00	0,34
125T	0,2	20	0,60	0,00	6798,27	0,00	0,35
125T	0,2	20	1,00	0,00	6724,90	0,00	0,34
125T	0,4	20	0,00	7169,77	5681,16	0,00	19,88

Continua na próxima página.

Tabela B.8 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD	E-ILS-RVND	
					Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)
125T	0,4	20	0,30	0,00	5730,44	0,00	0,35
125T	0,4	20	0,60	0,00	5694,55	0,00	0,35
125T	0,4	20	1,00	0,00	5698,06	0,00	0,35
125T	0,6	20	0,00	7169,77	5027,07	0,00	12,65
125T	0,6	20	0,30	0,00	4266,71	0,00	0,35
125T	0,6	20	0,60	0,00	4261,61	0,00	0,34
125T	0,6	20	1,00	0,00	4267,90	0,00	0,35
125T	0,8	20	0,00	7169,77	3931,31	0,00	16,35
125T	0,8	20	0,30	0,00	3933,11	0,00	0,35
125T	0,8	20	0,60	0,00	3935,29	0,00	0,34
125T	0,8	20	1,00	0,00	3924,64	0,00	0,34
125T	0,2	30	0,00	29586,11	7697,56	0,00	15,88
125T	0,2	30	0,30	14777,54	7795,90	0,00	51,08
125T	0,2	30	0,60	14777,54	7678,96	0,00	34,22
125T	0,2	30	1,00	14777,54	7704,56	0,00	42,24
125T	0,4	30	0,00	29586,11	6736,90	0,00	16,95
125T	0,4	30	0,30	14777,54	6769,47	0,00	33,40
125T	0,4	30	0,60	14777,54	6692,05	0,00	21,07
125T	0,4	30	1,00	14777,54	6701,61	0,00	40,08
125T	0,6	30	0,00	29586,11	5848,48	0,00	13,87
125T	0,6	30	0,30	14777,54	5930,96	0,00	22,69
125T	0,6	30	0,60	14777,54	5838,85	0,00	36,61
125T	0,6	30	1,00	14777,54	5888,51	0,00	19,33
125T	0,8	30	0,00	29586,11	5103,35	0,00	18,10
125T	0,8	30	0,30	14777,54	5185,56	0,00	23,76
125T	0,8	30	0,60	14777,54	5083,91	0,00	36,64
125T	0,8	30	1,00	14777,54	5122,72	0,00	19,86
125T	0,2	50	0,00	96292,57	9777,33	0,00	49,67
125T	0,2	50	0,30	59605,37	8041,60	0,00	73,02
125T	0,2	50	0,60	59343,22	7957,11	0,00	37,95
125T	0,2	50	1,00	59343,22	7865,91	0,00	37,43
125T	0,4	50	0,00	93251,38	8631,55	0,00	27,79
125T	0,4	50	0,30	59607,54	7245,43	0,00	34,04
125T	0,4	50	0,60	59343,22	7140,60	0,00	33,47
125T	0,4	50	1,00	59343,22	7113,15	0,00	38,36
125T	0,6	50	0,00	93251,38	6367,07	0,00	46,72
125T	0,6	50	0,30	59607,54	6524,20	0,00	38,22
125T	0,6	50	0,60	59343,22	6349,41	0,00	62,42
125T	0,6	50	1,00	59343,22	6359,89	0,00	54,25
125T	0,8	50	0,00	93251,38	5656,84	0,00	51,89
125T	0,8	50	0,30	59607,54	5858,18	0,00	55,99
125T	0,8	50	0,60	59343,22	5754,76	0,00	91,92
125T	0,8	50	1,00	59343,22	7177,65	0,00	34,59
Média					7999,61	0,01	117,42

Mem: 16 GB de memória excedida.

Tabela B.9: Resultados com AP-150

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD	E-ILS-RVND	
					Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)
150L	0,2	20	0,00	—	Mem	—	348,99
150L	0,2	20	0,30	—	Mem	—	46,13
150L	0,2	20	0,60	—	Mem	—	50,71
150L	0,2	20	1,00	—	Mem	—	65,37
150L	0,4	20	0,00	—	Mem	—	302,01
150L	0,4	20	0,30	—	Mem	—	56,27
150L	0,4	20	0,60	—	Mem	—	24,07
150L	0,4	20	1,00	—	Mem	—	16,19
150L	0,6	20	0,00	—	Mem	—	135,56
150L	0,6	20	0,30	8172,51	12299,80	0,00	30,04
150L	0,6	20	0,60	8172,51	12322,38	0,00	35,15
150L	0,6	20	1,00	8172,51	12342,00	0,00	24,40
150L	0,8	20	0,00	14434,49	12539,12	0,00	54,14
150L	0,8	20	0,30	8172,51	9308,52	0,00	17,45
150L	0,8	20	0,60	8172,51	9293,58	0,00	44,04
150L	0,8	20	1,00	8172,51	9292,28	0,00	40,55
150L	0,2	30	0,00	—	Mem	—	541,36
150L	0,2	30	0,30	—	Mem	—	525,94
150L	0,2	30	0,60	—	Mem	—	288,97
150L	0,2	30	1,00	—	Mem	—	207,60
150L	0,4	30	0,00	—	Mem	—	350,01
150L	0,4	30	0,30	—	Mem	—	181,10
150L	0,4	30	0,60	—	Mem	—	258,87
150L	0,4	30	1,00	—	Mem	—	138,83
150L	0,6	30	0,00	—	Mem	—	273,93
150L	0,6	30	0,30	—	Mem	—	135,57
150L	0,6	30	0,60	—	Mem	—	116,93
150L	0,6	30	1,00	—	Mem	—	89,58
150L	0,8	30	0,00	—	Mem	—	433,96
150L	0,8	30	0,30	—	Mem	—	93,65
150L	0,8	30	0,60	—	Mem	—	94,47
150L	0,8	30	1,00	—	Mem	—	137,04
150L	0,2	50	0,00	—	Mem	—	1400,65
150L	0,2	50	0,30	—	Mem	—	1190,48
150L	0,2	50	0,60	—	Mem	—	404,20
150L	0,2	50	1,00	—	Mem	—	878,28
150L	0,4	50	0,00	—	Mem	—	876,62
150L	0,4	50	0,30	—	Mem	—	531,31
150L	0,4	50	0,60	—	Mem	—	444,32
150L	0,4	50	1,00	—	Mem	—	243,58
150L	0,6	50	0,00	—	Mem	—	454,73
150L	0,6	50	0,30	—	Mem	—	850,54
150L	0,6	50	0,60	—	Mem	—	245,72
150L	0,6	50	1,00	—	Mem	—	348,42
150L	0,8	50	0,00	—	Mem	—	876,84
150L	0,8	50	0,30	—	Mem	—	222,38
150L	0,8	50	0,60	—	Mem	—	230,16
150L	0,8	50	1,00	—	Mem	—	207,16
150T	0,2	20	0,00	—	Mem	—	333,48
150T	0,2	20	0,30	—	Mem	—	144,50
150T	0,2	20	0,60	—	Mem	—	141,76
150T	0,2	20	1,00	—	Mem	—	57,94
150T	0,4	20	0,00	—	Mem	—	110,81

Continua na próxima página.

Tabela B.9 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	BD	E-ILS-RVND	
					Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)
150T	0,4	20	0,30	—	Mem	—	164,12
150T	0,4	20	0,60	—	Mem	—	95,98
150T	0,4	20	1,00	—	Mem	—	66,16
150T	0,6	20	0,00	—	Mem	—	89,14
150T	0,6	20	0,30	5767,89	12529,44	0,00	49,17
150T	0,6	20	0,60	5767,89	19714,07	0,00	50,61
150T	0,6	20	1,00	5767,89	13280,31	0,00	75,21
150T	0,8	20	0,00	—	Mem	—	66,00
150T	0,8	20	0,30	5767,89	11026,08	0,00	98,20
150T	0,8	20	0,60	5767,89	11028,50	0,00	59,90
150T	0,8	20	1,00	5767,89	11025,32	0,00	75,00
150T	0,2	30	0,00	—	Mem	—	968,63
150T	0,2	30	0,30	25879,00	23835,28	0,00	332,42
150T	0,2	30	0,60	25822,50	22919,98	0,00	269,93
150T	0,2	30	1,00	25822,50	22795,83	0,00	175,43
150T	0,4	30	0,00	—	Mem	—	253,31
150T	0,4	30	0,30	—	Mem	—	213,74
150T	0,4	30	0,60	—	Mem	—	187,56
150T	0,4	30	1,00	—	Mem	—	258,03
150T	0,6	30	0,00	—	Mem	—	211,06
150T	0,6	30	0,30	—	Mem	—	162,21
150T	0,6	30	0,60	—	Mem	—	201,36
150T	0,6	30	1,00	—	Mem	—	339,62
150T	0,8	30	0,00	—	Mem	—	185,89
150T	0,8	30	0,30	—	Mem	—	106,96
150T	0,8	30	0,60	—	Mem	—	145,23
150T	0,8	30	1,00	—	Mem	—	197,78
150T	0,2	50	0,00	—	Mem	—	1309,24
150T	0,2	50	0,30	—	Mem	—	201,79
150T	0,2	50	0,60	—	Mem	—	137,16
150T	0,2	50	1,00	—	Mem	—	330,54
150T	0,4	50	0,00	—	Mem	—	315,97
150T	0,4	50	0,30	—	Mem	—	217,53
150T	0,4	50	0,60	—	Mem	—	289,19
150T	0,4	50	1,00	—	Mem	—	268,45
150T	0,6	50	0,00	—	Mem	—	620,07
150T	0,6	50	0,30	—	Mem	—	285,68
150T	0,6	50	0,60	—	Mem	—	281,63
150T	0,6	50	1,00	—	Mem	—	157,87
150T	0,8	50	0,00	—	Mem	—	253,11
150T	0,8	50	0,30	—	Mem	—	356,03
150T	0,8	50	0,60	—	Mem	—	324,45
150T	0,8	50	1,00	—	Mem	—	266,40
Média					14097,03	0,00	271,53

Mem: 16 GB de memória excedida.

Tabela B.10: Resultados com 50-I, 50-II, 50-III

Inst	α	Rec	γ	Lucro	Tempo (s)
50I	0,2	2	0,00	81751,82	57,81
50I	0,2	2	0,30	53955,00	25,64
50I	0,2	2	0,60	53187,59	22,69
50I	0,2	2	1,00	53017,79	17,01
50I	0,4	2	0,30	52022,83	22,09
50I	0,6	2	0,00	75601,69	39,19
50I	0,6	2	0,30	50672,08	21,53
50I	0,6	2	0,60	49953,46	18,34
50I	0,6	2	1,00	49953,46	21,11
50I	0,8	2	0,00	74644,05	23,56
50I	0,8	2	0,30	50431,44	10,75
50I	0,8	2	0,60	49726,62	9,54
50I	0,8	2	1,00	49726,62	7,13
50I	0,2	3	1,00	92799,17	11,68
50I	0,4	3	0,00	134369,42	28,46
50I	0,4	3	0,30	91823,78	14,89
50I	0,4	3	0,60	90528,24	21,02
50I	0,4	3	1,00	90485,70	6,53
50I	0,6	3	0,00	131574,96	12,53
50I	0,6	3	0,30	90655,48	13,58
50I	0,6	3	0,60	89492,47	17,89
50I	0,6	3	1,00	89404,78	11,01
50I	0,8	3	0,00	131008,19	12,13
50I	0,8	3	0,30	90505,30	21,10
50I	0,8	3	0,60	89265,63	6,56
50I	0,8	3	1,00	89265,63	8,71
50I	0,2	5	0,00	251560,79	62,46
50I	0,2	5	0,30	174176,06	20,88
50I	0,2	5	0,60	171804,62	15,41
50I	0,2	5	1,00	171804,62	23,00
50I	0,4	5	0,00	247761,77	53,96
50I	0,4	5	0,30	172248,45	14,74
50I	0,4	5	0,60	169606,26	11,28
50I	0,4	5	1,00	169891,52	24,31
50I	0,6	5	0,00	245054,59	34,84
50I	0,6	5	0,30	170890,82	15,44
50I	0,6	5	0,60	168570,49	14,99
50I	0,6	5	1,00	168570,49	23,74
50I	0,8	5	0,00	243976,80	9,57
50II	0,2	2	1,00	719205,40	35,48
50II	0,4	2	0,00	1050560,83	85,01
50II	0,4	2	0,30	690138,98	13,86
50II	0,4	2	0,60	691111,79	7,63
50II	0,4	2	1,00	691111,79	7,20
50II	0,6	2	0,00	1015839,02	35,46
50II	0,6	2	0,30	677859,68	14,69
50II	0,6	2	0,60	676364,98	6,09
50II	0,6	2	1,00	676364,98	6,75
50II	0,8	2	0,00	997831,39	16,40
50II	0,8	2	0,30	675865,56	5,39
50II	0,8	2	0,60	674393,95	5,88
50II	0,8	2	1,00	674393,95	6,47
50II	0,2	3	0,00	1827509,94	110,94
50II	0,2	3	0,30	1228358,55	35,76

Continua na próxima página.

Tabela B.10 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	Tempo (s)
50II	0,2	3	0,60	1221611,37	21,17
50II	0,2	3	1,00	1226476,29	29,59
50II	0,4	3	0,00	1775222,62	62,80
50II	0,4	3	0,30	1200419,14	15,84
50II	0,4	3	0,60	1195764,00	22,16
50II	0,4	3	1,00	1197723,56	11,66
50II	0,6	3	0,00	1739570,13	33,30
50II	0,6	3	0,30	1185607,21	19,53
50II	0,6	3	0,60	1182976,75	17,02
50II	0,6	3	1,00	1182976,75	11,77
50II	0,8	3	0,00	1721562,50	27,94
50II	0,2	5	0,00	3260655,63	71,52
50II	0,2	5	0,30	2244882,10	47,25
50II	0,2	5	0,60	2238692,82	19,68
50II	0,2	5	1,00	2239699,84	32,67
50II	0,4	5	1,00	2208452,21	10,93
50II	0,6	5	0,00	3183191,67	30,06
50II	0,6	5	0,30	2201082,91	8,23
50II	0,6	5	0,60	2196200,31	8,69
50II	0,6	5	1,00	2196200,31	10,47
50II	0,8	5	0,00	3169024,72	21,18
50II	0,8	5	0,30	2199062,46	8,33
50II	0,8	5	0,60	2194229,29	5,49
50II	0,8	5	1,00	2194229,29	12,44
50III	0,2	2	0,00	207164,05	96,08
50III	0,2	2	0,30	140511,26	26,97
50III	0,2	2	0,60	133296,57	40,61
50III	0,2	2	1,00	134296,83	49,05
50III	0,4	2	0,00	196137,28	167,68
50III	0,4	2	0,30	133313,89	13,44
50III	0,4	2	0,60	127958,83	19,97
50III	0,4	2	1,00	127455,25	25,40
50III	0,6	2	0,60	124514,25	27,15
50III	0,8	2	0,00	185035,52	10,22
50III	0,8	2	0,30	129401,88	10,66
50III	0,8	2	0,60	123724,30	7,03
50III	0,8	2	1,00	123724,30	6,74
50III	0,2	3	0,30	241812,99	55,27
50III	0,4	3	0,00	334589,69	81,95
50III	0,4	3	0,30	234604,99	16,22
50III	0,4	3	0,60	224178,33	13,22
50III	0,4	3	1,00	224884,05	26,91
50III	0,6	3	0,00	326749,20	46,13
50III	0,6	3	0,30	231099,83	10,23
50III	0,6	3	0,60	221390,35	30,94
50III	0,6	3	1,00	221237,33	9,73
50III	0,8	3	0,00	323413,39	16,89
50III	0,8	3	0,30	230133,99	6,79
50III	0,8	3	0,60	220447,37	6,95
50III	0,8	3	1,00	220447,37	9,21
50III	0,2	5	0,00	621691,51	65,07
50III	0,2	5	0,30	443164,13	23,51
50III	0,2	5	0,60	424187,85	38,98
50III	0,2	5	1,00	424117,31	18,84
50III	0,4	5	0,00	609512,44	32,17

Continua na próxima página.

Tabela B.10 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	Tempo (s)
50III	0,4	5	0,30	436496,09	47,30
50III	0,4	5	0,60	418242,45	29,79
50III	0,4	5	1,00	418330,20	30,75
50III	0,6	5	0,00	603190,45	141,71
50III	0,8	5	0,00	599765,03	15,84
50III	0,8	5	0,30	431801,45	8,08
50III	0,8	5	0,60	413893,52	11,51
50III	0,8	5	1,00	413893,52	6,99
Média					26,17

Tabela B.11: Resultados com 100-I, 100-II, 100-III

Inst	α	Rec	γ	Lucro	Tempo (s)
100I	0,2	2	0,00	851687,94	130,44
100I	0,4	2	0,00	802004,46	230,37
100I	0,4	2	0,30	522284,24	108,23
100I	0,4	2	0,60	523207,06	112,72
100I	0,4	2	1,00	522698,38	178,82
100I	0,6	2	0,00	768077,63	349,31
100I	0,6	2	0,30	507741,38	41,15
100I	0,6	2	0,60	504300,42	60,14
100I	0,6	2	1,00	505302,36	167,51
100I	0,8	2	0,00	745966,08	114,19
100I	0,8	2	0,30	495304,74	172,11
100I	0,8	2	0,60	497004,70	102,02
100I	0,8	2	1,00	497004,70	57,55
100I	0,2	3	0,00	1426069,79	180,38
100I	0,2	3	0,30	957244,98	105,12
100I	0,2	3	0,60	951851,81	53,94
100I	0,2	3	1,00	951851,81	140,30
100I	0,4	3	0,00	1368206,16	225,00
100I	0,4	3	0,30	928510,81	115,12
100I	0,4	3	0,60	925274,36	82,52
100I	0,4	3	1,00	924765,68	112,32
100I	0,6	3	0,30	910942,57	128,98
100I	0,8	3	0,00	1320347,93	125,42
100I	0,8	3	0,30	904002,25	48,24
100I	0,8	3	0,60	899072,00	48,12
100I	0,8	3	1,00	899072,00	42,81
100I	0,2	5	0,00	2575319,84	1172,39
100I	0,2	5	0,30	1765827,78	77,07
100I	0,2	5	0,60	1755986,41	169,24
100I	0,2	5	1,00	1755986,41	262,14
100I	0,4	5	0,60	1729408,96	141,50
100I	0,6	5	0,00	2491223,20	182,58
100I	0,6	5	0,30	1721166,25	173,90
100I	0,6	5	0,60	1711254,64	121,76
100I	0,6	5	1,00	1711254,64	62,86
100I	0,8	5	0,00	2470952,04	81,27
100I	0,8	5	0,30	1712581,15	52,23
100I	0,8	5	0,60	1703206,60	42,60
100I	0,8	5	1,00	1703206,60	68,23
100II	0,2	2	0,00	6111829,37	1244,43
100II	0,2	2	0,30	4012149,26	293,66
100II	0,2	2	0,60	3998431,46	85,05
100II	0,2	2	1,00	3971416,32	293,48
100II	0,4	2	0,00	5761463,45	770,78
100II	0,4	2	0,30	3737366,50	73,93
100II	0,4	2	0,60	3764214,05	177,14
100II	0,4	2	1,00	3764176,95	161,50
100II	0,6	2	0,00	5534061,45	251,89
100II	0,6	2	0,30	3660602,99	202,12
100II	0,6	2	0,60	3646492,90	91,42
100II	0,6	2	1,00	3639654,01	154,22
100II	0,8	2	1,00	3619091,10	95,23
100II	0,2	3	0,00	10244638,93	1268,74
100II	0,2	3	0,30	6887711,26	192,11

Continua na próxima página.

Tabela B.11 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	Tempo (s)
100II	0,2	3	0,60	6875780,99	409,55
100II	0,2	3	1,00	6875780,99	200,25
100II	0,4	3	0,30	6671815,17	203,51
100II	0,6	3	0,00	9634531,38	317,25
100II	0,6	3	0,30	6547242,42	222,43
100II	0,6	3	0,60	6525278,53	395,67
100II	0,6	3	1,00	6521513,34	156,99
100II	0,8	3	0,00	9513744,36	117,28
100II	0,8	3	0,30	6499537,45	133,60
100II	0,8	3	0,60	6491460,11	118,30
100II	0,8	3	1,00	6477729,42	81,32
100II	0,2	5	0,00	18407104,44	384,68
100II	0,4	5	0,00	18086702,44	419,41
100II	0,4	5	0,30	12455229,23	354,28
100II	0,4	5	0,60	12405979,20	320,29
100II	0,4	5	1,00	12416247,35	152,65
100II	0,6	5	0,00	17860518,10	386,21
100II	0,6	5	0,30	12320475,93	123,11
100II	0,6	5	0,60	12296106,76	146,28
100II	0,6	5	1,00	12296106,76	161,54
100II	0,8	5	0,00	17747195,69	130,65
100II	0,8	5	0,30	12272715,74	78,16
100II	0,8	5	0,60	12251139,71	118,11
100II	0,8	5	1,00	12246159,19	115,75
100III	0,2	2	0,00	826788,19	280,77
100III	0,2	2	0,30	562924,12	102,78
100III	0,2	2	0,60	528301,63	325,42
100III	0,2	2	1,00	536938,73	136,25
100III	0,4	2	0,30	531822,15	127,35
100III	0,6	2	0,00	748967,16	407,74
100III	0,6	2	0,30	519931,62	180,52
100III	0,6	2	0,60	497279,06	133,86
100III	0,6	2	1,00	497279,06	224,89
100III	0,8	2	0,00	736015,82	120,40
100III	0,8	2	0,30	516639,15	107,00
100III	0,8	2	0,60	493851,36	57,49
100III	0,8	2	1,00	494605,82	115,72
100III	0,2	3	0,00	1381765,98	351,39
100III	0,2	3	0,30	972304,05	367,48
100III	0,2	3	0,60	925695,67	345,52
100III	0,2	3	1,00	930644,34	641,01
100III	0,4	3	0,00	1340353,91	474,54
100III	0,4	3	0,30	945440,48	331,83
100III	0,4	3	0,60	904264,97	120,13
100III	0,4	3	1,00	903095,93	198,80
100III	0,6	3	0,00	1310954,94	312,50
100III	0,6	3	0,30	929448,21	115,88
100III	0,6	3	0,60	889757,08	150,29
100III	0,6	3	1,00	890778,97	167,18
100III	0,8	3	0,60	888105,73	112,95
100III	0,2	5	0,00	2513216,39	274,42
100III	0,2	5	0,30	1790067,01	392,06
100III	0,2	5	0,60	1720471,18	378,32
100III	0,2	5	1,00	1721421,11	252,29
100III	0,4	5	0,00	2469194,64	170,99

Continua na próxima página.

Tabela B.11 – Continuação da página anterior

Inst	α	Rec	γ	Lucro	Tempo (s)
100III	0,4	5	0,30	1765509,38	212,66
100III	0,4	5	0,60	1691784,07	177,94
100III	0,4	5	1,00	1691264,79	313,07
100III	0,6	5	0,00	2435395,35	246,59
100III	0,8	5	0,00	2424740,12	224,17
100III	0,8	5	0,30	1746755,51	161,29
100III	0,8	5	0,60	1675105,56	59,19
100III	0,8	5	1,00	1675105,56	177,28
Média					217,89

Tabela B.12: Resultados com 150-I, 150-II, 150-III

α	Rec	γ	150I		150II		150III	
			Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)
0,2	2	0,0	1833537,37	3937,37	13174295,35	1873,31	1852979,24	977,11
0,2	2	0,3	1194616,39	970,98	8694908,72	1521,23	1260085,88	1375,25
0,2	2	0,6	1186743,46	884,69	8732830,79	1100,52	1209670,93	1751,80
0,2	2	1,0	1183836,52	579,27	8708131,90	854,80	1214821,37	1851,36
0,4	2	0,0	1721745,55	1559,45	12559133,31	1262,29	1748445,32	1452,44
0,4	2	0,3	1131001,57	1182,37	8319219,58	1809,70	1209541,21	924,14
0,4	2	0,6	1115959,37	378,14	8335875,48	476,79	1155558,66	338,40
0,4	2	1,0	1122251,37	967,17	8284511,34	1578,38	1155785,80	480,02
0,6	2	0,0	1619625,51	1800,82	12083056,78	657,67	1698532,69	863,74
0,6	2	0,3	1078456,81	326,51	7984822,53	674,39	1173229,71	930,58
0,6	2	0,6	1071137,14	492,45	8015251,21	597,72	1128207,70	975,07
0,6	2	1,0	1070006,22	519,37	8031339,49	1753,78	1122013,68	673,10
0,8	2	0,0	1583155,69	755,63	11767120,34	362,71	1672855,05	370,61
0,8	2	0,3	1062936,79	246,79	7950193,66	321,26	1167724,69	598,88
0,8	2	0,6	1055753,53	368,67	7924501,72	274,02	1123452,77	219,04
0,8	2	1,0	1055753,53	412,40	7924501,72	239,31	1117649,54	348,75
0,2	3	0,0	3065522,35	1417,44	22121271,49	867,17	3104573,77	1271,62
0,2	3	0,3	2067442,20	1336,85	15087646,56	442,13	2187024,02	2087,16
0,2	3	0,6	2041759,21	868,63	14949235,91	794,76	2098924,32	1144,17
0,2	3	1,0	2053629,70	1293,01	15025081,87	1075,98	2093773,88	1615,18
0,4	3	0,0	2953730,54	831,20	21363635,56	716,67	3020455,34	942,40
0,4	3	0,3	1998863,76	455,91	14699030,31	453,67	2134102,93	759,63
0,4	3	0,6	1985824,07	766,79	14580802,22	934,56	2040143,11	713,48
0,4	3	1,0	1985824,07	1143,47	14616950,42	337,57	2039712,69	1490,91
0,6	3	0,0	2865947,46	1251,76	21103328,33	1208,48	2958624,92	798,09
0,6	3	0,3	1946311,94	528,72	14393823,20	620,86	2099633,73	1706,03
0,6	3	0,6	1933526,62	611,66	14348289,46	385,69	2011974,94	840,48
0,6	3	1,0	1910868,86	209,08	14348289,46	1365,97	2012310,65	1386,07
0,8	3	0,0	2815140,68	689,16	20834272,29	996,83	2935859,26	348,99
0,8	3	0,3	1930795,81	209,70	14286476,98	274,18	2093721,05	292,97
0,8	3	0,6	1918143,02	391,36	14241451,69	202,32	2007555,72	199,65
0,8	3	1,0	1918143,02	329,65	14241451,69	353,09	2001752,49	420,48
0,2	5	0,0	5525299,71	1266,10	40320040,15	4965,90	5625613,02	3080,65
0,2	5	0,3	3798120,35	1166,83	27760120,43	485,57	4023197,65	801,29
0,2	5	0,6	3772292,67	541,98	27683680,70	955,24	3861979,77	1269,93
0,2	5	1,0	3773911,92	1181,59	27683680,70	949,66	3861979,77	959,87
0,4	5	0,0	5418346,70	2365,96	39534085,78	968,59	5540021,11	1536,73
0,4	5	0,3	3734509,47	1285,04	27334952,20	401,16	3971710,07	737,41
0,4	5	0,6	3710603,04	957,82	27286725,39	594,57	3808349,00	1088,42
0,4	5	1,0	3710603,04	895,57	27216022,53	878,38	3808349,00	707,67
0,6	5	0,0	5328992,94	2085,07	39080668,32	2933,92	5483132,03	2291,42
0,6	5	0,3	3683556,52	319,87	27066308,01	1076,24	3936484,79	883,85
0,6	5	0,6	3635647,84	188,91	26982189,40	1086,98	3769102,93	500,28
0,6	5	1,0	3661857,62	538,44	26862085,25	392,27	3780180,83	1184,10
0,8	5	0,0	5279110,64	461,01	38882700,78	626,30	5461867,67	495,66
0,8	5	0,3	3666416,03	283,09	26958905,78	358,26	3935716,77	478,08
0,8	5	0,6	3642921,99	328,94	26875351,63	219,31	3769958,38	508,48
0,8	5	1,0	3642921,99	438,20	26875351,63	410,44	3775761,61	384,35
Média				875,44		910,22		980,33

Tabela B.13: Resultados com 200-I, 200-II, 200-III

α	Rec	γ	200I		200II		200III	
			Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)	Lucro	Tempo (s)
0,2	2	0,0	4651333,82	3410,14	27575624,03	13174,25	3316673,16	10400,73
0,2	2	0,3	3074120,44	1874,75	17945409,69	827,81	2252216,96	1096,98
0,2	2	0,6	3066986,44	1367,34	18009876,69	1839,90	2175739,62	3050,32
0,2	2	1,0	3081491,80	2493,94	18041532,54	1573,00	2152116,68	4956,14
0,4	2	0,0	4453644,69	4656,58	26368052,18	9097,82	3149539,77	5164,73
0,4	2	0,3	2963024,99	1435,59	17368031,68	1575,25	2171772,90	2085,51
0,4	2	0,6	2960987,37	1628,70	17450792,36	2420,86	2078184,58	2672,26
0,4	2	1,0	2960987,37	3289,18	17305333,20	1832,30	2083758,63	1274,40
0,6	2	0,0	4267008,26	3043,76	25340118,87	1847,35	3026397,40	930,58
0,6	2	0,3	2908810,89	1385,18	17204452,77	1343,34	2126868,30	1192,86
0,6	2	0,6	2893686,33	1882,70	17122582,07	612,21	2036344,60	800,99
0,6	2	1,0	2893686,33	970,03	17143061,46	2496,96	2036344,60	2136,06
0,8	2	0,0	4243846,42	1086,05	25335140,22	820,97	3000938,71	2098,58
0,8	2	0,3	2882683,64	950,03	17060504,34	1578,23	2116767,41	939,30
0,8	2	0,6	2867748,67	897,63	17064357,57	445,46	2017282,12	894,12
0,8	2	1,0	2867748,67	929,59	17072989,39	544,45	2027731,51	846,20
0,2	3	0,0	7769335,09	4470,20	46158185,09	4515,87	5573014,78	11362,23
0,2	3	0,3	5292936,98	2441,18	31470801,61	1580,82	3912923,84	1180,36
0,2	3	0,6	5267028,75	4692,60	31140889,09	2828,47	3747464,84	1533,82
0,2	3	1,0	5259542,43	3563,54	31200370,45	3907,12	3754854,77	5103,36
0,4	3	0,0	7561359,80	5318,40	45146125,53	15834,25	5398270,09	2885,25
0,4	3	0,3	5166199,63	1500,82	30747427,72	1983,73	3823715,17	793,08
0,4	3	0,6	5139352,48	1786,31	30590639,22	4138,99	3658455,41	4447,63
0,4	3	1,0	5124783,97	713,63	30639615,70	2398,54	3658455,41	535,77
0,6	3	0,0	7415369,95	1847,25	44213010,28	1032,39	5308638,84	3908,56
0,6	3	0,3	5096944,73	898,84	30271287,25	1568,32	3772344,76	625,98
0,6	3	0,6	5072051,44	1426,29	30274821,98	827,83	3615459,74	884,80
0,6	3	1,0	5072051,44	1131,25	30274821,98	1015,59	3615459,74	814,23
0,8	3	0,0	7357170,83	1800,65	44094798,10	1243,37	5249762,41	1682,61
0,8	3	0,3	5072484,42	567,37	30308939,18	598,43	3762310,11	531,32
0,8	3	0,6	5046113,78	532,24	30196118,08	442,37	3596397,26	704,93
0,8	3	1,0	5046113,78	520,97	30155286,78	297,12	3606846,66	1293,08
0,2	5	0,0	13975870,85	3635,91	83907878,90	4492,23	10078472,36	10386,16
0,2	5	0,3	9667023,51	2796,94	57810274,32	2860,93	7193047,54	1221,91
0,2	5	0,6	9616636,04	2180,07	57336130,44	1378,02	6896097,30	3277,15
0,2	5	1,0	9623758,97	4108,18	57619763,21	3977,46	6913085,06	2353,31
0,4	5	0,0	13781260,23	1790,01	82593201,33	3292,52	9911720,88	6171,91
0,4	5	0,3	9545591,19	3838,03	57100053,27	1916,62	7105532,84	1994,86
0,4	5	0,6	9490124,65	2174,07	56877475,01	3578,93	6799119,51	822,82
0,4	5	1,0	9496082,71	1300,19	56846073,90	3823,26	6821104,07	2585,42
0,6	5	0,0	13638148,39	1011,61	81880743,42	3358,13	9806851,03	1528,17
0,6	5	0,3	9463949,23	919,11	56733418,62	1257,65	7062599,87	1036,34
0,6	5	0,6	9428781,67	1682,51	56480132,54	496,94	6773690,04	935,18
0,6	5	1,0	9414849,09	830,65	56538343,01	630,58	6773690,04	949,02
0,8	5	0,0	13581071,15	1168,25	81614113,85	967,44	9761519,97	2522,58
0,8	5	0,3	9451869,08	607,52	56653668,40	776,37	7052585,75	1164,82
0,8	5	0,6	9402844,00	745,28	56468270,93	772,83	6765076,96	559,93
0,8	5	1,0	9402844,00	553,45	56459639,11	476,91	6754627,56	702,53
Média				1955,30			2506,25	2438,31

Tabela B.14: Resultados com 300-I e 500-I

α	Rec	γ	300I				500I			
			Lucro	Tempo (s)	# H	# HA	Lucro	Tempo (s)	# H	# HA
0,2	2	0,0	3554733,38	38827,01	6,00	13,00	18511558,98	164205,97	6,00	11,00
0,2	2	0,3	2355039,42	9250,34	4,00	8,00	12118368,25	20711,84	3,00	6,00
0,2	2	0,6	2322598,28	18089,52	4,00	8,00	12104635,10	34262,61	4,00	6,00
0,2	2	1,0	2309628,49	4028,45	4,00	8,00	12104635,10	16753,93	4,00	6,00
0,4	2	0,0	3387729,05	26223,50	5,00	14,00	17461463,46	18039,26	5,00	12,00
0,4	2	0,3	2265418,21	3454,81	3,00	6,00	11679691,96	12227,41	3,00	4,00
0,4	2	0,6	2242932,56	3810,16	3,00	6,00	11619526,36	55075,50	4,00	8,00
0,4	2	1,0	2228820,13	6306,98	3,00	6,00	11575738,71	31986,20	4,00	10,00
0,6	2	0,0	3287263,83	18940,74	4,00	9,00	16994564,24	43120,51	5,00	13,00
0,6	2	0,3	2211191,28	2207,19	3,00	4,00	11471602,38	18063,69	3,00	6,00
0,6	2	0,6	2173473,35	1624,78	3,00	2,00	11342496,26	26230,29	3,00	4,00
0,6	2	1,0	2184385,72	7230,62	3,00	4,00	11342496,26	12295,95	3,00	4,00
0,8	2	0,0	3241939,12	9508,74	3,00	1,00	16745516,47	58884,00	5,00	0,00
0,8	2	0,3	2195164,29	2623,83	3,00	0,00	11359864,24	15554,14	3,00	0,00
0,8	2	0,6	2168591,22	4970,02	3,00	0,00	11287079,13	10552,65	3,00	0,00
0,8	2	1,0	2168591,22	6187,78	3,00	0,00	11287079,13	11234,93	3,00	0,00
0,2	3	0,0	6011958,78	13308,46	5,00	8,00	30836429,44	250927,67	7,00	16,00
0,2	3	0,3	4102910,20	5996,90	4,00	6,00	20991359,33	41475,14	4,00	6,00
0,2	3	0,6	4055450,50	17685,10	4,00	8,00	20807123,77	28800,75	4,00	6,00
0,2	3	1,0	4062021,97	19198,26	4,00	8,00	20807123,77	60810,42	4,00	6,00
0,4	3	0,0	5868382,15	4553,29	4,00	10,00	29927205,40	19257,28	5,00	14,00
0,4	3	0,3	4018849,89	8543,01	3,00	6,00	20422342,29	13406,72	3,00	4,00
0,4	3	0,6	3956988,71	4030,60	3,00	6,00	20297287,98	34080,96	3,00	6,00
0,4	3	1,0	3958968,14	13953,28	3,00	6,00	20297287,98	48962,08	3,00	6,00
0,6	3	0,0	5756375,46	5805,41	3,00	6,00	29376931,93	71936,81	5,00	13,00
0,6	3	0,3	3958801,59	2911,81	3,00	4,00	20183319,26	10029,23	3,00	4,00
0,6	3	0,6	3912554,30	4543,20	3,00	4,00	20010153,65	18610,84	3,00	4,00
0,6	3	1,0	3912554,30	13645,51	3,00	4,00	20010153,65	16654,18	3,00	4,00
0,8	3	0,0	5706106,89	31149,87	4,00	0,00	29127884,17	40262,93	5,00	0,00
0,8	3	0,3	3943330,94	16518,51	3,00	0,00	20102679,43	14278,15	3,00	0,00
0,8	3	0,6	3896759,80	6540,38	3,00	0,00	19930799,38	7813,30	3,00	0,00
0,8	3	1,0	3896759,80	16365,17	3,00	0,00	19930799,38	12441,39	3,00	0,00
0,2	5	0,0	10957657,22	8818,82	5,00	12,00	55562055,37	170272,22	6,00	14,00
0,2	5	0,3	7599099,53	10662,47	3,00	6,00	38403453,07	26073,49	4,00	6,00
0,2	5	0,6	7504922,01	18887,21	4,00	7,00	38107607,26	30909,47	4,00	6,00
0,2	5	1,0	7509715,95	4778,23	4,00	8,00	38107607,26	32500,72	4,00	6,00
0,4	5	0,0	10794579,69	6151,50	4,00	10,00	54733490,06	224279,08	6,00	16,00
0,4	5	0,3	7509479,90	9592,96	3,00	6,00	37959210,51	18361,39	3,00	6,00
0,4	5	0,6	7406149,43	2960,30	3,00	4,00	37630777,97	63947,61	4,00	8,00
0,4	5	1,0	7415305,30	2587,95	3,00	6,00	37632602,76	17520,22	3,00	6,00
0,6	5	0,0	10690105,19	4948,91	4,00	10,00	54076499,44	78569,28	5,00	12,00
0,6	5	0,3	7454773,91	6817,00	3,00	4,00	37667406,45	26199,32	3,00	4,00
0,6	5	0,6	7368208,41	8828,09	3,00	4,00	37345468,42	10617,79	3,00	4,00
0,6	5	1,0	7368208,41	6088,46	3,00	4,00	37373790,82	20264,69	3,00	6,00
0,8	5	0,0	10648375,89	4805,29	3,00	2,00	53861178,69	14277,39	4,00	0,00
0,8	5	0,3	7439312,79	4610,81	3,00	0,00	37586808,26	11292,34	3,00	0,00
0,8	5	0,6	7353096,96	2731,15	3,00	0,00	37290051,30	10386,65	3,00	0,00
0,8	5	1,0	7353096,96	4944,96	3,00	0,00	37290051,30	17520,29	3,00	0,00
Média				9505,15	3,46	5,17		41915,39	3,81	5,69

H: número de concentradores instalados; # HA: número de arcos entre concentradores instalados