





CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE ROBUSTO H_∞ POR REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA COMBINANDO FORMULAÇÕES LMI E OTIMIZAÇÃO EVOLUTIVA

Lucas Santos Gonçalves

Belo Horizonte

Setembro de 2021







CONTROLE ROBUSTO H_∞ POR REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA COMBINANDO FORMULAÇÕES LMI E OTIMIZAÇÃO EVOLUTIVA

Lucas Santos Gonçalves

Texto da Dissertação de Mestrado submetido à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Análise e Modelagem de Sistemas

Linha de Pesquisa: Sistemas de Controle

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves

Belo Horizonte

Setembro de 2021

Gonçalves, Lucas Santos
G635c Controle robusto $H\infty$ por realimentação estática de saída combinando formulações LMI e otimização evolutiva / Lucas Santos Gonçalves. – 2021.
79 f.: il., gráfs, tabs.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica em associação ampla entre a UFSJ e o CEFET-MG.
Orientador: Eduardo Nunes Gonçalves.
Banca examinadora: Eduardo Nunes Gonçalves, Cristiano Marcos Agulhari, Márcio J. Lacerda.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Controle H [símbolo do infinito] – Teses. 2. Controle automático – Teses. 3. Sistemas de controle por realimentação – Teses. 4. Sistemas de controle linear – Teses. 5. Desigualdades matriciais – Teses. 6. Computação evolutiva – Teses. I. Gonçalves, Eduardo Nunes. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Universidade Federal de São João del-Rei. IV. Título.

CDD 629.8

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Lucas Santos Gonçalves

"Controle Robusto H∞ por Realimentação Estática de Saída Combinando Formulações LMI e Otimização Evolutiva."

Dissertação nº 279 apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João Del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais em 17 de Setembro de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Dedico este trabalho aos meus pais Adriane e Marcílio e à minha esposa Natália.

Agradecimentos

Vejo como imprescindível o agradecimento à minha família e meus amigos pelo apoio incondicional, sempre me incentivando na busca de novos conhecimentos e na conclusão do tão sonhado título de Mestre em Engenharia Elétrica. Em especial, menciono meus pais Adriane e Marcílio, minha esposa Natália e meu querido amigo Caio.

Também é importante mencionar a disposição e flexibilidade de meu professor-orientador Dr. Eduardo Nunes Gonçalves, além de toda paciência, simplicidade e empenho em diversas tarefas ao longo do curso de Mestrado, relacionadas principalmente à abordagem do presente trabalho e ao seu desenvolvimento.

Por último, sob aspectos profissionais, ressalto a participação do Giordano e do Novack, amigos e colegas na época de Houer, que sempre estiveram dispostos a ajudar em temas relacionados ao curso de Mestrado, além de instigar reflexões sobre demais temas relacionados à Engenharia Elétrica.

“Ou você diminui seus sonhos, ou você aumenta suas habilidades. Essa escolha é sua.”

Jim Rohn

Resumo

Desigualdades matriciais lineares são uma ferramenta importante para lidar tanto com análise como síntese de sistemas de controle, especialmente para problemas incertos representados por modelos politópicos. Desigualdade matriciais lineares são aplicadas com sucesso para síntese de controladores por realimentação de estado. Por outro lado, controle robusto por realimentação estática ou dinâmica de saída são mais complicados de serem formulados como problemas de otimização convexos. Diferentes estratégias para obter formulações que utilizam desigualdades matriciais lineares para síntese de controladores por realimentação estática de saída requerem a busca de parâmetros específicos, escalares e/ou matrizes, que afetam o desempenho do controlador resultante ou até mesmo a existência de uma solução factível. Neste trabalho são propostos problemas de otimização para determinar estes parâmetros, com o objetivo de se obter a otimalidade para sistemas de controle robusto H_∞ por realimentação estática de saída para sistemas lineares invariantes no tempo contínuo no tempo. Um algoritmo de otimização evolutivo é selecionado para obter a solução do problema proposto. São apresentados estudos de caso para demonstrar a vantagem de combinar otimização com as formulações LMI.

Palavras-chave: Controle robusto H_∞, realimentação estática de saída, desigualdade matricial linear, otimização evolutiva, método Evolução Diferencial.

Abstract

Linear matrix inequality formulations are an important tool to tackle analysis and synthesis of control systems, especially for uncertain systems represented by polytopic models. Linear matrix inequalities are successfully applied to robust state-feedback control synthesis. On the other hand, robust static or dynamic output-feedback control synthesis are more complicated to formulate as a convex optimization problem. Different strategies for obtaining Linear Matrix Inequalities formulations for static output-feedback control synthesis requires the calculation of specific parameters, scalar and/or matrix, which directly affect the performance of the resulting controller or even the existence of a feasible solution. In this work, optimization problems are proposed to determine these parameters, aiming to obtain the optimal robust H_∞ static output-feedback control system for continuous-time time-invariant linear systems. An evolutionary optimization algorithm is selected to solve the proposed problem. It is presented case studies to demonstrate the advantage of combining optimization with LMI formulations.

Keywords: Optimization in Control and Automation systems; robust control, H_∞ control, static output-feedback control.

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso do Exemplo 17 (Dong & Yang, 2013). 38

Tabela 4.2 – Resultados obtidos para as integrais dos erros quadráticos (ISE) para o Exemplo 17 (Dong & Yang, 2013). 41

Tabela 4.3 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso do sistema de quatro tanques. 45

Tabela 4.4 – Resultados obtidos para as integrais dos erros ao quadrado (ISE) para sistema de quatro tanques. 52

Tabela 4.5 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso de suspensão de veículo. 56

Tabela 4.6 – Resultados obtidos para as integrais dos erros quadráticos (ISE) para estudo de caso de suspensão de veículo. 64

Tabela 4.7 – Resultados obtidos para as formulações LMI do estudo de caso do VTOL. 66

Tabela 4.8 – Resultados obtidos para as integrais dos erros ao quadrado (ISE) para estudo de caso do VTOL. 69

Tabela 4.9 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso da aeronave L-1011. 72

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Diagrama de blocos geral do sistema de controle em malha-fechada. 7

Figura 2.2 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Xie. 19

Figura 2.3 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Chang. 22

Figura 2.4 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Agulhari. 24

Figura 2.5 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Agulhari associada ao método de otimização. 27

Figura 3.1 – Fluxograma ilustrativo para implementação do método DE. 30

Figura 4.1 – Respostas transitórias da saída $y1t$ para o sistema com pior caso de norma $H\infty$ comparando a utilização ou não de método de otimização para o Exemplo 17.... 40

Figura 4.2 – Respostas transitórias do sinal de controle ut para o sistema com pior caso de norma $H\infty$ comparando a utilização ou não de método de otimização para o Exemplo 17. 40

Figura 4.3 – Representação esquemática do estudo de caso referente ao sistema para controle de nível de quatro tanques (Johansson, 2000). 43

Figura 4.4 – Resposta transitória do sinal de controle do sistema (tensão elétrica na Bomba 1) para os vértices do sistema de quatro tanques. 47

Figura 4.5 – Resposta transitória do nível do Tanque 1 para os vértices do sistema de quatro tanques. 48

Figura 4.6 – Sinais de referência wt aplicados ao sistema de quatro tanques. 49

Figura 4.7 – Resposta transitória para os níveis dos tanques do sistema de quatro tanques. 49

Figura 4.8 – Resposta transitória das integrais dos erros de rastreamento para o vértice de pior caso do sistema de quatro tanques. 50

Figura 4.9 – Respostas transitórias dos níveis dos tanques do problema em relação à utilização ou não de método de otimização para o sistema de quatro tanques. 52

Figura 4.10 – Respostas transitórias das integrais dos erros de rastreamento em relação à utilização ou não de método de otimização para o sistema de quatro tanques. 53

Figura 4.11 – Respostas transitórias dos sinais de controle do sistema (tensão elétrica aplicada às bombas) em relação à utilização ou não de método de otimização para o sistema de quatro tanques. 54

Figura 4.12 – Sinal de distúrbio para o estudo de caso de suspensão de veículo. 58

Figura 4.13 – Respostas do chassi do automóvel para sistema em malha-aberta para estudo de caso de suspensão de veículo. 58

Figura 4.14 – Respostas da deflexão da suspensão para sistema em malha-aberta para estudo de caso de suspensão de veículo. 59

Figura 4.15 – Respostas da deflexão do pneu para sistema em malha-aberta para estudo de caso de suspensão de veículo. 59

Figura 4.16 – Respostas transitórias da variável de desempenho referentes à aceleração do chassi do automóvel para estudo de caso de suspensão de veículo. 61

Figura 4.17 – Respostas transitórias para a deflexão da suspensão do automóvel para estudo de caso de suspensão de veículo. 61

Figura 4.18 – Respostas transitórias para a deflexão do pneu do automóvel para estudo de caso de suspensão de veículo. 62

Figura 4.19 – Respostas transitórias da variável de desempenho referente ao sinal de controle do sistema para estudo de caso de suspensão de veículo. 62

Figura 4.20 – Resposta transitória da velocidade horizontal do VTOL com os controladores obtidos pelas formulações LMI para vértice de pior caso. 67

Figura 4.21 – Resposta transitória da velocidade vertical do VTOL com os controladores obtidos pelas formulações LMI para vértice de pior caso. 68

Figura 4.22 – Resposta transitória dos sinais de controle do VTOL para vértice de pior caso. 68

Lista de Abreviações

Abreviação	Significado
BMI	Desigualdade Matricial Bilinear *Bilinear Matrix Inequality*
DE	Método Evolução Diferencial *Differential Evolution Method*
ILMI	Desigualdade Matricial Linear Iterativa *Interative Linear Matrix Inequality*
ISE	Integral do Erro Quadrático *Integral Square Error*
LMI	Desigualdade Matricial Linear *Linear Matrix Inequality*
SDP	Programação semi-definida *Semidefinite Programming*
VTOL	Decolagem e aterrisagem vertical *Vertical Take-Off and Landing*

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado
α	Coeficiente da combinação convexa para modelo politópico.
β e ρ	Variáveis escalares para ajuste da formulação de Chang (Chang, et al., 2015).
γ	Custo garantido H_∞.
Λ	Variável de otimização no algoritmo proposto, sendo considerada como $\{L, r\}$ ou K_{so}.
μ	Variável de otimização para cálculo do custo garantido H_∞.
σ	Resíduo que permite avaliar o cumprimento das restrições LMI, relacionado ao mínimo autovalor do conjunto de desigualdades matriciais, capaz de atestar a factibilidade da solução.
σ_e	Variável capaz de atestar a factibilidade do teste de estabilidade robusta por realimentação de estados utilizando a variável de otimização K_{so}.
σ_r	Diferença relativa para comparação entre custos garantidos.
ψ	Função degrau unitário com atraso τ.
CR	Probabilidade de cruzamento entre indivíduos do algoritmo de otimização.
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Conjunto de controladores que estabilizam robustamente o sistema em malha-fechada com realimentação estática de saída.
K_{sf}	Controlador sintetizado para implementar realimentação de estados.
$K_{sf,i}$	Controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros incertos do sistema.
K_{so}	Controlador por realimentação estática de saída fixo para obter $K_{sf,i}$.
K_{sof}	Controlador sintetizado para implementar realimentação estática de saída.
L	Variável matricial para ajuste da formulação de Xie (Xie, 2008) por meio da metodologia desenvolvida por (Rubió-Massegú, et al., 2013).
N	Quantidade de indivíduos dentro da população no algoritmo de otimização.
Q_v	Quantidade de variáveis de otimização no algoritmo.
r	Variável escalar para ajuste da formulação de Xie (Xie, 2008).
S	Conjunto de vértices do modelo politópico do sistema incerto.
T_{zw}	Sistema em malha-fechada considerando $w(t)$ como entrada e $z(t)$ como saída.

Sumário

1 Introdução 1

1.1 Contextualização e relevância 1

1.2 Objetivos 3

1.3 Metodologia 4

1.4 Organização do texto 4

2 Desenvolvimento 6

2.1 Revisão Bibliográfica 6

2.1.1 Formulações LMI para síntese de controle robusto $H\infty$ por realimentação de estados 11

2.1.2 Formulações LMI para síntese de controle robusto $H\infty$ por realimentação estática de saída 17

2.2 Formulação do problema 24

2.2.1 Otimização de L e r 26

2.2.2 Otimização de Kso 26

2.3 Considerações finais 28

3 Definição do método de otimização 29

3.1 Etapas do método de otimização 30

3.1.1 Inicialização 30

3.1.2 Operador de mutação 31

3.1.3 Operador de cruzamento 32

3.1.4 Operador de seleção 33

3.2 Adaptação para o problema de otimização proposto 33

4 Estudos de caso 35

4.1 Exemplo 17 (Dong & Yang, 2013) 36

4.2 Sistema de quatro tanques 42

4.3 Suspensão de automóvel 54

4.4 Aeronave com decolagem e aterrisagem vertical 65

4.5 Aeronave L-1011 70

5 Conclusão 73

5.1 Conclusões 73

5.2 Propostas de prosseguimento deste trabalho 75

5.3 Publicações associadas a este trabalho 76

6 Referências 77

1 Introdução

1.1 Contextualização e relevância

Modelos matemáticos são necessários para viabilizar análise e síntese de sistemas de controle de forma a atender os objetivos específicos de cada problema. Conceitualmente, um modelo é a aproximação que reproduz o comportamento de um sistema real em torno de um ponto de operação específico. A criação de modelos matemáticos implica em assumir tal ponto de operação, o que pode gerar erros de modelagem para demais pontos. Além disso, incertezas também podem estar relacionadas com diversos fatores, como: substituição ou envelhecimento de componentes, atividades de manutenção e variabilidade de parâmetros específicos de cada equipamento (Zhou & Doyle, 1998). Uma exemplificação corresponde à modelagem matemática de um veículo automotivo. Considerando que este veículo é modelado por meio de um determinado ponto de operação em relação à carga total transportada, entende-se que o veículo pode estar submetido a cargas diferentes que variam de acordo com a quantidade de pessoas ou materiais transportados. Dessa forma, pode-se concluir que a carga total a qual o veículo é submetido corresponde a um fator de incerteza no modelo matemático.

A teoria de controle robusto foi desenvolvida com o intuito de considerar na análise e síntese de sistemas de controle o efeito de incertezas relacionadas à modelagem matemática de sistemas práticos. Basicamente, o controle robusto tem a intenção de garantir estabilidade e desempenho mesmo com a existência de incertezas, perturbações externas ou dinâmicas parasitas inerentes à modelagem dos sistemas reais. Semelhantemente ao lugar das raízes e ao diagrama de Bode, que são ferramentas importantes na teoria de controle clássica, as formulações de análise e síntese que utilizam desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) são fundamentais na teoria de controle robusto (Boyd, et al., 1994). Formulações LMI são problemas de otimização convexos de programação semi-definida (SDP, do inglês *Semidefinite Programming*), em que as variáveis de otimização são escalares e matrizes, cujas implementações e soluções podem ser obtidas por programas gratuitos

existentes, como o YALMIP (Lofberg, 2004), SDPT3 (Toh, et al., 1999) e SEDUMI (Sturm, 1999). Quando formulações de análise são transformadas em formulações de síntese, são encontrados produtos de duas variáveis de otimização, caracterizando uma desigualdade matricial bilinear (BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequality*). Problemas de otimização com formulações BMI são não-convexos, o que implica em aumento de complexidade para serem solucionados (Geromel, et al., 1991).

No caso de síntese de controladores robustos por realimentação de estados, uma simples mudança de variáveis permite transformar formulações LMI de análise em formulações LMI de síntese (Geromel, et al., 1991). Vale ressaltar que, mediante a utilização dessa mudança de variáveis, as condições produzidas são apenas suficientes para a formulação de síntese. Entretanto, em vários sistemas de controle reais não é viável medir todas as variáveis de estados para implementar a realimentação de estados. Devido à dificuldade da medição das variáveis de estados, uma das estratégias consiste em adotar o controle por realimentação estática ou dinâmica de saída. Vários problemas de controle podem ser formulados como um problema de controle por realimentação estática de saída, como sintonia de controle PID e síntese de controladores com qualquer dimensão por realimentação dinâmica de saída (Syrmos, et al., 1997) (Yaesh & Shaked, 2009) (Agulhari, et al., 2012). Entretanto, obter formulações LMI para síntese de controladores robustos por realimentação estática de saída não é trivial (He & Wang, 2006) (Dinh, et al., 2012). A utilização de diferentes estratégias para obter formulações LMI para síntese de controladores robustos por realimentação estática de saída estão intrinsicamente relacionadas à busca de parâmetros específicos, escalares e/ou matrizes, que devem ser fixados *a priori*, os quais possuem impacto substancial no desempenho do sistema obtido com o controlador sintetizado (Xie, 2008) (Agulhari, et al., 2012) (Palacios-Quiñonero, et al., 2014).

As metodologias existentes para determinação dos parâmetros de ajustes das formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída são baseadas em métodos de tentativa e erro ou a utilização da solução obtida através de outro problema LMI (Chang, et al., 2015) (Agulhari, et al., 2012) (Palacios-Quiñonero, et al., 2014) (Gopmandal & Ghosh, 2021). Muitas vezes, por meio de tais métodos, não se obtém o melhor resultado possível para o projeto ou até mesmo resulta em um

problema LMI para o qual não se encontra uma solução factível, ou seja, não se obtém um controlador a ser implementado que garante um sistema estável. Dessa forma, justifica-se a necessidade do desenvolvimento de métodos mais eficientes para determinação dos parâmetros de ajustes das formulações LMI, garantindo a factibilidade do problema e otimalidade dos resultados em relação à avaliação do desempenho obtido pelo sistema em malha-fechada resultante (Gahinet, et al., 1995) (de Oliveira, et al., 2004) (Gonçalves, et al., 2007). Portanto, a relevância do presente trabalho consiste em estudar as formulações LMI de síntese de controle robusto por realimentação estática de saída e propor métodos para determinar os parâmetros de ajuste que resultam em melhores desempenhos para o sistema de controle robusto.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal propor um método para sintonia de formulações LMI de síntese de controle robusto H_∞ por realimentação estática de saída, isto é, um método que seja capaz de determinar os parâmetros de ajuste de formulações LMI, os quais devem ser fixados *a priori*, com o intuito de se obter melhor desempenho para o sistema de controle robusto.

Os objetivos a serem buscados durante o desenvolvimento do trabalho podem ser resumidos nos itens apresentados a seguir:

- Levantar bibliografias acerca de formulações LMI de síntese de controle robusto por realimentação de estados e por realimentação estática de saída, para possibilitar a elaboração do método de ajuste das formulações LMI;
- Buscar estudos de caso na literatura científica que envolvam a necessidade ou possibilidade de utilização de formulações LMI para solução;
- Propor métodos de sintonia das formulações LMI baseados em otimização para o cálculo dos parâmetros que resultam nas melhores soluções;
- Avaliar e selecionar um método de otimização que seja eficiente para resolver o problema de otimização relacionado com a determinação dos parâmetros de sintonia das formulações LMI;

- Aplicar os métodos propostos em estudos de caso para avaliar sua eficácia em obter as melhores soluções com as diferentes possibilidades de formulações LMI;
- Estudar as diferentes formulações LMI quando combinadas com os métodos de ajuste propostos e aplicação nos estudos de caso selecionados.

1.3 Metodologia

A metodologia proposta para o presente trabalho relacionada à validação do método para sintonia de formulações LMI, visando a síntese de controlador robusto H_∞, consiste em:

i. Avaliar e selecionar formulações LMI existentes na literatura científica para aplicação do método de sintonia proposto;
ii. Formular o problema de otimização que possibilite determinar os parâmetros de ajuste das formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída;
iii. Selecionar e implementar um algoritmo de otimização em *software* de programação matemática para solucionar o problema proposto para as formulações LMI definidas;
iv. Selecionar estudos de caso existentes na literatura científica;
v. Avaliar o método proposto com base nos resultados obtidos por meio de simulações computacionais para os estudos de caso definidos;
vi. Comparar os resultados obtidos com o método proposto perante as formas existentes encontradas na literatura científica.

1.4 Organização do texto

A organização do texto é baseada na fluidez da metodologia voltada a este trabalho, prezando pela qualidade da exposição de ideias, além de manter sempre em vista os objetivos definidos e em acordo com a metodologia apresentada. Para tanto, o trabalho é dividido conforme apresentado a seguir.

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica que consolida o tema acerca deste trabalho, obtendo-se uma ampla visão sobre o assunto e um ponto de partida baseado no que atualmente se encontra publicado. Além disso, são elencadas formulações LMI encontradas na literatura científica que permitem desenvolver estudos aprofundados por meio de seus resultados. Em seguida, desenvolve-se o problema de otimização a ser implementado, estabelecendo um vínculo entre as formulações LMI e a busca de melhores desempenhos provenientes do controlador sintetizado.

O Capítulo 3 consiste na definição do método de otimização que melhor se aplica aos objetivos estabelecidos para o presente trabalho. Por sua vez, apresenta-se a contextualização relacionada à seleção do método de otimização, bem como os operadores utilizados no método e adaptações utilizadas para serem obtidos melhores resultados.

O Capítulo 4 consiste na apresentação dos estudos de caso que são utilizados para avaliar o método proposto na geração de soluções mais eficientes para cada formulação LMI apresentada na revisão bibliográfica. Além disso, torna-se possível estudar as formulações com o intuito de analisar as soluções que geram melhores desempenhos de controle robusto quando sintonizadas pelo método proposto neste trabalho. Por fim, são apresentados os resultados obtidos para as diferentes combinações de LMI e otimização, bem como consequentes análises qualitativas e quantitativas para cada um dos estudos de caso apresentados.

No Capítulo 5 é apresentada uma conclusão geral acerca do trabalho desenvolvido, além de consolidar as análises sobre os resultados obtidos no Capítulo 4, abordando-os de forma global. Além disso, apresentam-se análises sobre a metodologia estabelecida e propostas de continuidade para trabalhos futuros relacionados ao tema do presente trabalho.

2 Desenvolvimento

O presente capítulo consiste no desenvolvimento do trabalho, englobando a revisão bibliográfica e a formulação do problema de otimização, nos quais se relacionam controle robusto, formas de realimentação e desigualdades matriciais lineares. O principal objetivo do capítulo consiste na proposição de um método que possibilite obter resultados melhores em termos de desempenho H_∞ em relação àqueles atualmente encontrados na literatura científica.

2.1 Revisão Bibliográfica

Desigualdades matriciais lineares (LMI) são uma poderosa ferramenta na área de controle robusto, possibilitando solucionar problemas com diversas variáveis matriciais. É importante ressaltar também que a utilização de desigualdades matriciais lineares permite uma flexibilidade em relação à sua formulação, sendo possível realizá-las de diversas maneiras.

O diagrama de blocos de um sistema de controle geral é apresentado na Figura 2.1. Os sinais apresentados consistem em:

- $w(t) \in \mathcal{R}^{n_w}$: vetor de entradas exógenas (sinais de referência, perturbações ou distúrbios);
- $u(t) \in \mathcal{R}^{n_u}$: sinal de controle;
- $z(t) \in \mathcal{R}^{n_z}$: vetor de variáveis controladas que são associadas ao desempenho H_∞; e
- $v(t)$ corresponde ao vetor de sinais medidos do processo, sendo considerado neste trabalho como:
    - $x(t) \in \mathcal{R}^{n}$: vetor de estados para realimentação de estados; ou
    - $y(t) \in \mathcal{R}^{n_y}$: vetor de saídas do sistema para realimentação de saída.

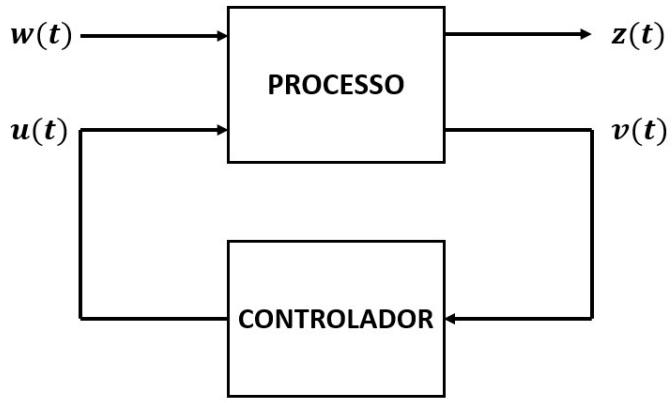


Figura 2.1 – Diagrama de blocos geral do sistema de controle em malha-fechada.

Considerando o sistema genérico apresentado, o modelo do sistema no espaço de estados pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_u(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t) \ , \\ z(t) &= C_z(\alpha)x(t) + D_{zu}(\alpha)u(t) + D_{zw}(\alpha)w(t) \ , \\ y(t) &= C_y(\alpha)x(t) + D_{yw}(\alpha)w(t) \ , \end{aligned} \tag{2.1}$$

e, considerando que o modelo do sistema possui parâmetros incertos, isto é, consiste em um sistema incerto, pode ser assumido que as matrizes do sistema pertencem a um modelo politópico, conforme a combinação convexa de seus vértices:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) \\ C_y(\alpha) & D_{yw}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{v} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_{w,i} & B_{u,i} \\ C_{z,i} & D_{zw,i} & D_{zu,i} \\ C_{y,i} & D_{yw,i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} , \tag{2.2}$$

sendo $\alpha \in \Omega$ o coeficiente da combinação convexa, v o número de vértices e Ω o conjunto definido por:

$$\Omega = \left\{ \alpha = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_v]^T \ | \ \alpha_i \geq 0, \forall \ i, \sum_{i=1}^{v} \alpha_i = 1 \right\}. \tag{2.3}$$

Em outras palavras, a combinação convexa dos vértices representa a consideração de todos os sistemas possíveis para os valores extremos, referentes aos limites inferior e superior, para todos os parâmetros incertos considerados no modelo do sistema.

Tendo-se por base o sistema genérico apresentado pela Figura 2.1, é importante estudar seu comportamento mediante aos efeitos de realimentação. Para tanto, pode-se descrever o sistema em malha-fechada $T_{zw}(s, \alpha)$ mediante a substituição de $u(t)$ em função da lei de controle. A variação da lei de controle está relacionada com o tipo de controle implementado, ressaltando-se os três tipos principais:

- Controle por realimentação de estados;
- Controle por realimentação estática de saída; e
- Controle por realimentação dinâmica de saída.

O controle por realimentação de estados consiste na utilização do vetor de estados $x(t)$ para aplicar a ação de controle, com o intuito de buscar manipular a dinâmica do sistema. Mediante a utilização da lei de controle $u(t) = K_{sf}x(t)$ com controlador K_{sf}, a qual rege o princípio de controle por realimentação de estados, resulta-se no sistema em malha-fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f(\alpha)x(t) + B_f(\alpha)w(t) \ , \\ z(t) &= \ C_f(\alpha)x(t) + D_f(\alpha)w(t) \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

sendo as matrizes em malha-fechada A_f, B_f, C_f e D_f conforme:

$$\begin{aligned} A_f(\alpha) &= A(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sf} \ , \\ B_f(\alpha) &= B_w(\alpha) \ , \\ C_f(\alpha) &= C_z(\alpha) + D_{zu}(\alpha)K \ , \\ D_f(\alpha) &= D_{zw}(\alpha) \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Geralmente, a medição das variáveis de estados representa custos elevados, sendo até mesmo impossível de ser obtida em alguns casos. Dessa forma, tem-se a possibilidade de realizar ação de controle mediante a realimentação de saída $y(t)$ do sistema apresentado pela Figura 2.1. A realimentação de saída, diferentemente da realimentação de estados, consiste em prover ação de controle com base na informação da saída $y(t)$ do sistema. Particularmente, a realimentação estática de saída apresenta a relação linear com a saída do sistema, sendo representada pela lei de controle $u(t) =$

$K_{sof}y(t)$. Com base na respectiva função de $u(t)$, implica-se no sistema em malha-fechada com matrizes conforme:

$$\begin{aligned} A_f(\alpha) &= A(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sof}C_y(\alpha) \ , \\ B_f(\alpha) &= B_w(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sof}D_{yw}(\alpha) \ , \\ C_f(\alpha) &= C_z(\alpha) + D_{zu}(\alpha)K_{sof}C_y(\alpha) \ , \\ D_f(\alpha) &= D_{zw}(\alpha) + D_{zu}(\alpha)K_{sof}D_{yw}(\alpha) \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Em contraste com o ganho estático, na realimentação dinâmica existe uma função de transferência entre o sinal de controle e a saída medida, não sendo utilizado um ganho simples, sendo o controlador e sinal de controle da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \ , \\ u(t) &= \ C_c x_c(t) + D_c y(t) \ , \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que $x_c(t) \in \mathcal{R}^{n_c}$ é o vetor de estados do controlador dinâmico e A_c, B_c, C_c e D_c são as matrizes que descrevem o estado do regulador. Dessa forma, tem-se o sistema em malha-fechada com realimentação dinâmica de saída conforme avaliado em (Agulhari, et al., 2012):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) + B_u(\alpha)D_cC_y(\alpha) & B_u(\alpha)C_c \\ B_cC_y(\alpha) & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_w(\alpha) + B_u(\alpha)D_cD_{yw}(\alpha) \\ B_cD_{yw}(\alpha) \end{bmatrix} w(t) \ , \\ z(t) &= [C_z(\alpha) + D_{zu}(\alpha)D_cC_y(\alpha) \quad D_{zu}(\alpha)C_c] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ &\quad + \left[D_{zw}(\alpha) + D_{zu}(\alpha)D_cD_{yw}(\alpha)\right] w(t) \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

É importante ressaltar que a realimentação dinâmica de saída pode ser formulada como realimentação estática de saída, conforme estratégia recorrente na literatura científica (Syrmos, et al., 1997) (Yaesh & Shaked, 2009) (Agulhari, et al., 2012), por meio de uma representação aumentada obtida mediante o agrupamento dos estados $x(t)$ do sistema e dos estados $x_c(t)$ do controlador. Para tanto, o problema

consiste na busca de um ganho de controle $\widetilde{K}_{dof}$ para proporcionar estabilidade robusta ao sistema com realimentação estática de saída para o sistema aumentado (Agulhari, et al., 2012):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \tilde{A}(\alpha)\,\eta(t) + \tilde{B}_u(\alpha)u(t) + \tilde{B}_w(\alpha)w(t)\ , \\ z(t) &= \tilde{C}_z(\alpha)\,\eta(t) + \widetilde{D}_{zu}(\alpha)u(t) + \widetilde{D}_{zw}(\alpha)w(t)\ , \\ y(t) &= \tilde{C}_y(\alpha)\,\eta(t) + \widetilde{D}_{yw}(\alpha)w(t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

considerando $\widetilde{K}_{dof} \in \mathcal{R}^{(m+n_c)\times(n_c+q)}$ e $\widetilde{K}_{dof} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$, além das matrizes:

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix}\ ,\ \tilde{B}_u(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & B_u(\alpha) \\ \boldsymbol{I}_{n_c} & 0 \end{bmatrix}\ , \\ \tilde{B}_w(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_w(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ \tilde{C}_z(\alpha) = [C_z(\alpha) \quad 0]\ , \\ \widetilde{D}_{zu}(\alpha) &= [0 \quad D_{zu}(\alpha)]\ ,\ \widetilde{D}_{zw}(\alpha) = [D_{zw}(\alpha)]\ , \\ \tilde{C}_y(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_{n_c} \\ C_y(\alpha) & 0 \end{bmatrix}\ ,\ \widetilde{D}_{yw}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{yw}(\alpha) \end{bmatrix}\ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por fim, tem-se as matrizes do sistema aumentado em malha-fechada, semelhante ao apresentado pela malha-fechada de realimentação estática de saída na Eq. (2.6), conforme:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_f(\alpha) &= \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_u(\alpha)\widetilde{K}_{dof}\tilde{C}_y(\alpha)\ , \\ \tilde{B}_f(\alpha) &= \tilde{B}_w(\alpha) + \tilde{B}_u(\alpha)\widetilde{K}_{dof}\widetilde{D}_{yw}(\alpha)\ , \\ \tilde{C}_f(\alpha) &= \tilde{C}_z(\alpha) + \widetilde{D}_{zu}(\alpha)\widetilde{K}_{dof}\tilde{C}_y(\alpha)\ , \\ \widetilde{D}_f(\alpha) &= \widetilde{D}_{zw}(\alpha) + \widetilde{D}_{zu}(\alpha)\widetilde{K}_{dof}\widetilde{D}_{yw}(\alpha)\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dessa forma, torna-se possível formular um controle por realimentação dinâmica de saída como um sistema com realimentação estática de saída. Consequentemente, torna-se interessante mencionar que, apesar das formulações

apresentadas nas seções seguintes englobarem somente controles por realimentação de estados e realimentação estática de saída, existe a possibilidade de adequar o controle por realimentação dinâmica de saída para que formulações de síntese de controle robusto por realimentação estática de saída possam ser utilizadas.

2.1.1 Formulações LMI para síntese de controle robusto H_∞ por realimentação de estados

As formulações LMI são baseadas no teorema de estabilidade de Lyapunov. De acordo com o teorema, o sistema livre $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva, $X = X^T \succ 0$, tal que (Boyd, et al., 1994):

$$AX + XA^T \prec 0\,. \tag{2.12}$$

Tendo-se por base a teoria de estabilidade de Lyapunov, o sistema incerto em malha-fechada representado pela Eq. (2.4) é quadraticamente estável se existir uma matriz simétrica definida positiva $X = X^T \succ 0$ que atende ao conjunto de condições LMI:

$$A_{f,i}X + XA_{f,i}^T \prec 0\ , \qquad i = 1, \dots, v\,. \tag{2.13}$$

Portanto, considerando o controle por realimentação de estados, $u(t) = K_{sf}x(t)$, a matriz em malha-fechada é dada por $A_{f,i} = A_i + B_{u,i}K_{sf}$ de modo que a LMI apresentada pela Eq. (2.13) se torne:

$$\begin{aligned} &\left(A_i + B_{u,i}K_{sf}\right)X + X\left(A_i + B_{u,i}K_{sf}\right)^T = \\ &A_iX + B_{u,i}K_{sf}X + XA_i^T + X{K_{sf}}^T B_{u,i}^T \prec 0\ , \qquad i = 1, \dots, v\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Devido ao produto de variáveis $K_{sf}X$, a desigualdade apresentada pela Eq. (2.14) é não-linear e, desse modo, torna-se mais difícil obter uma solução. A simples mudança de variável, conforme:

$$Y = K_{sf}X\ , \tag{2.15}$$

permite transformar a LMI de análise em uma LMI de síntese (Geromel, et al., 1991). Se existir uma matriz simétrica definida positiva $X = X^T \succ 0$ e uma matriz Y que atende ao conjunto de condições LMI:

$$A_i X + B_{u,i} Y + X A_i^T + Y^T B_{u,i}^T \prec 0, \qquad i = 1, \dots, v \ , \tag{2.16}$$

então, o controlador $K_{sf} = YX^{-1}$ com ação de controle $u(t) = K_{sf} x(t)$ estabiliza quadraticamente o sistema. Uma vez que $X \succ 0$, pode-se concluir que $|X| \neq 0$, implicando na existência da matriz inversa X^{-1} que, por sua vez, garante a existência do controlador K_{sf}.

A mesma estratégia de obter formulações LMI de síntese a partir de formulações de análise pode ser aplicada para obter formulações de síntese para sistemas de controle robusto com desempenho H_2 ou H_∞. Em relação ao desempenho H_∞, pode-se definir a norma H_∞ de um sistema linear e invariante no tempo a partir de sua função de transferência $G(s)$ como (Glover, 2013):

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{-\infty<\omega<\infty} \sigma_{max}\left(G(j\omega)\right), \tag{2.17}$$

sendo σ_{max} o valor singular máximo. Portanto, a Eq. (2.17) apresenta a norma H_∞ do sistema, $\|G(s)\|_\infty$, que corresponde à magnitude máxima da resposta em frequência do sistema. A análise da norma H_∞, conforme escopo do presente trabalho, pode ser relacionada com a sensibilidade do sistema em termos da interferência de sinais exógenos (externos ao próprio sistema) por meio da medida do ganho $\|G(s)\|_\infty$. A norma H_∞ estabelece o ganho máximo, isto é, o pior caso, entre a energia do sinal de saída em relação à energia do sinal de entrada (Glover, 2013):

$$\|z(t)\|_2 \leq \|G(s)\|_\infty \|w(t)\|_2 \, , \tag{2.18}$$

sendo $z(t)$ as variáveis de desempenho do sistema e $w(t)$ um sinal de entrada com energia limitada, isto é, norma 2 finita. Uma possibilidade para o sinal $w(t)$ sob tais condições pode ser um sinal pulso com valor máximo finito. O intuito da Eq. (2.18), além de relacionar a entrada exógena com as variáveis de desempenho, é apresentar a relação da interferência em $z(t)$ com a norma H_∞ do sistema. Por sua vez, a

consequente minimização de $\|G(s)\|_\infty$ corresponde à minimização do efeito de $w(t)$ em $z(t)$, implicando em melhor desempenho H_∞ para o sistema.

Com o intuito de considerar o desempenho, existem formulações LMI que permitem a síntese de controle robusto H_∞ por realimentação de estados, ou seja, com lei de controle $u(t) = K_{sf}x(t)$. Uma possibilidade é conforme descrito (Gahinet, et al., 1995):

$$\min_{X,Y} \gamma$$

sujeito a: $X = X^T \succ 0$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & B_{w,i} & XC_{z,i}^T + Y^T D_{zu,i}^T \\ B_{w,i}^T & -\gamma I & D_{zw,i}^T \\ C_{z,i}X + D_{zu,i}Y & D_{zw,i} & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \ , \qquad (2.19)$$

$$\Psi_{11} = A_i X + B_{u,i}Y + XA_i^T + Y^T B_{u,i}^T \ ,$$

$$i = 1, \dots, v \ .$$

Ao assumir o controlador $K_{sf} = YX^{-1}$ em acordo com a Eq. (2.15), existe a garantia de que:

$$\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty \leq \gamma \quad , \qquad (2.20)$$

sendo γ um limitante denominado custo garantido H_∞. Dessa forma, torna-se válido afirmar que o maior valor da norma H_∞ do sistema em malha-fechada $T_{zw}(s,\alpha)$, modelado pela Eq. (2.4), é igual ou inferior ao custo garantido para todos os valores de $\alpha \in \Omega$. Portanto, a garantia da Eq. (2.20) permite que o sistema em malha-fechada $T_{zw}(s,\alpha)$, em suas infinitas possibilidades, possua desempenho igual ou superior ao valor apresentado por γ, em termos de desempenho H_∞.

A Eq. (2.20), em outras palavras, significa que o limitante γ permite analisar, de forma quantitativa, o quão susceptível a influência de variáveis exógenas, com energia limitada, é o sistema estudado, por meio da definição do controlador $K_{sf} = YX^{-1}$. Quanto maior o valor de γ, maior é o efeito das variáveis exógenas sobre as variáveis de desempenho, tendo-se como exemplo o efeito de perturbações sobre as saídas da

planta. Portanto, é importante minimizar o valor de γ no projeto do controlador para minimizar o efeito das variáveis exógenas.

O uso de uma única variável X para todos os vértices do sistema com incerteza politópica garante a estabilidade quadrática do sistema, significando que o sistema variante no tempo é assintoticamente estável. Quando se trata de um sistema incerto e invariante no tempo, a condição de estabilidade quadrática é conservadora, sendo necessário garantir a estabilidade robusta do sistema. Para tanto, a matriz X pode ser dependente de parâmetros, isto é, pode ser obtida uma matriz X diferente para cada vértice do sistema incerto. Desse modo, é possível obter formulações que acrescentam variáveis na formulação LMI, sendo tais formulações conhecidas como formulações estendidas. Sua principal característica consiste em permitir funções de Lyapunov dependentes de parâmetros que, por sua vez, reduzem o conservadorismo na solução das desigualdades matriciais lineares (Shaked, 2001) (de Oliveira, et al., 2004) (Trofino, et al., 2005) (He, et al., 2005) (Oliveira, et al., 2011).

É possível calcular o custo garantido H_∞ por meio de variável de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha)$, conforme o conjunto de condições LMI do Lema 2 (de Oliveira, et al., 2004) para análise em malha-aberta:

$$\begin{aligned} &\gamma^{*^2} = \min_{P(\alpha)} \mu \\ &\text{sujeito a: } \; P(\alpha) = P(\alpha)^T \succ 0 \\ &M(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) & C(\alpha)^T \\ B^T(\alpha)P^T(\alpha) & -\boldsymbol{I} & D(\alpha)^T \\ C(\alpha) & D(\alpha) & -\mu\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \prec 0\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

considerando $\alpha \in \Omega$.

Quando da existência de produto entre matrizes dependentes de α, como observado na formulação apresentada pela Eq. (2.21), não é suficiente verificar somente os vértices do politopo, sendo necessário avaliar a combinação entre os vértices, o que aumenta o número de restrições do problema e, consequentemente, sua complexidade. Com o intuito de simplificar a análise do politopo, é proposto o resultado a seguir (de

Oliveira, et al., 2004). Se existem matrizes simétricas, definidas positivas P_i tal que $P_i \in \mathcal{R}^{n\times n}, i = 1, \dots, v$ e das matrizes adicionais $F \in \mathcal{R}^{n\times n}$ e $G \in \mathcal{R}^{n\times n}$, pode-se obter a LMI:

$$\begin{bmatrix} FA_i + A_i^T F^T & P_i - F + A_i^T G & FB_i & C_i^T \\ P_i - F^T + G^T A_i & -(G + G^T) & G^T B_i & \mathbf{0} \\ B_i^T F^T & B_i^T G & -\boldsymbol{I} & D_i^T \\ C_i & \mathbf{0} & D_i & -\mu\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \prec 0 \ , \qquad (2.22)$$

$$i = 1, \dots, v \ .$$

Dessa forma, uma vez que não são realizados produtos entre matrizes dependentes de α, tem-se a vantagem de somente ser necessário avaliar os vértices da região politópica de forma intercalada.

Além disso, a partir do conjunto de condições apresentado pela Eq. (2.22), obtém-se o custo garantido por meio de $\gamma = \sqrt{\mu}$. Portanto, tem-se a solução que representa o custo garantido H_∞ ótimo, γ^*, que, por sua vez, pode ser utilizado como limite superior para a norma H_∞, isto é, $\gamma^* \geq \|T_{zw}(s, \alpha)\|_\infty$.

Portanto, o Lema 2 (de Oliveira, et al., 2004) fornece uma metodologia para cálculo do custo garantido H_∞ por meio da solução de problemas de otimização com desigualdades matriciais lineares baseadas em matrizes dependentes de parâmetros. Considerando a validade do Lema 2 conforme apresentado pela referência, torna-se válido utilizar tal lema para desenvolver uma formulação de síntese de controle H_∞ mediante a manipulação das variáveis matriciais adicionadas.

Para tanto, a formulação é obtida considerando $X = F = G^T$ com base no desenvolvimento do Lema 2 (de Oliveira, et al., 2004), além de substituir o sistema resultante por seu *dual*, isto é, $[A, B, C, D] \leftrightarrow [A^T, C^T, B^T, D^T]$. Dessa forma, tem-se como derivação a seguinte formulação de síntese de controle H_∞ por realimentação de estados:

$$\begin{aligned} &\min_{P_i, X, Y, \gamma} \ \gamma \\ &\text{sujeito a: } \ P_i = P_i^T \succ 0 \end{aligned} \qquad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T & \Psi_{31}^T & B_{w,i} \\ \Psi_{21} & -(X+X^T) & \Psi_{31}^T & \mathbf{0} \\ \Psi_{31} & \Psi_{31} & -\gamma \boldsymbol{I} & D_{zw,i} \\ B_{w,i}^T & \mathbf{0} & D_{zw,i}^T & -\gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \prec 0 \ ,$$

$$\Psi_{11} = A_i X + B_{u,i} Y + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T \ ,$$

$$\Psi_{21} = P_i - X + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T \ ,$$

$$\Psi_{31} = C_{z,i} X + D_{zu,i} Y \ ,$$

$$i = 1, \dots, v \ .$$

O controlador $K_{sf} = YX^{-1}$ na ação de controle $u(t) = K_{sf} x(t)$ garante a limitação do custo garantido γ, conforme a Eq. (2.20). Além disso, como $X + X^T \succ 0$, então pode-se afirmar que X possui posto completo e que existe a matriz inversa X^{-1}.

Por meio da utilização de matrizes P_i, tem-se como resultado o aumento do grau de liberdade do problema e desobriga a exigência de que X seja uma matriz simétrica, o que implica na possibilidade de se obter soluções menos conservadoras que a formulação original, apresentada conforme a Eq. (2.19).

Com o intuito de reduzir ainda mais o conservadorismo, tem-se a formulação que consiste no acréscimo de uma variável escalar ajustável r, considerando que estará sempre sujeita a ser um número real positivo, ou seja, $r > 0$. A partir dessa possibilidade de ajuste, os graus de liberdade para o problema são incrementados, resultando na seguinte formulação LMI, a qual será designada como formulação de Xie no presente trabalho, baseada na Observação 5 (Xie, 2008):

$$\min_{P_i, X, Y} \gamma$$

$$\text{sujeito a: } \ P_i = P_i^T \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T & \Psi_{31}^T & B_{w,i} \\ \Psi_{21} & -r(X+X^T) & r\,\Psi_{31}^T & \mathbf{0} \\ \Psi_{31} & r\,\Psi_{31} & -\gamma \boldsymbol{I} & D_{zw,i} \\ B_{w,i}^T & \mathbf{0} & D_{zw,i}^T & -\gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \prec 0 \ , \tag{2.24}$$

$$\Psi_{11} = A_i X + B_{u,i} Y + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T \ ,$$

$$\Psi_{21} = P_i - X + r\left(X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T\right) \ ,$$

$$\Psi_{31} = C_{z,i} X + D_{zu,i} Y \ ,$$

$$i = 1, \dots, v \ .$$

É importante ressaltar que, como mencionado anteriormente, a Eq. (2.24) é uma extensão da Eq. (2.23), a qual pode ser simplificada novamente pela simples seleção da variável de ajuste $r = 1$. É esperado que a formulação da Eq. (2.24) gere resultados com melhores desempenhos H_∞ do que a Eq. (2.23) devido à possibilidade da busca para os valores de r que melhor se adaptam ao problema. Dessa forma, uma das formulações selecionadas para serem aplicadas aos estudos de caso é a formulação estendida apresentada pela Eq. (2.24).

2.1.2 Formulações LMI para síntese de controle robusto H_∞ por realimentação estática de saída

No caso da realimentação estática de saída, onde $u(t) = K_{sof} y(t) = K_{sof} C_{y,i} x(t)$, pode ser constatado que ocorre o produto $K_{sof} C_{y,i} X$ na Eq. (2.13) ao considerar o efeito da realimentação na matriz A_f em malha-fechada. A ocorrência desse produto não permite a recuperação do controlador por uma simples mudança de variável. Dessa forma, torna-se complexo obter formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída por mudança de variáveis. Uma forma de solucionar o problema não-convexo é por meio de LMI iterativa (ILMI), baseado em um algoritmo cujos passos envolvem a solução de problemas LMI onde a otimização de variáveis é realizada de forma alternada (He & Wang, 2006). Tal algoritmo pode apresentar convergência lenta e requer uma solução inicial factível, a qual pode afetar a qualidade da solução final. Existe outra técnica que consiste em decompor o problema BMI em dois problemas LMI sendo que, a cada iteração, o problema côncavo é linearizado e transformado em um problema convexo (Dinh, et al., 2012). Entretanto, com base na análise de resultados apresentados pelas referências científicas mencionadas, observa-se que as metodologias apresentam problemas de convergência

para solução ótima. Dessa forma, conforme as seções a seguir, apresentam-se as formulações a serem estudadas no presente trabalho em relação à síntese de controlador robusto H_∞ por realimentação estática de saída.

2.1.2.1 Formulações LMI com mudanças de variáveis

Uma possibilidade para obter formulações LMI para síntese de controlador robusto H_∞ por realimentação estática de saída considera $C_y(\alpha) = C_y$, de forma a não possuir incerteza e com posto completo de linhas, e $D_{yw}(\alpha) = \mathbf{0}$. A metodologia consiste em realizar mudanças de variáveis em X e Y, sendo aplicável para qualquer formulação LMI para síntese de controlador robusto por realimentação de estados, de forma que seja possível representar a matriz X como uma matriz bloco diagonal X_d, conforme elaborado pelo Teorema 1 de (Rubió-Massegú, et al., 2013):

$$X = X_d = QX_qQ^T + RX_rR^T = [Q \quad R]\begin{bmatrix} X_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix}, \qquad Y = Y_rR^T \ , \tag{2.25}$$

sendo que:

- $X_q \in \mathcal{R}^{(n-q)\times(n-q)}$, $C_yQ = \mathbf{0}$, isto é, Q é uma base ortonormal para o espaço nulo de C_y, que deve ter posto completo de linhas. Portanto:

$$Q = null\left(C_y\right) \ ; \tag{2.26}$$

- $X_r \in \mathcal{R}^{q\times q}$, $C_yR = \boldsymbol{I}$, sendo adotado (Rubió-Massegú, et al., 2013):

$$R = C_y^\dagger + QL \ , \tag{2.27}$$

onde $C_y^\dagger$ é a pseudo-inversa da matriz C_y do sistema, calculada por $C_y^\dagger = C_y^T\left(C_yC_y^T\right)^{-1}$, e a matriz L consiste no parâmetro de ajuste da formulação, sendo uma matriz qualquer de dimensão $(n-q)\times q$. Além disso, tem-se o controlador por realimentação estática de saída calculado por:

$$K_{sof} = Y_rX_r^{-1} \ . \tag{2.28}$$

A escolha de $L \in \mathcal{R}^{(n-q)\times q}$ na Eq. (2.27) afeta a factibilidade e otimalidade da formulação LMI de síntese. Desse modo, é sugerido uma forma de determinação da

matriz L a partir da solução X para o problema de realimentação de estados, não sendo necessariamente a escolha ótima (Palacios-Quiñonero, et al., 2014). Considerando $X = X^T \succ 0$ tal que $X = QX_qQ^T + RX_rR^T$ para matrizes $X_q = X_q^T \succ 0$ e $X_r = X_r^T \succ 0$ apropriadas, de acordo com o Teorema 2 de (Palacios-Quiñonero, et al., 2014), pode-se definir a matriz L conforme a matriz L_X:

$$L = L_X = \pm\, Q^{\dagger} X C_y^T \left(C_y X C_y^T\right)^{-1} , \tag{2.29}$$

sendo X a solução do problema LMI com $C_y = \boldsymbol{I}$, isto é, formulação para realimentação de estados e $Q^{\dagger}$ a pseudo-inversa da matriz Q calculada por $Q^{\dagger} = (Q^TQ)^{-1}Q^T$. É importante ressaltar a possibilidade de inverter o sinal da Eq. (2.29), sendo interessante avaliar as duas possibilidades (Gopmandal & Ghosh, 2021).

Para formulações estendidas, como a Eq. (2.23), é possível obter resultados distintos por meio de uma alternativa que utiliza mudança de variáveis triangular X_t, como o uso da variável X_{qr} adicional, ao invés de bloco diagonal da Eq. (2.25). Dessa forma, pode ser utilizada a substituição de X e Y conforme o Teorema 1 de (Gopmandal & Ghosh, 2021):

$$X_t = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_q & X_{qr} \\ \mathbf{0} & X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix} , \tag{2.30}$$

$$Y = Y_r R^T .$$

Com o intuito de esclarecer a metodologia relacionada à utilização da formulação de Xie utilizando mudança de variáveis, apresenta-se o fluxo de processos conforme a Figura 2.2.

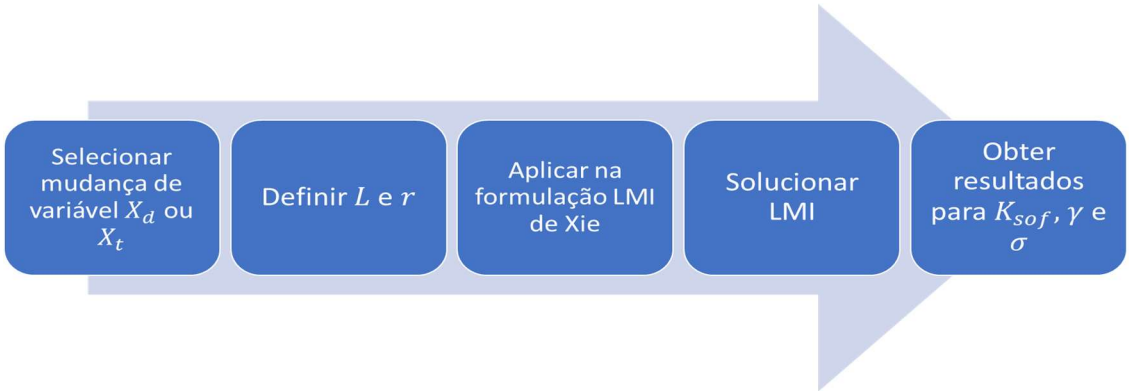


Figura 2.2 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Xie.

Por fim, tendo-se por base o estudo abordado nesta seção, tem-se a contextualização necessária para tornar possível o desenvolvimento da formulação do problema, a qual será considerada como formulação de Xie, sendo capaz de propiciar a busca por melhores resultados para o problema de síntese de controle robusto H_∞ por realimentação estática de saída.

2.1.2.2 Formulação de Chang

Também se encontra na literatura científica uma formulação LMI de síntese de controlador robusto H_∞ que requer a busca de dois parâmetros escalares β e ρ, quando C_y não possui incerteza e possui posto completo de linhas. Neste trabalho, esta formulação é denominada como formulação de Chang (Chang, et al., 2015).

Este método pode ser aplicado semelhantemente às formulações estendidas, de forma a buscar os valores de $\beta > 0$ e $\rho > 0$ que implicam na síntese de controlador que, por sua vez, resulta nos melhores desempenhos H_∞. Além disso, consta na formulação a matriz $\mathcal{F}_{pq}$, que depende do número de variáveis medidas e de desempenho do sistema, conforme (Chang, et al., 2015):

$$\mathcal{F}_{pq} = \begin{cases} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n_y}}, & n_y = n_z \\ \left[\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n_y}} \quad \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{n_y}\times(\boldsymbol{n_z}-\boldsymbol{n_y})}\right], & n_y < n_z \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n_z}} \\ \boldsymbol{0}_{(\boldsymbol{n_y}-\boldsymbol{n_z})\times\boldsymbol{n_z}} \end{bmatrix}, & n_y > n_z \end{cases} \tag{2.31}$$

Em outras palavras, a matriz $\mathcal{F}_{pq}$ reflete uma matriz de dimensão $n_y \times n_z$ composta por uma matriz identidade de dimensão n_y completada por colunas ou linhas nulas quando necessário.

A formulação LMI de Chang é apresentada conforme adaptação da formulação elaborada pelo Teorema 1 de (Chang, et al., 2015):

$$\begin{aligned} &\min_{P_i,V,U} \ \mu \\ &\text{sujeito a: } \ P_i = P_i^T \succ 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T & \Psi_{31}^T & \Psi_{41}^T \\ \Psi_{21} & -\mu \boldsymbol{I} & \Psi_{32}^T & \Psi_{42}^T \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{43}^T \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & -\beta(U+U^T) \end{bmatrix} \prec 0 \ ,$$

$$\mathcal{F}_{pn} = \left(C_y C_y^T\right)^{-1} C_y \ ,$$

$$\Psi_{11} = A_i P_i + B_{u,i} V \mathcal{F}_{pn} + \left(A_i P_i + B_{u,i} V \mathcal{F}_{pn}\right)^T \ ,$$

$$\Psi_{21} = B_{w,i}^T + D_{yw,i}^T V^T B_{u,i}^T \ ,$$

$$\Psi_{31} = C_{z,i} P_i + \rho \mathcal{F}_{pq}^T V^T B_{u,i}^T + D_{zu,i} V \mathcal{F}_{pn} \ ,$$

$$\Psi_{32} = D_{zw,i} + D_{zu,i} V D_{yw} \ ,$$

$$\Psi_{33} = -\boldsymbol{I} + \rho \left[D_{zu,i} V \mathcal{F}_{pq} + \left(D_{zu,i} V \mathcal{F}_{pq}\right)^T\right] \ ,$$

$$\Psi_{41} = \beta V^T B_{u,i}^T + C_{y,i} P_i - U \mathcal{F}_{pn} \ ,$$

$$\Psi_{42} = D_{yw,i} - U D_{yw,i} \ , \qquad \Psi_{43} = \beta V^T D_{zu,i}^T - \rho U \mathcal{F}_{pq} \ ,$$

$$i = 1, \dots, v \ .$$

O controlador por realimentação estática de saída que é capaz de garantir a limitação do custo garantido γ conforme Eq. (2.20), sendo $\gamma = \sqrt{\mu}$, pode ser calculado como $K_{sof} = VU^{-1}$.

Dessa forma, apresenta-se na Figura 2.3 o fluxo de processos para implementação da formulação de Chang e se obter os parâmetros de interesse do controlador por realimentação estática de saída K_{sof}, custo garantido γ e parâmetro de análise de factibilidade σ.



Figura 2.3 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Chang.

2.1.2.3 Formulação de Agulhari

Outra possibilidade de síntese de controlador robusto H_∞ por meio de realimentação estática de saída consiste na formulação apresentada pelo Teorema 2 em (Agulhari, et al., 2012):

$$\min_{P(\alpha),V(\alpha),H(\alpha),R,L} \ \mu$$

sujeito a: $P(\alpha) = P(\alpha)^T \succ 0$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}+\Psi_{11}^T & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & \Psi_{15} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \mathbf{0} & \Psi_{25} \\ \Psi_{13}^T & \Psi_{23}^T & -\mu\boldsymbol{I} & \Psi_{34} & \Psi_{35} \\ \Psi_{14}^T & \mathbf{0} & \Psi_{34}^T & \Psi_{44} & \Psi_{45} \\ \Psi_{15}^T & \Psi_{25}^T & \Psi_{35}^T & \Psi_{45}^T & -(R+R^T) \end{bmatrix} \prec 0 \ ,$$

$$\Psi_{11} = F(\alpha)\left(A(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sf}(\alpha)\right) \ , \tag{2.33}$$

$$\Psi_{12} = P(\alpha) - F(\alpha) + \left[A(\alpha) + B_u(\alpha)K_{sf}(\alpha)\right]^T V(\alpha)^T \ ,$$

$$\Psi_{13} = F(\alpha) + B_w(\alpha) \ ,$$

$$\Psi_{14} = \left[C_z(\alpha) + D_{zu}(\alpha)K_{sf}(\alpha)\right]^T H(\alpha) \ ,$$

$$\Psi_{15} = F(\alpha)B_u(\alpha) + C_y(\alpha)^T L^T - K_{sf}(\alpha)^T R^T \ ,$$

$$\Psi_{22} = -(V(\alpha) + V(\alpha)^T) \ , \qquad \Psi_{23} = V(\alpha)B_w(\alpha) \ ,$$

$$\Psi_{25} = V(\alpha)B_u(\alpha)\ , \qquad \Psi_{34} = D_{zw}(\alpha)^T H(\alpha)\ ,$$

$$\Psi_{35} = D_{yw}(\alpha)^T L^T\ , \qquad \Psi_{45} = H(\alpha)^T D_{zu}(\alpha)\ ,$$

$$\Psi_{44} = \boldsymbol{I} - [H(\alpha) + H(\alpha)^T]\ .$$

Nesta formulação, considera-se $K_{sf}(\alpha)$ um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros obtido *a priori*. De acordo com o Teorema 2 (Agulhari, et al., 2012), o controlador por realimentação estática de saída que é capaz de garantir a limitação do custo garantido γ, conforme Eq. (2.20), é $K_{sof} = R^{-1}L$, sendo $\gamma = \sqrt{\mu}$. O desempenho do controlador resultante, ou até mesmo a factibilidade do problema apresentado pela Eq. (2.33), depende do controlador inicial $K_{sf}(\alpha)$.

Neste trabalho, para implementação da formulação de (Agulhari, et al., 2012), é considerada a formulação da Eq. (2.23)

Com base no algoritmo proposto em (Agulhari, et al., 2012), é possível utilizar um controlador por realimentação estática de saída fixo, K_{so}, para obter o controlador inicial necessário para a formulação. Portanto, utiliza-se:

$$K_{sf,i} = K_{so}C_{y,i}\ , \quad i = 1, \dots, v\ . \tag{2.34}$$

Para melhorar o resultado obtido pela formulação de Agulhari, é utilizado o algoritmo proposto em (Agulhari, et al., 2012) conforme metodologia prevista pela Figura 2.4. O intuito da metodologia apresentada consiste em atualizar o controlador $K_{sf,i}$ para se obter melhores desempenhos. Dessa forma, a atualização de K_{sf} é considerada por meio da Eq. (2.34) utilizando $K_{so} = K_{sof}$, sendo K_{sof} o controlador por realimentação estática de saída calculado como resultado da própria formulação de Agulhari. O cálculo é repetido até que a diferença dos custos garantidos H_∞ entre duas iterações não seja significativa, considerando uma precisão de 10^{-4}. É importante ressaltar que, mesmo com o algoritmo descrito, a solução final permanece depende do controlador inicial utilizado.

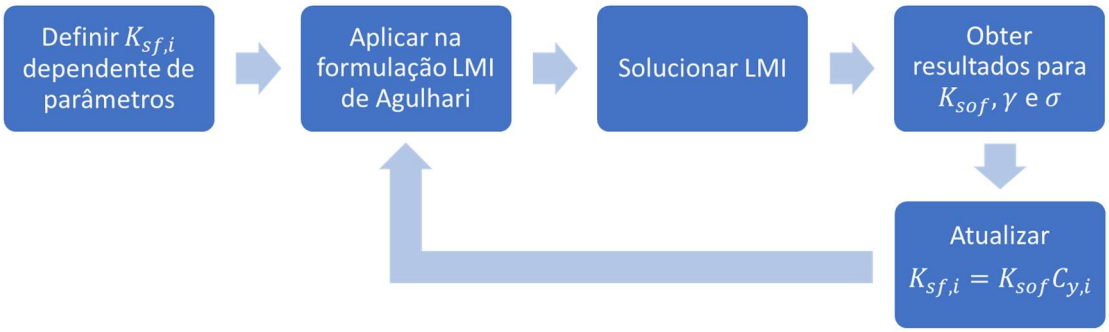


Figura 2.4 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Agulhari.

2.2 Formulação do problema

A contribuição deste trabalho é realizar um estudo a respeito da aplicação de técnicas de otimização para a determinação do controlador K_{so} na Eq. (2.34) ou a matriz L na Eq. (2.27), para verificar o quanto é possível melhorar o desempenho do sistema em comparação com as opções de calcular $K_{sf,i}$ por formulações LMI ou adotar $L = \mathbf{0}$ ou L dado pela Eq. (2.29).

Dessa forma, o principal objetivo é determinar o controlador K_{sof} no controle por realimentação estática de saída, com sinal de controle $u(t) = K_{sof}y(t)$, para sistemas incertos lineares invariantes no tempo representados pelo modelo politópico Eq. (2.2), que minimiza o pior caso de norma H_∞ no domínio de incerteza:

$$K^* = \arg\min_{K} \min_{\alpha \in \Omega} \left\| T_{zw}(s, \alpha, K_{sof}) \right\|_\infty \quad , \qquad \text{Sujeito a: } K_{sof} \in \boldsymbol{\mathcal{F}} \quad , \tag{2.35}$$

sendo $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ o conjunto de controladores K_{sof} na ação de controle $u(t) = K_{sof}y(t)$ que estabilizam robustamente o sistema em malha-fechada.

Cabe ressaltar que, mediante aplicação de formulações LMI, o problema se torna mais fácil para ser solucionado, mas ao custo de conservadorismo da solução. Neste caso, o problema apresentado pela Eq. (2.35) é representado por um problema de programação semi-definida (SDP) com função objetivo linear e restrições LMI. Se o problema for factível, o controlador resultante garante a estabilidade robusta e que

$\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s,\alpha)\|_\infty \leq \gamma$, sendo γ o custo garantido H_∞. Portanto, este trabalho visa propor uma forma de determinar a matriz L na Eq. (2.27) ou o controlador K_{so} na Eq. (2.34) que resulte em um sistema de controle por realimentação estática de saída com menor custo garantido H_∞.

Para verificar se a solução de um SDP é factível, ou seja, se todas as desigualdades matriciais lineares foram atendidas, os *solvers* retornam o resíduo σ das restrições, relacionado ao mínimo autovalor do conjunto de desigualdades matriciais. Se $\sigma > 0$, a solução obtida é factível. Vale ressaltar também que os *solvers* podem retornar um $\sigma \to 0^-$, ou seja, negativo e próximo de zero. Esse resultado para σ também pode ser considerado como um resultado válido para análise de factibilidade da solução obtida para a LMI, sendo este um risco que deve ser avaliado para cada caso.

Considera-se S o conjunto de vértices do modelo politópico do sistema incerto, conforme introduzido na Eq. (2.2), e $LMI(S,\Lambda)$ a função que apresenta a solução obtida para o problema LMI na forma do ganho K_{sof}, do custo garantido γ e o resíduo das restrições σ como parâmetros de saída da própria função. As variáveis de otimização podem ser $\Lambda = K_{so}$ ou $\Lambda = \{L, r\}$, dependendo da formulação LMI sob estudo. Considerando a aplicação de algoritmos de otimização para determinação do controlador ótimo K_{so}^* ou da matriz ótima L^* e variável escalar ótima r^*, apresenta-se o problema de otimização proposto para o presente trabalho:

$$\Lambda^* = \arg\min_{\Lambda} f(\Lambda) \ , \tag{2.36}$$

sendo $f(\Lambda)$ a função objetivo determinada a partir de $\left[K_{sof}, \gamma, \sigma\right] = LMI(S,\Lambda)$, associada à metodologia de aplicação de penalidade para tratamento de restrições no problema de otimização. Uma vez determinado Λ^*, então o controlador e custo garantido ótimos são dados por:

$$[K^*, \gamma^*, \sigma] = LMI(S,\Lambda^*) \ . \tag{2.37}$$

Em seguida, são apresentadas as tratativas relacionadas às possibilidades para Λ, ou seja, quando $\Lambda = \{L, r\}$ ou $\Lambda = K_{so}$.

2.2.1 Otimização de L e r

Considerando a formulação de Xie, Eq. (2.24), associada a mudanças de variáveis da forma da Eq. (2.25) ou da Eq. (2.30), em que $\Lambda = \{L, r\}$, baseando-se no método de penalidade para tratamento de restrições, tem-se a seguinte função objetivo $f(L, r)$:

$$f(L,r) = \begin{cases} M_r - r\ , & r \leq 0 \\ M - \sigma\ , & r > 0 \ \ e \ \ \sigma < -\epsilon \\ \gamma\ , & r > 0 \ \ e \ \ \sigma \geq -\epsilon \end{cases} \tag{2.38}$$

Ressalta-se que $0 \leq \epsilon \ll 1$ e $M_r \gg M \gg 1$. No presente trabalho, adota-se $\epsilon = 10^{-12}$, $M = 10^{12}$ e $M_r = 10^{16}$.

Dessa forma, pode-se avaliar que, no caso onde a solução não é factível, o valor da função objetivo será muito maior do que o de uma solução factível. Além disso, caso r seja negativo ou igual a zero, situação onde não é necessário resolver o problema LMI pelo fato de não ser factível, o valor da função objetivo assume valor maior do que uma solução factível. De acordo com o método de penalidades utilizado no processo de otimização, quando se comparam duas soluções não factíveis, a solução mais próxima da região factível será selecionada, tomando-se por base o valor de σ e r. Para o presente caso, a quantidade de variáveis de otimização Q_v corresponde à quantidade de elementos da matriz L, acrescido da variável r, ou seja, $Q_v = \big(n - n_y\big)n_y + 1$.

Cabe ressaltar que, neste caso de otimização das variáveis L e r, pode ser considerada qualquer formulação LMI para o estudo de realimentação de estados adaptada para realimentação estática de saída, seja por meio da Eq. (2.25) ou da Eq. (2.30).

2.2.2 Otimização de K_{so}

Para o caso da formulação de Agulhari, em que $\Lambda = K_{so}$, deve ser considerada a formulação apresentada pela Eq. (2.33) com $\gamma = \sqrt{\mu}$ e $K_{sf,i},\ i = 1, \dots, v$, dado pela Eq. (2.34) considerando o K_{so} obtido pela otimização. Entretanto, devendo-se ao cálculo do controlador $K_{sf,i}$ por meio do resultado da otimização $\Lambda = K_{so}$, é possível que tal controlador $K_{sf,i}$ não garanta que o sistema em malha-fechada resultante seja

robustamente estável e, portanto, indica uma solução não factível para o processo de otimização. Dessa forma, é necessário verificar se $K_{sf,i}$, calculado a partir de um K_{so} por meio da Eq. (2.34), resulta em um sistema robustamente estável anteriormente à utilização de $K_{sf,i}$ na formulação da Eq. (2.33). Portanto, com o intuito de fornecer tal avaliação de estabilidade robusta por realimentação de estados, utiliza-se a formulação de análise referente ao Lema 2 (de Oliveira, et al., 2004) conforme Eq. (2.22). Para esclarecer a metodologia que baseia a otimização a ser implementada para a formulação de Agulhari, apresenta-se o fluxo de processos na Figura 2.5.

Portanto, considerando a metodologia apresentada, o cálculo da função objetivo por aplicação de penalidade para tratamento de restrições do problema de otimização é realizado por meio de $f(K_{so})$ conforme:

$$f(K_{so}) = \begin{cases} M_e - \sigma_e \ , & \sigma_e < -\epsilon \ , \\ M - \sigma \ , & \sigma_e \geq -\epsilon \ , \quad \sigma < -\epsilon \\ \gamma \ , & \sigma_e \geq -\epsilon \ , \quad \sigma \geq -\epsilon \end{cases} \tag{2.39}$$

sendo σ_e a variável capaz de verificar a factibilidade do teste de estabilidade robusta por realimentação de estados, além de se adotar $M_e = 10^{16}$.

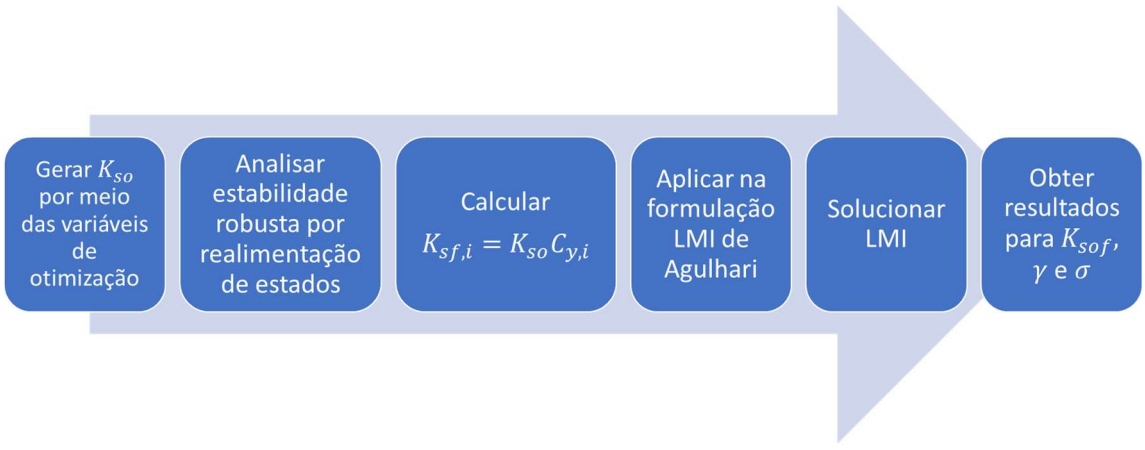


Figura 2.5 – Fluxo de processos que representa a metodologia a ser implementada para utilização da formulação de Agulhari associada ao método de otimização.

Por meio da metodologia baseada em penalização proposta para o caso de $\Lambda = K_{so}$, garante-se que uma solução previamente não robustamente estável, que sequer foi utilizada na formulação da Eq. (2.33), tenha probabilidades reduzidas de ser selecionada. Neste caso, a quantidade de variáveis de otimização corresponde à

quantidade de elementos na matriz do controlador K_{so}, ou seja, $Q_v = n_u n_y$.

2.3 Considerações finais

No presente capítulo se elaborou revisão bibliográfica para identificar possíveis formulações LMI visando a síntese de controle robusto H_∞. Em seguida, foram propostos problemas de otimização para sintonizar os parâmetros de ajuste das formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída. A formulação do problema de otimização tem como objetivo obter um controlador o qual proporcione sistemas incertos lineares invariantes no tempo com desempenho robusto otimizado.

Como continuidade do estudo, este trabalho também apresenta a técnica de otimização a ser implementada para obter soluções ótimas para o problema formulado, conforme estudado no Capítulo 3. Além disso, o método de otimização apresentado é utilizado em estudos de caso para a demonstrar a eficácia do método proposto, sendo apresentados no Capítulo 4.

3 Definição do método de otimização

O presente capítulo consiste na definição e apresentação do método de otimização selecionado para compor a técnica proposta para sintonia de formulações LMI visando a síntese de controlador robusto H_∞ por realimentação estática de saída.

É importante ressaltar que avaliar se os problemas de otimização, apresentados no capítulo anterior, são diferenciáveis, convexos e multimodais é complexo, uma vez que não se tem uma função matemática direta entre a solução e o resultado da função objetivo. Dessa forma, o método de otimização a ser selecionado deve abranger essas características, possibilitando que o problema de otimização apresente melhores resultados sob quaisquer circunstâncias inerentes ao problema abordado.

Uma vez que é desejado um método de otimização que apresente maior probabilidade de localizar o ótimo de problemas possivelmente multimodais, opta-se pelos algoritmos de otimização evolutiva. Essa opção se dá pelo fato de que a otimização evolutiva não exige que o problema apresente características de diferenciabilidade, convexidade ou unimodalidade, entendendo-se como a mais adequada para generalizar sua aplicação. Neste trabalho, se optou pelo uso do método Evolução Diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*), o qual é um método simples de implementar, com poucos parâmetros para implementação e que geralmente apresenta resultados melhores para casos com as características de multimodalidade e não-convexidade, além de facilidade na busca de soluções ótimas com populações pequenas (Storn & Price, 1997) (Chang & Hwang, 2001).

O método DE consiste na criação de uma população inicial de indivíduos, os quais representam soluções candidatas para resolver o problema de otimização. De forma similar aos algoritmos genéticos, ao longo das gerações, os indivíduos são submetidos aos operadores do algoritmo, isto é, mutação, cruzamento e seleção, o que possibilita a geração de novos indivíduos. Dessa forma, ao final da geração, são selecionados os indivíduos que melhor se adequam ao problema de otimização, seguidos da repetição do ciclo da evolução diferencial para uma nova geração. Com o intuito de apresentar o método DE, tem-se o fluxograma apresentado na Figura 3.1.

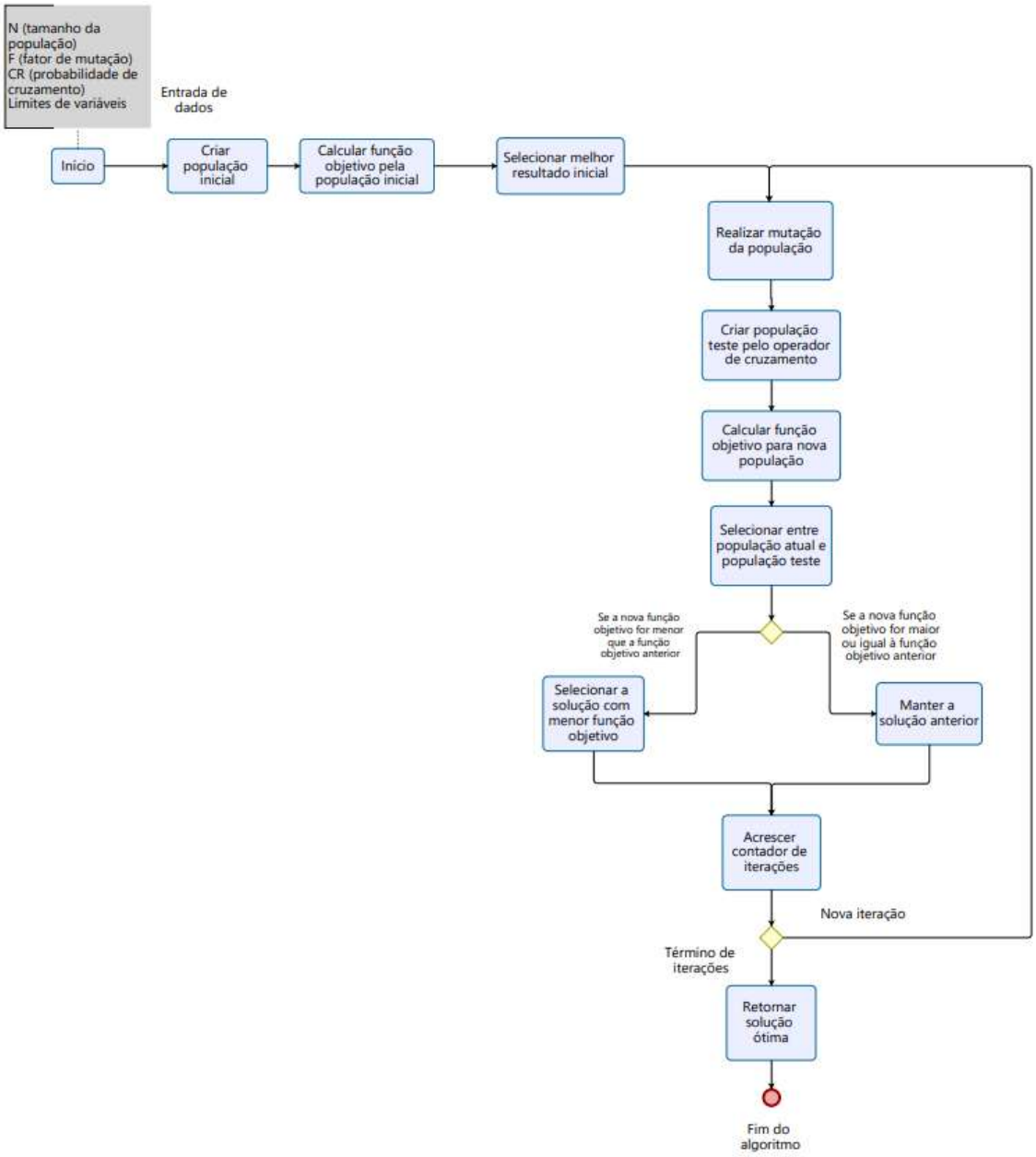


Figura 3.1 – Fluxograma ilustrativo para implementação do método DE.

Na seção seguinte, são detalhadas as etapas do método Evolução Diferencial e seus operadores evolutivos.

3.1 Etapas do método de otimização

3.1.1 Inicialização

A inicialização do método consiste em estabelecer parâmetros importantes para realização das operações evolutivas, sendo estes:

- N: quantidade de indivíduos dentro da população;
- $[F_{min};\ \ F_{max}]$: limites inferior e superior para o fator F de ponderação da mutação;
- CR: probabilidade de cruzamento entre populações com e sem mutação, pertencente ao intervalo $[0; 1]$;
- Limites inferior e superior para cada uma das variáveis de otimização (também conhecidas como variáveis de decisão).

A partir da definição dos itens mencionados, possibilita-se iniciar o método de otimização Evolução Diferencial. Dessa forma, o primeiro passo do método consiste em gerar uma população inicial, a qual possui indivíduos gerados a partir de distribuições uniformes com base nos limites informados para cada variável de otimização. A partir da definição de tal população inicial, torna-se possível realizar a primeira operação de mutação.

3.1.2 Operador de mutação

O operador de mutação consiste em gerar uma população de soluções mutantes que são obtidas pela soma de uma solução com a diferença de outras duas soluções da população atual, multiplicada por um fator de escala. Seja X_i a i-ésima solução da população atual, matematicamente, a operação de mutação pode ser apresentada da forma:

$$V_i = X_{r_1} + F_i\left(X_{r_2} - X_{r_3}\right)\ ,$$
$$i = 1, \dots, N\ , \tag{3.1}$$

sendo V_i o indivíduo mutado, r_1, r_2 e r_3 os índices dos indivíduos da população atual e F_i o fator de ponderação.

Basicamente, a metodologia de mutação consiste em definir aleatoriamente os índices r_1, r_2 e r_3 para cada indivíduo da população da geração atual, excluindo-se a possibilidade de que sejam iguais ao i-ésimo indivíduo que está sob mutação, isto é, $i \neq r_1$, i$\neq r_2$ e $i \neq r_3$, além de garantir também a exclusão da possibilidade de que $r_1 = r_2 =$

r_3. Além disso, tem-se a aplicação do fator F_i para ponderação de mutação, cuja definição é realizada por meio de distribuição aleatória uniforme no interior de um intervalo de interesse.

Em resumo, a operação de mutação gera a população mutante, com os indivíduos V_i, a partir do relacionamento entre indivíduos X_{r_1}, X_{r_2} e X_{r_3} sem mutação. Por sua vez, a existência de populações com e sem mutação permite que seja aplicada a operação de cruzamento entre as duas populações.

3.1.3 Operador de cruzamento

A operação de cruzamento tem o intuito de diversificar os indivíduos que sofreram mutação por meio da combinação entre indivíduos de população com e sem mutação. Para tanto, consiste na criação da população teste U para todas as variáveis de otimização tal que:

$$U_{i,j} = \begin{cases} V_{i,j}, & \delta_i = j \; ou \; k_{i,j} \leq CR \\ X_{i,j}, & caso \; contrário \end{cases}, \qquad (3.2)$$

$$i = 1, \dots, N \;, \qquad j = 1, \dots, Q_v \;,$$

sendo $U_{i,j}$ a j-ésima variável da i-ésima solução da população U, $k_{i,j}$ números aleatórios obtidos mediante distribuição uniforme no intervalo $[0;\ 1)$, Q_v a quantidade de variáveis de otimização e δ_i um índice inteiro com distribuição uniforme no intervalo $[1;\ Q_v]$ que garante a utilização de pelo menos um indivíduo mutante para a população teste U_i independentemente da probabilidade de cruzamento.

Dessa forma, gera-se a população teste U_i por meio da combinação de variáveis da população mutante, através dos indivíduos V_i, ou da população normal, através dos indivíduos X_i, de acordo com a relação apresentada entre o número aleatório k e a probabilidade de cruzamento CR. Por fim, mediante a definição da população U_i é possível utilizar o operador de seleção.

3.1.4 Operador de seleção

O operador de seleção consiste em escolher os melhores indivíduos para que suas características sejam preservadas para a próxima geração. Para implementar o operador de seleção, deve-se considerar a população teste U_i, que representa uma população com cruzamento e mutação associadas, além de calcular a função objetivo $f(U_i)$. Não obstante, deve-se dispor também do resultado da função objetivo $f(X_i)$ referente à população inicial de cada geração. Dessa forma, a seleção ocorre conforme:

$$X_i = \begin{cases} U_i, & se\ f(U_i) < f(X_i) \\ X_i, & se\ f(U_i) \geq f(X_i) \end{cases}, \qquad (3.3)$$

$$i = 1, \dots, N \ .$$

A relação apresentada pela Eq. (3.3) pode ser descrita como a busca pelo indivíduo que melhor se adapta às necessidades do problema de otimização, ou seja, a solução que implica no menor valor para a função objetivo. Caso a solução teste seja melhor que a solução correspondente na população atual, então a solução teste substitui a solução atual, em caso contrário, a solução atual é mantida.

Ao término da seleção, tem-se uma nova geração da população que fornece um valor menor ou igual para a função objetivo de interesse. Dessa forma, permite-se que o processo de evolução diferencial, isto é, operadores de mutação, cruzamento e seleção, seja reaplicado para essa nova geração de indivíduos. Portanto, a recorrente atualização de indivíduos que fornece resultado menor para a função objetivo possibilita a busca pelo valor ótimo da função objetivo e o indivíduo da população que gera o resultado ótimo.

3.2 Adaptação para o problema de otimização proposto

Buscando solucionar o problema de otimização apresentado pela Eq. (2.36), baseando-se no fluxograma apresentado pela Figura 3.1, é implementado o método Evolução Diferencial proposto, com multiplicador da mutação diferencial com distribuição aleatória uniforme no intervalo $F = [0{,}5;\ 1]$ para cada operação, probabilidade de cruzamento $CR = 0{,}90$, tamanho da população $N = \max(8,\ 2Q_v)$,

sendo $\max(a,\ b)$ o maior valor entre a e b, e número de gerações $N_g = 20Q_v$, conforme:

$$Q_v = \begin{cases} n_y(n - n_y) + 1, & se\ \Lambda = \{L, r\} \\ n_u n_y, & se\ \Lambda = K_{so} \end{cases} . \tag{3.4}$$

Ressalta-se a variação da quantidade de variáveis de otimização conforme a formulação a ser implementada, devendo-se exclusivamente pela quantidade de elementos das referidas matrizes e o supramencionado acréscimo da variável escalar r.

Além disso, para o operador de seleção, deve-se considerar a função objetivo calculada a partir da formulação do problema de otimização, isto é, considerando $f(\Lambda)$ para cada formulação LMI de interesse, sendo $\Lambda = \{L, r\}$ para a formulação de Xie ou $\Lambda = K_{so}$ para a formulação de Agulhari.

Em relação ao caso da otimização da matriz L e do escalar r, as variáveis de otimização foram distribuídas uniformemente no intervalo de $[-1;\ 1]$ para a matriz e de $[0; 1]$ para o escalar. No tocante ao caso da otimização do controlador fixo K_{so}, o intervalo inicial é definido conforme o estudo da dimensão esperada para os ganhos do controlador. É importante ressaltar que, por opção própria para a implementação do método, não se limitam as variáveis de otimização ao intervalo inicial, possibilitando que o método Evolução Diferencial tenha liberdade para definir valores diferentes externamente aos intervalos previamente definidos pelo usuário.

4 Estudos de caso

O presente capítulo apresenta estudos de caso para analisar a eficácia do método proposto na sintonia de formulações LMI para síntese de controlador robusto H_∞ por realimentação estática de saída, apresentado no Capítulo 2, através de otimização evolutiva utilizando evolução diferencial, descrito no Capítulo 3. O objetivo é comparar os resultados obtidos sem e com o uso de otimização em termos do desempenho H_∞.

As formulações LMI foram implementadas usando o YALMIP (Lofberg, 2004) e solucionadas pelo *solver* SDPT3 (Toh, et al., 1999), ambos *softwares* que podem ser utilizados mediante plataformas de programação científica gratuitas. A variável σ para teste de factibilidade é obtida pela função *check* do YALMIP: $\sigma = min\big(check(R_{LMI})\big)$, sendo R_{LMI} o conjunto de restrições LMI.

Os projetos são comparados com base nos valores dos custos garantidos H_∞, γ, tal que este custo garantido limite a norma H_∞ do sistema em malha-fechada $T_{zw}(s,\alpha)$, conforme preconizado pela Eq. (2.20). Uma vez que os valores de custo garantido das diferentes formulações de síntese de controle robusto podem apresentar diferentes níveis de conservadorismo, a comparação de tais valores pode não ser válida. Deste modo, para efeito de comparação neste trabalho, os custos garantidos H_∞ são resultados calculados por meio da técnica de cálculo com precisão ε (Gonçalves, et al., 2007), sendo tal precisão a ser definida pelo usuário. Para o escopo do presente trabalho, adotou-se precisão de $\varepsilon = 0{,}01\%$.

Nos estudos de caso a seguir apresentados, é testada a formulação LMI de Xie, apresentada pela Eq. (2.24), considerando L como matriz nula e assumindo a variável escalar $r = 1$. Além disso, adota-se a formulação de Xie para determinar X no cálculo de L_X por meio da Eq. (2.29) e para o cálculo do ganho por realimentação estática de saída, bem como $r = 1$.

Não obstante, também se utilizam as mudanças de variáveis conforme $X = X_d$, sendo X_d a matriz diagonal, ou $X = X_t$, sendo X_t a matriz triangular superior,

respectivamente conforme as Eqs. (2.21) e (2.30). Ambas as mudanças de variáveis são utilizadas para implementação da função de otimização $[K_{sof}, \gamma, \sigma] = LMI(S, \{L, r\})$, ressaltando que suas implementações são realizadas de forma alternada.

Cabe ressaltar que ao utilizar a formulação de Xie para assumir o valor conhecido da matriz L, sendo uma matriz nula ou a matriz L_X, utiliza-se a mudança de variável de $X = X_d$, com o intuito de padronizar os resultados obtidos e possibilitar análises comparativas. Além disso, cabe ressaltar que é utilizada a formulação da Eq. (2.23) para determinar X no cálculo de L_X por meio da Eq. (2.29). Combinando a formulação de Xie com o método de otimização proposto, também se considera $X = X_t$ com a substituição de variáveis dada pela Eq. (2.30).

Com o intuito de avaliar resultados obtidos para as diferentes formulações LMI propostas, busca-se também a avaliação da formulação de Chang (Chang, et al., 2015), com base na avaliação dos parâmetros β e ρ por tentativa e erro.

Além das formulações supramencionadas, busca-se implementar também a formulação de Agulhari, que é inicializado com K_{sf} obtido por meio da formulação para síntese de controle por realimentação de estados apresentada pela Eq. (2.23) e aplicado na Eq. (2.34).

4.1 Exemplo 17 (Dong & Yang, 2013)

Para o presente caso, a referência bibliográfica utiliza como exemplo o sistema incerto com dois vértices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0{,}9896 & 17{,}41 & 96{,}15 \\ 0{,}2648 & -0{,}8512 & -11{,}39 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, \quad B_{u,1} = \begin{bmatrix} -97{,}78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1{,}702 & 50{,}72 & 263{,}5 \\ 0{,}2201 & -1{,}418 & -31{,}99 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, \quad B_{u,2} = \begin{bmatrix} -85{,}09 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

$$B_{w,1} = B_{w,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{z,1} = C_{z,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{zu,1} = D_{zu,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} \ , \ C_{y,1} = C_{y,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$D_{zw,1} = D_{zw,2} = D_{yw,1} = D_{yw,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

É importante ressaltar que uma mudança na escolha do vetor $z(t) = [x_1(t) \quad 20u(t)]^T$ é proposta com o intuito de se obter um compromisso entre rejeição de distúrbios e esforço de controle.

Considerando o sistema apresentado pela Eq. (4.1), os controladores foram sintetizados utilizando as formulações LMI sem e com a sintonia proposta dos parâmetros de ajuste. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.1, contemplando os parâmetros de interesse para cada formulação abordada, o custo garantido H_∞ e o controlador resultante.

Com base nos resultados apresentados, é interessante ressaltar que todas as formulações estudadas resultaram em controladores que garantem a estabilidade robusta do sistema. Entretanto, pode-se observar que os custos garantidos H_∞ variam de acordo com as formulações LMI. Entre as formulações estudadas, ressalta-se o valor ótimo γ^* obtido, sendo destacado na tabela pela cor da linha. Neste caso, tem-se que $\gamma^* = 2{,}3781$ obtido por meio da formulação de Agulhari com otimização pelo método DE. É importante avaliar a diferença relativa σ_r entre custos garantidos H_∞ de interesse em relação ao γ^*, baseando-se no cálculo:

$$\sigma_r = \frac{100(\gamma - \gamma^*)}{\gamma} \ . \qquad (4.2)$$

Dessa forma, torna-se possível realizar análises comparativas entre as formulações. Com base no valor obtido para o custo garantido ótimo, avalia-se que a utilização do método de otimização proposto no presente trabalho permite uma redução de custo garantido em 11% quando comparado à formulação de Agulhari sem otimização. Em relação às formulações de Xie, a otimização proposta proporcionou uma redução de 46% em relação à formulação que utiliza a matriz L de acordo com a Eq. (2.29). Dessa forma, conclui-se que a utilização do método de otimização proposto

permite otimizar os valores de custo garantido, indicando sistemas robustos com melhor desempenho robusto H_∞.

Tabela 4.1 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso do Exemplo 17 (Dong & Yang, 2013).

Formulação	Parâmetros	γ	Controlador K_{sof}
Xie $X = X_d$	$L = \mathbf{0}$ $r = 1$	4,5766	$\begin{bmatrix}0{,}0485\\0{,}6226\end{bmatrix}^T$
Xie $X = X_d$	$L = +Eq.(2.29)$ $r = 1$	5,5207	$\begin{bmatrix}0{,}0315\\0{,}2909\end{bmatrix}^T$
Xie $X = X_d$	$L = -Eq.(2.29)$ $r = 1$	4,5552	$\begin{bmatrix}0{,}0522\\0{,}7111\end{bmatrix}^T$
Chang	$\beta = 0{,}004$ $\rho = 0{,}006$	2,4515	$\begin{bmatrix}0{,}6419\\5{,}915\end{bmatrix}^T$
Agulhari	K_s	2,6593	$\begin{bmatrix}0{,}1692\\1{,}7445\end{bmatrix}^T$
Xie (DE) $X = X_d$	$L^* = \begin{bmatrix}0{,}0261\\0{,}1946\end{bmatrix}^T$ $r^* = 0{,}0038$	2,4524	$\begin{bmatrix}10{,}46\\90{,}32\end{bmatrix}^T$
Xie (DE) $X = X_t$	$L^* = \begin{bmatrix}0{,}0894\\-0{,}0896\end{bmatrix}^T$ $r^* = 0{,}0199$	2,4889	$\begin{bmatrix}0{,}5960\\5{,}597\end{bmatrix}^T$
Agulhari (DE)	$K_{so}^* = \begin{bmatrix}1{,}325\\12{,}00\end{bmatrix}^T$	2,3781	$K_{sof} = K_{so}^*$

Vale mencionar que as formulações de Xie obtidas por meio do cálculo da matriz L a partir da Eq. (2.29) apresentaram γ substancialmente diferentes de acordo com o sinal da equação. Essa constatação confirma a importância de se avaliar ambos os sinais para o referido cálculo, conforme mencionado no capítulo anterior e indicado por (Gopmandal & Ghosh, 2021).

Além disso, é importante ressaltar que, entre as formulações onde não se aplicou o método de otimização proposto neste trabalho, a formulação de Chang apresentou resultado consideravelmente melhor, com uma diferença relativa de apenas 3% em relação a γ^*. Cabe ressaltar que foi necessário testar várias combinações de valores para

os dois parâmetros por meio de tentativa e erro, até se obter o melhor resultado para a referida formulação. Outro ponto interessante de ser abordado por meio da visualização dos resultados é que, para este problema específico, a mudança de variável com uma matriz triangular não se mostrou capaz de melhorar o resultado obtido para a mudança de variável com uma matriz diagonal em termos do desempenho H_∞.

É importante avaliar também as respostas transitórias obtidas para o sistema mediante a entrada de um sinal conhecido, com o intuito de fomentar análises sobre o método de otimização proposto e os resultados obtidos para as formulações LMI. Dessa forma, considera-se a função degrau unitário em função do tempo $\psi(t)$:

$$\psi(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases} \tag{4.3}$$

Portanto, aplica-se o sinal de entrada $w(t)$ dado por:

$$w(t) = \psi(t-0{,}20) - \psi(t-0{,}21) \tag{4.4}$$

Com base no método proposto visando a otimização dos parâmetros de ajuste das formulações com o intuito de se obter melhores resultados, avalia-se a utilização ou não do método de otimização. Portanto, as formulações de Agulhari com e sem utilização do método de otimização DE são selecionadas para visualizar as saídas do sistema, conforme Figura 4.1, e os sinais de controle $u(t)$, conforme Figura 4.2. Vale ressaltar que a implementação consiste no pior caso para o custo garantido H_∞, correspondente ao segundo vértice do sistema incerto, conforme resultado obtido por meio da técnica de cálculo do custo garantido (Gonçalves, et al., 2007).

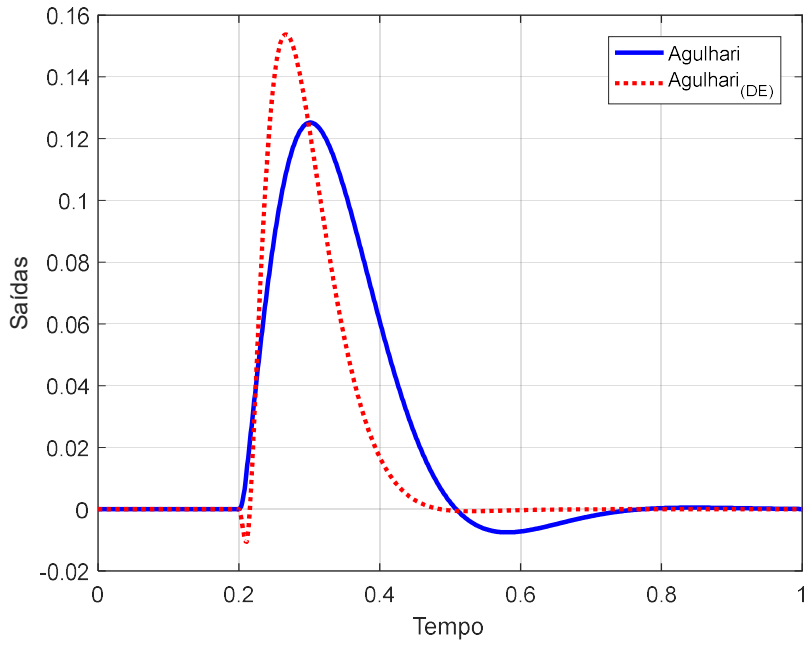


Figura 4.1 – Respostas transitórias da saída $y_1(t)$ para o sistema com pior caso de norma H_∞ comparando a utilização ou não de método de otimização para o Exemplo 17.

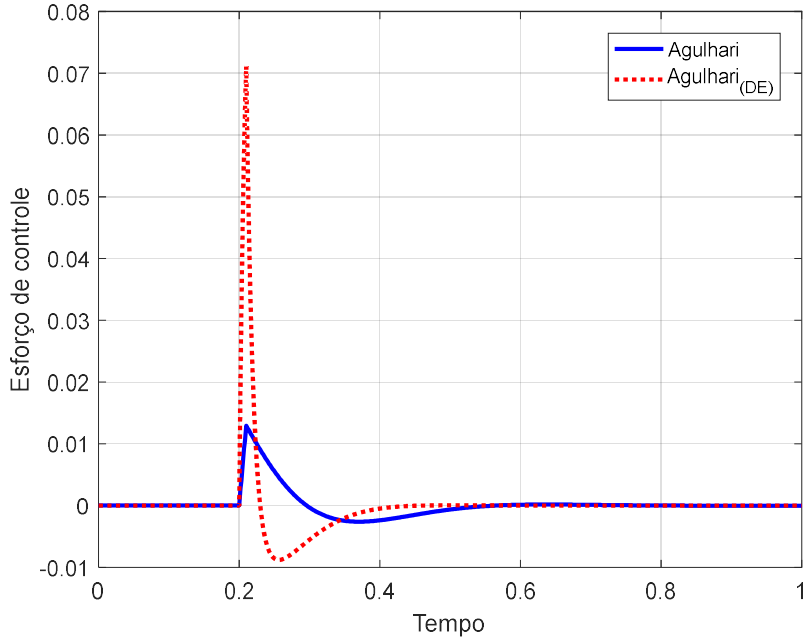


Figura 4.2 – Respostas transitórias do sinal de controle $u(t)$ para o sistema com pior caso de norma H_∞ comparando a utilização ou não de método de otimização para o Exemplo 17.

Em relação aos sinais de saída, observa-se que a utilização da otimização implicou em amplitudes maiores na perturbação da saída do sistema, apresentando um

aumento no valor de pico em aproximadamente 20%. Entretanto, é possível observar que a perturbação com o controlador otimizado retorna ao regime permanece em um tempo 37% menor do que o controlador obtido sem otimização. No tocante aos esforços de controle, também podem ser constatadas comparações semelhantes àquelas mencionadas para a saída $y_1(t)$.

Uma vez que a avaliação da resposta transitória não é suficiente para consolidar uma análise sobre a comparação da utilização ou não do método de otimização, é importante que sejam abordados métodos quantitativos para basear essas análises. Dessa forma, é interessante calcular a integral do erro quadrático (ISE, do inglês *Integral Square Error*). O ISE é um índice de desempenho relacionado à avaliação qualitativa do erro presente na resposta transitória ao serem comparados os sinais de referência e de saída de um sistema. O sinal de erro é calculado por meio da diferença entre os sinais de referência e de saída, ou seja, $e(t) = r(t) - y(t)$. Seja T o valor final do tempo de análise, o ISE é definido como sendo:

$$ISE = \int_0^T e^2(t)\, dt \ . \qquad (4.5)$$

Ressalta-se que, para o presente estudo de caso, o sinal de referência deve ser considerado como $r(t) = 0$, uma vez que, mediante aplicação de perturbações no sistema, o ideal seria que não houvessem impactos nas variáveis de desempenho do sistema. Dessa forma, apresentam-se os resultados obtidos para os índices ISE na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Resultados obtidos para as integrais dos erros quadráticos (ISE) para o Exemplo 17 (Dong & Yang, 2013).

Sinal de avaliação	Formulação	ISE	Diferença
$\boldsymbol{y_1(t)}$	Agulhari	0,0019	5,3%
	Agulhari (DE)	**0,0018**	
$\boldsymbol{u(t)}$	Agulhari	**5,2251 x 10^{-6}**	88,74%
	Agulhari (DE)	4,64 x 10^{-5}	

As integrais do erro quadrático apresentadas permitem concluir que, para os sinais exógenos específicos considerados na simulação, a escolha de utilizar otimização no processo de síntese do controlador possibilitou um aumento na capacidade do sistema em rejeitar efeitos de perturbações nas variáveis de desempenho do sistema, uma vez que o ISE apresentou uma redução de 5,3% em relação ao controlador não otimizado, o que significa em um menor erro acumulado para o sinal de $y_1(t)$ mediante a aplicação do sinal de distúrbio $w(t)$. Não obstante, observa-se que o controlador não otimizado possui a vantagem de necessitar menos esforço de controle, tanto em termos de amplitude quanto de erro quadrático causado pela perturbação $w(t)$. Tal vantagem pode significar uma redução do gasto de energia para lidar com possíveis perturbações na planta. Vale ressaltar que a minimização da norma H_∞ garante o limitante para o pior caso de ganho na resposta em frequência. Deste modo, de acordo com o espectro de frequência de cada sinal exógeno, pode resultar diferentes resultados na análise do índice de desempenho ISE.

Por fim, conclui-se que o estudo de caso permite uma possibilidade de atuação em relação ao que é mais interessante ao usuário. Mediante aplicação do método proposto para otimizar o controle robusto do sistema, torna-se possível corrigir efeitos de perturbações mais rapidamente e com menores impactos de erros na saída do sistema, além de que, em contrapartida, o controlador resultante exige maiores níveis de esforço de controle para corresponder a esses resultados. Cabe ressaltar que, por meio da escolha das variáveis de desempenho, podem ser obtidos diferentes compromissos entre rejeição do distúrbio e esforço de controle.

4.2 Sistema de quatro tanques

O presente estudo de caso consiste na aplicação de um sistema de controle de nível de quatro tanques (Johansson, 2000), conforme apresentado pela Figura 4.3.

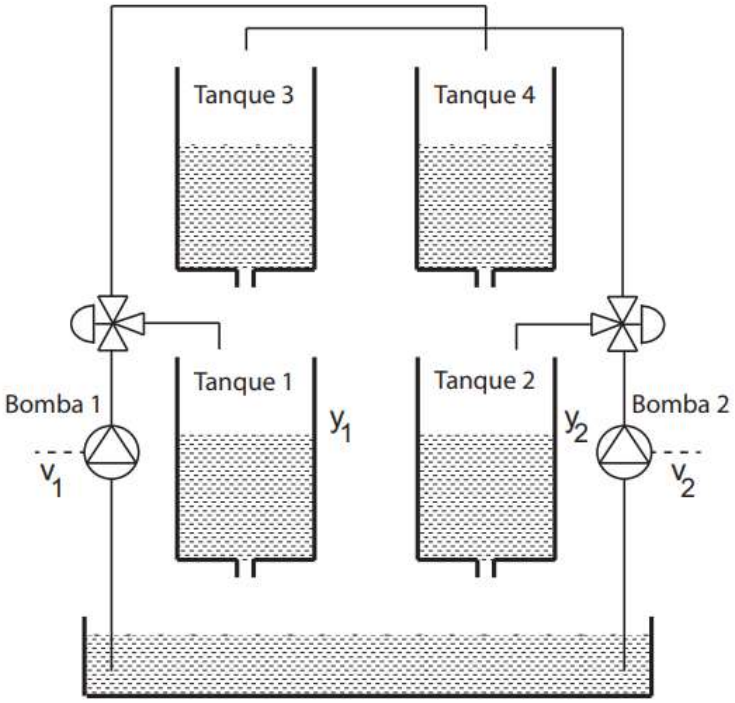


Figura 4.3 – Representação esquemática do estudo de caso referente ao sistema para controle de nível de quatro tanques (Johansson, 2000).

A partir da consideração do ponto de operação de fase mínima, o referido sistema pode ser representado por um modelo linearizado e invariante no tempo, no espaço de estados cujas matrizes são:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{62} & 0 & \frac{1}{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{90} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (4.6)$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B_u = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 k_1}{28} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 k_2}{32} \\ 0 & \frac{(1-\lambda_2)k_2}{28} \\ \frac{(1-\lambda_1)k_1}{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$C_z = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 4} & \boldsymbol{I}_2 \\ \mathbf{0}_{2\times 4} & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \rho \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} ,$$

$$D_{zw} = D_{yw} = [\mathbf{0}_{4\times 2}] \quad ,$$

considerando como parâmetros incertos:

- $\lambda_1 \in [0{,}56; \quad 0{,}84]$;
- $\lambda_2 \in [0{,}48; \quad 0{,}72]$;
- $k_1 \in [2{,}664; \quad 3{,}996]$;
- $k_2 \in [2{,}680; \quad 4{,}020]$.

Cabe ressaltar que λ_1 e λ_2 representam os ajustes das válvulas de três vias e k_1 e k_2 representam os ganhos referentes às bombas hidráulicas. Além disso, entende-se que as variáveis de estado são os níveis de cada tanque (h_1, h_2, h_3 e h_4) e as integrais dos erros de rastreamento (ϕ_1 e ϕ_2). Portanto, tem-se o vetor das variáveis de estado $x = [h_1 \; h_2 \; h_3 \; h_4 \; \phi_1 \; \phi_2]^T$, sendo as integrais dos erros de rastreamento $\phi_i(t) = \int [r_i(t) - h_i(t)]dt, \;\; i = 1, 2.$

As variáveis manipuladas deste estudo de caso são as tensões aplicadas às bombas, $u = [u_1 \; u_2]^T$, as variáveis exógenas são os sinais de referência $w = [r_1 \; r_2]^T$ e as variáveis de desempenho são $z = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \rho u_1 \quad \rho u_2]^T$. O parâmetro $\rho = 0{,}5$ é escolhido para se ter um compromisso entre a minimização tanto das integrais dos erros de rastreamento quanto dos esforços de controle.

O presente estudo de caso consiste na avaliação do sistema de quatro tanques apresentado pela Eq. (4.6) perante as formulações LMI estudadas anteriormente. Os resultados obtidos, conforme cada formulação, são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso do sistema de quatro tanques.

Formulação	Parâmetros	γ	Controlador K_{sof}
Xie $X = X_d$	$L = \mathbf{0}$ $r = 1$	8,5815	$\begin{bmatrix} 46{,}36 & -27{,}55 \\ -37{,}96 & 61{,}05 \\ 7{,}094 & -2{,}668 \\ -4{,}244 & 8{,}428 \end{bmatrix}^T$
Xie $X = X_d$	$L = +Eq.(2.29)$ $r = 1$	Sistema instável	-
Xie $X = X_d$	$L = -Eq.(2.29)$ $r = 1$	7,9254	$\begin{bmatrix} 75{,}92 & -6{,}786 \\ 6{,}810 & 110{,}8 \\ 14{,}237 & 2{,}601 \\ 0{,}3634 & 15{,}52 \end{bmatrix}^T$
Chang	$\beta = 0{,}35$ $\rho = 0{,}05$	10,485	$\begin{bmatrix} 72{,}65 & -62{,}43 \\ -84{,}56 & 97{,}66 \\ 7{,}908 & -6{,}176 \\ -8{,}180 & 9{,}988 \end{bmatrix}^T$
Agulhari	K_{sf}	4,3209	$\begin{bmatrix} 176{,}4 & -17{,}96 \\ 97{,}83 & 62{,}27 \\ 45{,}09 & -5{,}768 \\ 21{,}36 & 16{,}51 \end{bmatrix}^T$
Xie (DE) $X = X_d$	$L^* = \begin{bmatrix} -0{,}7897 & 0{,}5898 \\ 1{,}0436 & -0{,}3960 \\ 0{,}4992 & 0{,}2348 \\ 0{,}0234 & 0{,}1951 \end{bmatrix}^T$ $r^* = 0{,}6366$	4,3154	$\begin{bmatrix} 206{,}3 & -78{,}28 \\ 12{,}45 & 165{,}2 \\ 53{,}36 & -20{,}84 \\ -4{,}615 & 44{,}05 \end{bmatrix}^T$
Xie (DE) $X = X_t$	$L^* = \begin{bmatrix} 0{,}4560 & 1{,}060 \\ 1{,}154 & -0{,}3614 \\ 0{,}6210 & 0{,}3288 \\ -0{,}0098 & 0{,}1711 \end{bmatrix}^T$ $r^* = 0{,}6573$	4,3957	$\begin{bmatrix} 189{,}2 & -77{,}68 \\ 23{,}29 & 137{,}7 \\ 48{,}11 & -19{,}84 \\ -3{,}582 & 38{,}31 \end{bmatrix}^T$
Agulhari (DE)	$K_{so}^* = \begin{bmatrix} 218{,}4 & 8{,}507 \\ 130{,}2 & 500{,}1 \\ 81{,}07 & 14{,}70 \\ 27{,}52 & 143{,}99 \end{bmatrix}^T$	3,7780	$K_{sof} = K_{so}^*$

Conforme observado nos resultados apresentados, calcular a matriz L por meio das formulações encontradas na literatura científica pode implicar em problemas onde

não são encontradas soluções factíveis, como observado no resultado obtido para a formulação de Xie com a matriz L calculada a partir da Eq. (2.29) com sinal positivo, o que implica em controladores que não garantem estabilidade robusta ao sistema.

É possível também constatar por meio da Tabela 4.3 que, entre as formulações que não utilizam o algoritmo de otimização proposto, avaliam-se resultados que variam entre 4,32 e 10,49 para o custo garantido H_∞, constatando-se a diferença do desempenho robusto do sistema resultante obtido mediante escolha da formulação LMI mesmo sem a utilização do método de otimização. Com base no valor obtido para o custo garantido ótimo $\gamma^* = 3{,}7780$, obtido mediante a formulação de Agulhari com otimização, observa-se que os resultados obtidos para o custo garantido H_∞ apresentam diferença substancial perante o valor ótimo. Comparativamente, o método proposto por Agulhari sem utilização da otimização apresenta um custo garantido 13% maior do que aquele obtido com otimização. Em relação às formulações de Xie, observando-se os menores custos garantidos, a otimização proporcionou uma redução de 46% em relação à formulação que utiliza a matriz L de acordo com a Eq. (2.29). Dessa forma, conclui-se que a utilização do método proposto consistiu em uma redução considerável do custo garantido, resultando sistemas com melhor desempenho H_∞.

É possível avaliar o estudo de caso com relação a respostas transitórias de interesse para o sistema. Para tanto, utiliza-se o sinal $w(t)$ com base nos sinais de referência para os níveis dos Tanques 1 e 2, respectivamente apresentado por $r_1(t)$ e $r_2(t)$:

$$\begin{aligned} w(t) &= [r_1(t) \quad r_2(t)]^T \ , \\ r_1(t) &= \psi(t) \ , \\ r_2(t) &= \psi(t-50) \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Em seguida, obtém-se a resposta transitória dos níveis dos Tanques 1 e 2. Prezando pelo entendimento dos gráficos, são apresentadas as respostas transitórias referentes à Bomba 1 e ao Tanque 1 para todos os dezesseis vértices do problema incerto.

Conforme apresentado pela Figura 4.4, observa-se a variação da resposta transitória conforme a diferenciação dos vértices para a formulação de Agulhari (DE). Em outras palavras, entende-se que existem vértices do problema incerto que implicam em maiores níveis de tensão elétrica a ser aplicada à Bomba 1 conforme as amplitudes dos sinais de controle, ressaltando que as conclusões apresentadas são obtidas de forma análoga para a Bomba 2. É interessante ressaltar que o controlador robusto altera os sinais de controle (tensão elétrica fornecida às bombas) para compensar as variações dos parâmetros incertos, resultando em respostas transitórias similares para os níveis do Tanque 1 ao se comparar os vértices do problema, justificando as respostas transitórias apresentadas pela Figura 4.5.

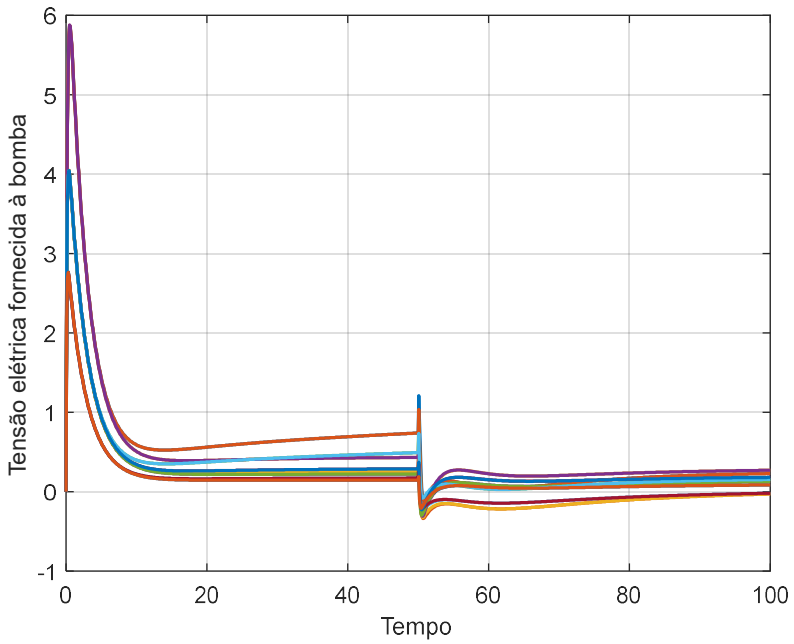


Figura 4.4 – Resposta transitória do sinal de controle do sistema (tensão elétrica na Bomba 1) para os vértices do sistema de quatro tanques.

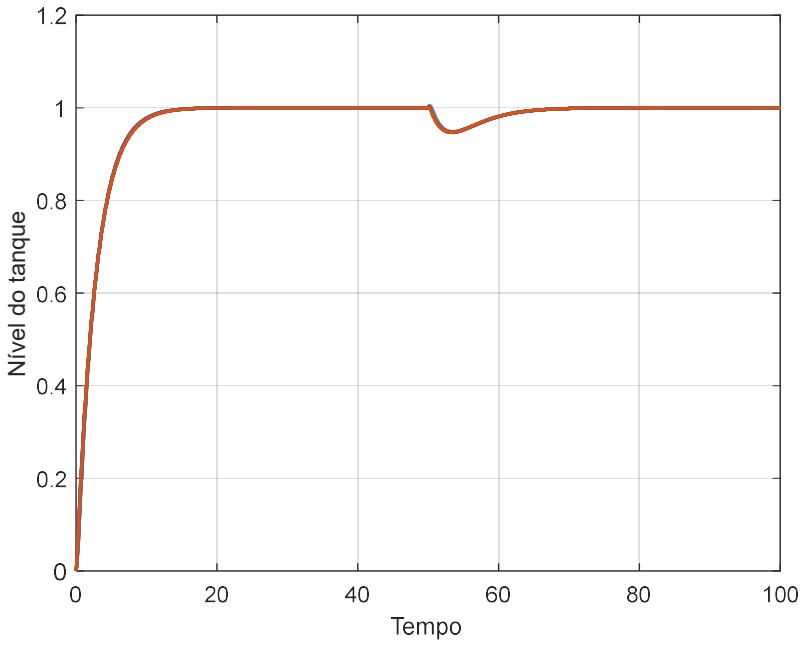


Figura 4.5 – Resposta transitória do nível do Tanque 1 para os vértices do sistema de quatro tanques.

Pode-se concluir que o controlador robusto H_∞ projetado apresenta uma resposta amortecida para a resposta de rastreamento, característica deste tipo de controle, e apresenta uma rejeição rápida ao distúrbio provocado pela outra malha de controle ($t = 50s$) através da válvula de 3 vias. Mesmo com a variação dos parâmetros, principalmente em relação à configuração da válvula de 3 vias, o controlador resultante teve desempenho semelhante. A ponderação sobre as variáveis de entrada na definição das variáveis de desempenho z, por meio do parâmetro ρ, teve como objetivo evitar a saturação dos sinais de controle considerando tensão máxima das bombas de 10V. Uma vez que no ponto de operação considerado as tensões são iguais a 3V, as variações menores que 6V significam que o objetivo foi atendido.

Considerando o sinal de referência $w(t)$ definido, é possível avaliar as integrais dos erros de rastreamento $\phi_i(t)$. Para tanto, utiliza-se o vértice de pior caso para a norma H_∞ determinado por meio da técnica proposta em (Gonçalves, et al., 2007). O referido vértice consiste naquele com os parâmetros incertos conforme:

- $\lambda_1 = 0{,}56;$
- $\lambda_2 = 0{,}48;$

- $k_1 = 2{,}664$;
- $k_2 = 2{,}680$.

Com base no vértice de pior caso para norma H_∞, apresentam-se os sinais de referência $w(t)$ na Figura 4.6, os níveis dos tanques na Figura 4.7 e as integrais dos erros de rastreamento $\phi_i(t)$ na Figura 4.8.

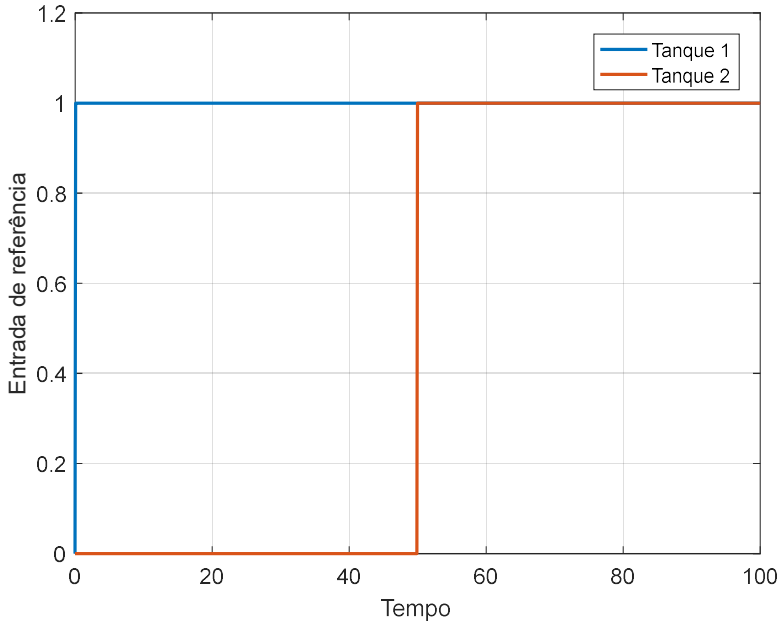


Figura 4.6 – Sinais de referência $w(t)$ aplicados ao sistema de quatro tanques.

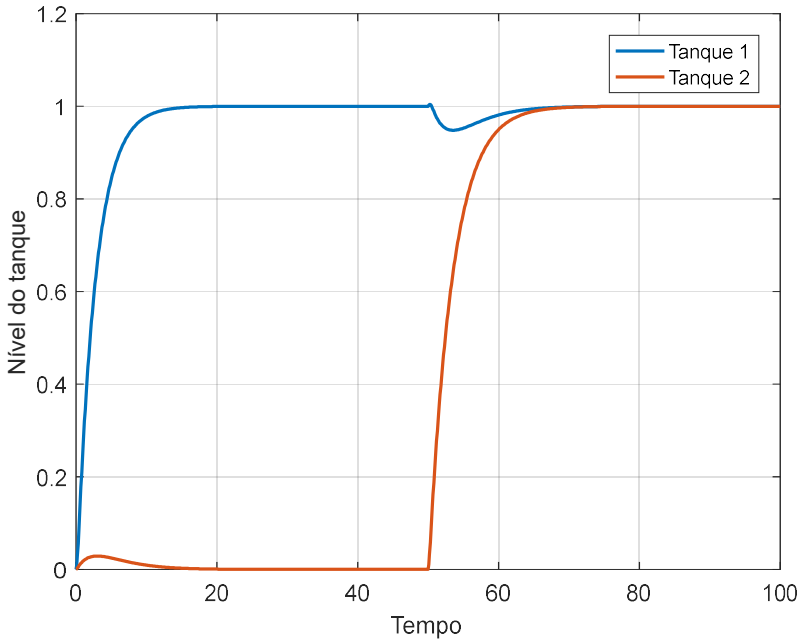


Figura 4.7 – Resposta transitória para os níveis dos tanques do sistema de quatro tanques.

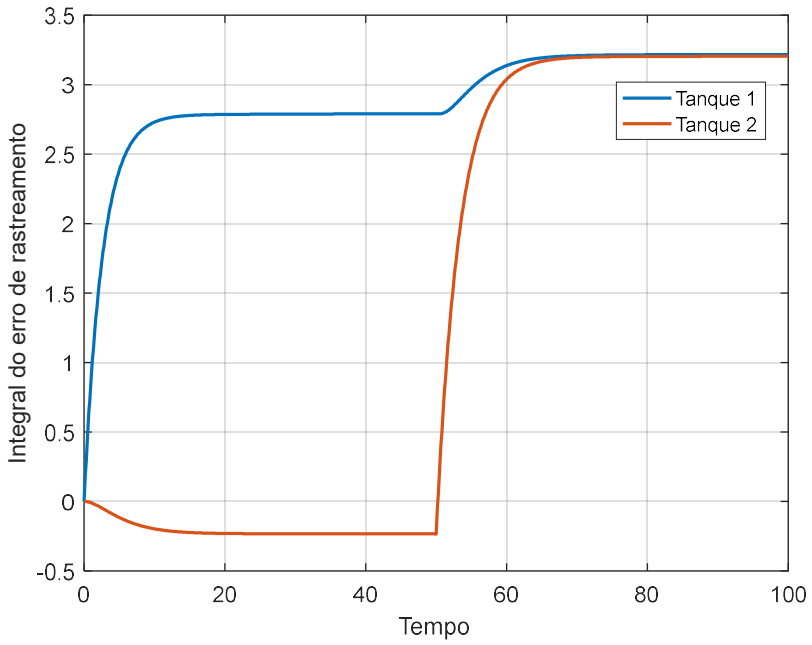


Figura 4.8 – Resposta transitória das integrais dos erros de rastreamento para o vértice de pior caso do sistema de quatro tanques.

Conforme observado a partir das respostas transitórias de nível dos tanques, constata-se que a entrada de uma determinada bomba causa um distúrbio no nível do tanque oposto. Esses distúrbios podem ser visualizados também mediante as respostas transitórias das integrais dos erros de rastreamento, conforme Figura 4.8. É interessante ressaltar que um dos objetivos de projeto foi minimizar a norma l_2 das integrais dos erros de rastreamento ϕ_i, o que indiretamente implica na minimização do erro de rastreamento.

Outra abordagem interessante em relação ao estudo de caso consiste em avaliar as respostas transitórias obtidas mediante a utilização ou não do método proposto para otimização dos parâmetros de ajuste inerentes às metodologias das formulações LMI. Dessa forma, comparam-se diferentes desempenhos H_∞ obtidos mediante otimização ou não (formulação de Agulhari com otimização e formulação de Agulhari com controlador dependente de parâmetros, respectivamente), conforme os resultados obtidos pela Tabela 4.3.

Mediante observação da Figura 4.9, constatam-se algumas divergências entre as respostas transitórias obtidas por meio do algoritmo proposto por Agulhari e as obtidas

com base na formulação de Agulhari associada ao método Evolução Diferencial proposta neste trabalho. Primeiramente, observa-se que a resposta obtida mediante otimização possui um transitório com característica mais rápida, tendo-se por base o tempo para atingir 50% do valor final aproximadamente 20% menor. Além disso, é interessante avaliar a qualidade do transitório por meio da comparação entre os tempos de acomodação, representando o tempo que a resposta transitória necessita para acomodar na faixa de 5% do valor final. O controlador obtido sem otimização proporciona um tempo de acomodação aproximadamente 7% menor do que a resposta obtida mediante método de otimização. Dessa forma, conclui-se que a otimização neste caso específico obteve um transitório com maior velocidade para sair do regime permanente, entretanto implica em um transitório que demanda um tempo maior para se aproximar do valor final.

É possível observar que, para o sistema obtido com o método de otimização proposto, existe uma interferência maior entre as malhas de controle, com a variação do sinal de referência em uma malha afetando o nível do tanque da malha oposta, conforme apresentado pela Figura 4.9. Dessa forma, avalia-se que, quando a tensão de uma bomba varia, o nível do tanque oposto sofre uma oscilação de aproximadamente 3%. No tocante ao controlador obtido sem otimização, ressalta-se que, apesar de também ser afetado pela perturbação no nível do Tanque 1 causada pelo acionamento da Bomba 2, tal controlador inibiu consideravelmente o efeito provocado no nível do tanque. Em contrapartida, constata-se que o distúrbio no nível do Tanque 2 devido ao acionamento da Bomba 1 ocorre para os controladores obtidos com e sem otimização.

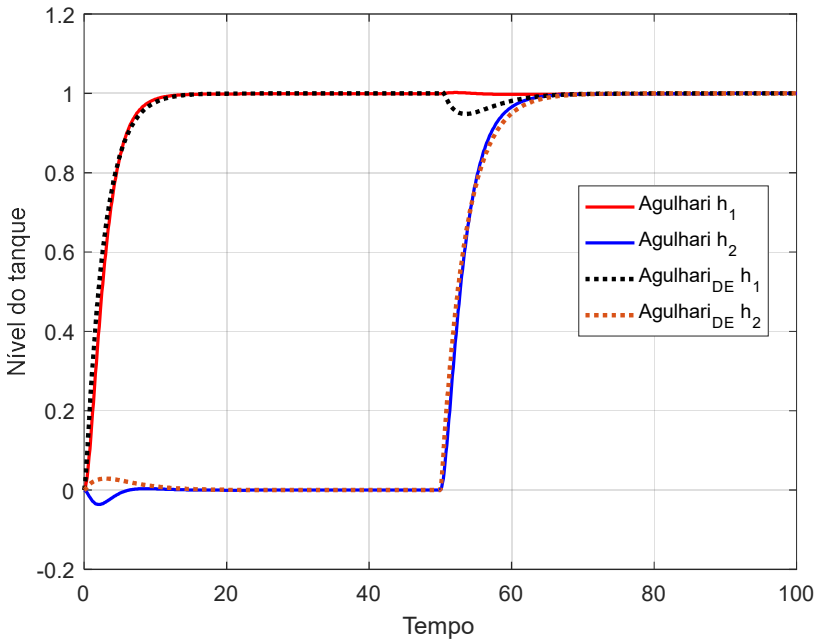


Figura 4.9 – Respostas transitórias dos níveis dos tanques do problema em relação à utilização ou não de método de otimização para o sistema de quatro tanques.

Com o intuito de comparar a utilização ou não do método proposto para a otimização dos parâmetros de ajuste das formulações LMI em termos qualitativos, é interessante calcular a integral do erro quadrático. Para o presente caso, o ISE é obtido mediante a comparação dos sinais de referência (Figura 4.6) e de saída (Figura 4.7) do sistema. Dessa forma, tem-se os índices ISE para as formulações sem e com o método de otimização proposto, considerando as duas malhas do sistema de quatro tanques, conforme apresentado pelos resultados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Resultados obtidos para as integrais dos erros ao quadrado (ISE) para sistema de quatro tanques.

Formulação	Malha	ISE	ISE Total	Diferença
Agulhari	1	1,8706	4,0001	18,78%
	2	2,1295		
Agulhari (DE)	1	1,4487	**3,2487**	
	2	1,8001		

Com base nos resultados apresentados, avalia-se que, mesmo com a perturbação existente da malha 2 sobre a malha 1 na resposta com controlador obtido mediante processo de otimização (representado pela Figura 4.9), o índice ISE se manteve menor em ambas as malhas. Tal conclusão permite afirmar que a maior parte

da integral do erro ocorre no transitório para a variação do sinal de referência e não nas perturbações existentes devido ao acoplamento entre as malhas. Desse modo, observa-se neste estudo de caso que quanto mais rápido é o transitório inicial, menor é a integral do erro, conforme resultado do controlador obtido por otimização.

Outra resposta transitória interessante para análise dos resultados obtidos pelos controladores, visando as divergências encontradas por meio da utilização do algoritmo de otimização são as integrais do erro de rastreamento, apresentadas na Figura 4.10.

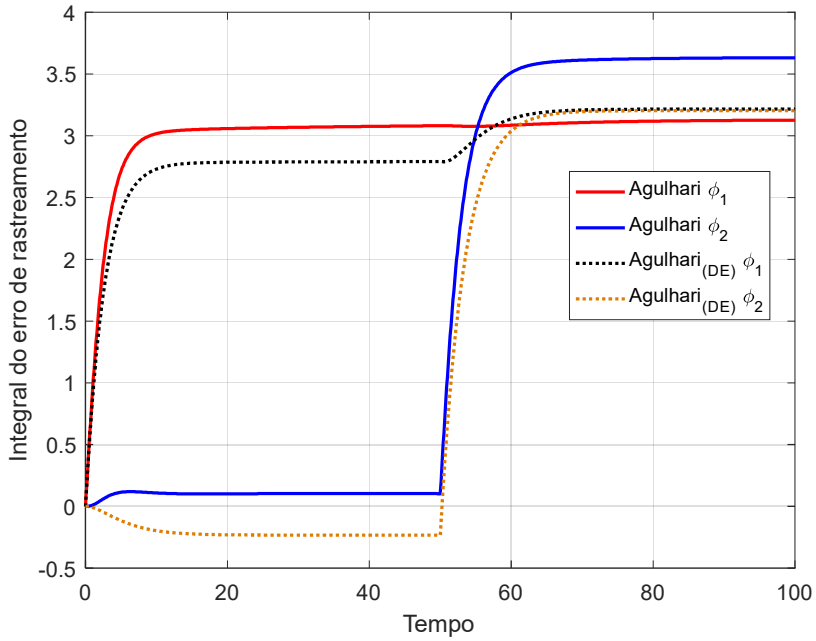


Figura 4.10 – Respostas transitórias das integrais dos erros de rastreamento em relação à utilização ou não de método de otimização para o sistema de quatro tanques.

Quanto menor a variação absoluta da integral do erro ao final do transitório, menor é o erro acumulado entre a saída e o sinal de referência. Para as respostas obtidas mediante aplicação de degrau unitário como sinal de referência, o controlador obtido com otimização apresenta menor variação da integral do erro. Considerando que a maior parte da integral do erro ocorre no início do degrau e que o controlador obtido por otimização apresenta um transitório mais rápido por atingir 50% do valor final em tempo menor, suas integrais de erro apresentam as menores variações. Por sua vez, a maior velocidade do transitório inicial do controlador obtido por otimização é justificada pelos maiores valores de tensão aplicadas nas bombas, como mostrado na Figura 4.11.

Para o efeito da malha 2 sobre a malha 1, o controlador obtido por otimização também apresenta menor variação absoluta. Por outro lado, para o efeito da malha 2 sobre a malha 1, a variação da integral do erro para o controlador obtido sem otimização é mínima, bem inferior ao do controlador obtido por otimização. Pode ser observado que, ao final dos dois transitórios, as integrais de erro variaram mais para o controlador obtido sem otimização.

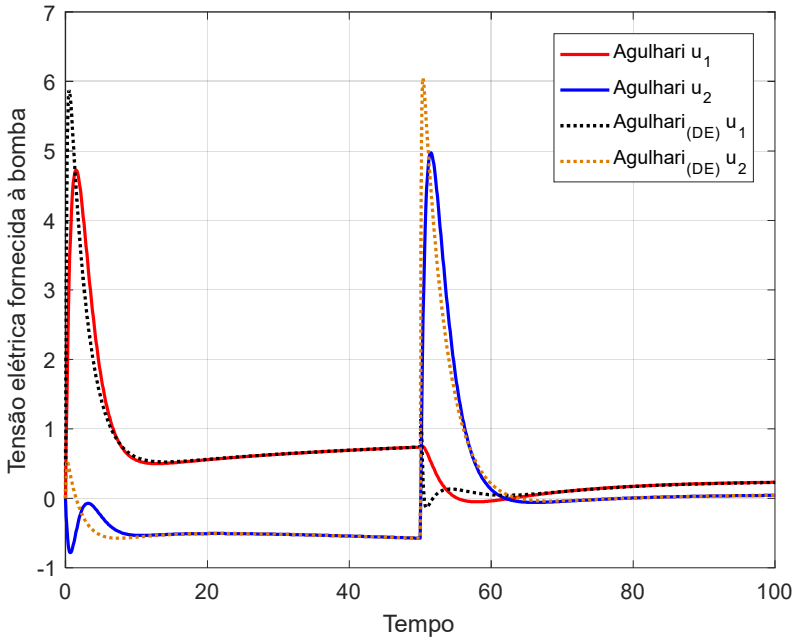


Figura 4.11 – Respostas transitórias dos sinais de controle do sistema (tensão elétrica aplicada às bombas) em relação à utilização ou não de método de otimização para o sistema de quatro tanques.

4.3 Suspensão de automóvel

Este estudo de caso consiste na avaliação do comportamento de um automóvel mediante a existência de perturbações relacionadas ao perfil da estrada na qual o veículo trafega. No controle da suspensão de um automóvel existem diferentes objetivos de controle, como (Rubió-Massegú, et al., 2013):

- Aceleração do chassi do veículo está associada ao conforto do passageiro, existindo um valor máximo aceitável;

- Excursão da suspensão deve ser limitada para evitar choques dos componentes mecânicos;
- Compressão do pneu afeta a estabilidade do veículo.

Neste estudo de caso é considerado o modelo incerto de uma suspensão ativa representado no espaço de estados com as seguintes matrizes (Rubió-Massegú, et al., 2013):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{(k_s+k_u)}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_u}{m_u} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 1/m_s \\ 0{,}001 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{yw} = D_{yu} = D_{zw} = [\mathbf{0}_{2\times 1}],$$

sob os parâmetros conhecidos m_s, m_u e k_u e os parâmetros incertos k_s e c_s:

- $m_s = 504{,}5$;
- $m_u = 62$;
- $k_u = 252.000$;
- $k_s \in [9.825; \quad 16.375]$;
- $c_s \in [300; \quad 500]$.

As variáveis de estado são as variações das posições do chassi e da roda em torno do ponto de equilíbrio e as suas respectivas velocidades. No modelo apresentado são

consideradas as medições da excursão da suspensão e da velocidade do chassi. Além disso, o modelo apresenta uma modificação nas variáveis de desempenho em relação ao problema original para obter um compromisso entre a minimização da aceleração do chassi e do esforço de controle.

Com base no sistema incerto, tem-se os resultados obtidos para cada uma das formulações LMI estudadas, conforme apresentado pela Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso de suspensão de veículo.

Formulação	Parâmetros	γ	Controlador K_{sof}
Xie $\boldsymbol{X = X_d}$	$L = \mathbf{0}$ $r = 1$	Sistema instável	-
Xie $\boldsymbol{X = X_d}$	$L = +Eq.(2.29)$ $r = 1$	936,74	$10^4[0{,}3415 \quad -4{,}818]$
Xie $\boldsymbol{X = X_d}$	$L = -Eq.(2.29)$ $r = 1$	Sistema instável	-
Chang	$\beta = 0{,}04$ $\rho = 0{,}03$	531,28	$10^4[0{,}4507 \quad -1{,}001]$
Agulhari	K_{sf}	Sistema instável	-
Xie (DE) $\boldsymbol{X = X_d}$	$L^* = 5$ $r^* = 0{,}0390$	549,72	$10^4[-8{,}791 \quad -5{,}555]$
Xie (DE) $\boldsymbol{X = X_t}$	$L^* = 5$ $r^* = 0{,}0024$	523,06	$10^5[-1{,}462 \quad -1{,}344]$
Agulhari (DE)	K_{so}	Sistema instável	-

Vale ressaltar que, devido à complexidade do estudo de caso, entende-se como necessário incrementar o método de otimização para se obter resultados melhores. Dessa forma, alterou-se o tamanho da população $N = 4Q_v$.

Entre as formulações apresentadas, é possível observar somente que a formulação de Xie, definindo a matriz L por meio da Eq. (2.29) com sinal positivo, e a formulação de Chang resultaram sistemas com estabilidade robusta. Não obstante, é interessante ressaltar a diferença dos custos garantidos entre ambas formulações, uma vez que atingiu um nível de diferença relativa σ_r de 43%.

Não obstante, tendo-se por base o custo garantido ótimo $\gamma^* = 523{,}06$ obtido para a formulação de Xie com otimização e mudança de variável triangular, observa-se uma redução de apenas 2% em relação à formulação de Chang. Entretanto, considerando que o estudo de caso consiste na aceleração do chassi do automóvel que, por sua vez, implica na sensação de conforto dos passageiros, além de englobar questões de integridade dos componentes mecânicos e estabilidade do veículo, entende-se que é recomendável buscar qualquer redução no custo garantido.

O presente estudo de caso permite visualizar respostas transitórias interessantes sob o ponto de vista de análises dos resultados obtidos para as formulações LMI mediante aplicação ou não do método de otimização proposto neste trabalho. Dessa forma, considera-se o sinal de entrada de um período cossenoidal conforme (Rubió-Massegú, et al., 2013):

$$w(t) = 0{,}05[1 + \cos(5\pi t)][1 - \psi(t - 0{,}4)] \quad , \tag{4.9}$$

sendo o sinal $w(t)$ apresentado na Figura 4.12.

Primeiramente, avaliam-se as respostas transitórias para o sistema em malha-aberta, mediante a aplicação do sinal de distúrbio $w(t)$. Para tanto, observa-se a aceleração do chassi do automóvel na Figura 4.13, a deflexão da suspensão na Figura 4.14 e a deflexão no pneu na Figura 4.15.

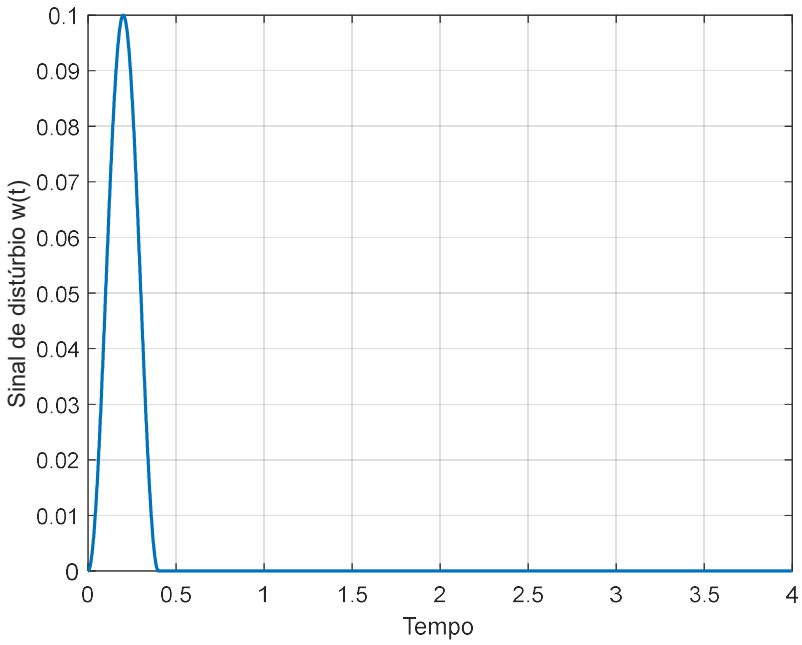


Figura 4.12 – Sinal de distúrbio para o estudo de caso de suspensão de veículo.

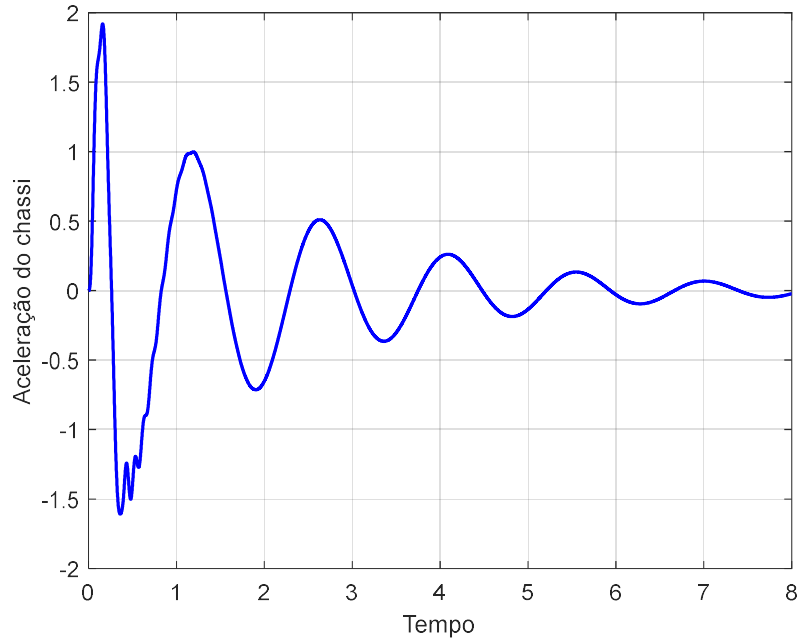


Figura 4.13 – Respostas do chassi do automóvel para sistema em malha-aberta para estudo de caso de suspensão de veículo.

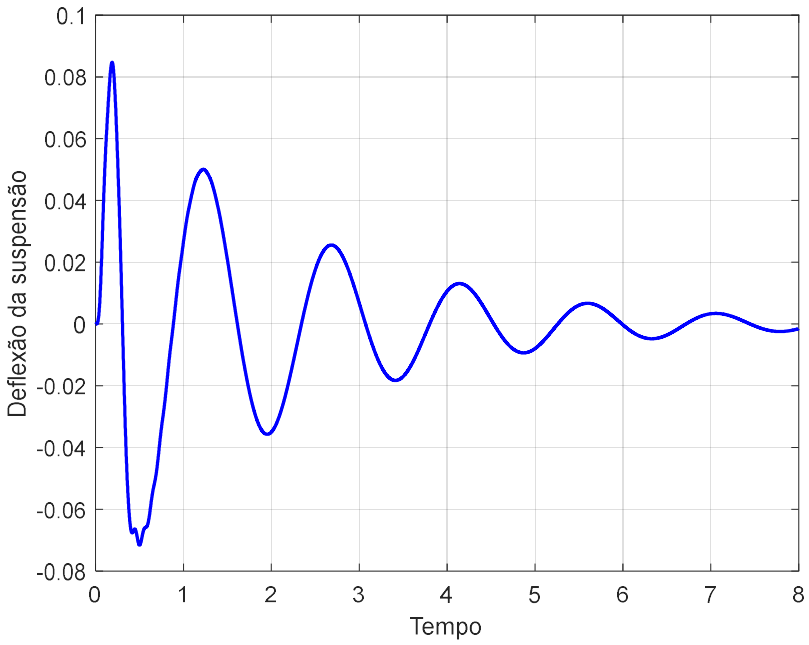


Figura 4.14 – Respostas da deflexão da suspensão para sistema em malha-aberta para estudo de caso de suspensão de veículo.

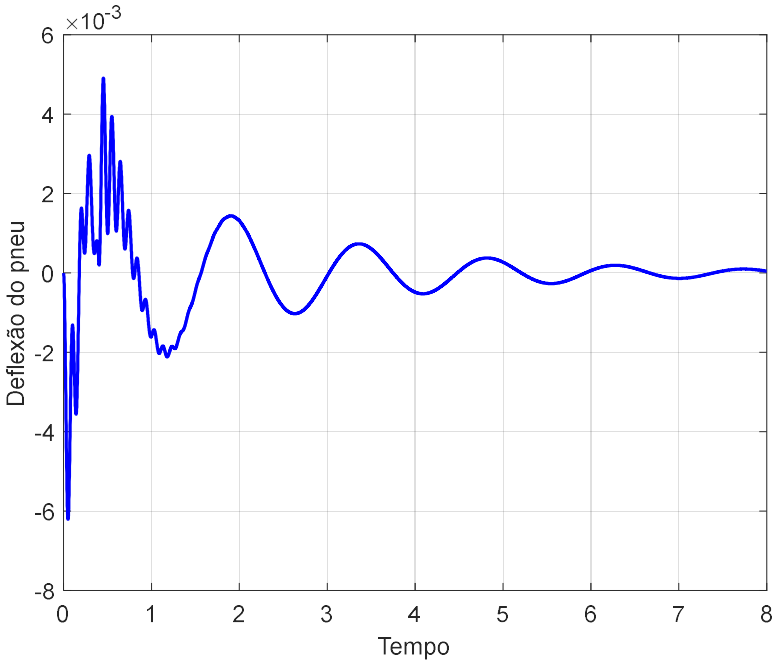


Figura 4.15 – Respostas da deflexão do pneu para sistema em malha-aberta para estudo de caso de suspensão de veículo.

Observando-se as respostas transitórias obtidas sem realimentação, constata-se que o sistema apresenta característica oscilatória para as variáveis de desempenho, além de demandar um tempo de acomodação maior que 6,0 segundos para se

aproximar da estabilidade de regime permanente. Em outras palavras, a ausência de um controlador no sistema permite que o distúrbio provoque interferências prolongadas nas variáveis de desempenho. Ao considerar que o estudo de caso se refere a um automóvel, é imprescindível que os efeitos de perturbações sejam amenizados, uma vez que tais efeitos podem provocar danos materiais e comprometer a segurança dos passageiros do veículo. Dessa forma, entende-se como fundamental a inclusão de ação de controle para evitar efeitos negativos para o veículo e seus passageiros.

Em relação ao sistema com realimentação estática de saída utilizando os controladores apresentados na Tabela 4.5, podem ser estudadas as respostas transitórias em malha-fechada. Além da utilização do sinal $w(t)$ para apresentação dos resultados, define-se o vértice de pior caso para a norma H_∞ da técnica de cálculo do custo garantido (Gonçalves, et al., 2007). O referido vértice corresponde àquele com os parâmetros incertos conforme:

- $k_s = 16.375$;
- $c_s = 300$.

É importante avaliar os resultados obtidos por meio da realimentação estática de saída e da utilização do método de otimização proposto neste trabalho para síntese do controlador robusto. Para tanto, são realizadas comparações entre formulações de Xie sem (com matriz L calculada a partir da Eq. (2.29) e sinal positivo) e com otimização (algoritmo DE e mudança de variável triangular), além de apresentar as respostas obtidas para o sistema em malha-aberta, ou seja, com controlador $K_{sof} = \mathbf{0}$. Para tanto, apresentam-se as respostas transitórias da aceleração, Figura 4.16, deflexão da suspensão, Figura 4.17, deflexão do pneu, Figura 4.18, e sinal de controle $u(t)$, Figura 4.19.

No tocante à resposta transitória da aceleração do chassi para o automóvel, observa-se que os resultados dos sistemas com realimentação apresentam tempo de acomodação substancialmente menor do que o sistema em malha-aberta, sendo obtida uma redução máxima próxima a 89%. Dessa forma, conclui-se que a realimentação atingiu o objetivo de reduzir a duração do impacto causado pela perturbação nas

variáveis de desempenho do sistema. Esse resultado pode ser observado também para as deflexões de suspensão e pneu.

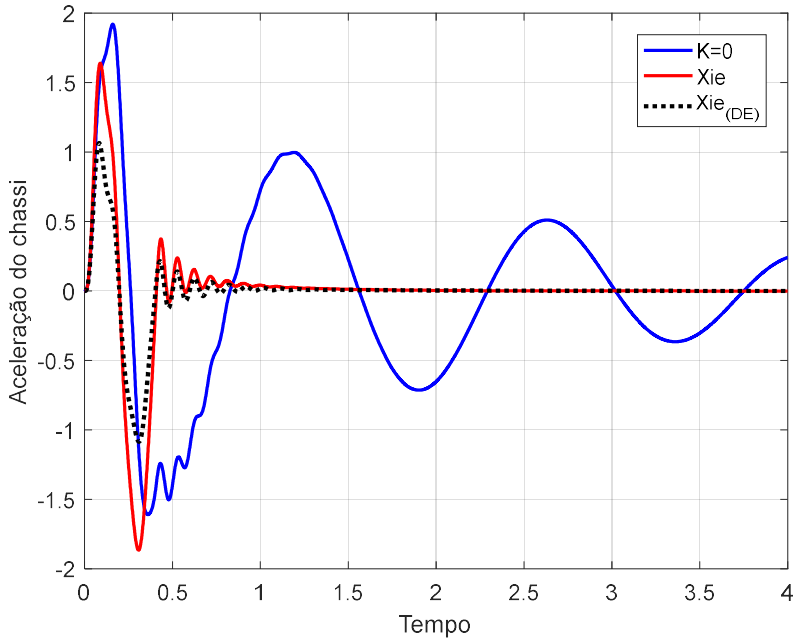


Figura 4.16 – Respostas transitórias da variável de desempenho referentes à aceleração do chassi do automóvel para estudo de caso de suspensão de veículo.

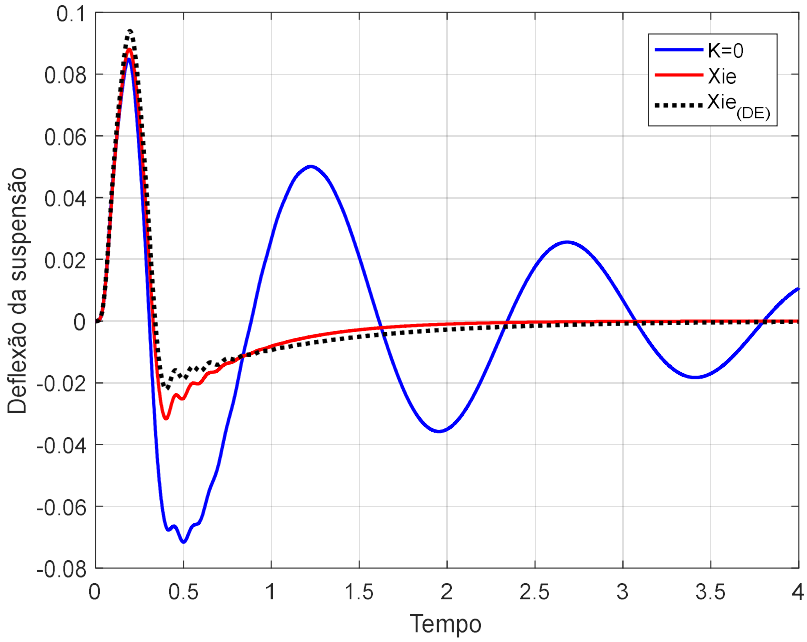


Figura 4.17 – Respostas transitórias para a deflexão da suspensão do automóvel para estudo de caso de suspensão de veículo.

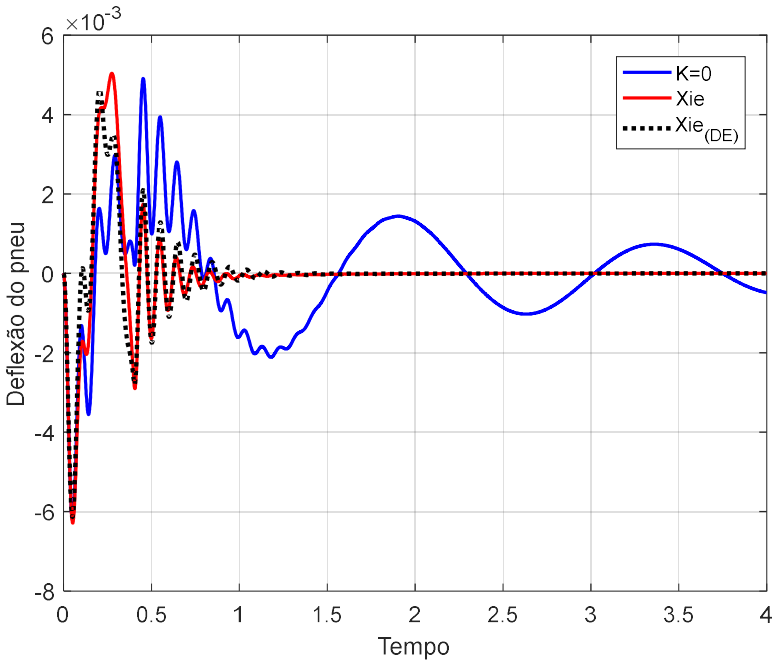


Figura 4.18 – Respostas transitórias para a deflexão do pneu do automóvel para estudo de caso de suspensão de veículo.

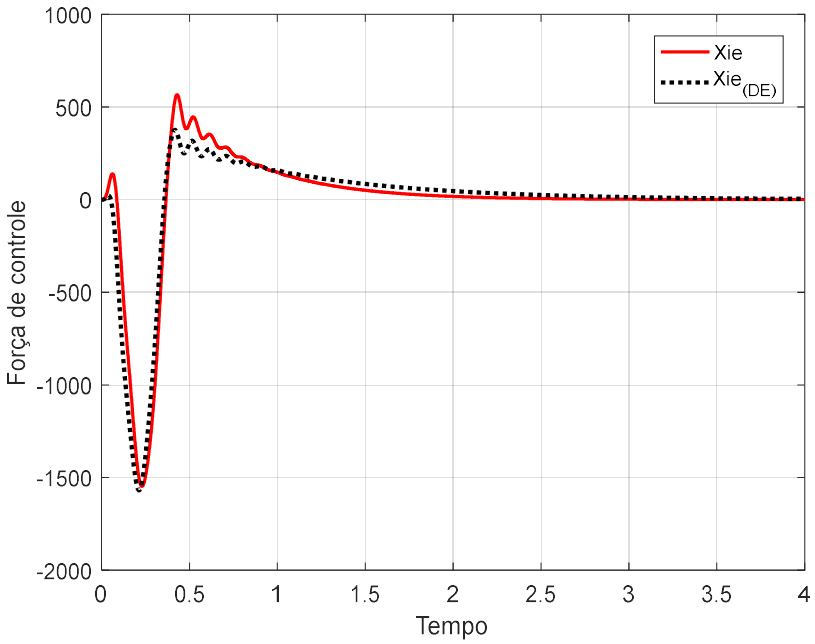


Figura 4.19 – Respostas transitórias da variável de desempenho referente ao sinal de controle do sistema para estudo de caso de suspensão de veículo.

Em relação à amplitude da aceleração do chassi, avalia-se que sistema com controlador obtido mediante processo de otimização apresentou redução da amplitude

máxima em 35% comparado ao sistema em malha-fechada sem otimização e, em comparação com o sistema em malha-aberta, a redução obtida é de 45%. Portanto, entende-se que o resultado obtido por meio da otimização proposta proporciona mais conforto aos passageiros.

Em termos de deflexão da suspensão e dos pneus do automóvel, os resultados entre as formulações LMI se apresentam com comportamentos semelhantes. Com relação aos esforços de controle, observa-se que a variação máxima absoluta é similar entre os controladores. Entretanto, no controlador obtido com otimização, a variação da entrada é mais rápida e não apresenta a resposta inversa gerada pelo controlador obtido sem otimização. Além disso, o transitório gerado pelo controlador sem otimização estabiliza mais rapidamente, porém se mostra mais oscilatório.

Dessa forma, é interessante calcular o índice de integral do erro quadrático para consolidar análises mais profundas sobre as respostas apresentadas. Ressalta-se que, para o presente estudo de caso, o sinal de referência deve ser considerado como $r(t) = 0$ no cálculo da integral do erro quadrático conforme estabelecido pela Eq. (4.5), considerando que o ideal para o sistema seria que não houvessem impactos na saída mediante ocorrência de perturbações. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.6.

De maneira geral, os resultados obtidos para o índice de integral do erro quadrático reafirmam a superioridade do resultado fornecido pelo sistema em malha-fechada ao ser comparada com o mesmo em malha-aberta. Observando-se a diferença entre os valores de ISE obtidos, ressalta-se que o impacto da perturbação $w(t)$ é substancialmente amenizado por meio da realimentação de saída do sistema.

O objetivo principal dos resultados apresentados consiste na comparação entre os sistemas resultantes da inserção de controladores pela formulação de Xie com e sem otimização. Dessa forma, observa-se que o sistema obtido com otimização resulta em resultados melhores sob o ponto de vista de aceleração de chassi, com integral do erro 62% menor do que o obtido pelo sistema sem otimização, de forma que se confirma uma otimização do parâmetro relacionado com o conforto dos passageiros. Além disso, também são observados resultados melhores para a deflexão de pneu, com uma

redução de aproximadamente 19% do erro provocado pela perturbação, o que permite ao veículo se manter com maior estabilidade quando ocorre uma perturbação. Não obstante, é interessante ressaltar que a otimização culmina em um aumento de 7% no erro causado pela perturbação sob o ponto de vista da deflexão da suspensão, mas consiste em um resultado bem próximo em relação ao sistema obtido sem otimização. Os resultados obtidos correspondem também a uma redução de 4% na atividade de controle exigida pelo controlador.

Tabela 4.6 – Resultados obtidos para as integrais dos erros quadráticos (ISE) para estudo de caso de suspensão de veículo.

Sinal de avaliação	Formulação	ISE	Diferença para menor valor
Aceleração do chassi	Malha-aberta	1,8548	89,7%
	Xie	0,5033	62%
	Xie (DE)	**0,1913**	-
Deflexão de suspensão	Malha-aberta	0,0043	69,8%
	Xie	**0,0013**	-
	Xie (DE)	0,0014	7,1%
Deflexão de pneu	Malha-aberta	$7{,}7412 \times 10^{-6}$	49,2%
	Xie	$4{,}8323 \times 10^{-6}$	18,6%
	Xie (DE)	$\mathbf{3{,}9324 \times 10^{-6}}$	-
Força de controle	Xie	$1{,}3780 \times 10^{5}$	4,4%
	Xie (DE)	$\mathbf{1{,}3168 \times 10^{5}}$	-

Por fim, conclui-se que o método de otimização proposto apresentou resultados satisfatórios para este estudo de caso, justificando sua utilização. Essa conclusão está relacionada à melhora de resultados importantes como custo garantido e rejeição a efeitos causados por perturbações, culminando em um veículo com maior conforto e

maior estabilidade, além de ser necessário menor esforço de controle para amenizar efeitos causados por distúrbios.

4.4 Aeronave com decolagem e aterrisagem vertical

O presente estudo de caso consiste no modelo da dinâmica no plano vertical de uma aeronave com decolagem e aterrissagem vertical (VTOL, do inglês *Vertical Take-Off and Landing*), cujas matrizes são (Narendra & Tripathi, 1973) (Leibfritz & Lipinski, 2003):

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}0366 & 0{,}0271 & 0{,}0188 & -0{,}4555 \\ 0{,}0482 & -1{,}010 & 0{,}0024 & -4{,}0208 \\ 0{,}1002 & a_{32} & -0{,}707 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0{,}04678 & 0 \\ 0{,}04572 & 0{,}00988 \\ 0{,}04369 & 0{,}00111 \\ -0{,}02179 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0{,}4422 & 0{,}1761 \\ b_{21} & -7{,}5922 \\ -5{,}52 & 4{,}49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$C_y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0],$$

$$D_{zw} = [\mathbf{0}_2], \quad D_{yw} = [\mathbf{0}_{1\times 2}],$$

considerando como parâmetros incertos (Narendra & Tripathi, 1973):

- $a_{32} \in [0{,}06635; \quad 0{,}5047]$;
- $a_{34} \in [0{,}1198; \quad 2{,}526]$;
- $b_{21} \in [0{,}9775; \quad 5{,}112]$.

O presente estudo de caso consiste na avaliação do sistema apresentado pela Eq. (4.10) com controladores sintetizados por meio das formulações LMI apresentadas ao longo do capítulo anterior. Este exemplo é interessante porque os ganhos $K_{sf,i}$ ou as matrizes $L = \mathbf{0}$ ou L dada pela Eq. (2.29) não resultam em soluções factíveis. Também não foram obtidos valores escalares que tornassem a formulação de Chang factível para esse problema. Dessa forma, a única possibilidade encontrada para produzir resultados

factíveis consistiu em implementar o método de otimização DE com base nas formulações de Xie e de Agulhari. Consequentemente, obtiveram-se os resultados apresentados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Resultados obtidos para as formulações LMI do estudo de caso do VTOL.

Formulação	Parâmetros	γ	Controlador K_{sof}
Xie (DE) $X = X_d$	$L^* = \begin{bmatrix} 0{,}9734 \\ -3{,}4566 \\ -2{,}0148 \end{bmatrix}$ $r^* = 1{,}1130$	0,9399	$10^3[-0{,}5690 \quad 1{,}569]^T$
Xie (DE) $X = X_t$	$L^* = \begin{bmatrix} 0{,}5892 \\ -2{,}8312 \\ -0{,}7559 \end{bmatrix}$ $r^* = 1{,}3053$	0,9383	$10^3[-0{,}2842 \quad 0{,}7914]^T$
Agulhari (DE)	$K_{so}^* = 10^3[-0{,}7753 \quad 2{,}325]^T$	0,9268	$K_{sof} = K_{so}^*$

Conforme os resultados apresentados, observa-se a proximidade dos custos garantidos H_∞, tendo uma diferença relativa σ_r máxima de 1,4% entre as formulações citadas, calculada na forma da Eq. (4.2). Perante os resultados obtidos, cabe ressaltar que a mudança para X triangular surtiu efeitos positivos, reduzindo γ em relação à mudança para X diagonal. É importante ressaltar também que a formulação de Agulhari associada à otimização DE apresentou o melhor custo garantido entre as formulações estudadas.

Para auxiliar na visualização dos resultados obtidos em termos de resposta transitória, considera-se o distúrbio $w(t) = [d_1(t) \quad d_2(t)]^T$, sendo os pulsos unitários $d_1(t) = \psi(t) - \psi(t-1)$ e $d_2(t) = \psi(t-50) - \psi(t-51)$, sendo $\psi(t)$ a função degrau unitário apresentada pela Eq. (4.3). A partir da definição do distúrbio $w(t)$, torna-se possível observar a resposta transitória em relação à velocidade horizontal $x_h(t)$, velocidade vertical $x_v(t)$ e sinais de controle $u(t)$ para um determinado vértice do sistema incerto. Esse vértice foi definido por meio da técnica de cálculo do custo garantido H_∞ com precisão ε (Gonçalves, et al., 2007), a qual retorna o pior caso de custo garantido encontrado entre os vértices, sendo o referido vértice do sistema incerto conforme os parâmetros:

- $a_{32} = 0{,}5047$;
- $a_{34} = 0{,}1198$;
- $b_{21} = 0{,}9775$.

Portanto, as respostas transitórias de velocidade horizontal, velocidade vertical e sinais de controle com o sistema correspondente ao vértice de pior caso de norma H_∞ são apresentadas respectivamente pela Figura 4.20, Figura 4.21 e Figura 4.22.

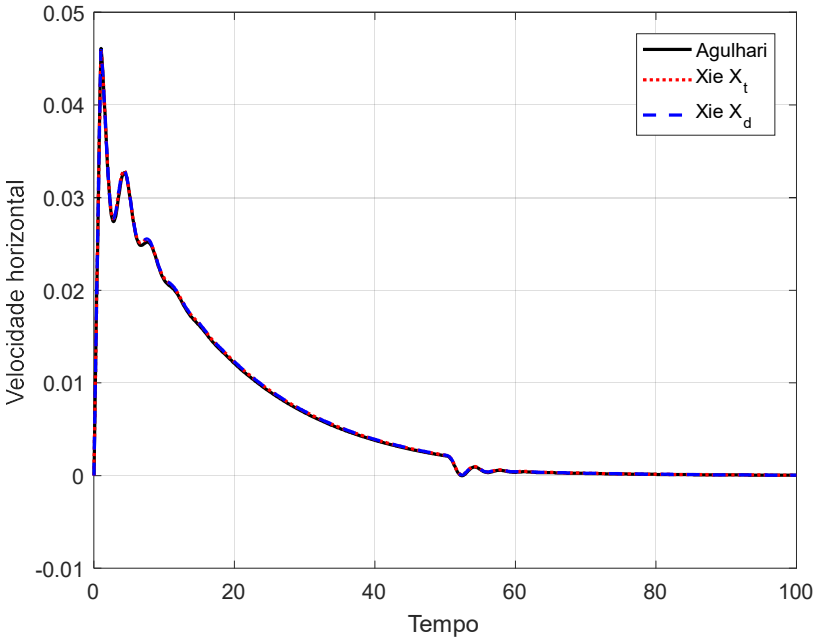


Figura 4.20 – Resposta transitória da velocidade horizontal do VTOL com os controladores obtidos pelas formulações LMI para vértice de pior caso.

Conforme apresentado pela Figura 4.20, observa-se que as respostas transitórias para a velocidade horizontal do VTOL possuem características e comportamentos semelhantes. Entretanto, visualizando a Figura 4.21, observa-se a divergência entre as respostas transitórias obtidas pela formulação de Xie e pela formulação de Agulhari para a velocidade vertical do VTOL. As formulações de Xie apresentaram amplitudes maiores do que a formulação de Agulhari que, por sua vez, representa a maior rejeição a perturbações proporcionada pelo controlador obtido pela formulação de Agulhari. Além disso, pode-se observar que a mudança de variável para X diagonal implica em maiores ganhos de controle em relação a X triangular, o que explica a melhor rejeição da perturbação na velocidade vertical para a formulação de Xie com $X = X_d$.

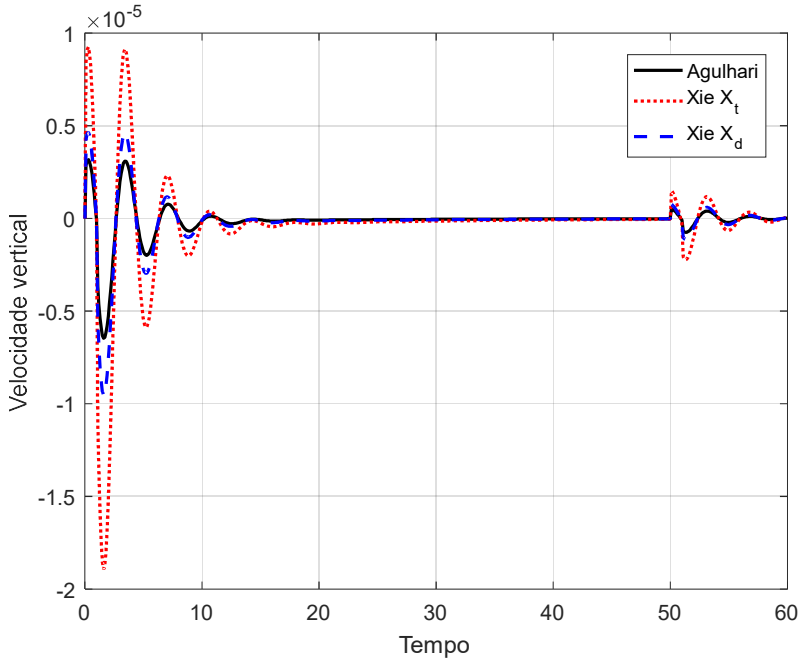


Figura 4.21 – Resposta transitória da velocidade vertical do VTOL com os controladores obtidos pelas formulações LMI para vértice de pior caso.

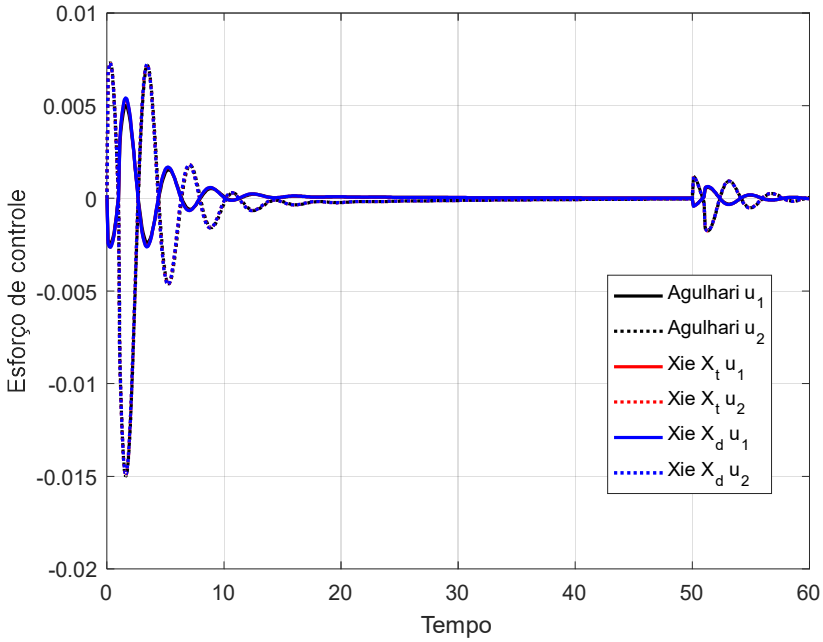


Figura 4.22 – Resposta transitória dos sinais de controle do VTOL para vértice de pior caso.

Na Figura 4.22 são apresentados ambos os sinais de controle para os três controladores em comparação. Pode-se observar que os esforços de controle são semelhantes para os três controladores mencionados. Dessa forma, para este estudo de

caso específico, ressalta-se que o esforço de controle não se torna fator preponderante para comparação entre formulações.

É interessante calcular o índice de desempenho ISE para avaliação qualitativa do erro presente provocado pelas perturbações nas respostas transitórias mediante avaliação dos efeitos produzidos pela aplicação do sinal $w(t)$ na saída do sistema. Para tanto, considera-se $r(t) = 0$ no cálculo da integral do erro quadrático conforme Eq. (4.5), resultando nos índices apresentados na Tabela 4.8 para as três formulações LMI que produziram sistemas robustamente estáveis.

Tabela 4.8 – Resultados obtidos para as integrais dos erros ao quadrado (ISE) para estudo de caso do VTOL.

Malha de velocidade	Formulação	ISE	Diferença para menor valor
Horizontal	Xie (DE) $X = X_d$	0,01245	1,69%
	Xie (DE) $X = X_t$	0,01242	1,45%
	Agulhari (DE)	**0,01224**	-
Vertical	Xie (DE) $X = X_d$	$1{,}241 \times 10^{-10}$	53,76%
	Xie (DE) $X = X_t$	$4{,}889 \times 10^{-10}$	88,26%
	Agulhari (DE)	**$5{,}739 \times 10^{-11}$**	-

É possível observar que as integrais dos erros ao quadrado das velocidades horizontais para as três formulações estudadas possuem valores bastante próximos, com uma diferença relativa máxima de 1,69%. Essa proximidade de ISE pode ser justificada pela semelhança entre as respostas transitórias na malha de velocidade, uma vez que na velocidade horizontal as respostas se sobrepuseram.

No caso da velocidade vertical, de acordo com as divergências entre as respostas transitórias supramencionadas e apresentadas pela Figura 4.21, tais divergências são reiteradas com base na análise do índice ISE para as formulações estudadas. Observa-se que a formulação de Agulhari com otimização permite reduzir substancialmente a

integral do erro quadrático entre 54% até 88%, dependendo da formulação de comparação.

Portanto, conclui-se que o controlador obtido pela formulação de Agulhari com otimização, neste estudo de caso, é ligeiramente melhor em termos de rejeição dos efeitos causados por uma perturbação, uma vez que apresenta integral do erro quadrático inferior para ambas as malhas de velocidade.

Por fim, cabe ressaltar que um dos escopos deste estudo de caso consiste em explorar a possibilidade de que as formulações LMI encontradas na literatura e apresentadas no presente trabalho não são capazes de fornecer soluções factíveis. Portanto, para este exemplo específico, a única maneira de sintetizar um controlador que garanta a estabilidade robusta do sistema é por meio do método proposto com utilização de otimização evolução diferencial.

4.5 Aeronave L-1011

Considerando um modelo incerto do eixo lateral da aeronave L-1011, tem-se as seguintes matrizes para o modelo no espaço de estados (Gopmandal & Ghosh, 2021):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}154 & -0{,}0042 & 1{,}54 + p_1 & 0 \\ 0 & 0{,}249 + p_2 & -1 & -5{,}2 & 0 \\ 0{,}0386 & -0{,}996 & -0{,}0003 & -0{,}117 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$B_w = [\boldsymbol{I}_5] \quad , \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}744 + p_3 & -0{,}032 \\ 0{,}337 & -1{,}12 \\ 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

$$C_z = [\boldsymbol{I}_5] \ , \ D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ C_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ ,$$

$$D_{zw} = [\mathbf{0}_5] \quad , \ D_{yw} = [\mathbf{0}_{4\times 5}] \ ,$$

com parâmetros incertos invariantes no tempo conforme:

- $|p_1| \leq 0{,}1540$;
- $|p_2| \leq 0{,}0240$;
- $|p_3| \leq 0{,}0700$.

Tomando-se por base as diferentes formulações LMI apresentadas ao longo do trabalho e o sistema apresentado pela Eq. (4.11), obtiveram-se os resultados expostos na Tabela 4.9.

Devido à complexidade do estudo de caso, utiliza-se a possibilidade de variar parâmetros do método de otimização para se obter resultados melhores. Dessa forma, alterou-se o parâmetro de probabilidade de cruzamento para $CR = 0{,}15$ para a otimização da formulação de Agulhari.

Com base nos resultados apresentados, observa-se que utilizar a matriz L calculada a partir da Eq. (2.29) pode implicar em sistemas resultantes sem estabilidade robusta. Em relação às demais metodologias encontradas nas revisões bibliográficas, pode-se observar que os custos garantidos H_∞ podem ser bastante distintos dependendo da formulação utilizada. Vale destacar que a formulação de Chang e de Agulhari obtiveram resultados satisfatórios para o desempenho H_∞ dado à complexidade do estudo de caso, apresentado diferenças de 33% e 27%, respectivamente, perante ao custo garantido ótimo $\gamma^* = 3{,}6108$ obtido pela formulação de Xie com otimização e mudança de variável $X = X_t$. Em relação à formulação de Chang, foram necessárias diversas simulações por tentativa e erro para definir os parâmetros de ajuste β e ρ que produzem o melhor resultado para o controlador robusto.

Com o intuito de avaliar os possíveis benefícios causados pela utilização do método de otimização proposto, pode-se comparar os custos garantidos entre as formulações de Agulhari sem e com otimização. Mediante tal comparação, pode-se concluir que o algoritmo de otimização utilizado permitiu uma redução próxima de 15% do custo garantido, o que representa uma melhor rejeição aos efeitos de variáveis exógenas sobre as variáveis de desempenho do sistema. Em relação às formulações de Xie, avalia-se que a utilização do método de otimização proposto é ainda mais considerável, representando uma redução entre 41% e 68% no custo garantido H_∞.

Tabela 4.9 – Resultados obtidos para formulações LMI do estudo de caso da aeronave L-1011.

Formulação	Parâmetros	γ	Controlador K_{sof}
Xie $X = X_d$	$L = \mathbf{0}$ $r = 1$	11,3457	$\begin{bmatrix} 0{,}6725 & -0{,}1951 \\ -0{,}0062 & 1{,}207 \\ 0{,}2137 & -2{,}043 \\ -0{,}0193 & 1{,}247 \end{bmatrix}^T$
Xie $X = X_d$	$L = +Eq.(2.29)$ $r = 1$	Sistema robustamente instável	-
Xie $X = X_d$	$L = -Eq.(2.29)$ $r = 1$	6,0831	$\begin{bmatrix} 4{,}980 & 5{,}492 \\ 1{,}940 & 2{,}837 \\ -13{,}84 & -21{,}67 \\ 1{,}790 & 2{,}423 \end{bmatrix}^T$
Chang	$\beta = 0{,}14$ $\rho = 0{,}35$	5,4146	$\begin{bmatrix} 12{,}73 & 10{,}65 \\ 3{,}886 & 3{,}986 \\ -38{,}66 & -34{,}72 \\ 2{,}702 & 2{,}982 \end{bmatrix}^T$
Agulhari	K_{sf}	4,9389	$\begin{bmatrix} 1{,}289 & 0{,}5449 \\ -1{,}470 & 0{,}4166 \\ -5{,}687 & -3{,}378 \\ -0{,}4087 & 1{,}062 \end{bmatrix}^T$
Xie (DE) $X = X_d$	$L^* = \begin{bmatrix} 0{,}6234 \\ 0{,}0225 \\ -1{,}013 \\ 0{,}4816 \end{bmatrix}^T$ $r^* = 0{,}0058$	3,6165	$\begin{bmatrix} 392{,}5 & 247{,}4 \\ 133{,}3 & 86{,}51 \\ -793{,}4 & -498{,}2 \\ 305{,}8 & 193{,}1 \end{bmatrix}^T$
Xie (DE) $X = X_t$	$L^* = \begin{bmatrix} 0{,}5881 \\ 0{,}0113 \\ -0{,}9500 \\ 0{,}4564 \end{bmatrix}^T$ $r^* = 0{,}0056$	3,6108	$\begin{bmatrix} 395{,}3 & 263{,}5 \\ 135{,}9 & 93{,}15 \\ -801{,}2 & -532{,}0 \\ 308{,}4 & 205{,}9 \end{bmatrix}^T$
Agulhari (DE)	$K_{so}^* = \begin{bmatrix} 4{,}112 & 4{,}506 \\ -3{,}034 & 6{,}373 \\ -15{,}89 & -0{,}6699 \\ 2{,}264 & 3{,}451 \end{bmatrix}^T$	4,1880	$\begin{bmatrix} 4{,}108 & 4{,}504 \\ -3{,}047 & 6{,}368 \\ -15{,}894 & -0{,}6762 \\ 2{,}261 & 3{,}449 \end{bmatrix}^T$

O presente estudo de caso consiste em apresentar os ganhos que se pode obter mediante a utilização do método de otimização associado às formulações LMI para síntese de controle robusto por realimentação estática de saída existentes na literatura científica, que pode ser resumido na síntese de controladores que corroboram em sistemas mais robustos em termos da susceptibilidade aos efeitos de perturbações.

5 Conclusão

5.1 Conclusões

O presente trabalho buscou validar o método proposto para otimização da sintonia de formulações LMI para síntese de controlador por realimentação estática de saída com desempenho robusto H_∞. Conforme constatado, as formulações existentes na literatura científica requerem escolhas a *priori* de parâmetros necessários para linearização da formulação. A escolha destes parâmetros afeta o desempenho do controlador resultante e até mesmo a obtenção de um controlador que estabilize robustamente o sistema. Portanto, realizou-se uma análise do uso de otimização para obtenção dos parâmetros de ajuste com base em diferentes formulações LMI e estudos de casos selecionados da literatura.

Por meio dos estudos de caso, verificou-se que a proposta de otimização dos parâmetros de ajuste para a formulação de Xie, com o método de transformar formulações LMI de síntese de controle por realimentação de estados em formulações de síntese de controle por realimentação estática de saída, resulta em uma melhoria no desempenho do sistema. Ressalta-se também que é possível encontrar casos onde a única solução para os parâmetros de ajuste corresponde àquela obtida por meio do método de otimização proposto, sendo considerada fundamental para obter um sistema robustamente estável. Portanto, conclui-se que o método proposto, considerando a função objetivo baseada no método de penalidade e solução com algoritmos de otimização evolutivos, se mostrou eficaz para os casos estudados.

Não obstante, para a formulação de Xie, apresentou-se duas possibilidades para mudança de variável na conversão da formulação de síntese de realimentação de estados para realimentação estática de saída. Conforme avaliado no estudo da literatura científica, a mudança de variável utilizando uma matriz triangular usualmente corresponde a resultados mais interessantes sob o ponto de vista de desempenho H_∞ (Gopmandal & Ghosh, 2021). Na análise realizada neste trabalho com base nos casos estudados, em 60% dos casos a mudança para matriz triangular apresentou resultados melhores em relação à mudança com matriz diagonal.

As formas de síntese de controladores por realimentação estática de saída combinando otimização evolutiva e formulação LMI estudadas neste trabalho geram resultados satisfatórios sendo que a determinação da matriz L^* pode requerer menor custo computacional dependendo da formulação de síntese adotada em relação à otimização da formulação de Agulhari. Vale ressaltar que, mesmo com custos garantidos H_∞ similares, os controladores obtidos com as diferentes formulações LMI podem ter ordem de grandeza dos ganhos bastante diferentes, implicando diretamente na rejeição de perturbações do sistema. Em outras palavras, tal diferença pode afetar as respostas transitórias do sistema devido à incidência de variáveis exógenas. Desse modo, é sempre interessante utilizar as diferentes possibilidades de síntese para avaliação por simulações ou por meio de experimentos.

Conclusões semelhantes também podem ser relacionadas à técnica de calcular o controlador por realimentação estática de saída a partir de um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros, mediante a metodologia definida por (Agulhari, et al., 2012). Mesmo quando o resultado obtido pelas formulações LMI, calculados em segundos, já for satisfatório, ainda assim é interessante aplicar a otimização, que requer minutos ou horas, para obter uma solução que será utilizada por anos, podendo significar maior segurança, melhor qualidade de um produto e/ou menor consumo de energia. Dessa forma, entende-se como interessante a metodologia proposta para otimização do desempenho H_∞, uma vez que são observadas melhorias de resultados para os estudos de casos realizados.

É interessante ressaltar que a formulação de Agulhari (Agulhari, et al., 2012) para implementação do problema de otimização apresentado pela Eq. (2.36), além de verificar a estabilidade robusta e calcular o custo garantido H_∞, gera também uma solução aprimorada, acrescentando a capacidade de buscar soluções que minimizam o problema de otimização. A desvantagem é o maior custo computacional em relação à otimização da matriz L nos estudos de caso apresentados, devido à complexidade envolvida na formulação e a necessidade de teste prévio para verificação da estabilidade robusta do sistema. Além disso, cabe ressaltar que, mesmo mediante a aplicação do método proposto associado à formulação de Agulhari, observou-se a ocorrência de

sistema resultante sem estabilidade robusta, o que significa solução infactível para o problema de otimização estudado.

Por fim, conclui-se que os estudos de caso abordados neste trabalho validam o método proposto para sintonia de formulações LMI voltada para síntese de controlador robusto por realimentação estática de saída, apresentado no Capítulo 2, por meio de otimização utilizando o algoritmo Evolução Diferencial, descrito no Capítulo 3. Os resultados obtidos mediante a associação do método proposto e otimização evolutiva proporcionam soluções onde as formulações LMI resultam em controladores que garantem a estabilidade robusta do sistema em malha-fechada e apresentam soluções factíveis com melhor desempenho H_∞ do que aquelas obtidas simplesmente por formulações LMI existentes na literatura científica. Além disso, cabe ressaltar que tanto a formulação de Xie quanto a de Agulhari devem ser consideradas na síntese de controle robusto por meio da metodologia proposta, além de ser necessário compará-las em cada caso isoladamente.

5.2 Propostas de prosseguimento deste trabalho

Com base nos resultados obtidos no presente trabalho, citam-se propostas para permear a continuidade do estudo deste tema, sendo:

- Para se obter bons resultados aplicando otimização na sintonia de formulações LMI para síntese de controle robusto, é necessário ter um algoritmo de otimização eficiente. Uma vez que o custo computacional pode ser bastante elevado, a necessidade de executar o algoritmo de otimização diversas vezes não é interessante, seja para ajustar os parâmetros do algoritmo de otimização, seja para levar em consideração o aspecto estocástico da otimização evolutiva. Deste modo, é interessante estudar os vários aperfeiçoamentos propostos na literatura para o algoritmo Evolução Diferencial, em especial os mecanismos de ajuste automático de parâmetros, e aprimorar o algoritmo desenvolvido;
- Outra possibilidade para obter melhores resultados é estudar diferentes maneiras de formular o problema de otimização visando a busca dos parâmetros

de ajuste das formulações LMI, afim de experimentar formas distintas para se tratar as restrições inerentes à formulação do problema de otimização;

- Considerando que os controladores atuais são implementados através de sistemas digitais, é necessário estender os estudos para possibilitar o tratamento de sistemas discretos no tempo, buscando formulações de síntese que possam ser otimizadas;
- Outra possibilidade de continuação deste trabalho é considerar sistemas incertos variantes no tempo com incertezas limitadas em norma, adaptando as formulações de síntese para tratar sistemas politópicos invariantes no tempo consideradas neste trabalho.

5.3 Publicações associadas a este trabalho

Trabalho aceito para apresentação em evento científico relacionados ao presente trabalho:

- Lucas Santos Gonçalves & Eduardo Nunes Gonçalves. Controle H_∞ por realimentação estática de saída combinando otimização evolutiva e formulações LMI. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2021.

Artigo submetido para periódico relacionado ao presente trabalho:

- Eduardo Nunes Gonçalves & Lucas Santos Gonçalves. *Robust H_∞ static output-feedback control synthesis based on linear matrix inequality/evolutionary optimization*. Evolutionary Computation, 2021.

6 Referências

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. & Peres, P. L. D., 2012. LMI Relaxations for Reduced-Order Robust Control of Continuous-Time Uncertain Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,* June, 57(6), pp. 1532-1537.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* Philadelphia, PA: SIAM.

Chang, S. L. & Hwang, C., 2001. Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm. *IEEE Transactions,* 31(6), pp. 698-707.

Chang, X.-H., Park, J. H. & Zhou, J., 2015. Robust static output feedback H-infinity control design for linear systemas with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters,* pp. 23-32.

de Oliveira, P.; Oliveira, R.; Leite, V.; Montagner, V.; Peres, P., 2004. H-infinity guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica,* Volume 40, pp. 1053-1061.

Dinh, Q. T., Gumussoy, S., Michiels, W. & Diehl, M., 2012. Combining Convex-Concave Decompositions and Linearization Approaches for Solving BMIs, With Application to Static Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 57(6), pp. 1377-1390.

Dong, J. & Yang, G., 2013. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. *Automatica,* pp. 1821-1829.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. & Chilali, M., 1995. *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB®,* Natick: The MATH WORKS Inc..

Geromel, J. C., Peres, P. L. D. & Bernussou, J., 1991. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal of Control and Optimization,* Volume 29, pp. 381-402.

Glover, K., 2013. H-infinity Control. *Encyclopedia of Systems and Control.*

Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. & Mesquita, R. C., 2007. H-2 and H-infinity ε-guaranteed cost computation of uncertain linear systems. *IET Control Theory & Applications,* 1(1), pp. 201-209.

Gopmandal, F. & Ghosh, A., 2021. A hybrid search based H-infinity synthesis of static output feedback controllers for uncertain systems with application to multivariable PID control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* May, 31(12), pp. 6069-6090.

He, Y. & Wang, Q.-G., 2006. An Improved ILMI Method for Static Output Feedback Control With Application to Multivariable PID Control. *IEEE Transactions on Automatic Control,* October, 51(10), pp. 1678-1683.

He, Y., Wu, M. & She, J. H., 2005. Improved Bounded-Real-Lemma Representation and H-infinity Control of Systems with Polytopic Uncertainties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs,* July, 52(7), pp. 380-383.

Johansson, K. H., 2000. The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable Zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* May, 8(3), pp. 456-465.

Leibfritz, F. & Lipinski, W., 2003. *Description of the benchmark examples in COMPlib 1.0.* s.l.:s.n.

Lofberg, J., 2004. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB®. Em: *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508).* s.l.:IEEE, pp. 284-289.

Narendra, K. S. & Tripathi, S. S., 1973. Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft,* 10(4), pp. 193-199.

Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, M. C. & Peres, P. L. D., 2011. Robust State Feedback LMI Methods for Continuous-Time Linear Systems: Discussions, Extensions and Numerical Comparisons. *2011 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design,* pp. 1038-1043.

Palacios-Quiñonero, F., Rubió-Massegú, J., Rossell, J. M. & Karimi, H. R., 2014. Feasibility issues in static output-feedback controller design with application to structural vibration control. *Journal of the Franklin Institute,* Volume 351, pp. 139-155.

Rubió-Massegú, J., Palacios-Quiñonero, F., Rossell, J. M. & Karimi, H. R., 2013. Static output-feedback control for vehicle suspensions: a single-step linea matrix inequality approach. *Matematical Problems in Engineering,* Volume 2013.

Rubió-Massegú, J., Rossell, J. M., Karimi, H. R. & Palacios-Quiñonero, F., 2013. Static output-feedback control under information structure constraints. *Automatica,* Volume 49, pp. 313-316.

Shaked, U., 2001. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control,* Volume 46, p. 652–656.

Storn, R. & Price, K., 1997. Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization,* December, 11(4), pp. 341-359.

Sturm, J., 1999. sing SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software,* 11(12), pp. 625-653.

Syrmos, V. L., Abdallah, C. T., Dorato, P. & Grigoriadis, K., 1997. Static Output Feedback - A Survey. *Automatica,* 33(2), pp. 125-137.

Toh, K.-C., Todd, M. J. & Tütüncü, R. H., 1999. SDPT3 - a MATLAB® software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software,* 11(1-4), pp. 545-581.

Trofino, A., Coutinho, D. F. & Barbosa, K. A., 2005. Improved H-2 and H-infinity Conditions For Robust Analysis and Control Synthesis of Linear Systems. *Revista Controle & Automação,* pp. 427-434.

Xie, W., 2008. Multi-objective H-infinity/alpha-stability controller synthesis of LTI systems. *IET Control Theory Appl.,* pp. 51-55.

Yaesh, I. & Shaked, U., 2009. Robust reduced-order output-feedback H-infinity control. *Proc. 6th IFAC Symp. Robust Control Design,* pp. 155-160.

Zhou, K. & Doyle, J. C., 1998. *Essentials of robust control.* 104 ed. Upper Saddle River: Prentice hall.