



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

EFEITOS DA QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ NAS ELETRODINÂMICAS LINEAR E NÃO LINEAR

EDSON DO NASCIMENTO NERES JÚNIOR

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe
Universidade Federal de São João del-Rei

BELO HORIZONTE
28 DE FEVEREIRO DE 2025

EDSON DO NASCIMENTO NERES JÚNIOR

EFEITOS DA QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ NAS ELETRODINÂMICAS LINEAR E NÃO LINEAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional.

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli
Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe
Universidade Federal de São João del-Rei

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE

28 DE FEVEREIRO DE 2025

N444e Neres Júnior, Edson do Nascimento
Efeitos da quebra de simetria de Lorentz nas eletrodinâmicas linear e não linear /
Edson do Nascimento Neres Júnior. – 2025.
90 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem
Matemática e Computacional.

Orientador: Antônio Paulo Baêta Scarpelli.

Coorientador: Jean Carlos Coelho Felipe.

Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Eletrodinâmica – Modelos matemáticos – Teses. 2. Equação de Maxwell –
Teses. 3. Teorias não-lineares – Teses. 4. Simetria (Física) – Teses. 5. Grupos de
Lorentz – Teses. 6. Leis de conservação (Física) – Teses. 7. Energia – Conservação –
Teses. 8. Espaço e tempo – Teses. 9. Teoria de campo (Física) – Teses. I. Scarpelli,
Antônio Paulo Baêta. II. Felipe, Jean Carlos Coelho. III. Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

“EFEITOS DA QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ NAS ELETRODINÂMICAS LINEAR E NÃO LINEAR”.

Tese de Doutorado apresentada por **Edson do Nascimento Neres Junior**, em 28 de fevereiro de 2025, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Documento assinado digitalmente



ANTONIO PAULO BAETA SCARPELLI
Data: 12/03/2025 13:52:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Documento assinado digitalmente



JEAN CARLOS COELHO FELIPE
Data: 10/03/2025 14:23:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe (Coorientador)
Universidade Federal de São João del Rei

Documento assinado digitalmente



JOSE ABDALLA HELAYEL NETO
Data: 07/03/2025 18:53:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

PROF. DR. JOSE ABDALLA HELAYEL - NETO
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Documento assinado digitalmente



ALBERT PETROV
Data: 08/03/2025 11:43:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

PROF. DR. ALBERT PETROV
Universidade Federal de Paraíba
Documento assinado digitalmente



JOSE GERALDO PEIXOTO DE FARIA
Data: 08/03/2025 21:33:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Documento assinado digitalmente



JOSE LUIZ ACEBAL FERNANDES
Data: 08/03/2025 16:01:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

PROF. DR. JOSE LUIZ ACEBAL FERNANDES
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida à impressão,

Prof. Dr. Alisson Marques da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em
Modelagem Matemática e Computacional

A Deus, meus filhos, família e todos que contribuíram.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me conceder vida e forças para superar cada obstáculo ao longo dessa trajetória. Também agradeço profundamente a todos os professores que contribuíram para a construção do meu conhecimento, especialmente os do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.

Aos meus filhos, João e Gael, vocês são minha maior fonte de alegria e força. A cada gesto de amor, como um "papai eu te amo", me dá energia para seguir em frente, mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Edson e Alaíde, e à minha irmã Ellen e seu marido Matheus, devo toda a gratidão pelo amor e carinho constantes. Vocês sempre estiveram presentes, oferecendo suporte incondicional.

Não poderia deixar de mencionar meus amigos Cláudio, Henrique, Thiago, Rivanildo, Max, João de Deus, Welisson, Márlon, Wendeu, Adriano, Warley, PH Silva, Tiago Ribeiro, Giancarlo, Celso, Fernando, Faissal, Caio e Carlos Alexandrino, obrigado pela amizade.

Quero expressar minha especial gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli, por sua paciência, dedicação e apoio constante durante toda essa caminhada. Obrigado por sua atenção cuidadosa em revisar minuciosamente cada cálculo, pelo seu generoso ato de ensinar e por nunca deixar de me incentivar.

Agradeço aos amigos Jean Carlos e sua esposa Estefânia pelo apoio e torcida que sempre me deram. Além disso, o Prof. Dr. Jean Carlos Coelho Felipe, não contribuiu somente pela amizade, mas também como coorientador, tendo sempre comigo tempo e paciência para sanar e tirar dúvidas e correções.

Minha sincera gratidão ao Prof. Dr. Helayël por todo o conhecimento compartilhado ao longo deste período. Sempre presente e disposto a participar de inúmeras reuniões, com bom humor e uma visão clara, ele foi essencial para o avanço do meu trabalho. Sua contribuição foi valiosa não só pelo conteúdo técnico, mas também pela motivação e leveza que trouxe a cada encontro. Agradeço profundamente por cada ensinamento e pelo apoio incondicional.

Agradeço ao Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria pela participação tanto na banca de qualificação quanto na de defesa da tese. Suas contribuições foram essenciais para que o texto ficasse mais bem estruturado. Também sou grato ao Prof. Dr. José Luiz Acebal pelos apontamentos que ajudaram a enriquecer e aprimorar o trabalho. Além disso, agradeço ao Prof. Dr. Albert Petrov pelas sugestões técnicas precisas, que foram fundamentais para a correção e refinamento de aspectos importantes da tese. A colaboração de cada um foi indispensável para a melhoria do trabalho.

Por fim, agradeço à UFVJM por ter me concedido um período de 3 anos e 4 meses de afastamento das minhas atividades, permitindo-me dedicar integralmente ao doutorado.

Obrigado!!!

“O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem” (Rosa, João Guimarães, p. 293, Grande Sertão: Veredas)

Resumo

Neste trabalho, investigamos a eletrodinâmica de Maxwell e um modelo de eletrodinâmica não linear, ambos acrescidos de violação da simetria de Lorentz por meio de um termo CPT-par. Para o modelo de Maxwell, derivamos as leis de conservação de energia e momento, destacando as alterações provocadas pela violação de Lorentz. Já na eletrodinâmica não linear, analisamos a interação entre o vetor de quebra de simetria de Lorentz e um campo magnético de fundo constante, que geram efeitos notáveis nas relações de dispersão. Exploramos as implicações desses fatores no índice de refração do vácuo e na velocidade de grupo. Além disso, discutimos o fenômeno da birrefringência do vácuo no contexto do modelo de Euler-Heisenberg.

Palavras-chave: Eletrodinâmica de Maxwell, Eletrodinâmica não linear, quebra de simetria de Lorentz, Conservação de energia e momento, Teoria de campos, Modelagem matemática.

Abstract

In this work, we investigate Maxwell electrodynamics and a nonlinear electrodynamics model, both featuring Lorentz symmetry violation through a CPT-even term. For the Maxwell model, we derive the conservation laws of energy and momentum, highlighting the changes induced by Lorentz violation. In the nonlinear electrodynamics framework, we analyze the interaction between the Lorentz symmetry-breaking vector and a constant background magnetic field, which generates notable effects on the dispersion relations. We explore the implications of these factors on the vacuum refractive index and the group velocity. Furthermore, we discuss the phenomenon of vacuum birefringence in the context of the Euler-Heisenberg model.

Keywords: Electrodynamics of Maxwell, Nonlinear electrodynamics, Lorentz symmetry breaking, Conservation of energy and momentum, Field theory, Mathematical modeling.

Lista de Abreviaturas e Siglas

EDQ	Eletrodinâmica Quântica.
EDM	Eletrodinâmica de Maxwell.
CFJ	Carroll-Field-Jackiw.
MP	Modelo Padrão.
MPE	Modelo Padrão Estendido.
LHC	<i>Large Hadron Collider.</i>
CP	Combinação das Transformações de Carga e Paridade.
CPT	Combinação das Transformações de Carga, Paridade e Temporal.
EH	Eletrodinâmica de Euler-Heisenberg.

Sumário

1 – Introdução	12
2 – A eletrodinâmica de Maxwell	16
2.1 As equações de Maxwell	16
2.2 Leis de conservação	19
2.3 Construção da Lagrangeana de Maxwell	21
2.3.1 Potenciais	22
2.3.2 Transformações de calibre	23
2.3.3 A Lagrangeana de Maxwell	24
3 – Violando a simetria de Lorentz a partir da Lagrangeana de Maxwell	30
3.1 Equações Modificadas de Maxwell	30
3.2 Modificações nas leis de conservação de Energia e Momento	34
3.2.1 Campo Elétrico de uma carga puntiforme	36
3.3 A importância do potencial	39
4 – Formulação da Lagrangeana Não Linear para Eletrodinâmica	42
4.1 Lagrangeana dependente de um único invariante	42
4.2 Modelo geral em eletrodinâmica não linear	49
4.2.1 Construção da Lagrangeana Geral	49
4.2.2 Equações de campo	51
4.2.3 Relações de dispersão	53
4.3 Modelos de eletrodinâmica não linear	56
4.3.1 Exemplo de uma eletrodinâmica dependendo de $\mathcal{F}$	56
4.3.2 Exemplo de uma eletrodinâmica dependendo de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$	57
4.3.2.1 Eletrodinâmica de Born-Infeld	58
4.3.2.2 Eletrodinâmica de Euler-Heisenberg	59
5 – Efeitos da Quebra da Simetria de Lorentz na Eletrodinâmica Não Linear	61
5.1 Construção da Lagrangeana	61
5.2 Relações de dispersão	63
5.2.1 O caso em que o plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ é ortogonal ao parâmetro violador de Lorentz	66
5.2.2 O caso em que $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ e o parâmetro violador de Lorentz são coplanares	68
5.2.2.1 Primeiro caso: $\chi \perp \mathbf{B}$, $\chi \perp \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$	69
5.2.2.2 Segundo caso: $\chi \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$	70
5.2.2.3 Terceiro caso: $\chi \parallel \mathbf{B}$ e $\chi, \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$	71

5.3	Birrefringência no modelo de Euler-Heisenberg	73
5.3.1	O plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ é perpendicular a χ	73
5.3.2	$\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ são coplanares com χ	75
6	Conclusão	77
Apêndices		79
APÊNDICE A – Álgebra das matrizes		80
A.1	Inversão de Matrizes	80
A.2	Caso 1: determinante da matriz $M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j$	81
A.3	Caso 2: determinante da matriz $M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j + \gamma w_i B_j$	81
A.4	Caso 3: determinante da matriz $M_{ij} = a\delta_{ij} + b\kappa_i k_j + c\gamma_i \Gamma_j + d\delta_i \Delta_j$	82
APÊNDICE B – Expansão da Lagrangeana de Euler-Heisenberg		84
Referências		86

1 Introdução

A eletrodinâmica de Maxwell (EDM) é uma teoria extremamente bem sucedida, abrangendo com precisão as interações eletromagnéticas em escalas clássica e quântica. O estudo do espalhamento de fótons na eletrodinâmica quântica (EDQ) tem motivado a análise de extensões não lineares da EDM, com fenômenos como a birrefringência e o dicroísmo do vácuo (ADLER, Oct 1971; COSTANTINI; TOLLIS; PISTONI, Apr 1971; BISWAS; MELNIKOV, 2007; TOMMASINI et al., Nov 2009; FERRANDO et al., Oct 2007; TOMMASINI et al., Apr 2008; KRUGLOV, Jun 2007). A eletrodinâmica não linear foi investigada pela primeira vez na década de 1930, quando se constatou que efeitos do vácuo, como a criação e aniquilação de pares, promovem autointerações entre fótons. No entanto, foi Born e Infeld (BORN; INFELD, Mar 1934) que propuseram a primeira generalização da EDM para uma versão não linear, buscando garantir uma autoenergia finita para o campo elétrico de partículas carregadas. É possível relacionar a origem da eletrodinâmica de Born e Infeld aos estudos de Gustave Mie, em 1909, que tentou desenvolver uma teoria puramente eletromagnética das partículas carregadas. Hoje, as ações efetivas de Born-Infeld aparecem em diversos contextos, como na teoria das supercordas, em modelos de gravidade quântica e em teorias que envolvem monopolos magnéticos (FRADKIN; TSEYTLIN, Nov 1985; BERGSHOEFF et al., 1987; BANERJEE; ROYCHOWDHURY, May 2012; GUNASEKARAN; KUBIZŃÁK; MANN, Nov 2012; AYÓN-BEATO; GARCÍA, Nov 2000; AKMANSOY; MEDEIROS, Feb 2018; AKMANSOY; MEDEIROS, Jun 2019).

A introdução de *backgrounds* externos em modelos de teoria de campos é um procedimento antigo para reproduzir efeitos do fenômeno da polarização do vácuo. Quando os campos eletromagnéticos externos são suficientemente intensos — em comparação com os chamados campos elétrico e magnético críticos de *Schwinger* — eles podem induzir a criação de pares partícula-antipartícula reais no vácuo quântico não trivial, como os pares elétron-pósitron na EDQ (DIRAC, Jan 1930; SCHWINGER, Jun 1951).

Extensões não lineares da eletrodinâmica, em conexão com campos eletromagnéticos externos, podem descrever os efeitos da estrutura do vácuo sobre a propagação de ondas eletromagnéticas. Embora o vácuo aparente ser um meio vazio e inerte, ele é, na verdade, um estado dinâmico e repleto de atividade, cujas propriedades podem se manifestar em fenômenos observáveis, como a birrefringência e o dicroísmo do vácuo (HU; LIAO, Feb 2008; ZAVATTINI et al., jun 2013; BAIER; BREITENLOHNER, Jan 1967). Um exemplo clássico de extensão não linear que resulta da polarização do vácuo é a Lagrangeana de Euler-Heisenberg (EULER; HEISENBERG, Nov 1936), que é um modelo efetivo para fótons que inclui termos de ordens mais altas nos campos elétrico e magnético. Essa Lagrangeana é obtida ao integrar as variáveis associadas aos efeitos quânticos dos pares elétron-pósitron.

Motivações que justificam fortemente o interesse em extensões não lineares da EDM foi impulsionado pelo advento dos recentes LASERs de alta intensidade, que são os melhores

dispositivos para testar tanto a eletrodinâmica clássica quanto a quântica no regime de campo forte, cujas escalas (de campo) são fixadas pela intensidade crítica $I_{\text{crit}} \sim 4.6 \times 10^{29} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$. A Estação de Luz Extrema (SEL), a Infraestrutura de Luz Extrema da Europa (Projeto ELI) e o Centro *ExaWatt* para Estudos de Luz Extrema (XCELS) devem, em um futuro próximo, fornecer as facilidades para realizar uma inspeção muito detalhada das não linearidades na teoria eletromagnética, permitindo um mergulho real na estrutura do vácuo quântico. Espera-se que as potências desses LASERs extremamente intensos atinjam 102 PW, possivelmente chegando à escala Exa-W em alguns anos. Chamamos a atenção do leitor que experimentos de LASER de alta intensidade projetados para inspecionar efeitos de não linearidade em EDQ são apresentados e discutidos em (KARBSTEIN, Jan 2020; MARKLUND; LUNDIN, Nov 2009; BATTESTI; RIZZO, Dec 2012; KING; HEINZL, Mar 2016). Não linearidade significa correções na EDM que, em geral, dependem das duas grandezas invariantes de Lorentz e de calibre, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente. Em muitos exemplos, a densidade Lagrangeana do modelo não linear depende exclusivamente das potências de $\mathcal{F}$ (KRUGLOV, 2017; GAETE; HELAYËL-NETO; OSPEDAL, Apr 2019). Em outras situações, pode haver dependência de potências pares de $\mathcal{G}$, pois potências pares evitam violação de simetria CP (simetria sob uma combinação das transformações de conjugação de carga e de paridade) (KRUGLOV, Mar 2015; GAETE; HELAYËL-NETO, Mar 2014; GAETE; HELAYËL-NETO, Nov 2014; HAAS et al., Apr 2019).

Em conexão com o tratamento usual da eletrodinâmica não linear, o estudo dos modelos com violação da simetria de Lorentz também estão envolvidos em questões como, por exemplo, a anisotropia do espaço-tempo. Isso ocorre porque a extensão do modelo padrão (COLLADAY; KOSTELECKÝ, Jun 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, Oct 1998), o qual é obtido adicionando todos os possíveis termos violadores de Lorentz que poderiam surgir devido à quebra espontânea dessa simetria, estabelece um conjunto de tensores constantes como parâmetros da violação de Lorentz que selecionam direções especiais no espaço-tempo (MARIZ; NASCIMENTO; PETROV, 2023). Recentemente, foi realizada a investigação de uma extensão não linear genérica da eletrodinâmica axiônica em um cenário tipo Carroll-Field-Jackiw (CFJ) (CARROLL; FIELD; JACKIW, Feb 1990) que implementa a violação da simetria de Lorentz (PAIXÃO et al., May 2024).

A iniciativa para estudar modelos de teoria de campos com violação da simetria de Lorentz decorre de várias abordagens que buscam ir além do Modelo Padrão (MP) da física de partículas. A simetria de Lorentz, sendo um dos pilares fundamentais da Relatividade Especial, sustenta todas as teorias de campos relativísticas. No entanto, diversas teorias que visam unificar a gravitação com a mecânica quântica, como a gravidade quântica e a teoria das cordas, sugerem que essa simetria pode não ser exata, mas uma aproximação válida apenas em escalas de energia relativamente baixas. Em escalas da ordem da energia de Planck, onde os efeitos quânticos para a gravidade tornam-se relevantes, é possível que a simetria de Lorentz seja violada ou modificada. Nesse contexto, modelos que incorporam a violação da simetria de Lorentz fornecem uma estrutura teórica útil para investigar fenômenos físicos que podem ser observáveis em

experimentos de alta precisão. Tais fenômenos incluem desvios nas interações fundamentais detectados em experimentos com aceleradores de partículas ou por meio de medições astrofísicas de alta energia. Esses modelos têm o potencial de fornecer pistas sobre uma nova física além do MP, ajudando a esclarecer os mecanismos que poderiam operar em escalas de energia muito elevadas ([KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989](#)).

Além das previsões teóricas, a busca experimental por sinais de violação da simetria de Lorentz é outro incentivo importante para o estudo desses modelos. Desde a década de 1990, vários experimentos foram projetados com o objetivo de testar os limites dessa simetria com altíssima precisão. Por exemplo, experimentos com relógios atômicos, observações astrofísicas de raios cósmicos de energia ultra-alta e estudos de espalhamento de partículas em aceleradores como o *Large Hadron Collider* (LHC) têm imposto restrições cada vez mais rigorosas sobre possíveis sinais de violações de Lorentz ([MATTINGLY, 2005](#)). Essas investigações são impulsionadas pela possibilidade de que, ao detectar uma pequena violação, novas portas para a física além do MP sejam abertas, permitindo que previsões de teorias de gravidade quântica ou outras extensões da física atual sejam testadas.

Os termos CPT (Combinação das Transformações de Carga, Paridade e Temporal) pares têm despertado maior interesse há algum tempo em relação ao conceito do que lembra a ideia do éter das teorias pré-relativísticas e ao estudo de dimensões extras, já que, em geral a violação de Lorentz pode ser associada à existência de um fundo preferencial do espaço-tempo. Foi discutido, por exemplo, o uso de campos como tensores de violação de simetria de Lorentz com valores esperados alinhados com as dimensões extras de forma a manter essas mesmas dimensões escondidas ([CARROLL; TAM, 2008](#)). Os termos de violação de simetria de Lorentz dos setores de calibre, fermiônico e escalar, neste caso, viriam da interação entre esses campos com os campos de éter. O tipo de termo CPT par que estamos considerando pode ser gerado radiativamente quando um acoplamento não mínimo violador de simetria de Lorentz é introduzido na eletrodinâmica ([GOMES et al., Feb 2010](#); [GAZZOLA et al., 2012](#); [SCARPELLI, 2012](#); [SCARPELLI et al., 2013](#)).

Em nosso estudo, investigamos como esse termo de quebra de simetria de Lorentz no setor CPT par interfere com um campo magnético externo uniforme e constante. Com isso, encontramos as relações de dispersão, os índices de refração modificados e as velocidades de grupo, bem como a birrefringência gerada por esse termo de violação. Além disso, realizamos uma análise da influência dos vetores de fundo na propagação da onda.

Nesta tese, investigamos as eletrodinâmicas linear e não linear sob a influência de um termo específico que viola a simetria de Lorentz. Trata-se de um caso especial do termo CPT-par do setor de fótons no Modelo Padrão Estendido (MPE). A organização do texto segue a seguinte estrutura: o [Capítulo 2](#) apresenta uma introdução breve à EDM, fornecendo a base conceitual necessária. No [Capítulo 3](#), introduzimos um termo de violação de simetria de Lorentz na Lagrangeana de Maxwell estudada no [Capítulo 2](#). Já no [Capítulo 4](#), exploramos a construção da estrutura da eletrodinâmica não linear e das correspondentes equações na presença de campos

elétricos e magnéticos de fundo gerais, por meio de uma revisão do trabalho (NEVES et al., 2021). Ainda nesse capítulo, são feitas aplicações deste procedimento a alguns modelos em eletrodinâmica não linear conhecidos da literatura. No Capítulo 5, incorporamos o mesmo termo de violação de simetria de Lorentz usado no Capítulo 3 na Lagrangeana não linear estudada no Capítulo 4. A partir dessa modificação, novas equações de campo são obtidas e, sob determinadas condições, são derivadas as respectivas relações de dispersão. Em seguida, são obtidos os índices de refração e as velocidades de grupo. Ainda no Capítulo 5, é discutida a birrefringência no vácuo sob a influência dos campos externos para um modelo de Euler-Heisenberg (esta parte do trabalho resultou na publicação (JÚNIOR; FELIPE; SCARPELLI, 2024)). Por fim, no Capítulo 6 apresentamos os comentários finais, discutimos os trabalhos que estão em andamento e os possíveis desenvolvimentos futuros.

2 A eletrodinâmica de Maxwell

No decorrer dos séculos, os conhecimentos sobre eletricidade e magnetismo caminharam individualmente de forma independente. No século XVIII, mais precisamente em 1785, Charles Augustin de Coulomb realizou experimentos e enunciou a conhecida lei de Coulomb, que descreve a força de interação entre cargas elétricas. Já no estudo do magnetismo, em 1820, Hans Christian Oersted observou que a agulha de uma bússola sofria uma deflexão quando estava próxima de um fio condutor no qual passava uma corrente elétrica. Na mesma época, André Marie Ampère, após tomar conhecimento das descobertas de Oersted, descobriu que correntes percorrendo fios paralelos se atraem ou se repelem de acordo com o seu sentido relativo. Desde então, passou-se a observar que os fenômenos elétricos e magnéticos estão interconectados. Cinquenta anos após Coulomb, Michael Faraday, um dos principais nomes do estudo da relação entre eletricidade e magnetismo, se destacou pela descoberta da indução eletromagnética. O desfecho final na unificação dos conceitos elétricos e magnéticos foi escrito no período compreendido entre 1861 e 1864, no qual o físico James Clerk Maxwell, em uma série de trabalhos, conseguiu o feito de unificar as duas áreas em uma única teoria chamada Eletromagnetismo (JACKSON, 1975; GRIFFITHS, 1999; RAMOS et al., 2017).

Neste capítulo, faremos uma breve revisão de conceitos relevantes da eletrodinâmica de Maxwell e das notações usadas posteriormente na tese, tendo por base as referências (JACKSON, 1975; GRIFFITHS, 1999; FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2005; RYDER, 1996; ITZYKSON; ZUBER, 2012).

2.1 As equações de Maxwell

A dinâmica dos campos elétrico, $\mathbf{E}$, e magnético, $\mathbf{B}$, é descrita pelas quatro equações de Maxwell, que em sua formulação diferencial são escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Lei de Gauss para o magnetismo}) \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{Lei de Faraday}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}) \quad (4)$$

em que $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ representam, respectivamente, as densidades de carga e corrente, ϵ_0 e μ_0 representam a permissividade dielétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente. Observamos, pelas equações que descrevem a dinâmica de $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, que esses campos não são independentes. Isso nos permite afirmar que o campo magnético age como fonte do campo elétrico, e, reciprocamente, o campo elétrico atua como fonte do campo magnético.

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar algumas ferramentas úteis para os cálculos que derivam de algumas combinações decorrentes das equações de Maxwell, como, por exemplo,

$$\nabla \cdot (\nabla \phi), \quad \nabla \times (\nabla \phi), \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}), \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}), \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (5)$$

Estas combinações são frequentemente usadas e duas ferramentas úteis para lidar com elas são o delta de Kronecker e o tensor de Levi-Civita. As coordenadas de um vetor $\mathbf{x}$ são representadas por x_i , e as derivadas, por $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $i = 1, 2, 3$. O delta de Kronecker é definido por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{para } m = n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6)$$

ao passo que o tensor Levi-Civita tem as componentes dadas por

$$\epsilon_{kmn} = \epsilon^{kmn} = \begin{cases} 1 & \text{se } (k, m, n) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (k, m, n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{se há índices repetidos.} \end{cases} \quad (7)$$

Vamos adotar também a convenção de soma de Einstein. Nessa notação, por exemplo, o produto escalar é escrito na forma

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i \equiv A_i B_i, \quad (8)$$

e o produto vetorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k \equiv \epsilon_{kmn} A_m B_n. \quad (9)$$

Outras possibilidades de combinações relacionando δ_{ij} e ϵ_{ijk} que serão bastante utilizadas nesse trabalho são

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \delta_{ij} &= 0, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} &= 6, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} &= \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijn} &= 2\delta_{kn}. \end{aligned} \quad (10)$$

Voltando às equações de Maxwell, porém supondo agora uma região do espaço onde não há cargas e correntes, essas equações podem ser reescritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (14)$$

Os trabalhos de Maxwell foram fundamentais para o nosso entendimento de que a luz se propaga como uma onda eletromagnética. Segundo Maxwell: “*Difícilmente podemos evitar a interferência de que a luz consiste de ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos*”(GRIFFITHS, 1999, p. 262). A de se destacar, que Maxwell se referia ao éter como meio hipotético pelo qual a luz e as ondas eletromagnéticas se propagavam. Mais tarde, Michelson-Morley e a teoria da relatividade de Einstein mostraram que esse éter não existia e que as ondas eletromagnéticas podem se propagar no vácuo (JACKSON, 1975).

Vamos agora considerar como reproduzir esse resultado a partir das equações de Maxwell, na ausência de cargas. Começaremos tomando o rotacional das equações (13) e (14), de maneira a obter o par de equações

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}), \quad (15)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}). \quad (16)$$

Substituindo as equações (13) e (14), respectivamente, nas equações (15) e (16), obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (17)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})_k \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} \partial_j \partial_m A_n \\ &= [\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}] \partial_j \partial_m A_n \\ &= \partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (19)$$

é válida para qualquer campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Desta forma, podemos reescrever as equações (17) e (18) da seguinte forma:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (20)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (21)$$

Por fim, utilizando as equações (11) e (12), os primeiros termos das equações (20) e (21) se anulam. Por consequência, chegamos aos seguintes resultados:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad (22)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (23)$$

Temos agora duas equações diferenciais, de segunda ordem e desacopladas para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. No entanto, como é de conhecimento, a propagação de uma onda é descrita por uma função $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$, que representa a amplitude de oscilação e satisfaz a chamada equação de onda,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = 0, \quad (24)$$

em que v representa a velocidade de propagação da onda em um dado meio. Em suma, comparando as equações (22) e (23) com a (24), podemos interpretar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ como ondas se propagando no vácuo com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (25)$$

Este resultado torna-se ainda mais admirável quando substituimos os valores $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N}/\text{A}^2$ em (25) e obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad (26)$$

que corresponde à velocidade da luz no vácuo.

2.2 Leis de conservação

As leis de conservação de energia e momento linear são resultados importantes a serem estabelecidos para o campo eletromagnético. Inicialmente, notemos que podemos obter de forma direta a denominada equação de continuidade para a densidade de carga e densidade de corrente, que diz respeito à conservação da carga elétrica. Tomemos a derivada temporal da equação (1) e a divergência da equação (4). Podemos combiná-las de forma a escrever

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} &= \epsilon_0 \partial_t (\partial_t E_i) + \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j B_k - \epsilon_0 \partial_i (\partial_t E_i) \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \partial_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

em que $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$.

Por outro lado, uma partícula de carga Q , movendo-se com uma velocidade $\mathbf{v}$, sofre a ação dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ por meio da chamada força de Lorentz, dada por

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (28)$$

A partir das equações de Maxwell, podemos obter este resultado em termos de ρ e $\mathbf{J}$. Além disso, outras leis de conservação podem ser obtidas das equações de Maxwell, por meio de algumas manipulações que veremos a seguir.

Em princípio, façamos o produto escalar de (3) por $\mathbf{B}$ e o produto escalar de (4) por $\mathbf{E}$, ou seja,

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} = -(\partial_t \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = -\partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right), \quad (29)$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right). \quad (30)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} &= (\epsilon_{ijk} \partial_j B_k) E_i \\ &= \partial_j (\epsilon_{ijk} B_k E_i) - \epsilon_{ijk} B_k \partial_j E_i \\ &= \partial_j (\epsilon_{jki} B_k E_i) + B_k \epsilon_{kji} \partial_j E_i \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (31)$$

Substituindo (31) em (30) e, na sequência, subtraindo (29) de (30), obtemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) + \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right), \quad (32)$$

resultando em

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \quad (33)$$

na qual $U \equiv \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)$ e $\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Observe que a equação (33) é semelhante à equação de continuidade (27), porém com o lado direito da equação não nulo, correspondendo a um termo de dissipação. Vemos, então, que a equação (33) deve estar associada a alguma lei de conservação, e o termo $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ pode ser identificado como sendo a taxa de realização de trabalho por unidade de volume. Na equação acima, U é a densidade de energia associada ao campo eletromagnético, ao passo que $\mathbf{S}$ é o chamado vetor de Poynting, que representa a densidade do fluxo de energia.

Por outra perspectiva, buscando estabelecer uma condição semelhante à equação de continuidade (27), podemos reformulá-la como uma combinação de uma derivada temporal e uma derivada espacial, assim como o resultado encontrado em (33). Para isso, seguimos um raciocínio semelhante ao que nos levou à equação (33), mas, em vez de utilizar o produto escalar, agora faremos o produto vetorial da lei de Faraday-Lenz (3) com o campo $\mathbf{E}$ e o produto vetorial da equação de Ampère-Maxwell (4) com o campo $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{E} \\ &= -\epsilon_{ijk} \partial_t (B_j) E_k \\ &= -\partial_t (\epsilon_{ijk} B_j E_k) + \epsilon_{ijk} B_j \partial_t (E_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}. \quad (35)$$

Notemos, por outro lado, que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} &= \epsilon_{ijk} (\nabla \times \mathbf{A})_j A_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jmn} \partial_m (A_n) A_k \\ &= -\epsilon_{jik} \epsilon_{jmn} A_k \partial_m (A_n) \\ &= -[\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}] A_k \partial_m (A_n) \\ &= A_k \partial_k A_i - A_k \partial_i A_k \\ &= \partial_k (A_i A_k) - A_i \partial_k A_k - \partial_i \left(\frac{1}{2} A_k A_k \right) \\ &= \partial_k (A_i A_k) - A_i \nabla \cdot \mathbf{A} - \partial_i \left(\frac{1}{2} A^2 \right), \end{aligned} \quad (36)$$

para qualquer campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Sendo assim, substituindo as equações (1), (2), (34) e (35) em (36) obtemos as relações

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \partial_k (E_i E_k) - \frac{\rho}{\epsilon_0} E_i - \partial_i \left(\frac{1}{2} E^2 \right), \quad (37)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \partial_k (B_i B_k) - \partial_i \left(\frac{1}{2} B^2 \right). \quad (38)$$

Multiplicando a equação (37) por $1/\mu_0$, a equação (38) por $\frac{1}{\mu_0^2 \epsilon_0}$ e posteriormente somando uma com a outra obtemos

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (39)$$

em que $\mathbf{S}$ é o vetor de Poynting já definido anteriormente e

$$(\overleftrightarrow{\mathbf{T}})_{ij} = \epsilon_0 \left(\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (40)$$

é denominado tensor das tensões de Maxwell. Vale a pena fazermos algumas ponderações sobre a equação (39). O termo $\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ pode ser identificado como a densidade de força de Lorentz, fazendo com que possamos identificar a equação (39) como sendo uma equação de conservação do momento onde o termo $\frac{1}{c^2} \mathbf{S}$ descreve a densidade do momento associada ao campo eletromagnético. Voltaremos a abordar esses conceitos em outra situação no [Capítulo 3](#).

2.3 Construção da Lagrangeana de Maxwell

Nos próximos capítulos desta tese, adotaremos uma abordagem baseada no formalismo de densidades Lagrangeanas para descrever a dinâmica dos campos eletromagnéticos. Isso nos leva a uma pergunta central: como podemos formular as equações de Maxwell no contexto de

uma Lagrangeana? A resposta a essa pergunta é crucial para explorar as leis fundamentais do eletromagnetismo sob a ótica da mecânica analítica.

Para tanto, iniciaremos definindo os potenciais escalar e vetorial, que desempenham papéis fundamentais na formulação Lagrangeana do eletromagnetismo. Esses potenciais não apenas simplificam o tratamento das equações de Maxwell, mas também permitem uma conexão direta com a teoria dos campos, possibilitando uma generalização para outras áreas da física, como a teoria quântica de campos. Ao longo do texto, examinaremos cuidadosamente se essas ferramentas possuem significado físico claro e consistente, bem como suas implicações na descrição dos fenômenos eletromagnéticos.

2.3.1 Potenciais

Até o momento, observou-se que a dinâmica eletromagnética é regida pelas equações de Maxwell em termos dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Mais precisamente, vimos que tais campos atuam sobre partículas carregadas por meio da força de Lorentz. Entretanto, considerando as equações homogêneas de Maxwell e, em um primeiro momento, a equação de Gauss para o magnetismo,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (41)$$

percebemos que é possível definir um vetor $\mathbf{A}$, o qual chamaremos de potencial vetor, tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (42)$$

uma vez que é de conhecimento pelo cálculo vetorial que o divergente de um rotacional é nulo.

Por outro lado, a outra equação homogênea de Maxwell conhecida como Lei de Faraday, dada por

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (43)$$

pode também ser escrita por meio do potencial vetor. Ou seja, substituindo a expressão (42) na equação acima, obtemos

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (44)$$

que pode ser reescrita em termos do gradiente de uma função escalar, ou seja

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi. \quad (45)$$

O termo $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ está relacionado à indução eletromagnética, enquanto $-\nabla \phi$ corresponde à contribuição eletrostática. O sinal negativo no lado direito da equação é uma convenção amplamente utilizada, que reflete a escolha tradicional de sinal que faz o campo elétrico apontar das regiões de maior para as de menor potencial em sistemas eletrostáticos. Embora seja possível adotar uma convenção diferente para esse sinal, a escolha do negativo é mantida para garantir a consistência com outras

equações da eletrodinâmica clássica e com a descrição usual de fenômenos eletrostáticos. Sendo assim, conseguimos expressar os campos eletromagnéticos em termos de um potencial escalar ϕ e de um potencial vetorial $\mathbf{A}$, isto é

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (46)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (47)$$

Em vista disso, dos resultados acima nós podemos reescrever as equações de Gauss e Ampère-Maxwell em termos dos potenciais, resultando em

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (48)$$

e

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (49)$$

2.3.2 Transformações de calibre

As equações (48) e (49) parecem ser complicadas quando comparadas com as equações de Maxwell sem o uso dos potenciais. Porém, podemos perceber que as equações (46) e (47) não definem univocamente os potenciais, o que nos permite impor condições adicionais, desde que não modifiquem $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Suponhamos então dois conjuntos de potenciais, $(\phi, \mathbf{A})$ e $(\phi', \mathbf{A}')$, que correspondem aos mesmos campos elétrico e magnético de forma que

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \text{ e } \phi' = \phi + \beta. \quad (50)$$

Uma vez que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ resultam no mesmo $\mathbf{B}$, podemos escrever

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha}, \quad (51)$$

e, portanto, $\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, implicando em $\boldsymbol{\alpha} = \nabla\lambda$. Os dois potenciais também dão origem ao mesmo $\mathbf{E}$, assim

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla(\phi + \beta) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\lambda) \\ &= \mathbf{E} - \nabla(\beta) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\lambda) \\ &= \mathbf{E} - \nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right), \end{aligned} \quad (52)$$

portanto, $\nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0$, logo podemos escolher $\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}$. Consequentemente, nesse sentido, podemos definir as seguintes transformações

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda, \quad (53)$$

e

$$\phi(\mathbf{x}, t) \mapsto \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (54)$$

Tais transformações implicam juntas que $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}'$ e $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}'$. Como podemos ver, as transformações definidas mantêm os valores de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ inalterados. Quando uma transformação mantém algum resultado inalterado, pode-se dizer que há alguma simetria associada a tal tipo de transformação. Em particular, nesse caso, as transformações são denominadas transformações de calibre e os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são invariantes de calibre. Pode-se dizer ainda que as equações de Maxwell formam um conjunto de equações invariantes pelas transformações de calibre definidas em (53) e (54), pois dependem somente dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

2.3.3 A Lagrangeana de Maxwell

A mecânica clássica pode ser construída partindo-se da ação, a qual é definida pela integral temporal da função Lagrangeana,

$$S = \int L \, dt. \quad (55)$$

A Lagrangeana, de maneira geral, depende das energias cinética, T , e potencial, V ,

$$L = T - V, \quad (56)$$

expressas em função das coordenadas x_i do sistema e de suas derivadas $dx/dt = \dot{x}$ e $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$.

De acordo com o princípio da mínima ação, dados os estados inicial e final do sistema, a ação total é um mínimo, de forma que

$$\delta S = \delta \int L dt = 0. \quad (57)$$

Concentremo-nos agora no caso do eletromagnetismo clássico e em um tratamento generalizado em termos dos potenciais eletromagnéticos $\phi(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$. A função Lagrangeana pode ser escrita como

$$L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad (58)$$

em que $\mathcal{L}$ é denominada densidade Lagrangeana. Antes de mais nada, deve-se observar que $\mathcal{L}$ é uma grandeza escalar que tem dimensão de [energia]/[unidade de volume], uma vez que representa a diferença entre as densidades de energia cinética e potencial. Assim, a ação para esta generalização pode contemplar todas as combinações com resultado escalar feitas por meio dos potenciais e de suas derivadas, ϕ , $\partial_t \phi$, $\nabla \phi$, $\mathbf{A}$, $\partial_t \mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ e $\nabla \times \mathbf{A}$. Além disso, os termos de fonte também estão presentes nas equações de Maxwell. Podemos, então, tentar uma construção do tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \alpha (\partial_t \phi)^2 + \beta (\partial_t \mathbf{A})^2 + \gamma (\nabla \phi)^2 + \Delta (\nabla \cdot \mathbf{A})^2 + \xi (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \\ & + \chi (\partial_t \phi) (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma (\nabla \phi) \cdot (\partial_t \mathbf{A}) + \zeta (\nabla \phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \\ & + \kappa (\partial_t \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \mu \phi^2 + \nu \mathbf{A}^2 + a \phi \rho + b \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (59)$$

em que, $\alpha, \beta, \gamma, \Delta, \xi, \chi, \sigma, \zeta, \kappa, \mu, \nu, a$ e b são coeficientes a determinar.

Em primeiro lugar, antes de prosseguirmos, é sabido que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A} \quad (60)$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (61)$$

Conforme já observamos quando definimos os potenciais eletromagnéticos, temos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \underbrace{-\nabla \times (\nabla\phi)}_{=0} - \nabla \times (\partial_t \mathbf{A}) \\ &= -\partial_t (\nabla \times \mathbf{A}) = -\partial_t \mathbf{B} \end{aligned} \quad (62)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (63)$$

O resultado acima nos faz concluir que as equações homogêneas não são provenientes da Lagrangeana, pois saem diretamente da definição dos potenciais. Na sequência, vamos usar o princípio variacional com relação a ϕ e depois com relação a $\mathbf{A}$ na Lagrangeana (59) e, posteriormente, comparar os resultados obtidos com as equações não homogêneas de Maxwell.

Fazendo primeiro, a variação da Lagrangeana geral (59) em relação a ϕ , a fim de obter a candidata a equação de Gauss,

$$\begin{aligned} \delta [\alpha (\partial_t \phi)^2] &= 2\alpha (\partial_t \phi) (\partial_t \delta \phi) \\ &= \underbrace{\partial_t (2\alpha (\partial_t \phi) \delta \phi)}_{=0} - 2\alpha (\partial_t^2 \phi) \delta \phi = -2\alpha (\partial_t^2 \phi) \delta \phi. \end{aligned} \quad (64)$$

Note que os termos livres são considerados nulos, ou seja, aqueles que envolvem derivadas totais podem ser descartados, pois não contribuem para a dinâmica Lagrangeana, uma vez que derivadas totais em integrandos simétricos não afetam a ação.

$$\begin{aligned} \delta [\gamma (\nabla \phi)^2] &= 2\gamma (\nabla \phi) \cdot (\nabla \delta \phi) \\ &= \underbrace{\nabla \cdot (2\gamma (\nabla \phi) \delta \phi)}_{=0} - 2\gamma (\nabla^2 \phi) \delta \phi \\ &= -2\gamma (\nabla^2 \phi) \delta \phi. \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \delta [\chi (\partial_t \phi) (\nabla \cdot \mathbf{A})] &= \chi (\partial_t \delta \phi) (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= \underbrace{\partial_t (\chi \delta \phi \nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - \partial_t (\chi \nabla \cdot \mathbf{A}) \delta \phi \\ &= -\chi \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) \delta \phi. \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
\delta [\sigma(\nabla\phi) \cdot (\partial_t \mathbf{A})] &= \sigma(\nabla\delta\phi) \cdot \partial_t \mathbf{A} \\
&= \underbrace{\nabla \cdot (\sigma\delta\phi \partial_t \mathbf{A})}_{=0} - \sigma \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) \delta\phi \\
&= -\sigma \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) \delta\phi.
\end{aligned} \tag{67}$$

Observe que os termos que acompanham os coeficientes χ e σ apresentam contribuições semelhantes envolvendo ϕ e $\mathbf{A}$. Ao reescrevermos a Lagrangeana, tais termos serão reunidos em apenas um. Continuando com os cálculos das variações, temos:

$$\begin{aligned}
\delta [\zeta(\nabla\phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] &= \zeta(\nabla\delta\phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\
&= \underbrace{\nabla \cdot (\zeta\delta\phi \nabla \times \mathbf{A})}_{=0} - \zeta \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \delta\phi = 0.
\end{aligned} \tag{68}$$

Veremos que este termo também produz contribuição nula quando realizamos a variação em relação ao campo $\mathbf{A}$. Portanto, vamos descartá-lo. Os dois termos restantes são

$$\delta [\mu\phi^2] = 2\mu\phi\delta\phi \tag{69}$$

e

$$\delta[a\phi\rho] = a\rho\delta\phi. \tag{70}$$

Assim, a variação completa da densidade Lagrangeana é dada por

$$\left(2\alpha \left(\partial_t^2 \phi \right) + 2\gamma \left(\nabla^2 \phi \right) + \sigma \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) - 2\mu\phi - a\rho \right) \delta\phi = 0, \tag{71}$$

de forma que

$$\nabla \cdot (2\gamma \nabla \phi + \sigma \partial_t \mathbf{A}) + 2\alpha \left(\partial_t^2 \phi \right) - 2\mu\phi = a\rho. \tag{72}$$

Façamos agora a variação da densidade Lagrangeana (59) em relação ao potencial vetor $\mathbf{A}$, termo a termo, para obtermos a equação candidata à lei de Ampère-Maxwell:

$$\begin{aligned}
\delta [\beta(\partial_t \mathbf{A})^2] &= 2\beta(\partial_t \mathbf{A}) \cdot (\partial_t \delta \mathbf{A}) \\
&= \underbrace{\partial_t (2\beta(\partial_t \mathbf{A}) \cdot \delta \mathbf{A})}_{=0} - 2\beta \left(\partial_t^2 \mathbf{A} \right) \cdot \delta \mathbf{A} \\
&= -2\beta \left(\partial_t^2 \mathbf{A} \right) \cdot \delta \mathbf{A},
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\delta [\Delta(\nabla \cdot \mathbf{A})^2] = -2\Delta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \delta \mathbf{A}, \tag{74}$$

$$\delta [\xi(\nabla \times \mathbf{A})^2] = \left(-2\xi \nabla^2 \mathbf{A} + 2\xi \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right) \cdot \delta \mathbf{A}, \tag{75}$$

$$\delta [\chi (\partial_t \phi) (\nabla \cdot \mathbf{A})] = -\chi \nabla (\partial_t \phi) \cdot \delta \mathbf{A}, \quad (76)$$

$$\delta [\sigma (\nabla \phi) \cdot (\partial_t \mathbf{A})] = -\sigma \nabla (\partial_t \phi) \cdot \delta \mathbf{A}. \quad (77)$$

Conforme havíamos observado anteriormente, os termos que acompanham os coeficientes χ e σ apresentam contribuições semelhantes. Logo, vamos optar pelo termo que acompanha σ e descartar o termo com χ quando formos reescrever a Lagrangeana (59). Outra observação relevante, já comentada anteriormente, diz respeito ao termo misto $\zeta (\nabla \phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$, que apresenta variação nula quando são considerados os dois potenciais, ϕ e $\mathbf{A}$. Para os termos restantes, temos

$$\delta [\kappa (\partial_t \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] = 0, \quad (78)$$

$$\delta [\nu \mathbf{A}^2] = 2\nu \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{A} \quad (79)$$

e

$$\delta [b \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}] = b \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A}. \quad (80)$$

Reescrevendo todos os termos obtemos a equação de campo

$$[2\Delta - 2\xi] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + 2\xi \nabla^2 \mathbf{A} - 2\nu \mathbf{A} = b \mathbf{j} - \partial_t (2\beta \partial_t \mathbf{A} + \sigma \nabla \phi). \quad (81)$$

Comparando as equações obtidas, (72) e (81), com as equações de Gauss e Ampère-Maxwell escritas em função dos potenciais, (48) e (49), obtemos $\mu = \alpha = \nu = \Delta = 0$, $\gamma = 1/2c^2$, $\sigma = \epsilon_0$, $a = -\mu_0$, $b = \mu_0$, $\xi = -1/2$ e $\beta = 1/2c^2$. Reescrevendo a densidade Lagrangeana (59), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2c^2} (\partial_t \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2c^2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{c^2} (\nabla \phi) \cdot (\partial_t \mathbf{A}) - \mu_0 \phi \rho + \mu_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) - \mu_0 [\phi \rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}]. \end{aligned} \quad (82)$$

A equação (82) é a chamada densidade Lagrangeana de Maxwell.

É conveniente introduzirmos a notação covariante, a partir da qual as equações do eletromagnetismo podem ser escritas de forma mais compacta. De início, introduzimos o quadrivetor potencial

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \phi, A^i = -A_i = \mathbf{A} \right), \quad (83)$$

a partir do qual escrevemos o tensor eletromagnético (*Field Strength Tensor*)

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (84)$$

em que $\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \partial^i = -\partial_i \equiv -\nabla_i \right)$. Observemos que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico e que

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \phi \right)_i \\ &= -\frac{E^i}{c} = -\frac{\mathbf{E}_i}{c} \end{aligned} \quad (85)$$

e

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i \\ &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \\ &= \{ \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \} \partial_m A_n \\ &= \epsilon_{ijk} \underbrace{\epsilon_{mnk} \partial_m A_n}_{=-B^k} = -\epsilon_{ijk} B^k = -\epsilon_{ijk} \mathbf{B}_k. \end{aligned} \quad (86)$$

Desta forma, o tensor eletromagnético tem a representação matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Por fim, reunimos as densidades de carga e corrente elétricas em um único quadrivetor densidade de corrente, dado por

$$J^\nu = (c\rho, \mathbf{J}). \quad (88)$$

Agora estamos prontos para reescrever a Lagrangeana (82) na notação covariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) - \mu_0 [\phi \rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}] \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \mu_0 A^\mu J_\mu. \end{aligned} \quad (89)$$

Se agora fizermos o processo inverso, aplicando o princípio da ação mínima em relação ao quadrivetor potencial A^μ , obteremos as equações de campo reunidas em apenas uma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (90)$$

As equações de Maxwell na forma que as conhecemos podem então ser recuperadas tomando as componentes temporal e espaciais da equação acima. Fazendo $\nu = 0$, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &\stackrel{\mu=0}{=} \partial_i F^{i0} \\ &= -\partial_i F^{0i} = -\partial_i \left(-\frac{\mathbf{E}_i}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (91)$$

Por outro lado, $J^0 = c\rho$. Então,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (92)$$

A outra equação não homogênea pode ser obtida fazendo $\nu = i$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu i} &\stackrel{\mu=0,j}{=} \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} \\ &= -\frac{\partial_t \mathbf{E}_i}{c} + \partial_j \epsilon_{ijk} \mathbf{B}_k \\ &= -\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (93)$$

Dado que $J^i = \mathbf{J}$, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (94)$$

As equações homogêneas, como comentamos anteriormente, são obtidas diretamente das definições dos campos em termos dos potenciais,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A} \quad (95)$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (96)$$

É possível definir um tensor dual de $F^{\mu\nu}$,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (97)$$

em que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor Levi-Civita em quatro dimensões (com $\epsilon^{0ijk} = \epsilon_{ijk}$). Seus elementos também podem ser representados por meio de uma matriz de ordem quatro antissimétrica, dada por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3/c & -E^2/c \\ B^2 & -E^3/c & 0 & E^1/c \\ B^3 & E^2/c & -E^1/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Em razão da forma como é definido o tensor dual, em termos de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, segue que

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (99)$$

A identidade acima nos permite obter as equações homogêneas de Maxwell, de forma análoga ao que foi feito para Gauss e Ampère-Maxwell. Por fim, concluímos que as equações de Maxwell podem ser escritas na notação covariante como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (100)$$

3 Violando a simetria de Lorentz a partir da Lagrangeana de Maxwell

Existem diversas abordagens para uma investigação científica da natureza, sendo três delas particularmente notáveis. A primeira é a observação direta dos fenômenos naturais, embora essa abordagem possa ser limitada pela tecnologia disponível, especialmente quando se trata de observar regiões distantes do espaço ou de escalas extremamente pequenas. A segunda abordagem se dá em ambientes controlados, como laboratórios, nos quais ferramentas avançadas, como aceleradores de partículas, permitem simular e testar hipóteses em condições específicas, com a reprodução de fenômenos físicos e a sua análise em profundidade. Por fim, a terceira abordagem envolve a formulação de extensões ou violações deliberadas dos modelos teóricos existentes, com o intuito de propor previsões inovadoras. Essas previsões podem, eventualmente, ser verificadas experimentalmente em laboratório ou observadas no mundo natural, confirmando ou refutando tais hipóteses e levando à revisão ou expansão dos modelos existentes. É nesse sentido que as ideias do presente capítulo estão embasadas.

É nessa última abordagem que direcionamos nosso desenvolvimento, ao adicionar um termo CTP-par que viola a simetria de Lorentz na Lagrangeana de Maxwell. A violação da simetria de Lorentz é introduzida no MPE pela adição, à densidade Lagrangeana do MP mínimo, de todos os possíveis termos que poderiam surgir como resultado da quebra espontânea da simetria de Lorentz em um cenário de altíssimas energias. Esses termos incorporam tensores constantes que podem provocar efeitos não convencionais, como, por exemplo, uma anisotropia do espaço-tempo (BELICH et al., 2007; MARIZ; NASCIMENTO; PETROV, 2023). Na situação analisada neste trabalho, consideramos um caso particular de um destes termos previstos no MPE. No entanto, consideraremos a situação em que o vetor de fundo depende das coordenadas do espaço-tempo.

O capítulo está dividido em três seções. Na [Seção 3.1](#), apresentamos as equações de Maxwell modificadas pelo termo de violação inserido na densidade Lagrangeana. Já na [Seção 3.2](#), obtemos as generalizações para a densidade de força de Lorentz, a densidade de momento, o vetor de Poynting e a densidade de energia. Por fim, na [Seção 3.3](#), analisamos o potencial vetor no contexto do efeito Aharonov-Bohm, considerando um cenário com violação da simetria de Lorentz. Adotaremos em todo o texto a convenção métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

3.1 Equações Modificadas de Maxwell

Vamos considerar a densidade Lagrangeana de Maxwell, já discutida na [Subseção 2.3.3](#), agora com a adição de um termo que promove a quebra da simetria de Lorentz. O modelo a ser estudado é descrito pela seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(\chi_\mu F^{\mu\nu})^2 - \mu_0 J_\mu A^\mu. \quad (101)$$

O termo $-\frac{1}{2}(\chi_\mu F^{\mu\nu})^2$ é um caso especial da violação de simetria de Lorentz no setor do fóton CPT-par, dada por (KOSTELECKÝ, 2004):

$$\mathcal{L}_{\text{par}} = -\frac{1}{4}\kappa^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}, \quad (102)$$

em que $\kappa^{\alpha\beta\lambda\delta}$ é um tensor de quarta ordem. Nosso termo, conhecido de éter (GOMES et al., 2010; MARIZ; NASCIMENTO; PETROV, 2023), ocorre quando temos a relação

$$\kappa_{\alpha\beta\gamma\delta} = -(\chi_\alpha\chi_\gamma\eta_{\beta\delta} - \chi_\alpha\chi_\delta\eta_{\beta\gamma} + \chi_\beta\chi_\delta\eta_{\alpha\gamma} - \chi_\beta\chi_\gamma\eta_{\alpha\delta}). \quad (103)$$

Para obtermos o conjunto das equações de Maxwell modificadas, começamos obtendo as equações de movimento ao aplicar o princípio da ação mínima. Calculando a variação da densidade Lagrangeana acima em relação a A^μ , obtemos, termo a termo,

$$\begin{aligned} \delta\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\right) &= -\frac{1}{4}\{\delta(F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}\} \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\{\partial^\mu\delta A^\nu - \partial^\nu\delta A^\mu\} \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\partial^\mu\delta A^\nu + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\partial^\nu\delta A^\mu \\ &= -F_{\mu\nu}\partial^\mu\delta A^\nu \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} &= -\underbrace{\partial^\mu(F_{\mu\nu}\delta A^\nu)}_{=0} + \partial^\mu(F_{\mu\nu})\delta A^\nu \\ &= \partial^\mu(F_{\mu\nu})\delta A^\nu. \end{aligned} \quad (105)$$

Nas manipulações acima, utilizamos seguidas vezes integrações por partes, já que subentendemos estar a densidade Lagrangeana sob integração no espaço-tempo. As derivadas totais são descartadas, como já explicado anteriormente, em função de os campos terem valores fixos nos limites de integração. Seguindo com os cálculos das variações, temos:

$$\delta\left(-\frac{1}{2}\chi_\mu F^{\mu\nu}\chi^\alpha F_{\alpha\nu}\right) = -\frac{1}{2}\{\chi_\mu\chi^\alpha\delta(F^{\mu\nu})F_{\alpha\nu} + \chi_\mu\chi^\alpha F^{\mu\nu}\delta(F_{\alpha\nu})\}. \quad (106)$$

$$\begin{aligned} &= -\chi_\mu\chi^\alpha F_{\alpha\nu}\delta(F^{\mu\nu}) \\ &= -\chi_\mu\chi^\alpha F_{\alpha\nu}\{\partial^\mu\delta A^\nu - \partial^\nu\delta A^\mu\} \\ &= -\chi_\mu\chi^\alpha F_{\alpha\nu}\partial^\mu\delta A^\nu + \chi_\mu\chi^\alpha F_{\alpha\nu}\partial^\nu\delta A^\mu. \end{aligned} \quad (107)$$

Efetuada a troca $\mu \leftrightarrow \nu$ em $\chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha\nu} \partial^\nu \delta A^\mu$ (tal procedimento tem sido recorrentemente utilizado, já que os índices repetidos são chamados “mudos” - índices de somatório), obtemos

$$\begin{aligned}
 \delta \left(-\frac{1}{2} \chi_\mu F^{\mu\nu} \chi^\alpha F_{\alpha\nu} \right) &= (\chi_\nu \chi^\alpha F_{\alpha\nu} - \chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha\nu}) \partial^\mu \delta A^\nu \\
 &= \underbrace{\partial^\mu \{ (\chi_\nu \chi^\alpha F_{\alpha\nu} - \chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha\nu}) \delta A^\nu \}}_{=0} \\
 &\quad - \partial^\mu (\chi_\nu \chi^\alpha F_{\alpha\nu} - \chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha\nu}) \delta A^\nu \\
 &= \partial^\mu (\chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha\nu} - \chi_\nu \chi^\alpha F_{\alpha\nu}) \delta A^\nu.
 \end{aligned} \tag{108}$$

Reescrevendo todos os termos, chegamos à equação de movimento,

$$\partial^\mu (F_{\mu\nu} + \chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha\nu} - \chi_\nu \chi^\alpha F_{\alpha\mu}) = \mu_0 J_\nu. \tag{109}$$

Devemos observar que a equação (109) inclui novas contribuições oriundas da inclusão do termo de violação de Lorentz, as quais não estavam presentes na equação (90).

Agora, a partir da equação (109), escreveremos as equações de Maxwell modificadas. Primeiro, para encontrar a Lei de Gauss, vamos tomar $\nu = 0$, termo a termo, na equação (109).

$$\partial^\mu (F_{\mu 0}) \stackrel{\mu=i}{=} \partial^i F_{i0} = \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E}; \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu (\chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha 0}) &\stackrel{\alpha=j}{=} \partial^\mu (\chi_\mu \chi^j F_{j0}) \\
 &\stackrel{\mu=0,i}{=} \partial^0 (\chi_0 \chi^j F_{j0}) + \partial^i (\chi_i \chi^j F_{j0}) \\
 &= -\frac{1}{c^2} \partial_t [\chi_0 (\chi \cdot \mathbf{E})] - \frac{1}{c} \nabla \cdot [\chi (\chi \cdot \mathbf{E})];
 \end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
 -\partial^\mu (\chi_0 \chi^\alpha F_{\alpha\mu}) &\stackrel{\alpha=0,j}{=} -\partial^\mu (\chi_0 \chi^0 F_{0\mu}) - \partial^\mu (\chi_0 \chi^j F_{j\mu}) \\
 &\stackrel{\mu=0,i}{=} -\partial^i (\chi_0^2 F_{0i}) - \partial^0 (\chi_0 \chi^j F_{j0}) - \partial^i (\chi_0 \chi^j F_{ji}) \\
 &= \frac{1}{c} \nabla \cdot (\chi_0^2 \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \partial_t [\chi_0 (\chi \cdot \mathbf{E})] + \nabla \cdot [\chi_0 (\chi \times \mathbf{B})];
 \end{aligned} \tag{112}$$

$$\mu_0 J_0 = \mu_0 c \rho. \tag{113}$$

Reorganizando todos os termos, obtemos a equação de Gauss modificada

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{114}$$

na qual,

$$\mathbf{D} = \left(1 + \chi_0^2\right) \mathbf{E} + c \chi_0 (\chi \times \mathbf{B}) - \chi (\chi \cdot \mathbf{E}). \tag{115}$$

De maneira semelhante, tomemos $\nu = i$, termo a termo, na equação (109) para obter a equação de Ampère-Maxwell

$$\begin{aligned}\partial^\mu (F_{\mu i}) &\stackrel{\mu=0,j}{=} \partial^0 (F_{0i}) + \partial^j (F_{ji}) \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B};\end{aligned}\quad (116)$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu (\chi_\mu \chi^\alpha F_{\alpha i}) &\stackrel{\alpha=0,k}{=} \partial^\mu (\chi_\mu \chi^0 F_{0i}) + \partial^\mu (\chi_\mu \chi^k F_{ki}) \\ &\stackrel{\mu=0,j}{=} \partial^0 (\chi_0^2 F_{0i}) + \partial^j (\chi_j \chi^0 F_{0i}) \\ &\quad + \partial^0 (\chi_0 \chi^k F_{ki}) + \partial^j (\chi_j \chi^k F_{ki}) \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_t (\chi_0^2 \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \partial_t (\chi_0 \chi \times \mathbf{B}) \\ &\quad + \frac{1}{c} \partial_j (\chi_0 \chi_j E_i); \end{aligned}\quad (117)$$

$$\begin{aligned}-\partial^\mu (\chi_i \chi^\alpha F_{\alpha \mu}) &= -\frac{1}{c} \partial_j (\chi_i \chi_0 E_j) - \frac{1}{c^2} \partial_t (\chi \chi \cdot \mathbf{E}) \\ &\quad - \partial_j (\chi_i (\chi \times \mathbf{B})_j); \end{aligned}\quad (118)$$

$$\mu_0 J_i = -\mu_0 \mathbf{J}_i. \quad (119)$$

Reescrevendo todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t [\underbrace{\mathbf{E} + \chi_0^2 \mathbf{E} + c \chi_0 \chi \times \mathbf{B} - \chi (\chi \cdot \mathbf{E})}_{\mathbf{D}}] + \\ + \partial_j (\chi_i (\chi \times \mathbf{B})_j - \chi_j (\chi \times \mathbf{B})_i) + \frac{1}{c} \partial_j (\chi_0 (\chi_i E_j - \chi_j E_i)) = \mu_0 \mathbf{J}_i.\end{aligned}\quad (120)$$

Note que, para quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$,

$$\partial_j (A_i B_j - A_j B_i) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (121)$$

Logo, a equação de Ampère-Maxwell é dada por

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{D}, \quad (122)$$

em que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \chi \times (\chi \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \chi_0 \chi \times \mathbf{E} \quad (123)$$

e $\mathbf{D}$ é definida em (115). Por fim, conforme discutido na [Subseção 2.3.3](#), as equações homogêneas permanecem inalteradas:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (124)$$

3.2 Modificações nas leis de conservação de Energia e Momento

Da mesma forma que fizemos na [Seção 2.2](#), aplicaremos o mesmo procedimento às nossas equações modificadas pelo parâmetro violador χ^μ . A questão que se coloca agora é: as leis de conservação de energia e momento também serão alteradas? Sim, as modificações nas equações sugerem que tanto a conservação de energia quanto a de momento serão afetadas. Seguiremos os mesmos passos discutidos anteriormente para reproduzir esse novo resultado, adaptando as técnicas já vistas para essa nova estrutura.

Primeiro fazemos o produto escalar da equação de Faraday-Lenz (124) por $\mathbf{B}$ e obtemos

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{B}^2). \quad (125)$$

Agora, fazendo o produto escalar da equação de Ampère-Maxwell (122) por $\mathbf{E}$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{B} + \chi \times (\chi \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \chi_0 \chi \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \\ + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \left(\left(1 + \chi_0^2 \right) \mathbf{E} + c \chi_0 (\chi \times \mathbf{B}) - \chi (\chi \cdot \mathbf{E}) \right) \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (126)$$

Subtraindo a equação (126) de (125), ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\chi \times (\chi \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \chi_0 \chi \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} &= -\frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{B}^2) + \\ - \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \left(\left(1 + \chi_0^2 \right) \mathbf{E} + c \chi_0 (\chi \times \mathbf{B}) - \chi (\chi \cdot \mathbf{E}) \right) \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (127)$$

Trabalharemos termo a termo na equação (127) com o objetivo de obter uma equação com a estrutura apresentada em (33), porém com as modificações introduzidas pelo parâmetro de violação da simetria de Lorentz:

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\chi \times (\chi \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{E} &= -\epsilon_{ijk} \partial_j ([\chi \times (\chi \times \mathbf{B})]_k) E_i \\ &= -\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} \partial_j (\chi_m (\chi \times \mathbf{B})_n) E_i \\ &= -\epsilon_{ijk} \underbrace{\epsilon_{kmn}}_{=\epsilon_{nkm}} \epsilon_{npq} \partial_j (\chi_m \chi_p B_q) E_i \\ &= -\epsilon_{jjk} \{ \delta_{kp} \delta_{mq} - \delta_{kq} \delta_{mp} \} \partial_j (\chi_m \chi_p B_q) E_i \\ &= -\epsilon_{jjk} \{ \partial_j (\chi_m \chi_k B_m) E_i - \partial_j (\chi_m \chi_m B_k) E_i \}. \end{aligned} \quad (128)$$

Observe que

$$-\epsilon_{jjk} \partial_j (\chi_m \chi_k B_m) E_i = \nabla \cdot ((\chi \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{E} \times \chi)) + (\chi \cdot \mathbf{B}) (\chi \cdot \partial_t \mathbf{B}), \quad (129)$$

$$\epsilon_{jjk} \partial_j (\chi_m \chi_m B_k) E_i = \nabla \cdot (\chi^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{E})) - \frac{1}{2} \chi^2 \partial_t (\mathbf{B}^2), \quad (130)$$

$$(\chi \cdot \mathbf{B}) (\chi \cdot \partial_t \mathbf{B}) = \partial_t \left(\frac{1}{2} (\chi \cdot \mathbf{B})^2 \right) - (\chi \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{B} \cdot \partial_t \chi) \quad (131)$$

e

$$\frac{1}{2}\chi^2\partial_t(\mathbf{B}^2) = \partial_t\left(\frac{1}{2}\chi^2\mathbf{B}^2\right) - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\partial_t(\chi^2). \quad (132)$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\chi \times (\chi \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot ((\mathbf{E} \times \chi)\chi \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \mathbf{E})\chi^2) + \\ &+ \frac{1}{2}\partial_t((\chi \cdot \mathbf{B})^2 - \chi^2\mathbf{B}^2) + \mathbf{B}^2\partial_t\left(\frac{1}{2}\chi^2\right) - (\chi \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot \partial_t(\chi)). \end{aligned} \quad (133)$$

O cálculo dos próximos termos segue de forma análoga ao procedimento realizado anteriormente para obter a expressão em (133):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}[\nabla \times (\chi_0\chi \times \mathbf{E})] \cdot \mathbf{E} &= \mu_0\varepsilon_0c\nabla \cdot (\chi_0\mathbf{E} \times (\chi \times \mathbf{E})) + \\ &+ \mu_0\varepsilon_0c\chi_0(\chi \times \mathbf{E}) \cdot \partial_t\mathbf{B}, \end{aligned} \quad (134)$$

$$-\mu_0\varepsilon_0\partial_t\left(\left(1 + \chi_0^2\right)\mathbf{E}\right) \cdot \mathbf{E} = -\partial_t\left(\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0(1 + \chi_0^2)\mathbf{E}^2\right) - \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0\mathbf{E}^2\partial_t(\chi_0^2), \quad (135)$$

$$-c\mu_0\varepsilon_0\partial_t(\chi_0\chi \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = c\mu_0\varepsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_t(\chi_0\chi) + c\mu_0\varepsilon_0\chi_0(\chi \times \mathbf{E}) \cdot \partial_t\mathbf{B}, \quad (136)$$

e

$$\mu_0\varepsilon_0\partial_t(\chi\chi \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = \partial_t\left(\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}(\chi \cdot \mathbf{E})^2\right) + \mu_0\varepsilon_0(\chi \cdot \mathbf{E})(\mathbf{E} \cdot \partial_t\chi). \quad (137)$$

Reescrevendo todos os termos, obtemos uma equação semelhante à equação (33), que sugere uma nova densidade de energia $\tilde{U}$ e um novo vetor de Poynting $\tilde{\mathbf{S}}$, ambos modificados pelos termos de violação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}} &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\partial_t(\chi^2) + \frac{1}{\mu_0}\chi \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} \cdot \partial_t(\chi) \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2\partial_t(\chi_0^2) + c\varepsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_t(\chi_0\chi) \\ &\quad + \varepsilon_0\chi \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} \cdot \partial_t(\chi), \end{aligned} \quad (138)$$

em que

$$\tilde{U} \equiv \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{\mu_0}(\chi \cdot \mathbf{B})^2 - \frac{1}{\mu_0}\chi^2\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0\chi_0^2\mathbf{E}^2 - \varepsilon_0(\chi \cdot \mathbf{E})^2\right) \quad (139)$$

e

$$\tilde{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \chi)\chi \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \times \mathbf{E})\chi^2 + c\varepsilon_0\chi_0\mathbf{E} \times (\chi \times \mathbf{E}). \quad (140)$$

Observe também que, caso o parâmetro violador seja nulo, retornamos aos resultados conhecidos da EDM.

Fazendo agora o produto vetorial entre a equação de Faraday-Lenz (124) e o campo $\mathbf{E}$ e entre a equação de Ampère-Maxwell (122) e o campo $\mathbf{B}$, e combinando-os conforme feito na Seção 2.2, obtemos uma nova equação de continuidade, semelhante à equação (39), que incorpora as densidades de momento e de força de Lorentz ajustadas pelos termos de violação.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial t} + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}} = -\rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \Theta, \quad (141)$$

na qual $\tilde{\mathbf{g}}$ representa a densidade de momento, $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}$ é o tensor de tensões de Maxwell e Θ corresponde à correção na densidade da força de Lorentz, definidos, respectivamente, como:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \frac{1}{\mu_0} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \chi_0^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} + c\chi_0 (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B})(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}) \}, \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \nabla \chi^2 - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot \partial_i \boldsymbol{\chi}) + c\varepsilon_0 (\mathbf{B} \times \mathbf{E})_j \partial_i (\chi_0 \chi_j) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \partial_i (\chi_0^2) - \varepsilon_0 (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{E} \cdot \partial_i \boldsymbol{\chi}), \end{aligned} \quad (143)$$

e

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}_{ij} = & \partial_j \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B})^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \chi_0^2 - \frac{\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E} \right) + \right. \\ & - \varepsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}))_i B_j - c\varepsilon_0 \chi_0 (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E})_i B_j + \\ & \left. - \varepsilon_0 E_i E_j \chi_0^2 - c\varepsilon_0 \chi_0 (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B})_j E_i + \varepsilon_0 (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}) \chi_j E_i \right\}. \end{aligned} \quad (144)$$

Observemos novamente que, ao fazer $\chi_0 \rightarrow 0$ e $\boldsymbol{\chi} \rightarrow 0$, recuperamos os resultados da EDM.

3.2.1 Campo Elétrico de uma carga puntiforme

Considerando uma partícula pontual na origem carregada com carga elétrica q , em unidades gaussianas, obtemos das equações (114), (122) e (124) as seguintes equações:

$$\nabla \cdot [(1 + \chi_0^2) \mathbf{E} + c\chi_0 (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}) - \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E})] = \frac{1}{\varepsilon_0} q \delta^3(\mathbf{r}), \quad (145)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (146)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (147)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{B} + \boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \chi_0 \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E} \right) = \mathbf{0}. \quad (148)$$

em que ε_0 é a permissividade dielétrica do vácuo. Observa-se que o vácuo apresenta permissividade dielétrica e permeabilidade magnética não triviais nas situações em que ocorre quebra da simetria de Lorentz (GAETE; HELAYËL-NETO, 2023a). Tal particularidade deve ser estudada em trabalhos futuros. Sabendo que se trata de uma carga na origem e lembrando que o rotacional

do gradiente de qualquer campo escalar contínuo α é sempre nulo, a partir da equação (148) obtemos

$$\mathbf{B} + \boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \chi_0 \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E} = \nabla \alpha. \quad (149)$$

Mais adiante, veremos que, sem perda de generalidade, podemos assumir α nulo. Como $\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\chi} - \chi^2 \mathbf{B}$, reescrevemos a equação (149) na forma

$$\{[1 - \chi^2] \delta_{ij} + \chi_i \chi_j\} B_j = \left(\nabla \alpha - \frac{\chi_0}{c} \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E} \right)_i. \quad (150)$$

Observemos que a equação (150) pode ser escrita como

$$M_{ij} B_j = P_i, \quad (151)$$

com

$$M_{ij} = [1 - \chi^2] \delta_{ij} + \chi_i \chi_j, \quad (152)$$

e

$$P_i = \left(\nabla \alpha - \frac{\chi_0}{c} \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E} \right)_i. \quad (153)$$

Dessa forma, para determinarmos $\mathbf{B}$, basta calcular M^{-1} , uma vez que $\mathbf{B} = M_{jm}^{-1} P_m$. Como M assume a forma

$$M_{ij} = a \delta_{ij} + b u_i u_j, \quad (154)$$

com $a = [1 - \chi^2]$, $b = 1$ e $\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi}$, segue do Apêndice A que a inversa de M é dada por

$$M_{jm}^{-1} = x \delta_{jm} + y \chi_j \chi_m, \quad (155)$$

em que $x = \frac{1}{a}$ e $y = -\frac{b}{a(a+b\mathbf{u}^2)}$. Ou seja,

$$M_{jm}^{-1} = \frac{1}{1 - \chi^2} \{ \delta_{jm} - \chi_j \chi_m \}. \quad (156)$$

E, portanto,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - \chi^2} \{ \nabla \alpha - \boldsymbol{\chi} (\boldsymbol{\chi} \cdot \nabla \alpha) \} - \frac{\chi_0}{c(1 - \chi^2)} (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E}). \quad (157)$$

Observamos, então, um efeito notável da violação da simetria de Lorentz: a produção de um campo magnético em uma configuração de carga elétrica pontual e estática. Esse fenômeno resulta da interação do campo elétrico gerado pela carga com o campo de fundo que provoca a violação da simetria de Lorentz, algo que não ocorre na eletrodinâmica usual, na qual uma carga estática não produz campo magnético.

Por outro lado, da equação (145), temos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_0} q \delta^3(\mathbf{r}), \quad (158)$$

que nos fornece o resultado

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (159)$$

sendo $\mathbf{D} = \left(1 + \chi_0^2\right) \mathbf{E} + c\chi_0 (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{B}) - \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E})$. Sabendo que $\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{E}) = (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\chi} - \chi^2 \mathbf{E}$ e substituindo o valor de $\mathbf{B}$ encontrado em (157) na equação (159), obtemos

$$\mathbf{E} - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{f} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta}), \quad (160)$$

com

$$f = \frac{1 + \chi_0^2 - \chi^2}{1 - \chi^2}, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{c\chi_0}{1 - \chi^2} (\boldsymbol{\chi} \times \nabla\alpha) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (161)$$

Assim como feito para o campo magnético, escrevemos a equação (160) na forma

$$M_{ij} E_j = \frac{1}{f} (\xi - \theta)_i, \quad (162)$$

com

$$M_{ij} = \delta_{ij} - \chi_i \chi_j. \quad (163)$$

Assim, para obter $\mathbf{E}$, calculamos M^{-1} , já que $\mathbf{E} = \frac{1}{f} M^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\theta})$. Notemos que M tem a forma (154) e, portanto, sua inversa é

$$M_{jm}^{-1} = \delta_{jm} + \frac{1}{(1 - \chi^2)} \chi_j \chi_m. \quad (164)$$

Portanto, o campo elétrico para uma carga puntiforme na origem é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{f} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{c\chi_0}{1 - \chi^2 + \chi_0^2} \boldsymbol{\chi} \times \nabla\alpha + \frac{q}{(1 - \chi^2 + \chi_0^2) 4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (165)$$

em que $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição do ponto onde o campo é calculado, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância da carga ao ponto em questão e $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ é o vetor unitário que aponta da origem (onde está localizada a carga) para o ponto $\mathbf{r}$. Observe que o campo elétrico $\mathbf{E}$, nessa formulação, não é puramente radial, apresentando um desvio do campo central. Isso contrasta com a eletrodinâmica convencional, na qual o campo aponta exclusivamente na direção radial.

No entanto, notemos que o campo elétrico $\mathbf{E}$, encontrado em (165), deve satisfazer a equação (146). Isso implica que o campo $\mathbf{E}$ deve ser derivado de um único potencial escalar ϕ , já que $\nabla \times (-\nabla\phi) = \mathbf{0}$. Analisando o segundo termo, concluímos que é necessário que $\boldsymbol{\chi}$ seja paralelo a $\nabla\alpha$ ou $\nabla\alpha = \mathbf{0}$, para que o rotacional deste termo seja nulo. Tomando $\boldsymbol{\chi} = g_1(r)\hat{\mathbf{r}}$ e $\chi_0 = g_2(r)$ em (165), podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\nabla\alpha = \mathbf{0}$, ou caso contrário $\nabla\alpha$ também teria a direção $\hat{\mathbf{r}}$. Assim, a equação (165) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= f_1(r) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} + f_2(r) g_1(r) \hat{\mathbf{r}} (g_1(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= h(r) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (166)$$

onde $h(r) = f_1(r) + f_2(r)g_1^2(r)$, com $f_1(r) = \frac{1}{f}$, $f_2(r) = \frac{1}{1-\chi^2+\chi_0^2}$. Calculando o rotacional do campo $\mathbf{E}$ encontrado em (166), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla h(r) \times \hat{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{dh(r)}{dr} \hat{r} \times \hat{r} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0. \quad (167)$$

Observe que o campo elétrico é modificado pelo parâmetro de violação. Outro ponto relevante é que, ao fazer $\chi^\mu \rightarrow 0$, o que leva a $h \rightarrow 1$ em (166), conseguimos recuperar a expressão correspondente para a EDM. Dessa forma, obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (168)$$

como esperado, correspondendo ao campo elétrico para uma carga pontual no vácuo sem parâmetros de violação.

3.3 A importância do potencial

Na eletrodinâmica clássica, tanto a força de Lorentz quanto as equações de Maxwell são formuladas diretamente em termos dos campos elétrico e magnético, sem fazer referência explícita aos potenciais escalar e vetor (GRIFFITHS, 1999). Vale notar que a força de Lorentz se anula na ausência desses campos, uma vez que

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (169)$$

em que $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{B}$ é o campo magnético, $\mathbf{v}$ é a velocidade da carga, e q é a carga elétrica. No entanto, em Mecânica Quântica, os potenciais desempenham um papel essencial, já que a Hamiltoniana é escrita em termos de ϕ e $\mathbf{A}$, e não de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\phi. \quad (170)$$

Por um longo tempo, acreditou-se que não poderia haver influência eletromagnética em regiões que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ fossem zero. Mas, em 1959, Aharonov e Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959) demonstraram que o potencial vetor pode afetar o comportamento quântico de uma partícula carregada até mesmo quando ela está passando por uma região onde os campos são nulos. Após a publicação desse artigo, diversos trabalhos passaram a explorar variantes do efeito Aharonov-Bohm, incluindo cenários em que há violação da simetria de Lorentz (de Melo et al., 2024; BORGES; FERRARI, 2022). A pergunta que permanece é: seria possível, em nosso caso, reproduzir o efeito Aharonov-Bohm considerando as modificações introduzidas pela violação da simetria de Lorentz? A princípio, podemos dizer que sim.

Em princípio vamos reescrever as equações (114), (122) e (124) considerando um sistema estacionário, no qual $\chi_0 = 0$ e χ é constante. Assim, temos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} - \chi(\chi \cdot \mathbf{E})) = 0, \quad (171)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (172)$$

e

$$\nabla \times (\mathbf{B} + \chi \times (\chi \times \mathbf{B})) = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (173)$$

Como sabemos que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, a equação (173) fica

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \times [\chi \times (\chi \times (\nabla \times \mathbf{A}))] = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (174)$$

Novamente utilizamos a relação

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (175)$$

que, no calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, nos fornece, para o potencial vetorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A}. \quad (176)$$

Para o segundo termo da equação (174), iniciaremos analisando o termo interno:

$$\chi \times (\nabla \times \mathbf{A}) = [\chi_j \nabla - (\chi \cdot \nabla) \delta_{ij}] A_j = \xi. \quad (177)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\chi \times \xi) &= \chi(\nabla \cdot \xi) - (\chi \cdot \nabla) \xi \\ &= \chi_m \partial_n (\chi_j \partial_n A_j - \chi_j \partial_j A_n) + \\ &\quad - (\chi \cdot \nabla) (\chi_j \partial_m A_j - \chi_j \partial_j A_m) \\ &= \chi \nabla^2 (\chi \cdot \mathbf{A}) - \underbrace{\chi_m \chi_j \partial_j \partial_n A_n}_{=0, \nabla \cdot \mathbf{A}=0} + \\ &\quad - (\chi \cdot \nabla) \nabla (\chi \cdot \mathbf{A}) + (\chi \cdot \mathbf{A})^2 \mathbf{A} \\ &= \chi \nabla^2 (\chi \cdot \mathbf{A}) - (\chi \cdot \nabla) \nabla (\chi \cdot \mathbf{A}) + (\chi \cdot \mathbf{A})^2 \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (178)$$

Reescrevendo todos os termos, obtemos

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \chi \nabla^2 (\chi \cdot \mathbf{A}) - (\chi \cdot \nabla) \nabla (\chi \cdot \mathbf{A}) + (\chi \cdot \mathbf{A})^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (179)$$

Reescrevendo a equação (179) em sua forma matricial, temos

$$M_{ij} A_j = \mu_0 J_i, \quad (180)$$

na qual

$$M_{ij} = \left((\chi \cdot \nabla)^2 - \nabla^2 \right) \delta_{ij} + \left(\chi_i \nabla^2 - (\chi \cdot \nabla) \nabla_i \right) \chi_j. \quad (181)$$

Para determinarmos A , precisaremos encontrar a inversa de M , dado que $A = \mu_0 M^{-1} \mathbf{J}$. No entanto, é importante observar que M é uma matriz composta por operadores. Para simplificar os cálculos, transformaremos essa matriz, do espaço das posições para o espaço dos momentos via Transformada de Fourier. Nesse espaço, utilizamos as seguintes substituições:

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \rightarrow -\mathbf{k}^2 = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}. \quad (182)$$

Assim, a matriz M pode ser reescrita como

$$M_{ij} = [\mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2] \delta_{ij} + [(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k}) k_i - \chi_i \mathbf{k}^2] \chi_j. \quad (183)$$

Notemos que a matriz M tem a forma

$$M_{ij} = a \delta_{ij} + b u_i v_j, \quad (184)$$

na qual $a = \mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2$, $b = 1$, $u_i = (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k}) k_i - \chi_i \mathbf{k}^2$ e $v_j = \chi_j$. A matriz (184) possui inversa dada por

$$M_{jk}^{-1} = x \delta_{jk} + y u_j v_k, \quad (185)$$

em que

$$x = \frac{1}{a} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2} \quad (186)$$

e

$$y = \frac{-b}{a[a + b \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}]} = -\frac{1}{[\mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2] [\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\chi}^2 \mathbf{k}^2]}. \quad (187)$$

Portanto, a inversa da matriz M é dada por

$$M_{jk}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2} \left\{ \delta_{jk} - \frac{1}{[\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\chi}^2 \mathbf{k}^2]} [(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k}) k_j - \chi_j \mathbf{k}^2] \chi_k \right\}. \quad (188)$$

Com isso, o potencial vetor A é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2} \left\{ \tilde{\mathbf{J}} - \frac{\boldsymbol{\chi} \cdot \tilde{\mathbf{J}}}{\mathbf{k}^2 [1 - \boldsymbol{\chi}^2]} [(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \boldsymbol{\chi}] \right\}, \quad (189)$$

em que $\tilde{\mathbf{J}}$ é a densidade de corrente no espaço dos momentos. Para avançarmos em nossa análise, é necessário determinar $\tilde{\mathbf{J}}$ nas condições de um solenoide infinito e idealmente impermeável, que confina o campo magnético completamente em seu interior para, posteriormente, estudarmos como é modificado o efeito Aharonov-Bohm. Retomaremos essa discussão no [Capítulo 6](#).

No próximo capítulo, exploraremos uma eletrodinâmica não linear que surge quando decompos o campo magnético, considerando a interação do fóton com um campo magnético de fundo. Essa abordagem permite descrever fenômenos que vão além da eletrodinâmica clássica de Maxwell, sendo particularmente relevante em contextos onde a presença de campos magnéticos intensos geram contribuições adicionais, como em meios materiais complexos, regimes de altas intensidades de campo ou modificações associadas à violação de simetria de Lorentz, tema que será abordado em maior detalhe no [Capítulo 5](#).

4 Formulação da Lagrangeana Não Linear para Eletrodinâmica

Neste capítulo, veremos que uma eletrodinâmica não linear apresenta propriedades de propagação de ondas distintas daquelas encontradas na teoria de Maxwell. Isso ocorre porque, no contexto não linear, a velocidade de propagação pode ser alterada na presença de um campo eletromagnético externo, devido à auto interação (NEVES et al., 2021).

O capítulo está dividido em quatro seções. Na [Seção 4.1](#) descrevemos a eletrodinâmica não linear resultante de uma Lagrangeana arbitrária, escrita exclusivamente em função dos invariantes de calibre. A [Seção 4.2](#) foi subdividida em três subseções: na [Subseção 4.2.1](#), construímos a Lagrangeana mais geral em função dos invariantes de Lorentz e de calibre; na [Subseção 4.2.2](#), abordamos as equações de campo mais gerais em função de um campo eletromagnético externo não homogêneo e não constante no tempo; e na [Subseção 4.2.3](#), derivamos as relações de dispersão para o caso em que o campo de fundo é puramente magnético, homogêneo e constante no tempo. Por fim, na [Seção 4.3](#), aplicamos os resultados obtidos em alguns modelos de eletrodinâmica não lineares conhecidos na literatura.

A partir de agora, trabalharemos no sistema de unidades naturais, em que $\hbar = c = 1$ e $4\pi\epsilon_0 = 1$. Neste cenário, consideraremos que os campos elétrico e magnético possuem dimensão de energia ao quadrado. Além disso, utilizaremos as seguintes conversões para relacionar unidades usuais ao sistema natural: $1\text{Volt/m} = 2.27 \times 10^{-24}\text{GeV}^2$ e $1\text{ T} = 6.8 \times 10^{-16}\text{GeV}^2$.

4.1 Lagrangeana dependente de um único invariante

A forma mais direta de introduzir não linearidade nas equações de campo eletromagnético é por meio do formalismo Lagrangeano. Começamos nossa investigação estudando a situação mais simples possível, na qual a teoria não linear surge de uma função Lagrangeana arbitrária que depende somente de um invariante de calibre e satisfaz equações diferenciais envolvendo, no máximo, derivadas de segunda ordem no campo propagante do fóton.

Começamos tal descrição, definindo uma Lagrangeana $\mathcal{L}_{nl} = \mathcal{L}(\mathcal{F})$, em que $\mathcal{F}$ é o invariante de calibre definido por

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0^2 - \mathbf{B}_0^2). \quad (190)$$

A invariância de calibre é garantida, já que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, cujas componentes são do tipo $(-E_0^i, -\epsilon^{ijk}B_0^k)$. No nosso estudo, escrevemos o potencial eletromagnético na forma $A^\mu = a^\mu + A_B^\mu$, dividindo o campo eletromagnético na parte do fóton de interesse, a^μ , e o potencial do campo de fundo A_B^μ . Essa decomposição nos dá, como consequência, o tensor $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + F_B^{\mu\nu}$,

sendo $f^{\mu\nu} = \partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu$, de componentes $(-e^i, -\epsilon^{ijk} b^k)$, o tensor de intensidade do campo eletromagnético da excitação em propagação, enquanto $F_B^{\mu\nu} = \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu$, de componentes $(-E^i, -\epsilon^{ijk} B^k)$, corresponde aos campos elétrico e magnético de fundo. Enfatizando, temos $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_B$ e $\mathbf{E} = \mathbf{e} + \mathbf{E}_B$, onde $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$ representam o campo eletromagnético do fóton, enquanto $\mathbf{E}_B$ e $\mathbf{B}_B$ correspondem ao campo eletromagnético de fundo. O objetivo da introdução de um campo de fundo no estudo de modelos não lineares de eletrodinâmica é investigar como a presença de campos elétricos e magnéticos externos afeta a propagação de ondas eletromagnéticas e a estrutura do vácuo. Além disso, a presença de campos de fundo intensos pode levar a fenômenos como birrefringência e dicroísmo do vácuo (NEVES et al., 2021).

Sendo assim, vamos expandir $\mathcal{L}_{nl}$ até segunda ordem no campo propagante a^μ em torno do campo de fundo eletromagnético, descartando os termos de ordens superiores. Antes de mais nada, notemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -\frac{1}{4}F^2 \\ &= -\frac{1}{4}(F_B^{\mu\nu} + f^{\mu\nu})^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_B^2 - \frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2 \\ &= \mathcal{F}_B + \delta f,\end{aligned}\tag{191}$$

com $\delta f = -\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2$.

Fazendo a expansão da densidade Lagrangeana, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{nl}^{(2)}(\mathcal{F}_B + \delta f) &\cong \mathcal{L}_{nl}(\mathcal{F}_B) + \delta f \cdot \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{E,B} + \\ &+ \frac{1}{2}(\delta f)^2 \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_{E,B},\end{aligned}\tag{192}$$

na qual definiremos

$$c_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{E,B}, \quad d_1 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_{E,B}.\tag{193}$$

Relembrando que $\delta f = -\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2$ e que o termo $\mathcal{L}_{nl}(\mathcal{F}_B)$ não altera a equação de movimento para a^μ , podemos escrever

$$\mathcal{L}_{nl}^{(2)} = c_1 \left(-\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2 \right) + \frac{1}{2}d_1 \left(-\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2 \right)^2.\tag{194}$$

Coletando apenas os termos quadráticos, ficamos com

$$\mathcal{L}_{nl}^{(2)} = -\frac{1}{4}c_1 f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}c_1 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{8}d_1 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} F_B^{\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda}.\tag{195}$$

Finalizando, o termo de interação do campo abeliano de calibre é facilmente dado por

$$-J_\mu A^\mu = -J_\mu [a^\mu + A_B^\mu] = -J_\mu a^\mu - J_\mu A_B^\mu.$$

Assim, acrescentando os termos de interação, a densidade Lagrangeana expandida até a segunda ordem pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L}_{nl}^{(2)} = -\frac{1}{4}c_1 f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}c_1 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{8}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\mu\nu} f_{\kappa\lambda} - J_\mu a^\mu - J_\mu A_B^\mu, \quad (196)$$

na qual o tensor de fundo $T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} \equiv d_1 F_B^{\mu\nu} F_B^{\kappa\lambda}$ é antissimétrico sob a troca $\mu \leftrightarrow \nu$ ou $\kappa \leftrightarrow \lambda$, e simétrico na dupla troca $\mu\nu \leftrightarrow \kappa\lambda$.

O próximo passo é determinar as equações de campo por meio do princípio de mínima ação em relação ao campo a^μ . Abaixo, tomamos separadamente a variação dos termos da equação (196).

$$\begin{aligned} \delta \left[-\frac{1}{4}c_1 f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right] &= -\frac{1}{4}c_1 \left[(\delta f^{\mu\nu}) f_{\mu\nu} + f^{\mu\nu} (\delta f_{\mu\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{2}c_1 f^{\mu\nu} (\delta [\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu]) \\ &= -\frac{1}{2}c_1 (f^{\mu\nu} \delta [\partial_\mu a_\nu] - f^{\mu\nu} \delta [\partial_\nu a_\mu]) \\ &= -c_1 f^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta a_\nu) \\ &= -\partial_\mu (c_1 f^{\mu\nu} \delta a_\nu) + \delta a_\nu \partial_\mu (c_1 f^{\mu\nu}) \\ &= \partial_\mu (c_1 f^{\mu\nu}) \delta a_\nu; \end{aligned} \quad (197)$$

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{1}{8}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\mu\nu} f_{\kappa\lambda} \right] &= \frac{1}{8}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} (\delta f_{\mu\nu}) f_{\kappa\lambda} + \frac{1}{8}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\mu\nu} (\delta f_{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} (\delta f_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} [\partial_\mu \delta a_\nu - \partial_\nu \delta a_\mu] \\ &= \frac{1}{2}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} \partial_\mu \delta a_\nu \\ &= -\partial_\mu \left(\frac{1}{2}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} \right) \delta a_\nu; \end{aligned} \quad (198)$$

e

$$\delta [-c_1 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu}] = \partial_\mu (c_1 F_B^{\mu\nu}) \delta a_\nu. \quad (199)$$

Reescrevendo todos os termos, a equação de movimento fica dada por

$$\partial_\mu \left[c_1 f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_B^{\mu\nu\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} \right] = -\partial_\mu (c_1 F_B^{\mu\nu}) + J^\nu. \quad (200)$$

Notemos que o termo $\partial_\mu (c_1 F_B^{\mu\nu})$ presente do lado direito da equação faz o papel de uma corrente para o próprio campo eletromagnético.

Vamos, agora, escrever os componentes dos tensores eletromagnéticos em termos dos campos elétricos e magnéticos do fóton, $(\mathbf{e}, \mathbf{b})$, e do campo externo homogêneo e constante no

tempo, $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, supondo a ausência de cargas elétricas, $(\rho = 0)$, e de correntes, $(\mathbf{J} = \mathbf{0})$. Diante disto, notemos que, como os coeficientes c_1 e d_1 dependem do campo de fundo, eles são também homogêneos e constantes.

Antes de nosso desenvolvimento, faremos algumas considerações importantes acerca dos componentes da equação (200). Sabemos que $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$ e $F_{0i} = E_i$, assim como $f_{ij} = -\varepsilon_{ijk} b_k$ e $f_{0i} = e_i$. Então:

- i) $T_B^{0i0j} = d_1 E_i E_j$,
- ii) $T_B^{0imn} = \varepsilon_{mnr} d_1 E_i B_r$,
- iii) $T_B^{ijmm} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnr} d_1 B_k B_r$.

Com essas informações, fazamos $\nu = 0$, termo a termo, em (200) e obtenhamos a equação modificada de Gauss:

$$\partial_\mu \left(c_1 f^{\mu 0} \right) \stackrel{\mu=0}{=} \partial_i \left(c_1 f^{i0} \right) = \partial_i (c_1 f_{0i}) = c_1 \nabla \cdot \mathbf{e}; \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(-\frac{1}{2} T_B^{\mu 0 \kappa \lambda} f_{\kappa \lambda} \right) & \stackrel{\mu=0}{=} \partial_i \left(-\frac{1}{2} T_B^{i0 \kappa \lambda} f_{\kappa \lambda} \right) \\ & \stackrel{\kappa=0, m}{=} \partial_i \left(\frac{1}{2} T_B^{i0 0 \lambda} f_{0 \lambda} \right) + \partial_i \left(\frac{1}{2} T_B^{i0 m \lambda} f_{m \lambda} \right) \\ & \stackrel{\lambda=0, n}{=} \partial_i \left(\frac{1}{2} T_B^{i0 0 n} f_{0 n} \right) + \partial_i \left(\frac{1}{2} T_B^{i0 m 0} f_{m 0} \right) + \partial_i \left(\frac{1}{2} T_B^{i0 m n} f_{m n} \right) \\ & \stackrel{(*)}{=} \partial_i \left(T_B^{i0 0 j} f_{0 j} \right) + \partial_i \left(\frac{1}{2} T_B^{i0 m n} f_{m n} \right) \\ & = \partial_i \left(d_1 E_i E_j e_j \right) - \partial_i \left(\frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{mnr} \varepsilon_{mnp}}_{=2\delta_{rp}} d_1 E_i B_r b_p \right) \\ & = d_1 \mathbf{E} \cdot \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (202)$$

Reescrevendo todos os termos, obtemos a equação modificada para a lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{e} + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} \cdot \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) = 0. \quad (203)$$

Para obtermos a equação de Ampère-Maxwell, tomamos o índice espacial $\nu = i$, termo a termo, na equação (200), da qual obtém-se

$$\begin{aligned} \partial_\mu (c_1 f^{\mu i}) & \stackrel{\mu=0, j}{=} \partial_0 (c_1 f^{0i}) + \partial_j (c_1 f^{ji}) \\ & = -\partial_0 (c_1 f_{0i}) - \partial_j (c_1 f_{ij}) \\ & = -\partial_0 (c_1 e_i) + \varepsilon_{ijk} \partial_j (c_1 b_k) \\ & = -c_1 \partial_t \mathbf{e} + c_1 \nabla \times \mathbf{b}; \end{aligned} \quad (204)$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(-\frac{1}{2} T_B^{\mu i \kappa \lambda} f_{\kappa \lambda} \right) & \stackrel{\mu=0, j}{=} \partial_0 \left(-\frac{1}{2} T_B^{0 i \kappa \lambda} f_{\kappa \lambda} \right) + \partial_j \left(-\frac{1}{2} T_B^{j i \kappa \lambda} f_{\kappa \lambda} \right) \\
& \stackrel{\kappa=0, m}{=} \partial_0 \left(-\frac{1}{2} T_B^{0 i 0 \lambda} f_{0 \lambda} \right) + \partial_0 \left(-\frac{1}{2} T_B^{0 i m \lambda} f_{m \lambda} \right) \\
& + \partial_j \left(-\frac{1}{2} T_B^{j i 0 \lambda} f_{0 \lambda} \right) + \partial_j \left(-\frac{1}{2} T_B^{j i m \lambda} f_{m \lambda} \right) \\
& \stackrel{\lambda=0, n}{=} \partial_0 \left(-\frac{1}{2} T_B^{0 i 0 n} f_{0 n} \right) + \partial_0 \left(-\frac{1}{2} T_B^{0 i m 0} f_{m 0} \right) \\
& + \partial_0 \left(-\frac{1}{2} T_B^{0 i m n} f_{m n} \right) + \partial_j \left(-\frac{1}{2} T_B^{j i 0 n} f_{0 n} \right) \\
& + \partial_j \left(-\frac{1}{2} T_B^{j i m 0} f_{m 0} \right) + \partial_j \left(-\frac{1}{2} T_B^{j i m n} f_{m n} \right) \\
& \stackrel{(*)}{=} -\partial_0 \left(T_B^{0 i 0 j} f_{0 j} \right) - \frac{1}{2} \partial_0 \left(T_B^{0 i m n} f_{m n} \right) \\
& + \partial_j \left(T_B^{0 n i j} f_{0 n} \right) + \frac{1}{2} \partial_j \left(T_B^{i j m n} f_{m n} \right) \\
& = -\partial_0 \left(d_1 E_i E_j e_j \right) - \frac{1}{2} \partial_0 \left(d_1 E_1 \underbrace{\varepsilon_{m n r} \varepsilon_{m n \sigma}}_{=2\delta_{r\sigma}} B_r b_\sigma \right) \\
& + \partial_j \left(d_1 E_n \varepsilon_{i j r} B_r e_n \right) - \frac{1}{2} \partial_j \left(d_1 \varepsilon_{i j k} B_k \underbrace{\varepsilon_{m n \rho} \varepsilon_{m n \sigma}}_{=2\delta_{\rho\sigma}} B_\rho b_\sigma \right) \\
& = d_2 E \partial_t (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}) + d_2 \mathbf{B} \times \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}). \quad (205)
\end{aligned}$$

Assim, reescrevendo todos os termos, obtemos a equação modificada para a lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{b} + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B} \times \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}) = \partial_t (\mathbf{e}) + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}). \quad (206)$$

Como a identidade de Bianchi permanece válida e o campo de fundo é homogêneo e constante, as duas equações homogêneas usuais se mantêm como na eletrodinâmica de Maxwell, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (207)$$

Vale a pena observar que nas equações (201), (202), (204) e (205) usamos o fato de $f^{\mu\nu}$ ser antissimétrico, e como $\nu = 0$, tem-se $\mu = i$ pois caso $\mu = 0$ teríamos $f^{00} = 0$. Além disso, temos que $\partial_\mu (c_1 F_B^{\mu\nu}) = 0$ já que nosso campo de fundo é homogêneo e constante no tempo. Também sabemos que o tensor $T_B^{\mu\nu\kappa\lambda}$ é antissimétrico sob as trocas $\mu \leftrightarrow \nu$ ou $\kappa \leftrightarrow \lambda$, e simétrico na dupla troca $\mu\nu \leftrightarrow \kappa\lambda$. Por fim, em (*) fizemos uma troca dos índices mudos, $n \leftrightarrow j$ e $m \leftrightarrow j$, para concluir que $\partial_i (T_B^{0i0n} f_{0n}) = \partial_i (T_B^{0im0} f_{m0}) = \partial_i (T_B^{0i0j} f_{0j})$.

O próximo passo é a obtenção das relações de dispersão e a sua análise. Com este fim, substituímos as soluções de onda plana, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, nas equações de Maxwell. Começamos pela equação (207):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} &= \varepsilon_{ijk} \partial_j e_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(e_{0k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right) \\ &= i \varepsilon_{ijk} k_j e_k \\ &= i \mathbf{k} \times \mathbf{e} \end{aligned} \quad (208)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{b} &= \partial_t \left(\mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right) = -i\omega \mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ &= -i\omega \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (209)$$

Assim, obtemos

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{e}. \quad (210)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (210), construímos a relação

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{\omega} \{ \mathbf{k} (\nabla \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{e} \}. \quad (211)$$

Assim, substituindo as equações (203), (206) e (210) em (211), obtemos uma equação contendo somente o campo elétrico do fóton ($\mathbf{e}$), dada por

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{e} + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} \partial_t \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \left(\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{e} \right) \right) - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B} \times \nabla \left(\mathbf{B} \cdot \left(\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{e} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} \right) = \\ = -\frac{1}{\omega} \left\{ \mathbf{k} \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} \cdot \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \left(\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{e} \right) \right) + (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{e} \right\}. \end{aligned} \quad (212)$$

Utilizando novamente a solução de onda plana, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, termo a termo, na equação (212), obtemos

$$\left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \mathbf{e}_0 + \frac{d_1}{c_1} \omega \mathbf{E} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_0) - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B} \times \mathbf{k} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_0) + \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_0) = \mathbf{0}, \quad (213)$$

em que $\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{k}$. Note-se que podemos escrever a equação (213) na forma matricial

$$\left\{ \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \delta_{ij} + \frac{d_1}{c_1} \Omega_i \Omega_j + k_i k_j \right\} e_{0j} = 0. \quad (214)$$

Ou seja,

$$M_{ij} e_{0j} = 0, \quad (215)$$

em que e_{0j} ($j = 1, 2, 3$) são os componentes da amplitude do campo elétrico do fóton, $\mathbf{e}_0$. A matriz M_{ij} pode ser escrita na forma,

$$M_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \beta u_i u_j + \gamma v_i v_j, \quad (216)$$

na qual os coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, u_i$ e v_i são definidos por

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^2 - \mathbf{k}^2, \beta = \frac{d_1}{c_1}, \gamma = 1 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{\Omega}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (217)$$

A equação matricial (215) tem soluções não triviais somente se a matriz M for singular, ou seja, $\det M = 0$. O determinante da matriz (255), que será discutido no Apêndice A, é dado por

$$\det M = \alpha [(\alpha + \beta \mathbf{u}^2)(\alpha + \gamma \mathbf{v}^2) - \beta \gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2] = 0. \quad (218)$$

Usando os coeficientes e vetores definidos acima, obtemos a equação

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left\{ \omega^2 \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{\Omega}^2 \right) - \frac{d_1}{c_1} \omega^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})^2 \right\} = 0. \quad (219)$$

Observe que a solução do caso linear, $\omega = |\mathbf{k}|$, também é uma das soluções da equação (219). Uma outra solução ocorre quando $\omega = 0$. A outra solução é a raiz positiva obtida do polinômio resultante da equação (219) quando $\omega \neq |\mathbf{k}|$ e $\omega \neq 0$, ou seja

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0, \quad (220)$$

em que

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E}^2, \\ b &= 2 \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}), \\ c &= -\mathbf{k}^2 + \frac{d_1}{c_1} [(\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})^2]. \end{aligned} \quad (221)$$

Assim, a outra frequência é dada por

$$\omega = \frac{d_1 \mathbf{E} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) + c_1 \sqrt{\Delta}}{c_1 + d_1 \mathbf{E}^2}, \quad (222)$$

na qual

$$\Delta = \left[\frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) \right]^2 - \left(1 + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{E}^2 \right) \left[-\mathbf{k}^2 + \frac{d_1}{c_1} [(\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k})^2] \right]. \quad (223)$$

Para o caso em que temos apenas um campo elétrico, a equação (222) resulta em

$$\omega_{\mathbf{B}=\mathbf{0}}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_1 \mathbf{E}^2}}. \quad (224)$$

Analogamente, para o caso puramente magnético, obtemos

$$\omega_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1}}. \quad (225)$$

Vale destacar que as relações de dispersão obtidas dependem explicitamente dos campos de fundo, conforme observado em estudos anteriores, como os apresentados em (GURALNIK et al., 2001; CARVALHO et al., 2019).

Veremos a seguir um modelo o mais geral possível, que contempla os dois invariantes (de Lorentz e de calibre).

4.2 Modelo geral em eletrodinâmica não linear

Assim como desenvolvido na Seção 4.1, vamos começar construindo uma densidade Lagrangeana geral. Nas subseções seguintes, encontraremos as relações de dispersão, as velocidades de grupo e de fase para o caso puramente magnético.

4.2.1 Construção da Lagrangeana Geral

Vamos tratar agora do caso mais geral, começando pela descrição da Lagrangeana, $\mathcal{L}_{nl}$, escrita como uma função dos bilineares invariantes de Lorentz e de calibre, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ (BIALYNICKA-BIRULA; BIALYNICKI-BIRULA, 1970; BOILLAT, 1970; NEVES et al., 2021), definidos na devida ordem por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0^2 - \mathbf{B}_0^2), \\ \mathcal{G} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0, \end{aligned} \quad (226)$$

em que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = (-E_0^i, -\epsilon^{ijk}B_0^k)$ é o tensor eletromagnético e $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = (-B_0^i, \epsilon^{ijk}E_0^k)$ é o seu tensor dual correspondente, que satisfaz a identidade de Bianchi, $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Assim como na Seção 4.1, vamos decompor o potencial eletromagnético na forma $A^\mu = a^\mu + A_B^\mu$, dividindo o campo eletromagnético na parte do fóton, a^μ , e o potencial do campo de fundo, A_B^μ . Como consequência desta decomposição, o tensor $F^{\mu\nu}$ é escrito como $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + F_B^{\mu\nu}$, em que $f^{\mu\nu} = \partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu = (-e^i, -\epsilon^{ijk}b^k)$ é o tensor de intensidade do campo eletromagnético da excitação em propagação, enquanto $F_B^{\mu\nu} = \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu = (-E^i, -\epsilon^{ijk}B^k)$ corresponde ao tensor associado aos campos elétrico e magnético de fundo. Esses campos, em geral, dependem das coordenadas do espaço-tempo. Fazendo a expansão de $\mathcal{L}_{nl}$ até segunda ordem no campo propagante a^μ em torno do campo de fundo eletromagnético, vamos obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{nl}^{(2)}(\mathcal{F}_B + \delta f, \mathcal{G}_B + \delta g) &\cong \mathcal{L}_{nl}(\mathcal{F}_B, \mathcal{G}_B) + \delta f \cdot \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{E,B} + \delta g \cdot \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{G}} \right|_{E,B} \\
&+ \frac{1}{2} (\delta f)^2 \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_{E,B} + \frac{1}{2} (\delta g)^2 \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{G}^2} \right|_{E,B} \\
&+ \delta f \cdot \delta g \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \right|_{E,B}, \tag{227}
\end{aligned}$$

Repare que, assim como definimos anteriormente os coeficientes c_1 e d_1 em (193), agora complementamos as definições com os seguintes coeficientes:

$$c_2 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{G}} \right|_{E,B}, \quad d_2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{G}^2} \right|_{E,B} \quad \text{e} \quad d_3 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{nl}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \right|_{E,B}. \tag{228}$$

Observe que tais coeficientes dependem dos campos de fundo externos e que o termo $\mathcal{L}_{nl}(\mathcal{F}_B, \mathcal{G}_B)$ não altera a equação de movimento para a^μ . Recordando de (191) que $\delta f = -\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2$, e analogamente que $\delta g = -\frac{1}{2}\tilde{F}_B \cdot \tilde{f} - \frac{1}{4}\tilde{f} \cdot \tilde{f}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{nl}^{(2)} &= c_1 \left(-\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2 \right) + c_2 \left(-\frac{1}{2}\tilde{F}_B \cdot \tilde{f} - \frac{1}{4}\tilde{f} \cdot \tilde{f} \right) \\
&+ \frac{1}{2}d_1 \left(-\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2 \right)^2 + \frac{1}{2}d_2 \left(-\frac{1}{2}\tilde{F}_B \cdot \tilde{f} - \frac{1}{4}\tilde{f} \cdot \tilde{f} \right)^2 \\
&+ d_3 \left(-\frac{1}{2}F_B \cdot f - \frac{1}{4}f^2 \right) \left(-\frac{1}{2}\tilde{F}_B \cdot \tilde{f} - \frac{1}{4}\tilde{f} \cdot \tilde{f} \right). \tag{229}
\end{aligned}$$

Coletando apenas os termos quadráticos, teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{nl}^{(2)} &= -\frac{1}{4}c_1 f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}c_2 f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}c_1 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}c_2 \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{8}d_1 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} F_B^{\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} + \frac{1}{8}d_2 \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \tilde{F}_B^{\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda} + \frac{1}{4}d_3 F_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \tilde{F}_B^{\kappa\lambda} f_{\kappa\lambda}. \tag{230}
\end{aligned}$$

Por fim, o termo de interação do campo abeliano de calibre é dado por

$$-J_\mu A^\mu = -J_\mu [a^\mu + A_B^\mu] = -J_\mu a^\mu - J_\mu A_B^\mu.$$

Assim, reescrevendo a equação (230), obtemos a Lagrangeana geral quadrática (NEVES et al., 2021):

$$\mathcal{L}_{nl}^{(2)} = -\frac{1}{4}c_1 f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}c_2 f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{8}Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\mu\nu} f^{\kappa\lambda} - J_\mu a^\mu - J_\mu A_B^\mu, \tag{231}$$

onde os tensores de fundo são definidos como

$$G_{B\mu\nu} = c_1 F_{B\mu\nu} + c_2 \tilde{F}_{B\mu\nu}, \tag{232}$$

e

$$Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} = d_1 F_{B\mu\nu} F_{B\kappa\lambda} + d_2 \tilde{F}_{B\mu\nu} \tilde{F}_{B\kappa\lambda} + d_3 F_{B\mu\nu} \tilde{F}_{B\kappa\lambda} + d_3 \tilde{F}_{B\mu\nu} F_{B\kappa\lambda}. \tag{233}$$

Observe que, por construção, $G_{B\mu\nu} = -G_{B\nu\mu}$ e o tensor $Q_{B\mu\nu\kappa\lambda}$ é antissimétrico sob a troca $\mu \leftrightarrow \nu$ ou $\kappa \leftrightarrow \lambda$, e simétrico em $\mu\nu \leftrightarrow \kappa\lambda$.

4.2.2 Equações de campo

Agora, calculemos as equações de campo usando o princípio de mínima ação com a variação em relação a a^μ . Para isso, analisaremos cada termo da equação (231) separadamente. Tomando a sua variação, temos que

$$\begin{aligned}\delta \left[-\frac{1}{4} c_1 f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right] &= -\frac{1}{4} c_1 [(\delta f^{\mu\nu}) f_{\mu\nu} + f^{\mu\nu} (\delta f_{\mu\nu})] \\ &= -\frac{1}{2} c_1 f^{\mu\nu} (\delta [\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu]) = \delta a_\nu \partial_\mu (c_1 f^{\mu\nu}).\end{aligned}\quad (234)$$

Analogamente,

$$\delta \left[-\frac{1}{4} c_2 f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} \right] = \delta a_\nu \partial_\mu (c_2 \tilde{f}^{\mu\nu}) \quad (235)$$

e

$$\delta \left[-\frac{1}{2} G_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right] = \delta a_\nu \partial_\mu (G_B^{\mu\nu}). \quad (236)$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\delta \left[\frac{1}{8} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\mu\nu} f^{\kappa\lambda} \right] &= \frac{1}{8} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} (\delta f^{\mu\nu}) f^{\kappa\lambda} + \frac{1}{8} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\mu\nu} (\delta f^{\kappa\lambda}) \\ &= \frac{1}{4} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\kappa\lambda} (\delta f^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\kappa\lambda} [\partial^\mu \delta a^\nu - \partial^\nu \delta a^\mu] \\ &= \frac{1}{2} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\kappa\lambda} \partial^\mu \delta a^\nu \\ &= -\delta a^\nu \partial^\mu \left(\frac{1}{2} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\kappa\lambda} \right).\end{aligned}\quad (237)$$

Reescrevendo todos os termos, a equação de movimento fica dada por

$$\partial^\mu \left[c_1 f_{\mu\nu} + c_2 \tilde{f}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\kappa\lambda} \right] = -\partial^\mu G_{B\mu\nu} + J^\nu. \quad (238)$$

Vamos agora, escrever os componentes dos tensores de intensidade de campo em termos dos campos elétricos e magnéticos do fóton ($\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$), dos campos externos homogêneos e constantes no tempo, ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$), e dos componentes do quadrivetor $\mathbf{J}^\mu = (\rho, \mathbf{J})$. Antes de nosso desenvolvimento, faremos algumas considerações importantes acerca dos componentes da equação (238). A princípio, sabemos que $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$, $F_{0i} = E_i$, $\tilde{F}_{0i} = B_i$, $\tilde{F}_{ij} = \varepsilon_{ijm} E_m$, assim como também $f_{ij} = -\varepsilon_{ijk} b_k$, $f_{0i} = e_i$, $\tilde{f}_{0i} = b_i$ e $\tilde{f}_{ij} = \varepsilon_{ijm} e_m$. Então:

- i) $G_{B0i} = c_1 E_i + c_2 B_i$; $G_{Bij} = \varepsilon_{ijk} \{c_2 E_k - c_1 B_k\}$,
- ii) $Q_{B0ijk} = \varepsilon_{jkm} \{-d_1 E_i B_m + d_2 B_i E_m + d_3 E_i E_m - d_3 B_i B_m\}$,
- iii) $Q_{B0i0j} = d_1 E_i E_j + d_2 B_i B_j + d_3 E_i B_j + d_3 B_i E_j$,

$$\text{iv)} \quad Q_{B_{ijmm}} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mmr} \{d_1 B_k B_r + d_2 E_k E_r - d_3 B_k E_r - d_3 E_k B_r\}.$$

Sendo assim, vamos agora fazer $\nu = 0$ termo a termo em (238) e obter a equação modificada de Gauss:

$$\partial^\mu (c_1 f_{\mu 0}) \stackrel{\mu=i}{=} \partial^i (c_1 f_{i0}) = \partial_i (c_1 f_{0i}) = c_1 \nabla \cdot \mathbf{e}. \quad (239)$$

Analogamente,

$$\partial^\mu [c_2 \tilde{f}_{\mu 0}] \stackrel{\mu=i}{=} \partial_i [c_2 \tilde{f}_{0i}] = c_2 \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (240)$$

e

$$\partial^\mu G_{B_{\mu 0}} \stackrel{\mu=i}{=} \partial_i G_{B_{0i}} = \partial_i (c_1 E_i + c_2 B_i) = 0, \quad (241)$$

já que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são constantes.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \partial^\mu (Q_{B_{\mu 0 \kappa \lambda}} f^{\kappa \lambda}) & \stackrel{\mu=i}{=} -\frac{1}{2} \partial^i (Q_{B_{i0 \kappa \lambda}} f^{\kappa \lambda}) \\ & \stackrel{\kappa=0, m}{=} -\frac{1}{2} \left\{ \partial^i (Q_{B_{i0 0 \lambda}} f^{0 \lambda}) + \partial^i (Q_{B_{i0 m \lambda}} f^{m \lambda}) \right\} \\ & \stackrel{\lambda=0, n}{=} -\frac{1}{2} \left\{ \partial_i (Q_{B_{0i 0 n}} f^{0 n}) + \partial_i (Q_{B_{0i m 0}} f^{m 0}) + \partial_i (Q_{B_{0i m n}} f^{m n}) \right\} \\ & \stackrel{*}{=} -\partial_i (Q_{B_{0i 0 j}} f^{0 j}) - \frac{1}{2} \partial_i (Q_{B_{0i j k}} f^{j k}) \\ & = -\partial_i ([d_1 E_i E_j + d_2 B_i B_j + d_3 E_i B_j + d_3 B_i E_j] e_j) \\ & \quad - \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{jkm} \varepsilon_{jkr}}_{=2\delta_{mr}} \partial_i ([-d_1 E_i B_m + d_2 B_i E_m + d_3 E_i E_m - d_3 B_i B_m] b_r) \\ & = -\partial_i ([E_j + d_2 B_i B_j + d_3 E_i B_j + d_3 B_i E_j] e_j) \\ & \quad - \partial_i ([-d_1 E_i B_m + d_2 B_i E_m + d_3 E_i E_m - d_3 B_i B_m] b_m). \end{aligned} \quad (242)$$

(*) Trocando os índices $n \leftrightarrow j$ e $m \leftrightarrow j$, concluímos que $\partial_i (Q_{B_{0i 0 n}} f^{0 n}) = \partial_i (Q_{B_{0i m 0}} f^{m 0}) = \partial_i (Q_{B_{0i 0 j}} f^{0 j})$. Logo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \partial^\mu (Q_{B_{\mu 0 \kappa \lambda}} f^{\kappa \lambda}) & = [d_1 \mathbf{E} + d_3 \mathbf{B}] \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}) \\ & \quad - [d_2 \mathbf{B} - d_3 \mathbf{E}] \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (243)$$

Observe que nas equações (239) e (242) usamos o fato de $f^{\mu\nu}$ ser antissimétrico. Como $\nu = 0$, tem-se $\mu = i$ pois caso $\mu = 0$ teríamos $f^{00} = 0$. Além disso, sabemos que o tensor $Q_{B_{\mu\nu\kappa\lambda}}$ é antissimétrico sob a troca $\mu \leftrightarrow \nu$ ou $\kappa \leftrightarrow \lambda$ e simétrico em $\mu\nu \leftrightarrow \kappa\lambda$. Reescrevendo todos os termos, obtemos a equação modificada para a lei de Gauss

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e} + \left(\frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} + \frac{d_3}{c_1} \mathbf{B} \right) \cdot \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \\ + \left(\frac{d_2}{c_1} \mathbf{B} + \frac{d_3}{c_1} \mathbf{E} \right) \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \\ = \frac{\rho}{c_1}. \end{aligned} \quad (244)$$

Analogamente, para encontrar a equação modificada de Ampère-Maxwell, tomamos o índice espacial $\nu = i$ na equação (238), e obtemos

$$\begin{aligned} & \nabla \times \mathbf{b} + \left(-\frac{d_1}{c_1} \mathbf{B} + \frac{d_3}{c_1} \mathbf{E} \right) \times \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \\ & + \left(\frac{d_2}{c_1} \mathbf{E} - \frac{d_3}{c_1} \mathbf{B} \right) \times \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) = \partial_t \mathbf{e} \\ & + \left(\frac{d_1}{c_1} \mathbf{E} + \frac{d_3}{c_1} \mathbf{B} \right) \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \\ & + \left(\frac{d_2}{c_1} \mathbf{B} + \frac{d_3}{c_1} \mathbf{E} \right) \partial_t (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) + \frac{\mathbf{J}}{c_1}. \end{aligned} \quad (245)$$

Como a identidade de Bianchi permanece válida, as duas equações homogêneas usuais se mantêm como na eletrodinâmica de Maxwell, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (246)$$

Na [Subseção 4.2.3](#) vamos encontrar as relações de dispersão supondo um campo de fundo puramente magnético, homogêneo e constante no tempo.

4.2.3 Relações de dispersão

Nesta seção, obteremos as relações de dispersão considerando que temos um campo de fundo puramente magnético ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$) na ausência de fontes ($\mathbf{J} = 0$ e $\rho = 0$). É importante observar que sempre que o modelo não linear também exibir dependência em $\mathcal{G}$, essa dependência deve ser quadrática (ou uma potência par) em $\mathcal{G}$ para garantir a simetria CP. Este fato ocorre tanto na eletrodinâmica não linear como nas teorias generalizadas de Born-Infeld, Logarítmica e ArcSinh ([BORN; INFELD, Mar 1934](#); [KRUGLOV, 2017](#); [GAETE; HELAYËL-NETO; OSPEDAL, Apr 2019](#)). Se não houver campo elétrico de fundo, obtemos $c_2 = 0$ e a simetria CP é recuperada. Trabalhamos com um campo magnético externo uniforme $\mathbf{B}$ e, como consequência, os coeficientes c_i e d_i também são uniformes e constantes no tempo. Outro fato importante é que sempre que o campo elétrico de fundo não estiver presente, $d_3 = 0$ para todos os exemplos de eletrodinâmica não linear na literatura (vide, por exemplo, ([EULER; HEISENBERG, Nov 1936](#); [GAETE; HELAYËL-NETO, Mar 2014](#); [GAETE; HELAYËL-NETO, Nov 2014](#); [AIELLO; FERRARO; GIRIBET, 2005](#))). Portanto, não levaremos em consideração esses coeficientes a partir de agora. A partir dessas considerações e das equações (244) e (245), as equações modificadas de Maxwell se reduzem a

$$\nabla \cdot \mathbf{e} + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) = 0, \quad (247)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (248)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B} \times \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) = \partial_t \mathbf{e} + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B} \partial_t (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}). \quad (249)$$

Observe que as equações de Maxwell tradicionais, na forma como as conhecemos, são recuperadas quando $d_1 = d_2 = 0$ e $c_1 = 1$, o que equivale a tomar $|\mathbf{B}| \rightarrow 0$ em (247) e (249).

Assim como foi feito em (210), vamos considerar as soluções de onda plana $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ em (248), obtendo

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{e}. \quad (250)$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (250) obtemos

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{\omega} \{ \mathbf{k} (\nabla \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{e} \}. \quad (251)$$

E assim, substituindo as equações (247), (249) e (250) em (251) obtemos uma equação contendo somente o campo elétrico do fóton ($\mathbf{e}$), isto é:

$$\begin{aligned} \omega \partial_t \mathbf{e} + \omega \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B} \partial_t (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B} \times \nabla (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e})) + \\ + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{k} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) + (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (252)$$

Utilizando novamente a solução de onda plana, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ termo a termo na equação (252) obtemos

$$\begin{aligned} \{ \omega^2 - \mathbf{k}^2 \} \mathbf{e}_0 + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_0 + \\ + \left\{ \frac{d_2}{c_1} \omega^2 \mathbf{B} - \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \right\} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (253)$$

que tem a forma matricial

$$M_{ij} e_{0j} = 0, \quad (254)$$

em que e_{0j} ($j = 1, 2, 3$), são os componentes da amplitude do campo elétrico do fóton, $\mathbf{e}_0$. A matriz M_{ij} pode ser escrita na forma

$$M_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \beta u_i u_j + \gamma w_i B_j, \quad (255)$$

onde os coeficientes α , u_i e w_i são, respectivamente definidos por

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^2 - \mathbf{k}^2, \quad \beta = \frac{d_1}{c_1}, \quad \gamma = \frac{d_2}{c_1}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{B} \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{w} &= \omega^2 \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (256)$$

A equação matricial (254) tem soluções não triviais somente se a matriz M for singular, ou seja, $\det M = 0$. O determinante da matriz (255), exposto abaixo, será discutido no Apêndice A. Temos:

$$\det M = \alpha [(\alpha + \beta \mathbf{u}^2)(\alpha + \gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{B}) - \beta \gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})] = 0. \quad (257)$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0$, da equação (257) obtemos

$$\left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \left\{ \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \right) \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 + \frac{d_2}{c_1} \omega^2 \mathbf{B}^2 - \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} - \mathbf{k})^2 \right) \right\} = 0. \quad (258)$$

Note que a primeira raiz da equação (258) ocorre quando $\omega = |\mathbf{k}|$. Caso $\omega \neq |\mathbf{k}|$, obtemos duas raízes $\omega_2^{(\pm)} = \pm \omega_2(\mathbf{k})$ e $\omega_3^{(\pm)} = \pm \omega_3(\mathbf{k})$, cujas soluções podem ser vistas a seguir:

$$\omega_2(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2} \quad (259)$$

e

$$\omega_3(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}, \quad (260)$$

em que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Observe que as frequências usuais do fóton são recuperadas no limite $d_1 \rightarrow 0$ e $d_2 \rightarrow 0$, ou, equivalentemente, $|\mathbf{B}| \rightarrow 0$. As frequências (259) e (260) são reais se $c_1 > d_1 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2$ e $c_1 + d_2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 > 0$, respectivamente. O índice de refração no vácuo é dado pelo inverso da velocidade de fase, $\omega_i/|\mathbf{k}|$. Temos, então, para as duas novas frequências

$$n_2^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (261)$$

$$n_3^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}. \quad (262)$$

Para as velocidades de grupo, temos $v_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$, o que nos leva aos resultados

$$\begin{aligned} v_g|_{\omega=\omega_2} &= \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\sqrt{k_i^2 - \frac{d_1}{c_1} (\varepsilon_{mnl} B_n k_l)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{k_i^2 - \frac{d_1}{c_1} (\varepsilon_{mnl} B_n k_l)^2}} \left[2k_i - 2 \frac{d_1}{c_1} (\varepsilon_{mnl} B_n k_l) \varepsilon_{mnl} B_n \right] \\ &= \frac{c_1 \hat{\mathbf{k}} + d_1 \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})}{c_1 \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}} \end{aligned} \quad (263)$$

e

$$\begin{aligned} v_g|_{\omega=\omega_3} &= \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\sqrt{k_i^2 - \frac{d_2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2} (B_m^2 k_n^2 - (B_l k_l)^2)} \right) \\ &= \frac{2k_i - \frac{d_2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2} (2B_m^2 k_n - 2B_l k_l B_l)}{2 \sqrt{k_i^2 - \frac{d_2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2} (B_m^2 k_n^2 - (B_l k_l)^2)}} \\ &= \frac{\hat{\mathbf{k}} c_1 + d_2 \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})}{(c_1 + d_2 \mathbf{B}^2) \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}}. \end{aligned} \quad (264)$$

Observe que os vetores velocidade de grupo possuem componentes nas direções de $\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{B}$. Além disso, ambos os resultados convergem para $\mathbf{v}_g = \hat{\mathbf{k}}\omega/|\mathbf{k}|$, no limite $|\mathbf{B}| \rightarrow 0$. Uma observação relevante é que, quando o campo magnético de fundo $\mathbf{B}$ é perpendicular à direção de propagação $\hat{\mathbf{k}}$, as soluções se simplificam para $\mathbf{v}_g = (1 - d_1 \mathbf{B}^2/c_1)^{1/2} \hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{v}_g = (1 + d_2 \mathbf{B}^2/c_1)^{-1/2} \hat{\mathbf{k}}$, respectivamente. Outro aspecto importante a ser destacado é o efeito de birrefringência induzido pela presença do campo de fundo.

4.3 Modelos de eletrodinâmica não linear

Sabemos que na eletrodinâmica de Maxwell uma carga pontual tem uma energia eletromagnética infinita. Diante deste problema, a eletrodinâmica não linear começou como uma tentativa de resolver divergências associadas a modelos clássicos de uma partícula carregada, como o problema da autoenergia infinita do elétron. O primeiro e conhecido modelo a usar essa abordagem surgiu em 1934 por M. Born e L. Infeld ([BORN; INFELD, Mar 1934](#)). Outro importante modelo surge apenas um ano após o artigo de Born-Infeld. Seguindo a descrição do pósitron de Dirac, Heisenberg e Euler, ao tratarem o vácuo como um meio, encontraram uma maneira de adicionar correções de primeira ordem em *loops* ao modelo de Maxwell, resultando em uma Lagrangeana não linear eficaz, capaz de descrever os efeitos do espalhamento fóton-fóton na eletrodinâmica quântica ([EULER; HEISENBERG, Nov 1936](#)). É interessante notar também que experimentos relacionados à física de interação fóton-fóton sugeriram que a eletrodinâmica no vácuo é uma teoria não linear ([BAMBER et al., 1999](#); [BURKE et al., 1997](#); [PIKE et al., 2014](#); [TOMMASINI et al., 2009](#); [TOMMASINI et al., 2008](#)). Todos os exemplos citados até aqui são fundamentados em Lagrangeanas contendo os invariantes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Começaremos então nosso estudo na [Subseção 4.3.1](#) com um caso especial de uma Lagrangeana contendo somente um invariante e posteriormente na [Subseção 4.3.2](#) trataremos dos casos Born-Infeld e Euler-Heisenberg.

4.3.1 Exemplo de uma eletrodinâmica dependendo de $\mathcal{F}$

Vamos investigar uma eletrodinâmica não linear conhecida como eletrodinâmica logarítmica proposta por Gaete, Helayël e Ospedal em ([GAETE; HELAYËL-NETO; OSPEDAL, Apr 2019](#)), é descrita pela densidade Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = -2\beta^2 \ln \left[1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{s\mathcal{F}} \right] + 2\beta \sqrt{s\mathcal{F}}, \quad (265)$$

em que $\mathcal{F} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0^2 - \mathbf{B}_0^2)$. Observe que $s = -1$ para $|\mathbf{E}| \leq |\mathbf{B}|$ e $s = 1$ para $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$. Além disso, a constante β tem dimensão de (massa)² em unidades naturais. Também notamos que, em um caso puramente elétrico, a constante β poderia ser identificada como um campo elétrico de fundo. Aqui vamos considerar somente o caso $s = -1$ e puramente magnético

($\mathbf{E} = 0$). A escolha do logaritmo feita pelos autores na formulação da Lagrangiana permite que o campo elétrico de uma carga pontual seja finito na origem, o que não ocorre na eletrodinâmica clássica de Maxwell, na qual o campo diverge. Além disso, a eletrodinâmica logarítmica introduz correções de longo alcance ao potencial de Coulomb, incluindo termos lineares e logarítmicos, que são de interesse para entender melhor as consequências fenomenológicas das não-linearidades eletromagnéticas no vácuo.

Seguindo a expansão dada pela equação (193), obtemos os coeficientes c_1 e d_1 para o caso apresentado na equação (265), ou seja

$$c_1 = -\frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{2}\beta + |\mathbf{B}|} \quad (266)$$

e

$$d_1 = -\frac{\beta\sqrt{2}}{|\mathbf{B}|(\sqrt{2}\beta + |\mathbf{B}|)^2}. \quad (267)$$

Usando os resultados obtidos acima e a equação (225) obtemos a relação de dispersão

$$\omega = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{|\mathbf{B}|(\sqrt{2}\beta + |\mathbf{B}|)}}. \quad (268)$$

A birrefringência do vácuo é um fenômeno físico previsto pela QED, em que o vácuo se comporta como um meio birrefringente sob a influência de campos eletromagnéticos intensos. Isso significa que, na presença de campos magnéticos ou elétricos fortes, temos índices de refração diferentes para diferentes polarizações da luz (GREINER; REINHARDT, 2008). No trabalho (GAETE; HELAYËL-NETO; OSPEDAL, Apr 2019), é demonstrado que essa eletrodinâmica exibe o fenômeno de birrefringência do vácuo na presença de campo magnético externo, o que também podemos concluir usando nossa abordagem. Ou seja, para $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$ obtemos de (268)

$$n_{\parallel} \equiv \frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = 1. \quad (269)$$

Por outro lado, caso $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ temos

$$n_{\perp} \equiv \frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{B}|}{\sqrt{2}\beta + |\mathbf{B}|}}}. \quad (270)$$

Assim, temos o fenômeno da birrefringência do vácuo, ou seja, ondas eletromagnéticas com polarizações diferentes têm velocidades diferentes.

4.3.2 Exemplo de uma eletrodinâmica dependendo de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$

Muitos exemplos de eletrodinâmica não linear com dependência tanto em $\mathcal{F}$ quanto em $\mathcal{G}$ são discutidos na literatura. Nestes casos, o coeficiente $d_2 \neq 0$ e as duas soluções de frequência,

(259) e (260), devem ser consideradas. Os modelos, em geral, dependem de $\mathcal{G}^2$ (caso mais simples) ou de uma potência par de $\mathcal{G}$, de modo a garantir a invariância CP. Veremos nas próximas subseções 4.3.2.1 e 4.3.2.2 as famosas eletrodinâmicas de Born-Infeld e de Euler-Heisenberg.

4.3.2.1 Eletrodinâmica de Born-Infeld

Começemos por contemplar o conhecido caso da eletrodinâmica de Born-Infeld (BI), descrita pela seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{\text{BI}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \beta^2 \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4}} \right), \quad (271)$$

onde β é uma constante.

A ideia fundamental abordada por M. Born e L. Infeld neste modelo era estabelecer um limite superior para a intensidade do campo. No limite de campo fraco, quando o campo eletromagnético é significativamente menor que um parâmetro característico β (que tem dimensões de campo elétrico), a teoria de Born-Infeld se reduz à teoria de Maxwell (BORN; INFELD, Mar 1934).

Para encontrarmos as relações de dispersão para a Lagrangeana (271), calculemos as derivadas (228) para encontrarmos os coeficientes c_1 , d_1 e d_2 . Antes de tudo, notemos que, como $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, temos $\mathcal{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = -\frac{1}{2}\mathbf{B}^2$. Assim,

$$c_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{\mathbf{B}} = \left(1 - \frac{2\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\mathbf{B}} = \left(1 + \frac{\mathbf{B}^2}{\beta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (272)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^2} \right|_{\mathbf{B}} = \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{2\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4} \right)^{-3/2} \Big|_{\mathbf{B}} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{\mathbf{B}^2}{\beta^2} \right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (273)$$

e

$$\begin{aligned} d_2 &= \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^2} \right|_{\mathbf{B}} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} \right) \right|_{\mathbf{B}} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} \left(\frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{2\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{G} \right) \right|_{\mathbf{B}} \\ &= \left. \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{2\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}^2}{\beta^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \right|_{\mathbf{B}} = \frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{\mathbf{B}^2}{\beta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (274)$$

Observe que $d_1 = \frac{1}{\beta^2} c_1$ e $d_2 = \frac{1}{\beta^2} c_1^3$. Então, das equações (259) e (260), obtemos as relações de dispersão para este caso:

$$\omega_1^{BI}(\mathbf{k}) = \omega_2^{BI}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{\mathbf{B}^2 + \beta^2}}. \quad (275)$$

4.3.2.2 Eletrodinâmica de Euler-Heisenberg

Consideremos agora um segundo caso de eletrodinâmica não linear contemplando os invariantes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Trata-se do modelo de Euler-Heisenberg (EH), descrito pela Lagrangeana efetiva,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \\ &\times \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\Re \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\Im \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} + \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} - 1 \right], \end{aligned} \quad (276)$$

em que $\Re$ e $\Im$ representam as partes real e imaginária de $\cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})$, respectivamente, e $m = 0.5 \text{ MeV}$ é a massa do elétron (SCHWINGER, Jun 1951). No Apêndice B mostraremos como podemos expandir a Lagrangeana (276) e obter a forma aproximada,

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{F} + \frac{2\alpha^2}{45m^4} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2), \quad (277)$$

na qual $\alpha = e^2 = (137)^{-1} = 0.00729$ é a constante de estrutura fina. Analogamente ao feito na Lagrangeana de M. Born e L. Infeld (271), obtemos os coeficientes c_1 , d_1 e d_2 correspondentes à Lagrangeana (277)

$$c_1 = 1 - \frac{8\alpha^2 \mathbf{B}^2}{45m^4}, \quad d_1 = \frac{16\alpha^2}{45m^4} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{28\alpha^2}{45m^4}. \quad (278)$$

Usando os resultados obtidos em (259) e (260), juntamente com os coeficientes dados em (278), chegamos às seguintes soluções $\omega_1(\mathbf{k})$ e $\omega_2(\mathbf{k})$:

$$\omega_1(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{16\alpha^2}{45m^4 - 8\alpha \mathbf{B}^2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (279)$$

$$\omega_2(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{28\alpha^2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{45m^4 + 20\alpha^2 \mathbf{B}^2}}. \quad (280)$$

Por consequência, os índices de refração no vácuo para o modelo efetivo de EH, na aproximação que estamos trabalhando, resultam em

$$n_1^{-1} = \sqrt{1 - \frac{16\alpha^2}{45m^4 - 8\alpha \mathbf{B}^2} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (281)$$

$$n_2^{-1} = \sqrt{1 - \frac{28\alpha^2(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{45m^4 + 20\alpha^2\mathbf{B}^2}}. \quad (282)$$

Vale ressaltar que esses resultados estão de acordo com ([ADLER, Oct 1971](#)) após mudanças adequadas no sistema de unidades.

5 Efeitos da Quebra da Simetria de Lorentz na Eletrodinâmica Não Linear

Neste capítulo, vamos considerar um modelo em eletrodinâmica não linear incluindo um termo de quebra da simetria Lorentz na Lagrangeana estudada na [Seção 4.2](#), descrito da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{nl}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) - \frac{1}{2}(\chi_\mu F^{\mu\nu})^2 - J_\mu A^\mu. \quad (283)$$

Notemos que a Lagrangeana geral neste caso, é uma função contendo os invariantes $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ e o termo de quebra de simetria Lorentz $-1/2(\chi_\mu F^{\mu\nu})^2$.

Dividimos este capítulo em três seções. Na [Seção 5.1](#), expandimos a Lagrangeana geral (283), definida anteriormente, no campo propagante a^μ , em torno de um campo de fundo eletromagnético, inicialmente considerado não uniforme e dependente do tempo. Mantemos apenas os termos da expansão na Lagrangeana não linear até a segunda ordem na excitação propagante e, em seguida, aplicamos o princípio de mínima ação em relação a a^μ para obter as equações de movimento. Na sequência, na [Seção 5.2](#), consideramos um campo externo puramente magnético, uniforme e constante no tempo, para determinar as relações de dispersão em dois casos particulares, mas de grande relevância: quando o plano formado por $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ é ortogonal ao parâmetro que viola a simetria de Lorentz, e quando $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ e o parâmetro violador de Lorentz são coplanares. Por fim, na [Seção 5.3](#), usamos esses resultados na discussão da birrefringência no vácuo sob a influência dos campos externos em um modelo de Euler-Heisenberg. Este desenvolvimento é uma contribuição original do trabalho, que resultou na publicação do artigo (JÚNIOR; FELIPE; SCARPELLI, 2024).

5.1 Construção da Lagrangeana

Assim como foi feito no [Capítulo 4](#), vamos expandir a Lagrangeana (283) até segunda ordem no campo a^μ , em torno do campo de fundo eletromagnético, mantendo apenas os termos da Lagrangeana não linear até a segunda ordem na excitação propagante. Como já realizamos essa expansão em $\mathcal{L}_{nl}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ na [Seção 4.2](#), basta agora, expandir o termo $-1/2(\chi_\mu F^{\mu\nu})^2$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\chi_\mu F^{\mu\nu}\chi^\alpha F_{\alpha\nu} &= -\frac{1}{2}\chi_\mu\chi^\alpha (f^{\mu\nu} + F_B^{\mu\nu}) (f_{\alpha\nu} + F_{B\alpha\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}(\chi_\mu f^{\mu\nu})^2 - \chi_\mu\chi^\alpha f^{\mu\nu}F_{B\alpha\nu} \\ &= -\frac{1}{2}(\chi_\mu f^{\mu\nu})^2 - \chi_\mu\chi^\alpha F_{B\alpha\nu} (\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\chi_\mu f^{\mu\nu})^2 + a^\mu \partial^\nu [\chi^\alpha \chi_\nu F_{B\alpha\mu} - \chi^\alpha \chi_\mu F_{B\alpha\nu}]. \end{aligned} \quad (284)$$

Vamos observar, também, que o termo $-\frac{1}{2}G_B^{\mu\nu}f_{\mu\nu}$ da equação (231) pode ser reescrito de forma que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}G_B^{\mu\nu}f_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}G_B^{\mu\nu}(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) \\ &= \frac{1}{2}[a_\nu\partial_\mu G_B^{\mu\nu} - a_\mu\partial_\nu G_B^{\mu\nu}] = -a_\mu\partial_\nu G_B^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (285)$$

Reescrevendo todos os termos, obtemos,

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}c_1 f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}c_2 f_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu} + \frac{1}{8}Q_{B\mu\nu\kappa\lambda}f^{\mu\nu}f^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}(\chi_\mu f^{\mu\nu})^2 - \bar{J}_\mu a^\mu, \quad (286)$$

em que

$$\bar{J}_\mu = J_\mu - \partial^\nu G_{B\nu\mu} + \partial^\nu (\chi^\alpha \chi_\nu F_{B\alpha\mu} - \chi^\alpha \chi_\mu F_{B\alpha\nu}). \quad (287)$$

É importante notar que não consideramos na densidade Lagrangeana $\mathcal{L}^{(2)}$ os termos que dependem apenas dos campos de fundo, pois são irrelevantes para as equações de campo que nos interessam.

Uma discussão relevante diz respeito à semelhança entre os termos $Q_{B\mu\nu\kappa\lambda}f^{\mu\nu}f^{\kappa\lambda}$ e $(\chi_\mu f^{\mu\nu})^2$ uma vez que, por meio da expressão (103) podemos escrever $(\chi_\mu f^{\mu\nu})^2 \sim \kappa_{\mu\nu\alpha\beta}f^{\mu\nu}f^{\alpha\beta}$. Assim, espera-se que a não linearidade induzida por campos eletromagnéticos externos produza efeitos semelhantes aos que seriam causados por certos parâmetros violadores da simetria de Lorentz. Nesse sentido, é interessante examinar como esses dois backgrounds interferem entre si.

A semelhança entre o termo que viola a simetria de Lorentz e aquele que envolve o tensor definido na equação (233) levanta uma questão importante: Por que não redefinir o tensor $Q_{B\mu\nu\kappa\lambda}$ de forma a incorporar a dependência de χ^μ ? Alguns autores, como (KOSTELECKÝ; MEWES, 2001; KOSTELECKÝ; MEWES, 2002; KOSTELECKÝ; MEWES, 2009), realizam uma análise aprofundada de modelos desse tipo, partindo de relações gerais de dispersão. No entanto, é crucial notar que a natureza desses dois termos é completamente distinta. O termo de violação da simetria de Lorentz surge de um modelo mais fundamental, refletindo uma característica intrínseca do espaço-tempo, enquanto o tensor Q_B depende do campo magnético de fundo $\mathbf{B}$, que é um parâmetro controlável. Além disso, os resultados obtidos em (KOSTELECKÝ; MEWES, 2001), por exemplo, consideram apenas a primeira ordem no tensor $\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}$, o que é apropriado para aquele contexto, dado que a magnitude do parâmetro violação Lorentz é fortemente limitada por resultados experimentais, com limite superior na faixa de 10^{-17} (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011, Tabela S3). No entanto, podemos estar lidando com campos magnéticos ($\mathbf{B}$) extremamente intensos, para os quais tal aproximação não seria aplicável.

Por fim, usando o princípio de mínima ação em relação a a^μ em (286) e tendo em vista o

que estudamos na [Subseção 4.2.2](#), basta calcular

$$\begin{aligned}
 \delta \left[-\frac{1}{2} (\chi_\mu f^{\mu\nu})^2 \right] &= -\frac{1}{2} \delta [\chi_\mu f^{\mu\nu} \cdot \chi^\alpha f_{\alpha\nu}] \\
 &= -\frac{1}{2} [\chi_\mu (\delta f^{\mu\nu}) \cdot \chi^\alpha f_{\alpha\nu} + \chi_\mu f^{\mu\nu} \cdot \chi^\alpha (\delta f_{\alpha\nu})] \\
 &= -\chi_\mu \chi^\alpha f^{\mu\nu} (\delta f_{\alpha\nu}) \\
 &= -\chi_\mu \chi^\alpha f^{\mu\nu} (\partial_\alpha \delta a_\nu - \partial_\nu \delta a_\alpha) \\
 &= -\chi_\mu \chi^\alpha f^{\mu\nu} \partial_\alpha \delta a_\nu + \chi_\mu \chi^\alpha f^{\mu\nu} \partial_\nu \delta a_\alpha \\
 &= \delta a_\nu \partial_\mu (\chi_\alpha \chi^\mu f^{\alpha\nu} - \chi_\alpha \chi^\nu f^{\alpha\mu}), \tag{288}
 \end{aligned}$$

de onde se obtém uma nova equação de movimento, dada por

$$\partial^\mu \left[c_1 f_{\mu\nu} + c_2 \tilde{f}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Q_{B\mu\nu\kappa\lambda} f^{\kappa\lambda} + \chi^\alpha (\chi_\mu f_{\alpha\nu} - \chi_\nu f_{\alpha\mu}) \right] = \bar{J}_\nu. \tag{289}$$

Além disso, temos que a identidade de Bianchi ($\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0$) permanece válida. Na próxima seção, faremos o cálculo das relações de dispersão para situações particulares de interesse. Será investigada a situação em que o campo eletromagnético de fundo se reduz a um campo puramente magnético uniforme $\mathbf{B}$, isto é, $\mathbf{E} = 0$.

5.2 Relações de dispersão

Abordaremos, nesta seção, as relações de dispersão para casos particulares de interesse na situação em que temos um campo de fundo puramente magnético uniforme $\mathbf{B}$ e na ausência de fontes, $\bar{\mathbf{J}} = 0$ e $\bar{\rho} = 0$. Além disso, vamos considerar um vetor de violação de simetria de Lorentz puramente espacial $\chi^\mu = (0, \chi)$. É importante observar que o coeficiente c_2 se anula na ausência do campo elétrico de fundo e em modelos que preservam a invariância CPT, como o que está sendo investigado. Além disso, como discutimos na [Subseção 4.2.3](#), em todos os modelos não lineares estudados na literatura, o coeficiente d_3 é nulo sempre que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Portanto, mais uma vez não levaremos em consideração esses coeficientes.

Sendo assim, encontremos primeiro a equação de Gauss modificada tomando $\nu = 0$ termo a termo na equação (289). Note que, de acordo o que já calculamos na [Subseção 4.2.3](#), mais precisamente em (247), basta fazer a seguinte operação

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu [\chi^\alpha (\chi_\mu f_{\alpha 0} - \chi_0 f_{\alpha\mu})] &\stackrel{(*)}{=} -\partial_i (\chi_i \chi_k e_k) \\
 &= -\nabla \cdot ((\chi \cdot \mathbf{e}) \chi). \tag{290}
 \end{aligned}$$

(*) Observe que, $\alpha = k$ pois $\chi^\mu = (0, \chi)$, caso contrário, $\partial^\mu [\chi^\alpha (\chi_\mu f_{\alpha 0} - \chi_0 f_{\alpha\mu})] = 0$ o que nos leva a tomar, obrigatoriamente, $\mu = i$. Sendo assim, obtemos uma nova equação modificada de Gauss dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{291}$$

com

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} + \frac{d_2}{c_1}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e})\mathbf{B} - \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\chi}. \quad (292)$$

Analogamente, para a equação de Ampère-Maxwell, tomamos o índice espacial $\nu = i$ na equação (289), e obtemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{b}) + \frac{1}{c_1}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{b})\boldsymbol{\chi} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (293)$$

onde

$$\mathbf{H} = \mathbf{b} - \frac{d_1}{c_1}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}. \quad (294)$$

Além disso, a partir da identidade de Bianchi, as duas equações homogêneas usuais são mantidas e escritas como

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (295)$$

A seguir, com o objetivo de obter as relações de dispersão, eliminamos o campo magnético $\mathbf{b}$ das equações. Para isso, tomamos a derivada temporal da equação de Ampère-Maxwell (293) e usamos a relação de Faraday-Lenz para obter uma equação para $\mathbf{e}$, dada por

$$\begin{aligned} & -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e} + \frac{d_1}{c_1}\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e})\mathbf{B}) - \frac{1}{c_1}\boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e})) + \\ & + \frac{1}{c_1}\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e})) = \partial_t^2 \mathbf{e} + \frac{d_2}{c_1}\mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \partial_t^2 \mathbf{e}) - \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \partial_t^2 \mathbf{e})\boldsymbol{\chi}. \end{aligned} \quad (296)$$

Note que

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e} = \nabla^2 \mathbf{e} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{e}). \quad (297)$$

Assim, das equações (291), (292), (295), e (297), podemos reescrever (296) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \mathbf{e} - \frac{1}{c_1}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot ((\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{e})\boldsymbol{\chi})) + \frac{d_2}{c_1}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}))) \\ & + \frac{d_1}{c_1}\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e})\mathbf{B}) - \frac{1}{c_1}\boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e})) \\ & + \frac{1}{c_1}\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\chi} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e})) = \partial_t^2 \mathbf{e} + \frac{d_2}{c_1}\mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \partial_t^2 \mathbf{e}) - \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \partial_t^2 \mathbf{e})\boldsymbol{\chi}. \end{aligned} \quad (298)$$

Considerando as soluções de onda plana, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, em (298), obtemos a forma matricial

$$M_{ij}e_{0j} = 0, \quad (299)$$

na qual e_{0j} ($j = 1, 2, 3$) são os componentes da amplitude do campo elétrico do fóton, e a matriz M_{ij} é dada por

$$\begin{aligned} M_{ij} = & \left[\omega^2 - \mathbf{k}^2 + \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})^2 \right] \delta_{ij} + \frac{d_1}{c_1}(\mathbf{B} \times \mathbf{k})_i(\mathbf{B} \times \mathbf{k})_j - \frac{1}{c_1}\chi_i [(\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k})k_j + \\ & + (\omega^2 - \mathbf{k}^2)\chi_j] + \frac{d_2}{c_1}[\omega^2 B_i - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})k_i] B_j. \end{aligned} \quad (300)$$

Notemos que a matriz (300) tem a forma

$$M_{ij} = a\delta_{ij} + bu_iu_j + c\chi_i\Gamma_j + d\delta_iB_j. \quad (301)$$

em que

$$\begin{aligned} a &= \omega^2 - k^2 + \frac{1}{c_1}(\chi \cdot k)^2, \quad b = \frac{d_1}{c_1}, \quad c = -\frac{1}{c_1}, \quad d = \frac{d_2}{c_1}, \\ u &= B \times k, \quad \Gamma = \left[(\chi \cdot k)k + \left(\omega^2 - k^2 \right) \chi \right], \quad \delta = \omega^2 B - (B \cdot k)k. \end{aligned} \quad (302)$$

Como $u \cdot B = 0$ e $u \cdot \delta = 0$, a matriz (301) possui determinante dado por

$$\begin{aligned} \det M &= a \left\{ a \left[a + bu^2 + c(\chi \cdot \Gamma) + d(\delta \cdot B) \right] + \right. \\ &\quad + bc \left[u^2(\chi \cdot \Gamma) - (u \cdot \Gamma)(u \cdot \chi) \right] + \\ &\quad + bd \left[u^2(\delta \cdot B) \right] + cd \left[(\chi \cdot \Gamma)(\delta \cdot B) - (\chi \cdot B)(\Gamma \cdot \delta) \right] \left. \right\} + \\ &\quad + bcd \left\{ u^2 \left[(\chi \cdot \Gamma)(\delta \cdot B) - (\chi \cdot B)(\Gamma \cdot \delta) \right] + \right. \\ &\quad \left. - (u \cdot \Gamma)(u \cdot \chi)(\delta \cdot B) \right\}. \end{aligned} \quad (303)$$

Faremos uma análise desta identidade e de outros resultados no [Apêndice A](#). Além disso, a equação matricial (299) possui soluções não triviais apenas se a matriz M for singular. Ou seja, caso seu determinante seja nulo, o que resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned} &\left(\omega^2 - k^2 \right) \left\{ \left(\omega^2 - \lambda k^2 \right) \left\{ \left(\omega^2 - \lambda k^2 \right) f + \frac{d_2}{c_1} \left[\omega^2 B^2 - k^2 (B \cdot \hat{k})^2 \right] f + \frac{d_1}{c_1} k^2 (B \times \hat{k})^2 f + \right. \right. \\ &\quad + \frac{d_1}{c_1^2} k^2 (B \times \hat{k} \cdot \chi)^2 + \frac{d_2}{c_1^2} (B \cdot \chi)^2 \omega^2 \left. \right\} + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} k^2 (B \times \hat{k})^2 \left[\omega^2 B^2 - k^2 (B \cdot \hat{k})^2 \right] f + \\ &\quad \left. + \frac{d_1 d_2}{c_1^3} \left[\omega^2 (B \cdot \chi)^2 (B \times \hat{k})^2 + k^2 (B \times \hat{k} \cdot \chi)^2 \left[\omega^2 B^2 - k^2 (B \cdot \hat{k})^2 \right] \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (304)$$

em que $f = 1 - \frac{\chi^2}{c_1}$, $\lambda = 1 - \frac{(\chi \cdot \hat{k})^2}{c_1}$ e $\hat{k} = k/|k|$. A primeira solução é a frequência convencional da eletrodinâmica linear invariante de Lorentz, $\omega_1 = |k|$. Para obter as outras frequências, vamos encontrar as raízes positivas da equação,

$$P\omega^4 + Q\omega^2 + R = 0, \quad (305)$$

com

$$\begin{aligned} P &= fH + \frac{d_2}{c_1} (B \cdot \chi)^2, \\ Q &= k^2 \left[AH - \frac{d_2}{c_1} (B \cdot \chi)^2 F - fG \right] \quad \text{e} \\ R &= -GAk^4, \end{aligned} \quad (306)$$

em que

$$\begin{aligned} F &= 1 - \frac{1}{c_1}(\chi \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 - \frac{d_1}{c_1}(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2, & G &= 1 - \frac{1}{c_1}(\chi \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 + \frac{d_2}{c_1}(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2, \\ A &= -fF + \frac{d_1}{c_1^2}(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \chi)^2 & \text{e} & \quad H = 1 + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2. \end{aligned} \quad (307)$$

Além das frequências usuais, após a resolução da equação (305), as outras duas frequências são dadas por

$$\omega_{2,3} = |k| \left\{ \frac{1}{2 \left[fH + \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \chi)^2 \right]} \left\{ -AH + fG + \frac{d_2}{c_1^2} (\mathbf{B} \cdot \chi)^2 F \pm \sqrt{\tilde{\Delta}} \right\} \right\}^{1/2}, \quad (308)$$

onde

$$\tilde{\Delta} = \left[AH + fG - \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \chi)^2 F \right]^2 + 4 \frac{d_1 d_2}{c_1^3} (\mathbf{B} \cdot \chi)^2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \cdot \chi)^2 G. \quad (309)$$

As expressões obtidas para as duas últimas frequências são complicadas e de difícil interpretação. E como estamos interessados em discutir a influência do campo de fundo na propagação das ondas, iremos considerar, nas próximas seções, situações particulares para facilitar a compreensão.

5.2.1 O caso em que o plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ é ortogonal ao parâmetro violador de Lorentz

Neste caso, pela geometria do problema temos que $\chi \cdot \mathbf{B} = \chi \cdot \mathbf{k} = 0$. Então, podemos reescrever a matriz (300) da seguinte forma

$$M_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \beta u_i u_j + \delta \chi_i \chi_j + \gamma w_i B_j, \quad (310)$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^2 - \mathbf{k}^2, & \beta &= \frac{d_1}{c_1}, & \gamma &= \frac{d_2}{c_1}, & \delta &= -\frac{\alpha}{c_1}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{B} \times \mathbf{k}, & \mathbf{w} &= \omega^2 \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (311)$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, a matriz (310) possui determinante dado por

$$\begin{aligned} \det M &= \alpha \left\{ \alpha \left(\alpha + \beta \mathbf{u}^2 + \gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{B} + \delta \chi^2 \right) + \beta \gamma \left(\mathbf{u}^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{B} \right) + \right. \\ &+ \beta \delta \left(\mathbf{u}^2 \chi^2 - (\mathbf{k} \cdot \chi)^2 \right) + \gamma \delta \left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{B} \chi^2 - \mathbf{w} \cdot \chi \mathbf{B} \cdot \chi \right) \left. \right\} + \\ &+ \beta \gamma \delta \left[\mathbf{u}^2 \left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{B} \chi^2 - \mathbf{w} \cdot \chi \mathbf{B} \cdot \chi \right) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} \left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \chi \right) \right]. \end{aligned} \quad (312)$$

Diante do exposto e sabendo que $\det M = 0$, obtemos da equação (312)

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \left\{ \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \left[f \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) + f \frac{d_2}{c_1} \left(\omega^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \left(\omega^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (313)$$

em que $f = 1 - \frac{\chi^2}{c_1^2}$. Note que a primeira raiz da equação (313) ocorre quando $\omega = |\mathbf{k}|$. Já para o caso em que $\omega \neq |\mathbf{k}|$, obtemos

$$\begin{aligned} & f \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) + f \frac{d_2}{c_1} \left(\omega^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 + \\ & + \frac{d_1 d_2}{c_1^2 \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right)} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \left(\omega^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (314)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left[f \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \right] + \\ & + \frac{d_2 (\omega^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2)}{c_1 (\omega^2 - \mathbf{k}^2)} \left[f \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (315)$$

$$\Rightarrow \left[f \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \right] \left[1 + \frac{d_2 (\omega^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2)}{c_1 (\omega^2 - \mathbf{k}^2)} \right] = 0. \quad (316)$$

Então, da equação (316) podemos concluir que

$$\omega_2 = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_2 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}, \quad (317)$$

$$\omega_3 = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1}{f c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}, \quad (318)$$

em que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Notemos que $\omega_1 = |\mathbf{k}|$, assim como na eletrodinâmica convencional. Além disso, as duas primeiras frequências são exatamente as mesmas calculadas em (NEVES et al., 2021), onde apenas o campo magnético de fundo uniforme e constante foi considerado. Apenas a terceira frequência é afetada pelo parâmetro de quebra de simetria de Lorentz χ , uma vez que $f = 1 - \frac{\chi^2}{c_1^2}$. Neste caso, o resultado em (NEVES et al., 2021) é diretamente recuperado ao tomar o limite $|\chi| \rightarrow 0$. Observe também que as frequências (317) e (318) são reais se $c_1 + d_2 (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 > 0$ e $d_1 (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2 < c_1 - \chi^2$.

Determinaremos agora os índices de refração gerados pelas frequências ω_2 e ω_3 . O índice de refração no vácuo é dado pelo inverso da velocidade de fase, $\omega_i/|\mathbf{k}|$. Sendo assim, temos para

as duas novas frequências

$$\begin{aligned} n_2^{-1} &= \sqrt{1 - \frac{d_2(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}, \\ n_3^{-1} &= \sqrt{1 - \frac{d_1}{f c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}. \end{aligned} \quad (319)$$

Já para o cálculo das velocidades de grupo, temos $\mathbf{v}_{gi}|_{\omega_i} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}_i}$. Calculemos somente v_{g3} , pois v_{g2} é o mesmo encontrado em (264), que é dado por

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = \frac{c_1 \hat{\mathbf{k}} + d_2(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathbf{B}}{(c_1 + d_2 \mathbf{B}^2) \sqrt{1 - \frac{d_2(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}}}. \quad (320)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} &= \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\sqrt{k_i^2 - \frac{d_1}{f c_1} (\varepsilon_{mnl} B_n k_l)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{k_i^2 - \frac{d_1}{f c_1} (\varepsilon_{mnl} B_n k_l)^2}} \left[2k_i - 2 \frac{d_1}{f c_1} (\varepsilon_{mnl} B_n k_l) \varepsilon_{mnl} B_n \right] \\ &= \frac{c_1 f \hat{\mathbf{k}} + d_1 \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})}{c_1 f \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1 f} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}}. \end{aligned} \quad (321)$$

Observe que é possível recuperar os resultados da literatura fazendo $|\chi| \rightarrow 0$, e da eletrodinâmica linear, quando $|\chi| \rightarrow 0$ e $|\mathbf{B}| \rightarrow 0$.

5.2.2 O caso em que $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ e o parâmetro violador de Lorentz são coplanares

Vamos analisar agora a situação na qual os três vetores, χ , $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$, estão em um mesmo plano. Primeiro, obtemos as frequências para a configuração mais geral. Para este caso, o produto misto $\mathbf{B} \times \mathbf{k} \cdot \chi$ é nulo, de modo que $\tilde{\Delta}$ é um quadrado perfeito. Logo, da solução geral (308) as frequências se reduzem a

$$\begin{aligned} \omega_1 &= |\mathbf{k}|, \\ \omega_2 &= |\mathbf{k}| \left\{ \frac{f}{fH + \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \chi)^2} \left[1 - \frac{1}{c_1} (\chi \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 + \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right] \right\}^{1/2} \text{ e} \\ \omega_3 &= |\mathbf{k}| \left\{ 1 - \frac{1}{c_1} (\chi \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 - \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (322)$$

Os índices de refração e as velocidades de grupo para as frequências não convencionais são, respectivamente,

$$n_2^{-1} = \left\{ \frac{f}{fH + \frac{d_2}{c_1}(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\chi})^2} \left[1 - \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 + \frac{d_2}{c_1}(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right] \right\}^{1/2},$$

$$n_3^{-1} = \left\{ 1 - \frac{1}{c_1}(\boldsymbol{\chi} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 - \frac{d_1}{c_1}(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2 \right\}^{1/2}$$
(323)

e

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = \frac{n_2}{fH + \frac{d_2}{c_1}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{c})^2} \left\{ \hat{\mathbf{k}} + \frac{1}{c_1} [d_2(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})\mathbf{B} - (\boldsymbol{\chi} \cdot \hat{\mathbf{k}})\boldsymbol{\chi}] \right\},$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} = n_3 \left\{ H\hat{\mathbf{k}} + \frac{1}{c_1} [d_2(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{k}})\mathbf{B} - (\boldsymbol{\chi} \cdot \hat{\mathbf{k}})\boldsymbol{\chi}] \right\}.$$
(324)

Nota-se que as velocidades de grupo são uma combinação linear dos três vetores, $\boldsymbol{\chi}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$, mas poderiam ser escritas como combinação de dois destes três vetores, já que eles são coplanares.

Dos resultados mais gerais para o problema coplanar apresentado acima, exploraremos, nas próximas subseções, três configurações geométricas particulares que consideramos de grande interesse.

5.2.2.1 Primeiro caso: $\boldsymbol{\chi} \perp \mathbf{B}$, $\boldsymbol{\chi} \perp \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$

Vamos analisar, neste caso, a configuração geométrica em que $\boldsymbol{\chi} \perp \mathbf{B}$, $\boldsymbol{\chi} \perp \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$. Nesta situação, mais simples, porém não menos interessante, podemos expressar a matriz (300) como

$$M_{ij} = \alpha \delta_{ij} + u_i v_j + w_i B_j, \quad (325)$$

onde

$$\alpha = \omega^2 - \mathbf{k}^2,$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi}, \quad \mathbf{v} = -\frac{\alpha}{c_1} \boldsymbol{\chi},$$

$$\mathbf{w} = \frac{d_2}{c_1} \omega^2 \mathbf{B} - \frac{d_2}{c_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}.$$
(326)

O determinante da matriz (325) é dado por

$$\det M = \alpha [(\alpha + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\alpha + \mathbf{w} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] = 0, \quad (327)$$

o que resulta

$$\left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right)^3 \left(1 - \frac{\boldsymbol{\chi}^2}{c_1} \right) \left(1 + \frac{d_2 \mathbf{B}^2}{c_1} \right) = 0. \quad (328)$$

Vemos que a única solução possível é a convencional $\omega^2 = \mathbf{k}^2$. O fato interessante é que os dois vetores de fundo (campo magnético de fundo e de quebra de simetria Lorentz), neste caso, não afetam as soluções de frequência de onda eletromagnética. Consequentemente, o índice de

refração e a velocidade de grupo permanecem inalterados, preservando as características usuais da propagação da luz.

5.2.2.2 Segundo caso: $\chi \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$

No segundo caso, investigamos a configuração $\chi \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$. Embora à primeira vista pareça muito simples, essa configuração geométrica permite observar de forma clara como a violação da simetria de Lorentz desempenha um papel crucial na modificação da propagação das ondas. Novamente, como $\mathbf{B} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, podemos expressar a matriz M na forma (325), a partir da equação (300), desta vez com

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^2 - f\mathbf{k}^2, \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{c_1}[(\omega^2 - \mathbf{k}^2)\chi + (\chi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}], \quad \mathbf{u} = \chi, \\ \mathbf{w} &= \frac{d_2}{c_1}[\omega^2 \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}], \end{aligned} \quad (329)$$

com $f = 1 - \frac{\chi^2}{c_1^2}$. Fazendo $\det M = 0$, da equação (327) obtemos

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - f\mathbf{k}^2) \left\{ \omega^2 - f\mathbf{k}^2 + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2) + \frac{d_2}{c_1^2} \omega^2 \mathbf{B}^2 \chi^2 \right\} = 0. \quad (330)$$

As frequências, ω_1 , ω_2 e ω_3 são as raízes positivas da equação acima, dadas por

$$\omega_1(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|, \quad (331)$$

$$\omega_2(\mathbf{k}) = \omega_3(\mathbf{k}) = \sqrt{f}|\mathbf{k}|, \quad (332)$$

na qual temos, novamente, a frequência usual $\omega = |\mathbf{k}|$. A primeira análise a ser feita é sobre os limites, a fim de estabelecer comparações com os resultados conhecidos da literatura. Ao tomar $|\chi| \rightarrow 0$, recuperamos os resultados da teoria de Maxwell, mesmo mantendo o campo magnético de fundo. Isso está de acordo com (NEVES et al., 2021), se considerarmos $\mathbf{B}$ paralelo a $\mathbf{k}$. Por outro lado, também podemos recuperar a situação em que temos uma eletrodinâmica linear, mas com quebra de simetria de Lorentz. Em primeiro lugar, é importante observar que isso é feito ao tomar $|\mathbf{B}| \rightarrow 0$. Nessa situação, em todos os modelos não lineares conhecidos, temos $c_1 = 1$, $d_1 = d_2 = 0$. Ao aplicar esses limites, recuperamos os resultados conhecidos para a eletrodinâmica na presença do parâmetro violador de simetria de Lorentz que estamos considerando. Outro fato importante ocorre em relação às raízes reais, que são garantidas quando $c_1 > \chi^2$, condição que deve ser sempre satisfeita, já que χ é um parâmetro muito pequeno e c_1 depende de $\mathbf{B}$.

Para os índices de refração temos

$$n_1^{-1} = 1, \quad (333)$$

$$n_2^{-1} = n_3^{-1} = \sqrt{f}. \quad (334)$$

As velocidades do grupo também são diretamente obtidas:

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_1} = \hat{\mathbf{k}}, \quad (335)$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = \mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} = \hat{\mathbf{k}}\sqrt{f}. \quad (336)$$

Mais uma vez, fazendo $|\chi| \rightarrow 0$, obtemos $f \rightarrow 1$ e recuperando os resultados conhecidos da literatura.

5.2.2.3 Terceiro caso: $\chi \parallel \mathbf{B}$ e $\chi, \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$

No terceiro caso, em que $\chi \parallel \mathbf{B}$ e $\chi, \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$, o campo magnético externo desempenha um papel decisivo na modificação da propagação da onda. Considerando a condição geométrica estabelecida, isto é, $\mathbf{B} \times \chi = \mathbf{0}$ e $\chi \cdot \mathbf{k} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0$ a partir de (300), podemos expressar a matriz M na forma

$$M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i u_j + \delta\chi_i \chi_j + \gamma B_i B_j, \quad (337)$$

em que $\alpha = \omega^2 - \mathbf{k}^2$, $\beta = d_1/c_1$, $\gamma = (d_2/c_1)\omega^2$, $\delta = -\alpha/c_1$ e $\mathbf{u} = \mathbf{B} \times \mathbf{k}$.

O resultado do determinante da matriz (337) é também obtido pela identidade (312), fazendo $\mathbf{w} = \mathbf{B}$. Assim, obtemos

$$\det M = \alpha \left[\alpha \left(\alpha + \beta \mathbf{u}^2 + \gamma \mathbf{B}^2 + \delta \chi^2 \right) + \beta \gamma \mathbf{u}^2 \mathbf{B}^2 + \beta \delta \mathbf{u}^2 \chi^2 \right] = 0. \quad (338)$$

Para o caso em que $\alpha = 0$ obtemos a solução usual $\omega_1 = |\mathbf{k}|$. Já para o caso em que $\alpha \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \left[\left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) + \frac{d_1}{c_1} (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 + \frac{d_2}{c_1} \omega^2 \mathbf{B}^2 - \frac{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)}{c_1} \chi^2 \right] + \\ & + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} \omega^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \mathbf{B}^2 - \frac{d_1}{c_1^2} (\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\mathbf{B} \times \mathbf{k})^2 \chi^2 = 0 \end{aligned} \quad (339)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \left[\left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) \underbrace{\left(1 - \frac{\chi^2}{c_1} \right)}_f + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 + \frac{d_2}{c_1} \omega^2 \mathbf{B}^2 - \frac{d_1}{c_1^2} \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \chi^2 \right] + \\ & + \frac{d_1 d_2}{c_1^2} \omega^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{B}^2 = 0 \end{aligned} \quad (340)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\omega^2 - \mathbf{k}^2 \right) f + \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 - \frac{d_1}{c_1^2} \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \chi^2 + \frac{d_2}{c_1} \omega^2 \mathbf{B}^2 \\ & + \frac{d_1 d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{B}^2}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (341)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\omega^2 - \mathbf{k}^2) f + \underbrace{\frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \left(1 - \frac{\chi^2}{c_1}\right)}_f \\ + \frac{d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1 + d_1 d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{B}^2}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (342)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega^2 f - \mathbf{k}^2 f \left(1 - \frac{d_1 \mathbf{B}^2}{c_1}\right) + \frac{d_2 \omega^4 \mathbf{B}^2}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1} \\ - \frac{d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 (c_1 - d_1 \mathbf{B}^2)}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (343)$$

$$\Rightarrow \omega^2 \left\{ f + \frac{d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1} \right\} - \mathbf{k}^2 \left(1 - \frac{d_1 \mathbf{B}^2}{c_1}\right) \left\{ f + \frac{d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1} \right\} = 0 \quad (344)$$

$$\Rightarrow \left\{ f + \frac{d_2 \omega^2 \mathbf{B}^2}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2) c_1} \right\} \left\{ \omega^2 - \mathbf{k}^2 \left(1 - \frac{d_1 \mathbf{B}^2}{c_1}\right) \right\} = 0. \quad (345)$$

As frequências ω_2 e ω_3 obtidas são dadas por

$$\omega_2 = |\mathbf{k}| \sqrt{\frac{f}{f + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2}}, \quad (346)$$

$$\omega_3 = |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2}. \quad (347)$$

Para um campo magnético de fundo nulo, são recuperados os resultados da eletrodinâmica convencional. Outro fato relevante diz respeito às frequências ω_2 e ω_3 , que são positivas, respectivamente, quando $c_1 + d_2 \mathbf{B}^2 > \chi^2$ e $d_1 \mathbf{B}^2 < c_1$. Vale ressaltar que um parâmetro de violação de simetria de Lorentz ortogonal ao vetor de onda afeta a propagação da onda somente se o campo magnético de fundo estiver presente. Isso também pode ser observado no caso em que χ é ortogonal ao plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$. Os índices de refração e as velocidades de grupo são obtidos de forma direta,

$$n_2^{-1} = \sqrt{\frac{f}{f + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2}}, \quad (348)$$

$$n_3^{-1} = \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2}, \quad (349)$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_2} = \hat{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{f}{f + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2}}, \quad (350)$$

$$\mathbf{v}_g|_{\omega=\omega_3} = \hat{\mathbf{k}} \sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2}. \quad (351)$$

Na próxima seção iremos aplicar os resultados obtidos até o momento no modelo de Euler-Heisenberg e analisar os efeitos de birrefringência do vácuo produzidos por esse parâmetro de quebra de simetria de Lorentz.

5.3 Birrefringência no modelo de Euler-Heisenberg

Até agora, tratamos de um modelo não linear geral. Vamos agora tratar do caso específico da Lagrangeana de Euler-Heisenberg, que é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{F} + \frac{2\alpha^2}{45m^4}(4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2), \quad (352)$$

em que α é a constante de estrutura fina e m é a massa do elétron. Neste caso, obtemos

$$c_1 = 1 - \frac{8\alpha^2 \mathbf{B}^2}{45m^4}, \quad d_1 = \frac{16\alpha^2}{45m^4} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{28\alpha^2}{45m^4}. \quad (353)$$

Em seguida, estudamos os efeitos de birrefringência induzidos pela não linearidade e pelo parâmetro de quebra da simetria de Lorentz. A birrefringência é caracterizada por um índice de refração que depende da direção de propagação da onda. Como na [Seção 5.2](#) consideramos várias possibilidades de configurações geométricas, agora analisamos a birrefringência em duas situações. Para começar, na [Subseção 5.3.1](#), tomamos o parâmetro de quebra da simetria de Lorentz χ ortogonal ao plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ e, em seguida, na [Subseção 5.3.2](#), consideramos a diferença no índice de refração nas situações em que o vetor de onda é paralelo ou ortogonal ao campo magnético de fundo. A segunda situação é quando tomamos χ e $\mathbf{B}$ paralelos. A diferença no índice de refração é investigada, como antes, quando a propagação da onda é tomada paralelamente ou perpendicularmente ao campo magnético.

5.3.1 O plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ é perpendicular a χ

Se $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$, para um campo magnético externo uniforme, obtemos das equações (319) os seguintes índices de refração

$$n_{1\perp} = 1, \quad (354)$$

$$\begin{aligned}
n_{2\perp} &= \left(\sqrt{1 - \frac{d_2(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}} \right)^{-1} \\
&\stackrel{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0}{=} \left(\sqrt{1 - \frac{d_2 \mathbf{B}^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}} \right)^{-1} \\
&= \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2}} \right)^{-1} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{9} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}} \quad (355)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
n_{3\perp} &= \left(\sqrt{1 - \frac{d_1(\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}})^2}{c_1 f}} \right)^{-1} \\
&\stackrel{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0}{=} \left(\sqrt{\frac{c_1 - \chi^2 - d_1 \mathbf{B}^2}{c_1 - \chi^2}} \right)^{-1} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}{1 - \frac{8}{15} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}}. \quad (356)
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, os índices de refração são

$$n_{1\parallel} = n_{2\parallel} = n_{3\parallel} = 1. \quad (357)$$

A birrefringência se manifesta como a diferença entre os índices de refração, sendo assim temos uma matriz com os elementos

$$\Delta_{ij} = n_{i\perp} - n_{j\parallel}, \quad (358)$$

considerando $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ ortogonais ao parâmetro violador da simetria de Lorentz, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \Delta_{12} = \Delta_{13} = 0, \\
\Delta_{21} &= \Delta_{22} = \Delta_{23} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{9} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}} - 1, \\
\Delta_{31} &= \Delta_{32} = \Delta_{33} = \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}{1 - \frac{8}{15} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}} - 1. \quad (359)
\end{aligned}$$

Observa-se, nesse caso, que a violação da simetria de Lorentz afeta apenas os elementos Δ_{3j} , uma vez que apenas o índice de refração n_3 incorpora o parâmetro de violação χ .

5.3.2 $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ são coplanares com χ

Nesse caso, inicialmente considera-se χ paralelo a $\mathbf{B}$ e χ ortogonal a $\mathbf{k}$. Com isso, no primeiro cenário, obtêm-se das equações (348) e (350) os seguintes resultados

$$n_{1\perp} = 1, \quad (360)$$

$$\begin{aligned} n_{2\perp} &= \left(\sqrt{\frac{f}{f + \frac{d_2}{c_1} \mathbf{B}^2}} \right)^{-1} \\ &\stackrel{c_1 f = c_1 - \chi^2}{=} \left(\sqrt{\frac{c_1 - \chi^2}{c_1 + d_2 \mathbf{B}^2 - \chi^2}} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{9} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}} \end{aligned} \quad (361)$$

e

$$\begin{aligned} n_{3\perp} &= \left(\sqrt{1 - \frac{d_1}{c_1} \mathbf{B}^2} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{15} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}}. \end{aligned} \quad (362)$$

Outra configuração ocorre quando χ é paralelo tanto a $\mathbf{B}$ quanto a $\mathbf{k}$. Nesse caso, a partir da equação (333), obtêm-se os seguintes resultados

$$n_{1\parallel} = 1, \quad (363)$$

$$\begin{aligned} n_{2\parallel} = n_{3\parallel} &= \left(\sqrt{f} \right)^{-1} = \left(\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{c_1}} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}^2}{m^4} - \chi^2}}. \end{aligned} \quad (364)$$

Desta forma, os elementos de matriz da diferença de índices de refração são dados por

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} &= 0, \\
 \Delta_{12} &= \Delta_{13} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}}, \\
 \Delta_{21} &= \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{9} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}} - 1, \\
 \Delta_{22} &= \Delta_{23} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{9} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}}, \\
 \Delta_{31} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{15} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}} - 1, \\
 \Delta_{32} &= \Delta_{33} = \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{15} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4}}{1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} - \chi^2}}. \tag{365}
 \end{aligned}$$

É interessante notar como o campo magnético e o parâmetro de violação de Lorentz competem entre si. Em todas as situações, χ^2 deve ser comparado com $\frac{\alpha^2 B^2}{m^4}$. Espera-se que χ^2 seja um parâmetro muito pequeno. Para um campo magnético da ordem de $1T \sim 10^{-15} \text{ GeV}^2$, temos $\frac{\alpha^2 B^2}{m^4} \sim 10^{-22}$, o que pode ser compatível com a magnitude do vetor de quebra da simetria de Lorentz e com o resultado da birrefringência magnética do vácuo, da ordem 10^{-24} (PAIXÃO et al., May 2024). Por outro lado, para campos magnéticos da ordem de $B \sim 10^2 T \sim 10^{-13} \text{ GeV}^2$, temos $\frac{\alpha^2 B^2}{m^4} \sim 10^{-18}$, e a influência da violação da simetria de Lorentz começa a se tornar insignificante.

No caso da birrefringência do vácuo, a dispersão da luz produzida por objetos galácticos e extragalácticos fornece limites da ordem de 10^{-16} em certos coeficientes para a violação da simetria de Lorentz no setor de fótons (KOSTELECKÝ; MEWES, 2002). Das tabelas de dados em (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011), podemos ver que os limites experimentais nos coeficientes da SME são muito restritivos. Em particular, para os coeficientes adimensionais nos quais estamos interessados, temos que $\kappa^{\mu\nu\lambda\rho}$ está limitado a cerca de 10^{-17} .

Em seguida, vejamos como a birrefringência se manifesta se o campo magnético estiver ausente. Como não temos o vetor $\mathbf{B}$, ficamos apenas com a direção relativa de $\mathbf{k}$ em comparação com χ . Vamos comparar as situações em que os vetores são perpendiculares e paralelos. Para $\chi \perp \mathbf{k}$, não há modificação nos índices de refração, todos sendo iguais a 1. Porém, quando a onda se propaga paralelamente a χ , ocorre um leve aumento no índice de refração, uma vez que obtemos

$$n_{1\parallel} = 1, \tag{366}$$

$$n_{2\parallel} = n_{3\parallel} = \sqrt{\frac{1}{1 - \chi^2}}. \tag{367}$$

6 Conclusão

Conforme discutido ao longo desta tese, investigamos dois modelos: a eletrodinâmica de Maxwell e um modelo geral não linear de eletrodinâmica, ambos analisados com a inclusão de um termo CPT-par que viola a simetria de Lorentz. Esse termo é parametrizado pelo quadrivetor χ^μ , que define uma direção especial no espaço-tempo.

No primeiro modelo, derivamos as leis de conservação de energia e momento modificadas pela violação de Lorentz. Em seguida, na [Subseção 3.2.1](#) encontramos o campo elétrico para uma carga puntiforme na origem. Por fim, na [Seção 3.3](#), consideramos o caso particular em que o parâmetro violador de Lorentz $\chi^\mu = (0, \chi)$ é puramente espacial e constante. Sob essa hipótese, obtivemos a forma do potencial vetor que incorpora a violação de Lorentz, com o objetivo de investigar, em trabalhos andamento, os efeitos Aharonov-Bohm e seu análogo conhecido na literatura como efeito Aharonov-Casher.

Já para o segundo modelo, no [Capítulo 5](#), consideramos o caso em que o campo externo é um campo magnético uniforme e constante no tempo, e o parâmetro violador de Lorentz é constante e puramente espacial ($\chi^\mu = (0, \chi)$), conforme abordado no primeiro caso. Descobrimos que os dois fundos, magnético ($\mathbf{B}$) e o violador de Lorentz (χ), afetam a propagação da onda. Analisamos os casos em que o campo magnético $\mathbf{B}$ e o vetor de onda $\mathbf{k}$ são ortogonais a χ ou coplanares com este vetor de quebra de simetria de Lorentz. No caso dos três vetores serem coplanares, três situações foram consideradas: na primeira, o vetor χ é ortogonal tanto a $\mathbf{B}$ quanto a $\mathbf{k}$, que são paralelos entre si; no segundo caso, os três vetores são paralelos entre si; e, no terceiro caso, $\mathbf{k}$ é ortogonal a ambos, $\mathbf{B}$ e χ , que são paralelos entre si. No caso da onda se propagar paralelamente ao campo magnético, mas ortogonal ao quadrivetor violador de simetria de Lorentz, as relações de dispersão são surpreendentemente preservadas. Não foi o caso nas demais situações estudadas, nas quais verificaram-se modificações nas relações de dispersão e, consequentemente, nos índices de refração no vácuo e nas velocidades de grupo.

Tendo em vista os efeitos do campo magnético externo e da violação de simetria de Lorentz na propagação da onda, foram realizadas discussões sobre birrefringência para um modelo de Euler-Heisenberg. Isso foi feito comparando os índices de refração quando o fóton se propaga paralelamente e ortogonalmente ao campo magnético. Além disso, foram consideradas duas situações: $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ são ortogonais a χ , e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{k}$ são coplanares com χ . Em todos os casos, verificamos que os dois vetores externos competem entre si por meio das magnitudes de χ^2 e $\frac{a^2 \mathbf{B}^2}{m^4}$. Os efeitos da violação de simetria de Lorentz acabam sendo desprezíveis em comparação com os de um campo magnético externo próximo ao crítico. Também verificamos que, na ausência do campo magnético, a propagação da onda não é afetada quando ela ocorre na direção perpendicular ao vetor de fundo χ .

Ainda há diversos pontos que merecem investigação e que podem ser desenvolvidos em trabalhos futuros. De início, é importante estudar como um vetor de quebra de simetria de Lorentz

do tipo temporal, $\chi^\mu = (\chi_0, \mathbf{0})$, modifica o segundo modelo. Além disso, seria relevante obter as relações de dispersão para esse modelo na ausência de violação de Lorentz, considerando cenários em que o campo de fundo externo varia no tempo ou no espaço.

A análise dos efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher no contexto do primeiro modelo está em andamento. No futuro, pretende-se estender essa investigação para o segundo modelo, cuja natureza não linear representa um desafio adicional e para o qual, até o momento, não há resultados disponíveis na literatura.

Por fim, também pretende-se explorar outros cenários com a quebra de simetria de Lorentz, com o objetivo de investigar a nova física que pode surgir ao considerar os efeitos Compton e a radiação Cherenkov ([NEVES et al., 2021](#); [GAETE; HELAYËL-NETO, 2023b](#)).

Apêndices

APÊNDICE A – Álgebra das matrizes

Neste apêndice, apresentaremos uma revisão detalhada de alguns resultados utilizados ao longo do texto. Inicialmente, iremos calcular a inversa de uma matriz da forma $M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j$.

A.1 Inversão de Matrizes

Consideremos a matriz com a forma

$$M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j. \quad (368)$$

A matriz inversa de M_{ij} , denotada por $(M^{-1})_{jm}$, na qual sua estrutura deve contemplar todas as combinações possíveis de u e v , ou seja

$$(M^{-1})_{jm} = x\delta_{jm} + yu_j v_m + tv_j u_m + wv_j v_m + zu_j u_m. \quad (369)$$

Como $M_{ij}(M^{-1})_{jm} = \delta_{im}$ temos,

$$(\alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j)(x\delta_{jm} + yu_j v_m + tv_j u_m + wv_j v_m + zu_j u_m) = \delta_{im}, \quad (370)$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \alpha x \delta_{im} + (\alpha z + \beta z(u \cdot v) + \beta t v^2) u_i u_m + \alpha w v_i v_m + \\ & + (\alpha y + \beta x + \beta w v^2 + \beta y(u \cdot v)) u_i v_m + \alpha t v_i u_m = \delta_{im}. \end{aligned} \quad (371)$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha x = 1 \\ \alpha z + \beta z(u \cdot v) + \beta t v^2 = 0 \\ \alpha w = 0 \Rightarrow w = 0 \\ \alpha y + \beta x + \beta w v^2 + \beta y(u \cdot v) = 0 \\ \alpha t = 0 \Rightarrow t = 0. \end{cases} \quad (372)$$

e então, $t = w = z = 0$, $x = \frac{1}{\alpha}$ e $y = -\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta u \cdot v)}$. Portanto, M^{-1} é dada por

$$(M^{-1})_{jm} = \frac{1}{\alpha} \delta_{jm} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta u \cdot v)} u \cdot v. \quad (373)$$

Outro resultado importante utilizado ao longo do texto foi o cálculo do determinante de certas matrizes de ordem três. Da álgebra linear, em particular do teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que o determinante de uma matriz $M_{3 \times 3}$ (de ordem três) pode ser expresso na forma

$$\det M = \frac{1}{6}(\text{tr } M)^3 - \frac{1}{2} \text{tr } (M^2) (\text{tr } M) + \frac{1}{3} \text{tr } (M^3). \quad (374)$$

Diante disto, vamos discutir alguns casos de matrizes de ordem três das quais fizemos uso em nosso texto.

A.2 Caso 1: determinante da matriz $M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j$

A princípio, vamos considerar que a matriz M seja escrita como

$$M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j. \quad (375)$$

Sendo assim, calculemos $\det M$ por meio da equação (374). De início, notemos que

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^3 M_{ii} = 3\alpha + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (376)$$

Temos também, por definição do produto de matrizes, que $(M^2)_{ij} = \sum_{k=1}^3 M_{ik} M_{kj}$. Então:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M^2) &= \sum_{i=1}^3 (M^2)_{ii} = M_{ij} M_{ji} \\ &= (\alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j) (\alpha\delta_{ji} + \beta u_j v_i) \\ &= 3\alpha^2 + 2\alpha\beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= (3\alpha + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 4\alpha (\beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 6\alpha^2. \end{aligned} \quad (377)$$

Por fim, $(M^3)_{ij} = (M^2)_{ik} M_{kj} = M_{i\ell} M_{\ell k} M_{kj}$. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M^3) &= M_{i\ell} M_{\ell k} M_{ki} \\ &= (\alpha\delta_{i\ell} + \beta u_i v_\ell) (\alpha\delta_{\ell k} + \beta u_\ell v_k) M_{ki} \\ &= \left(\alpha^2 \delta_{ik} + 2\alpha\beta u_i v_k + \beta^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) u_i v_k \right) (\alpha\delta_{ki} + \beta u_k v_i) \\ &= 3\alpha^3 + 3\alpha^2\beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 3\alpha\beta^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 + \beta^3 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^3 \\ &= (3\alpha + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^3 - 24\alpha^2\beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - 6\alpha\beta^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 24\alpha^3. \end{aligned} \quad (378)$$

Portanto, substituindo os resultados obtidos em (376), (377) e (378) em (374), obtemos

$$\det M = \alpha^2 (\alpha + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \quad (379)$$

A.3 Caso 2: determinante da matriz $M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j + \gamma w_i B_j$

Suponhamos agora que nossa matriz seja escrita na forma

$$M_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j + \gamma w_i B_j. \quad (380)$$

Procedendo da mesma forma do caso anterior, temos

$$\text{Tr } M = \sum_{i=1}^3 M_{ii} = 3\alpha + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{B}. \quad (381)$$

Temos, também,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M^2) &= \sum_{i=1}^3 (M^2)_{ii} = M_{ij}M_{ji} \\ &= (\alpha\delta_{ij} + \beta u_i v_j + \gamma w_i B_j) (\alpha\delta_{ji} + \beta u_j v_i + \gamma w_j B_i) \\ &= 3\alpha^2 + 2\alpha\beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2\alpha\gamma (\mathbf{w} \cdot \mathbf{B}) + 2\beta\gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &\quad + \beta^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 (\mathbf{w} \cdot \mathbf{B})^2. \end{aligned} \quad (382)$$

Por fim:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M^3) &= M_{i\ell}M_{\ell k}M_{ki} \\ &= (\alpha\delta_{i\ell} + \beta u_i v_\ell + \gamma w_i B_\ell) (\alpha\delta_{\ell k} + \beta u_\ell v_k + \gamma w_\ell B_k) M_{ki} \\ &= \{ \alpha^2 \delta_{ik} + 2\alpha\beta u_i v_k + 2\alpha\gamma w_i B_k + \beta\gamma (u_i B_k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + w_i v_k (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})) \\ &\quad + \beta^2 u_i v_k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \gamma^2 w_i B_k (\mathbf{B} \cdot \mathbf{w}) \} (\alpha\delta_{ki} + \beta u_k v_i + \gamma w_k B_i) \\ &= 3\alpha^3 + 3\alpha^2\beta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 3\alpha^2\gamma (\mathbf{w} \cdot \mathbf{B}) + 3\alpha\beta^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &\quad + 6\alpha\beta\gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + 3\alpha\gamma^2 (\mathbf{w} \cdot \mathbf{B})^2 + \beta^3 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^3 + \gamma^3 (\mathbf{w} \cdot \mathbf{B})^3 \\ &\quad + 3\beta^2\gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + 3\beta\gamma^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (383)$$

Substituindo as equações (381), (382) e (383) na identidade (374) obtemos

$$\det M = \alpha [(\alpha + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\alpha + \gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{B}) - \beta\gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] \quad (384)$$

A.4 Caso 3: determinante da matriz $M_{ij} = a\delta_{ij} + b\kappa_i k_j + c\gamma_i \Gamma_j + d\delta_i \Delta_j$

Suponhamos agora que nossa matriz seja escrita na forma

$$M_{ij} = a\delta_{ij} + b\kappa_i k_j + c\gamma_i \Gamma_j + d\delta_i \Delta_j. \quad (385)$$

Devido ao cálculo extenso e exaustivo, apresentaremos somente o resultado do determinante para esse caso. Porém, os passos para chegar a este resultado são os mesmos usados nos

dois casos anteriores. O resultado é dado por

$$\begin{aligned}
 \det M = & a \{ a [a + b (\kappa \cdot k) + c (\gamma \cdot \Gamma) + d (\delta \cdot \Delta)] \\
 & + bc [(\kappa \cdot k) (\gamma \cdot \Gamma) - (\kappa \cdot \Gamma) (k \cdot \gamma)] \\
 & + bd [(\kappa \cdot k) (\delta \cdot \Delta) - (\kappa \cdot \Delta) (k \cdot \delta)] \\
 & + cd [(\gamma \cdot \Gamma) (\delta \cdot \Delta) - (\gamma \cdot \Delta) (\Gamma \cdot \delta)] \} \\
 & + bcd \{ (\kappa \cdot k) [(\gamma \cdot \Gamma) (\delta \cdot \Delta) - (\gamma \cdot \Delta) (\Gamma \cdot \delta)] \\
 & + (\kappa \cdot \Delta) [(k \cdot \gamma) (\Gamma \cdot \delta) - (\gamma \cdot \Gamma) (k \cdot \delta)] \\
 & + (\kappa \cdot \Gamma) [(k \cdot \delta) (\gamma \cdot \Delta) - (k \cdot \gamma) (\delta \cdot \Delta)] \}. \tag{386}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE B – Expansão da Lagrangeana de Euler-Heisenberg

Hans Euler e Werner Heisenberg publicaram a Lagrangeana efetiva no resumo de seu artigo de 1936 em uma representação integral de forma fechada ([HEISENBERG; EULER, 1936](#)), dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = & \mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \\ & \times \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\Re \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\Im \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} + \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} - 1 \right], \end{aligned} \quad (387)$$

em que $\Re$ e $\Im$ representam as partes real e imaginária, respectivamente, e $m = 0.5$ MeV é a massa do elétron.

Fazendo-se

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 2\mathcal{F} = a^2 - b^2 \quad (388)$$

e

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathcal{G} = ab, \quad (389)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})}) &= \cosh(es\sqrt{-a^2 + b^2 + 2iab}) \\ &= \cosh(es\sqrt{(b + ia)^2}) \\ &= \cosh(es(b + ia)) \\ &= \cosh(esb) \cosh(iesa) + \sinh(esb) \sinh(iesa) \\ &= \cosh(esb) \cosh(esa) + i \sinh(esb) \sinh(esa). \end{aligned} \quad (390)$$

Assim, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\Re \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\Im \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} \mathcal{G} &= \frac{\cosh(esb) \cosh(esa)}{\sinh(esb) \sinh(esa)} ab \\ &= \coth(esb) \coth(esa) ab. \end{aligned} \quad (391)$$

Fazendo-se a expansão em série de Taylor para s pequeno, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\Re \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\Im \cosh(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} \mathcal{G} &\simeq \frac{1}{e^2 s^2} + \frac{1}{3} (b^2 - a^2) \\ &\quad - \frac{1}{45} (a^4 + 5a^2 b^2 + b^4) e^2 s^2. \end{aligned} \quad (392)$$

Notemos que

$$a^4 + 5a^2b^2 + b^4 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + 7a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 + 7a^2b^2. \quad (393)$$

Reescrevendo a equação (392), temos

$$\begin{aligned} \frac{\Re \cosh \left(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})} \right)}{\Im \cosh \left(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})} \right)} \mathcal{G} &\simeq \frac{1}{e^2 s^2} + \frac{1}{3} (b^2 - a^2) \\ &- \frac{1}{45} \left[(a^2 - b^2)^2 + 7a^2b^2 \right] e^2 s^2. \end{aligned} \quad (394)$$

Assim,

$$(es)^2 \mathcal{G} \frac{\Re \cosh \left(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})} \right)}{\Im \cosh \left(es\sqrt{2(-\mathcal{F} + i\mathcal{G})} \right)} + \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} - 1 \simeq \frac{-(es)^4}{45} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2). \quad (395)$$

Reescrevendo a equação (387), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \mathcal{F} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \frac{(es)^4}{45} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) \\ &= \mathcal{F} + \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^4}{45} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) \underbrace{\int_0^\infty e^{-m^2 s} ds}_{1/m^4}. \end{aligned} \quad (396)$$

Como $4\pi\epsilon_0 = 1$, implica $1/8\pi^2 = 2\epsilon_0^2$, a equação (396) fica

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{F} + \frac{2\epsilon_0^2 e^4}{45m^4} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2). \quad (397)$$

Fazendo-se, então, $e^2 = \alpha$ e sabendo-se que as convenções $\epsilon_0 = \mu_0 = \hbar = c = 1$ são adotadas neste texto, concluímos que

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{F} + \frac{2\alpha^2}{45m^4} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2), \quad (398)$$

que é o resultado que queríamos demonstrar.

Referências

- ADLER, S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. **Annals of Physics**, v. 67, n. 2, p. 599–647, Oct 1971. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 60.
- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 115, p. 485–491, Aug 1959. Citado na página 39.
- AIELLO, M.; FERRARO, R.; GIRIBET, G. Hoffmann-Infeld black-hole solutions in Lovelock gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, n. 13, p. 2579–2588, 2005. Citado na página 53.
- AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. Constraining Born–Infeld-like nonlinear electrodynamics using hydrogen’s ionization energy. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 2, p. 143, Feb 2018. Citado na página 12.
- AKMANSOY, P. N.; MEDEIROS, L. G. Constraining nonlinear corrections to Maxwell electrodynamics using $\gamma\gamma$ scattering. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 99, n. 11, p. 115005, Jun 2019. Citado na página 12.
- AYÓN-BEATO, E.; GARCÍA, A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. **Physics Letters B**, v. 493, n. 1, p. 149–152, Nov 2000. Citado na página 12.
- BAIER, R.; BREITENLOHNER, P. The vacuum refraction index in the presence of external fields. **Nuovo Cimento B**, v. 47, n. 1, p. 117–120, Jan 1967. Citado na página 12.
- BAMBER, C. et al. Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 60, p. 092004, Oct 1999. Citado na página 56.
- BANERJEE, R.; ROYCHOWDHURY, D. Critical behavior of Born-Infeld Ads black holes in higher dimensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, n. 10, p. 104043, May 2012. Citado na página 12.
- BATTESTI, R.; RIZZO, C. Magnetic and electric properties of a quantum vacuum. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 76, n. 1, p. 016401, Dec 2012. Citado na página 13.
- BELICH, H. et al. Violação da simetria de Lorentz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Sociedade Brasileira de Física, v. 29, n. 1, p. 57–64, 2007. Citado na página 30.
- BERGSHOEFF, E. et al. The Born-Infeld action from conformal invariance of the open superstring. **Physics Letters B**, v. 188, n. 1, p. 70–74, 1987. Citado na página 12.
- BIALYNICKA-BIRULA, Z.; BIALYNICKI-BIRULA, I. Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 2, p. 2341–2345, Nov 1970. Citado na página 49.
- BISWAS, S.; MELNIKOV, K. Rotation of a magnetic field does not impact vacuum birefringence. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 75, n. 5, p. 053003, Mar 2007. Citado na página 12.
- BOILLAT, G. Nonlinear Electrodynamics: Lagrangians and Equations of Motion. **Journal of Mathematical Physics**, v. 11, n. 3, p. 941–951, 03 1970. Citado na página 49.

- BORGES, L. H. C.; FERRARI, A. F. External sources in a minimal and nonminimal CPT-odd Lorentz violating Maxwell electrodynamics. **Modern Physics Letters A**, v. 37, n. 04, p. 2250021, 2022. Citado na página 39.
- BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 144, p. 425–451, Mar 1934. Citado 4 vezes nas páginas 12, 53, 56 e 58.
- BURKE, D. L. et al. Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 79, p. 1626–1629, Sep 1997. Citado na página 56.
- CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 41, n. 4, p. 1231–1240, Feb 1990. Citado na página 13.
- CARROLL, S. M.; TAM, H. Aether compactification. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 044047, Aug 2008. Citado na página 14.
- CARVALHO, A. et al. Perturbative generation of photon Lorentz violating terms from a pseudo-tensor Lorentz-breaking extension of QED. **Nuclear Physics B**, v. 942, p. 393–409, 2019. ISSN 0550-3213. Citado na página 49.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 55, n. 11, p. 6760–6774, Jun 1997. Citado na página 13.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, n. 11, p. 116002, Oct 1998. Citado na página 13.
- COSTANTINI, V.; TOLLIS, B. D.; PISTONI, G. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. **Nuov Cim A** 2, v. 2, n. 3, p. 733–787, Apr 1971. Citado na página 12.
- de Melo, C. et al. Aharonov-Bohm effect in Generalized Electrodynamics. **Nuclear Physics B**, v. 1005, p. 116616, 2024. ISSN 0550-3213. Citado na página 39.
- DIRAC, P. A. M. Theory of electrons and protons. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 126, n. 801, p. 360–365, Jan 1930. Citado na página 12.
- EULER, H.; HEISENBERG, W. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. **Zeitschrift für Physik**, v. 98, n. 11, p. 714–732, Nov 1936. Citado 3 vezes nas páginas 12, 53 e 56.
- FERRANDO, A. et al. Nonlinear Phase Shift from Photon-Photon Scattering in Vacuum. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 99, n. 15, p. 150404, Oct 2007. Citado na página 12.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics: The Definitive and Extended Edition**. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 2005. Citado na página 16.
- FRADKIN, E.; TSEYTLIN, A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. **Physics Letters B**, v. 163, n. 1, p. 123–130, Nov 1985. Citado na página 12.
- GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. Finite field-energy and interparticle potential in logarithmic electrodynamics. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 3, p. 2816, Mar 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.
- GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. Remarks on nonlinear electrodynamics. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 11, p. 3182, Nov 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.

- GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. A. **QED-vacuum response and Cherenkov radiated energy in non-linear and Lorentz-symmetry violating scenarios**. 2023. Citado na página 36.
- GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. A. **QED-vacuum response and Cherenkov radiated energy in non-linear and Lorentz-symmetry violating scenarios**. 2023. Citado na página 78.
- GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. A.; OSPEDAL, L. P. R. Coulomb's law modification driven by a logarithmic electrodynamics. **Europhysics Letters**, EDP Sciences, IOP Publishing and Società Italiana di Fisica, v. 125, n. 5, p. 51001, Apr 2019. Citado 4 vezes nas páginas 13, 53, 56 e 57.
- GAZZOLA, G. et al. QED with minimal and nonminimal couplings: on the quantum generation of Lorentz-violating terms in the pure photon sector. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 3, p. 035002, jan 2012. Citado na página 14.
- GOMES, M. et al. Aetherlike Lorentz-breaking actions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 81, n. 4, fev. 2010. ISSN 1550-2368. Citado na página 31.
- GOMES, M. et al. Aetherlike Lorentz-breaking actions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, n. 4, p. 045018, Feb 2010. Citado na página 14.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum Electrodynamics**. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, 2008. Citado na página 57.
- GRIFFITHS, D. j. **Introduction to Electrodynamics-3rd ed.** [S.l.]: Prentice-Hall, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 16, 18 e 39.
- GUNASEKARAN, S.; KUBIZŃÁK, D.; MANN, R. B. Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization. **Journal of High Energy Physics**, v. 2012, n. 11, p. 110, Nov 2012. Citado na página 12.
- GURALNIK, Z. et al. Testing non-commutative QED, constructing non-commutative MHD. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 517, n. 3–4, p. 450–456, out. 2001. ISSN 0370-2693. Citado na página 49.
- HAAS, F. et al. Modified plasma waves described by a logarithmic electrodynamics. **Physics of Plasmas**, v. 26, n. 4, p. 042108, Apr 2019. Citado na página 13.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of Dirac's theory of positrons. **Z. Phys.**, v. 98, n. 11-12, p. 714–732, nov 1936. Citado na página 84.
- HU, X.-P.; LIAO, Y. Effective field theory approach to light propagation in an external magnetic field. **The European Physical Journal C**, v. 53, n. 4, p. 635–639, Feb 2008. Citado na página 12.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486134697. Citado na página 16.
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics; 2nd ed.** New York, NY: Wiley, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- JÚNIOR, E. N.; FELIPE, J. C. C.; SCARPELLI, A. P. B. On the nonlinear electrodynamics in a Lorentz-breaking scenario. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 57, n. 22, p. 225401, may 2024. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 61.

- KARBSTEIN, F. Probing Vacuum Polarization Effects with High-Intensity Lasers. **Particles**, v. 3, n. 1, p. 39–61, Jan 2020. Citado na página 13.
- KING, B.; HEINZL, T. Measuring vacuum polarization with high-power lasers. **High Power Laser Science and Engineering**, v. 4, p. e5, Mar 2016. Citado na página 13.
- KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 69, p. 105009, May 2004. Citado na página 31.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 87, n. 25, p. 251304, Nov 2001. Citado na página 62.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Signals for Lorentz violation in electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 66, n. 5, p. 056005, Sep 2002. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 76.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 80, n. 1, p. 015020, Jul 2009. Citado na página 62.
- KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data tables for Lorentz and CPT violation. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 83, n. 1, p. 11–31, Mar 2011. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 76.
- KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 39, p. 683–685, Jan 1989. Citado na página 14.
- KRUGLOV, S. I. Black hole solution in the framework of arctan-electrodynamics. **International Journal of Modern Physics D**, v. 26, n. 08, p. 1750075, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.
- KRUGLOV, S. I. Vacuum birefringence from the effective Lagrangian of the electromagnetic field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 75, n. 11, p. 117301, Jun 2007. Citado na página 12.
- KRUGLOV, S. I. Nonlinear arcsin-electrodynamics. **Annalen der Physik**, v. 527, n. 5-6, p. 397–401, Mar 2015. Citado na página 13.
- MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. **Lorentz Symmetry Breaking - Classical and Quantum Aspects**. [S.l.]: Springer Cham, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 13, 30 e 31.
- MARKLUND, M.; LUNDIN, J. Quantum vacuum experiments using high intensity lasers. **The European Physical Journal D**, v. 55, n. 2, p. 319–326, Nov 2009. Citado na página 13.
- MATTINGLY, D. Modern Tests of Lorentz Invariance. **Living Reviews in Relativity**, JOUR, v. 8, p. 1433–8351, Dec 2005. Citado na página 14.
- NEVES, M. J. et al. Dispersion relations in nonlinear electrodynamics and the kinematics of the Compton effect in a magnetic background. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 104, n. 1, p. 015006, Jul 2021. Citado 8 vezes nas páginas 15, 42, 43, 49, 50, 67, 70 e 78.

PAIXÃO, J. M. A. et al. Probing the interference between non-linear, axionic and space-time-anisotropy effects in the qed vacuum. **Journal of High Energy Physics**, v. 2024, n. 5, p. 29, May 2024. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 76.

PIKE, O. J. et al. A photon–photon collider in a vacuum hohlraum. **Nature Photon.**, v. 8, p. 434–436, 2014. Citado na página 56.

RAMOS, I. R. O. et al. Sobre a indução do campo eletromagnético em referenciais inerciais mediante transformações de Galileu e Lorentz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Sociedade Brasileira de Física, v. 39, n. 2, 2017. ISSN 1806-1117. Citado na página 16.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. Paperback. ISBN 0521478146. Citado na página 16.

SCARPELLI, A. P. B. QED with chiral nonminimal coupling: aspects of the Lorentz-violating quantum corrections. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 39, n. 12, p. 125001, oct 2012. Citado na página 14.

SCARPELLI, A. P. B. et al. Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities. **The European Physical Journal C**, v. 73, n. 8, p. 2526, may 2013. Citado na página 14.

SCHWINGER, J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 82, n. 5, p. 664–679, Jun 1951. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 59.

TOMMASINI, D. et al. Detecting photon-photon scattering in vacuum at exawatt lasers. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 77, p. 042101, Apr 2008. Citado na página 56.

TOMMASINI, D. et al. Precision tests of QED and non-standard models by searching photon-photon scattering in vacuum with high power lasers. **Journal of High Energy Physics**, v. 2009, n. 11, p. 043, nov 2009. Citado na página 56.

TOMMASINI, D. et al. Detecting photon-photon scattering in vacuum at exawatt lasers. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 77, n. 4, p. 042101, Apr 2008. Citado na página 12.

TOMMASINI, D. et al. Precision tests of QED and non-standard models by searching photon-photon scattering in vacuum with high power lasers. **Journal of High Energy Physics**, v. 2009, n. 11, p. 043, Nov 2009. Citado na página 12.

ZAVATTINI, G. et al. The PVLAS experiment: detecting vacuum magnetic birefringence. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 442, n. 1, p. 012057, jun 2013. Citado na página 12.