

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO E SEUS DESAFIOS NO CONTEXTO DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA: ESTUDOS DE COMPORTAMENTO E ABORDAGENS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS COM MUITOS OBJETIVOS

RENAN JOSÉ DOS SANTOS VIANA

Orientador: Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Elizabeth Fialho Wanner
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2023

RENAN JOSÉ DOS SANTOS VIANA

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO E SEUS DESAFIOS NO CONTEXTO DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA: ESTUDOS DE COMPORTAMENTO E ABORDAGENS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS COM MUITOS OBJETIVOS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Sistemas Inteligentes

Orientador: Prof. Dr. Flávio Vinícius Cruzeiro Martins
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Coorientador: Prof. Dr. Elizabeth Fialho Wanner
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
AGOSTO DE 2023

Viana, Renan José dos Santos
V614o Otimização multiobjetivo e seus desafios no contexto de otimização combinatória: estudos de comportamento e abordagens de solução para problemas com muitos objetivos / Renan José dos Santos Viana. – 2023.
150 f.

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Flávio Vinícius Cruzeiro Martins.
Coorientadora: Elizabeth Fialho Wanner.
Tese (doutorado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Otimização matemática – Teses. 2. Algoritmos genéticos – Teses. 3. Análise numérica – Teses. 4. Problema de roteamento de veículos – Teses. 5. Problema da mochila (Matemática) – Teses. 6. Correlação (Estatística) – Teses. I. Martins, Flávio Vinícius Cruzeiro. II. Wanner, Elizabeth Fialho. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 519.3

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6ª 1592 / Cefet/MG

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

"OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO E SEUS DESAFIOS NO CONTEXTO DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA: ESTUDOS DE COMPORTAMENTO E ABORDAGENS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS COM MUITOS OBJETIVOS".

Tese de Doutorado apresentada por **Renan José dos Santos Viana,** em 30 de agosto de 2023, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

gov.br Documento assinado digitalmente
FLAVIO VINICIUS CRUZEIRO MARTINS
Data: 12/09/2023 14:06:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Flávio Vinicius Cruzeiro Martins (Orientador)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
ELIZABETH FIALHO WANNER
Data: 12/09/2023 16:34:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Elizabeth Fialho Wanner (Coorientadora)
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
RICARDO HIROSHI CALDEIRA TAKAHASHI
Data: 13/09/2023 12:20:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi
Universidade Federal de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
CLAUDIO LUCIO DO VAL LOPES
Data: 12/09/2023 16:04:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Cláudio Lúcio do Val Lopes
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Prof. Dr. Sérgio Ricardo de Souza
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCONE JAMILSON FREITAS SOUZA
Data: 13/09/2023 13:25:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida à impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática e Computacional

Dedico este trabalho a Deus, pela força e sabedoria concedidas, à minha família, por todo amor e apoio, e à minha esposa, pela presença constante e incentivo incondicional.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder força, sabedoria e perseverança ao longo de toda esta caminhada, e por sempre estar ao meu lado.

À minha amada esposa, Jéssica, minha companheira de vida e meu apoio incondicional, agradeço pela paciência, compreensão, suporte e incentivo em todos os momentos.

À minha família, minha base, em especial aos meus pais, Paulo e Sueli, e à minha irmã, Juliana, agradeço pelo amor incondicional, pelos ensinamentos, pela dedicação e pelo apoio fundamental em minha formação pessoal e acadêmica. Nunca mediram esforços para me fazer feliz e realizado.

Ao meu grande amigo, Jonatas (in memoriam), que sempre esteve ao meu lado, incentivando-me a seguir em frente, sempre com bom humor e amizade sincera, agradeço pela companhia e pelos momentos especiais compartilhados. Foi um privilégio tê-lo como amigo.

Aos meus orientadores, Flávio e Beth, agradeço pela confiança, pelas orientações valiosas, pela dedicação e por acreditarem no meu potencial, contribuindo de forma decisiva para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos do PPMMC, agradeço pela companhia ao longo desta jornada, pelos bons momentos vividos e pelo suporte oferecido.

Resumo

Diversos problemas presentes na ciência, engenharia, indústria, entre outros domínios do conhecimento, envolvem a otimização simultânea de dois ou mais objetivos frequentemente conflitantes. Problemas com tal característica são conhecidos na literatura como Problemas de Otimização Multiobjetivo (*Multiobjective Optimization Problems*, MOPs). Devido à existência de um certo nível de conflito entre os objetivos otimizados, para esta classe de problemas, não há uma única solução ótima (global), como ocorre em problemas mono-objetivo. Em vez disso, produzem um conjunto de soluções que representam os possíveis *trade-offs* entre os objetivos. Geralmente, na otimização multiobjetivo, a relação de dominância Pareto é adotada para comparar soluções. Desta forma, o conjunto de soluções ótimas de um MOP é denominado conjunto Pareto-ótimo, e a sua representação no espaço de objetivos é intitulada fronteira Pareto-ótimo.

Ao longo dos últimos anos, estudos experimentais e teóricos têm demonstrado que, geralmente, o aumento no número de objetivos a serem otimizados simultaneamente introduz novos e complexos desafios. Entre eles, destacam-se o crescimento da proporção de soluções não-dominadas, o aumento exponencial do número de soluções necessárias para a obtenção de uma completa aproximação da fronteira Pareto-ótimo, a ineficácia das técnicas tradicionais de visualização das soluções, a dificuldade em garantir a manutenção da diversidade populacional, entre outros. No entanto, é sabido que um MOP não se torna necessariamente mais complexo com a adição de novos objetivos. Outras propriedades intrínsecas do problema também podem contribuir para o aumento de sua complexidade, como por exemplo, as especificidades dos problemas de teste utilizados. Além disso, a literatura científica, até o momento, tem se concentrado majoritariamente em MOPs contínuos, portanto, a otimização combinatória ainda é uma área de pesquisa com questões a serem exploradas.

Com o objetivo de aprofundar a compreensão dos desafios inerentes a MOPs combinatórios, a primeira parte desta tese apresenta um estudo de caso aplicado a uma formulação com muitos objetivos do problema logístico *Dial-a-Ride Problem* (DARP). Inicialmente, é realizada uma análise do *fitness landscape* com o propósito de investigar a geometria da fronteira Pareto obtida para cada conjunto de problemas de teste e identificar possíveis relações entre os objetivos otimizados. Em seguida, é apresentada uma análise comparativa de desempenho considerando diversos Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (*Multiobjective Evolutionary Algorithms*, MOEAs) provenientes de diferentes classes. Os resultados obtidos mostram que, mesmo utilizando a mesma formulação do problema, diferentes observações podem ser feitas tanto sobre as características do problema quanto sobre o comportamento dos algoritmos, quando diferentes conjuntos de problemas de teste são empregados.

Em um segundo momento, desviando do foco principal da maioria das pesquisas atuais,

que se concentram no desenvolvimento de novos métodos de otimização multiobjetivo e na criação de estratégias de seleção inovadoras, apresentamos uma abordagem que cria e otimiza, de forma independente e simultânea, diversas formulações alternativas do MOP abordado, nas quais são induzidas correlações lineares artificiais entre as funções objetivo. A abordagem proposta adota o paradigma de dividir para conquistar, distribuindo o processo de busca ao alocar um processo evolutivo independente (execução independente do MOEA) tanto para a formulação original do problema quanto para cada formulação com objetivos correlacionados criada. Ao final de cada execução, as soluções obtidas pela otimização de cada formulação são convertidas de volta para o espaço de objetivos original (com base na formulação original do MOP), sendo então combinadas. Todas as soluções não-dominadas resultantes compõem o conjunto de aproximação, que constitui a saída do algoritmo proposto. Ao realizar processos evolutivos independentes utilizando diferentes formulações do problema abordado, espera-se direcionar buscas para diferentes direções do espaço de objetivos, alcançando regiões que seriam difíceis de explorar apenas otimizando a formulação original do problema utilizando algum dos MOEAs do estado da arte. Quando integrada a MOEAs de diferentes classes, a abordagem proposta demonstrou eficácia no aprimoramento do desempenho desses algoritmos ao ser aplicada a um conhecido MOP combinatório. Baseando-se nessa melhoria de desempenho, foram introduzidos dois novos MOEAs, fundamentados na otimização de formulações com objetivos artificialmente correlacionados. Os resultados apresentados demonstraram a superioridade dos MOEAs propostos em comparação com renomados MOEAs da literatura, quando aplicados ao problema da mochila multiobjetivo com 4 a 10 objetivos.

Palavras-chave: Otimização Multiobjetivo, Otimização com Muitos Objetivos, Algoritmos Evolutivos, Análise do *Fitness Landscape*, *Dial-a-Ride Problem*, Problema da Mochila, Correlação Linear Artificial.

Abstract

Many problems present in science, engineering, industry, among other fields of knowledge, involve the simultaneous optimization of two or more often conflicting objectives. Problems with such characteristic are known in the literature as Multiobjective Optimization Problems (MOPs). Due to the existence of a certain level of conflict between the optimized objectives, for this class of problems, there is no single optimal solution (global), as occurs in single-objective problems. Instead, they produce a set of solutions that represent the possible trade-offs between objectives. Generally, in multiobjective optimization, the Pareto dominance relation is adopted to compare solutions. Therefore, the set of optimal solutions of an MOP is called the Pareto-optimal set, and its representation in the objective space is referred to as the Pareto-optimal front.

Over the past few years, experimental and theoretical studies have shown that increasing the number of objectives to be simultaneously optimized generally introduces new and complex challenges. Among these challenges are the growth in the proportion of non-dominated solutions, the exponential increase in the number of solutions required to achieve a complete approximation of the Pareto-optimal front, the ineffectiveness of traditional solutions visualization techniques, the difficulty of ensuring population diversity maintenance, among others. However, it is known that a MOP does not necessarily become more complex with the addition of new objectives. Other intrinsic properties of the problem may also contribute to its complexity, such as the specific characteristics of the test problems used. Moreover, scientific literature has so far primarily focused on continuous MOPs, leaving combinatorial optimization as a research area with open questions to be explored.

To deepen the understanding of the challenges inherent in combinatorial MOPs, the first part of this thesis presents a case study applied to a many-objective formulation of the logistic problem Dial-a-Ride Problem (DARP). Initially, a fitness landscape analysis is performed to investigate the geometry of the Pareto front obtained for each set of test problems and to identify possible relationships between the optimized objectives. Then, a comparative performance analysis is presented, considering various Multiobjective Evolutionary Algorithms (MOEAs) from different classes. The results obtained show that, even using the same problem formulation, different observations can be made regarding both the problem's characteristics and the algorithms' behavior when different sets of test problems are employed.

In a second stage, deviating from the main focus of most current research, which concentrates on the development of new multiobjective optimization methods and the creation of innovative selection strategies, we present an approach that independently and simultaneously creates and optimizes multiple alternative formulations of the addressed MOP, in which artificial linear correlations are induced between the objective functions. The proposed

approach adopts the divide-and-conquer paradigm, distributing the search process by allocating an independent evolutionary process (independent execution of the MOEA) to both the original problem formulation and each formulation with correlated objectives created. At the end of each execution, the solutions obtained from optimizing each formulation are converted back to the original objective space (based on the original MOP formulation) and then combined. All resulting non-dominated solutions constitute the approximation set, which is the output of the proposed algorithm. By performing independent evolutionary processes using different problem formulations, the goal is to direct searches to different regions of the objective space, reaching areas that would be difficult to explore by only optimizing the original problem formulation using a state-of-the-art MOEA. When integrated with MOEAs from different classes, the proposed approach demonstrated effectiveness in improving the performance of these algorithms when applied to a well-known combinatorial MOP. Based on this performance improvement, two new MOEAs were introduced, based on optimizing formulations with artificially correlated objectives. The presented results demonstrated the superiority of the proposed MOEAs compared to well-established MOEAs in the literature when applied to the multiobjective knapsack problem with 4 to 10 objectives.

Keywords: Multiobjective Optimization, Many-objective Optimization, Evolutionary Algorithms, Fitness Landscape Analysis, Dial-a-Ride Problem, Knapsack Problem, Artificial Linear Correlation.

Lista de Figuras

Figura 1 – Ordenação por grau de dominância. Adaptada de Deb (2001). 13
Figura 2 – Distância de Aglomeração. Adaptada de Deb (2001). 13
Figura 3 – Esquema do NSGA-II. Adaptada de Deb (2001). 15
Figura 4 – Fluxograma da operação do serviço DRT 44
Figura 5 – Mapa de calor aplicado à matriz de correlação de Pearson e Spearman referente ao conjunto de instâncias *"Gravit100"*. 56
Figura 6 – Mapa de calor aplicado à matriz de correlação de Pearson e Spearman referente ao conjunto de instâncias *"Rnd100"*. 56
Figura 7 – Coeficiente de correlação de Pearson entre os objetivos em cada instância de teste do conjunto *"Gravit100"*. 57
Figura 8 – Coeficiente de correlação de Pearson entre os objetivos em cada instância de teste do conjunto *"Rnd100"*. 58
Figura 9 – Extensão dos objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Gravit100"*. . 59
Figura 10 – Extensão dos objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Rnd100"*. . . 60
Figura 11 – Gráfico de dispersão para cada par de objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Gravit100"*. 63
Figura 12 – Gráfico de dispersão para cada par de objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Rnd100"*. 64
Figura 13 – Esquema de representação de uma solução. 69
Figura 14 – Esquema de aplicação do operador de recombinação. 70
Figura 15 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida. 91
Figura 16 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D integrado à abordagem proposta. 92
Figura 17 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida. 94
Figura 18 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III integrado com à abordagem proposta. 95
Figura 19 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida. 96
Figura 20 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida. 97
Figura 21 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA integrado à abordagem proposta. 98

Figura 22 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II integrado à abordagem proposta. 98
Figura 23 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o MOEA/D integrado à abordagem proposta e o MOEA/D de referência. 99
Figura 24 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGA-III integrado à abordagem proposta e o NSGA-III de referência. 100
Figura 25 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o IBEA integrado à abordagem proposta e o IBEA de referência. 101
Figura 26 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGA-II integrado à abordagem proposta e o NSGA-II de referência. 102
Figura 27 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados. 104
Figura 28 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados. 105
Figura 29 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados. 106
Figura 30 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados. 107
Figura 31 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D usando diferentes valores de força de correlação. 108
Figura 32 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA usando diferentes valores de força de correlação. 108
Figura 33 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III usando diferentes valores de força de correlação. 109
Figura 34 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II usando diferentes valores de força de correlação. 109
Figura 35 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o MOEA/D integrado à abordagem proposta e o MOEA/D de referência. 111
Figura 36 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGA-III integrado à abordagem proposta e o NSGA-III de referência. 112
Figura 37 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o IBEA integrado à abordagem proposta e o IBEA de referência. 113

Figura 38 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGAII integrado à abordagem proposta e o NSGAII de referência. 114

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Mapa de Regiões para MaOPs com 5 Objetivos 42
Tabela 2 – Mapa de Regiões para MaOPs com 5 Objetivos 61
Tabela 3 – Mapa de Regiões para o conjunto de instâncias *"Gravit100"*. 61
Tabela 4 – Mapa de Regiões para o conjunto de instâncias *"Rnd100"*. 61
Tabela 5 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Gravit100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{HV}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito. 73
Tabela 6 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Gravit100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{ϵ^+}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito. 73
Tabela 7 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Rnd100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{HV}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito. 74
Tabela 8 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Rnd100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{ϵ^+}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito. 74
Tabela 9 – Formulações com objetivos correlacionados construídas para um MaOkP com 4 funções objetivo, conforme a primeira estratégia. 85
Tabela 10 – Formulações com objetivos correlacionados construídas para um MaOkP com 4 funções objetivo, conforme a segunda estratégia. 86
Tabela 11 – Formulações com objetivos correlacionados construídas para um MOkP com 3 funções objetivo, conforme a segunda estratégia. 90
Tabela 12 – Resultados obtidos para o problema de teste 3-500 115
Tabela 13 – Resultados obtidos para o problema de teste 4-500 115
Tabela 14 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para todos os problemas de teste de cada conjunto utilizado. A tabela mostra os valores médio de I_{HV} destacando em negrito o MOEA que obteve o melhor valor para o indicador de qualidade. 127

Tabela 15 – Resultados dos testes estatísticos obtidos para os oito MOEAs em todos os problemas de teste de cada conjunto, com base nos valores do indicador de qualidade I_{HV}. Os MOEAs com o melhor desempenho estão destacados em negrito. 128
Tabela 16 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para todos os problemas de teste de cada conjunto utilizado. A tabela mostra os valores médio de IGD_+ destacando em negrito o MOEA que obteve o melhor valor para o indicador de qualidade. 129
Tabela 17 – Resultados dos testes estatísticos obtidos para os oito MOEAs em todos os problemas de teste de cada conjunto, com base nos valores do indicador de qualidade IGD_+. Os MOEAs com o melhor desempenho estão destacados em negrito. 130
Tabela 18 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para todos os problemas de teste de cada conjunto utilizado. A tabela mostra os valores médio de I_{ϵ^+} destacando em negrito o MOEA que obteve o melhor valor para o indicador de qualidade. 131
Tabela 19 – Resultados dos testes estatísticos obtidos para os oito MOEAs em todos os problemas de teste de cada conjunto, com base nos valores do indicador de qualidade I_{ϵ^+}. Os MOEAs com o melhor desempenho estão destacados em negrito. 132

Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – NSGA-II 14
Algoritmo 2 – Algoritmo de Classificação por Não-Dominância 16
Algoritmo 3 – Algoritmo que Computa a Distância de Aglomeração 17
Algoritmo 4 – SPEA2 17
Algoritmo 5 – IBEA 21
Algoritmo 6 – NSGA-III 23
Algoritmo 7 – MOEA/D 25
Algoritmo 8 – SPEA/R 27
Algoritmo 9 – Two_Arch2 28
Algoritmo 10 – MOEA Distribuído 87
Algoritmo 11 – AIC-MOEA 119
Algoritmo 12 – AIC-MOEAII 122

Sumário

1 – Introdução 1
1.1 Objetivos Gerais e Específicos 7
1.2 Organização do Texto 8

2 – Referencial Teórico 10
2.1 Otimização Multiobjetivo 10
2.2 Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo 12
2.2.1 Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II 12
2.2.1.1 *Fast Non-Dominated Sorting* 15
2.2.1.2 *Crowding Distance* 16
2.2.2 *Strenght Pareto Evolutionary Algorithm* 2 17
2.2.2.1 Atribuição de Aptidão 18
2.2.2.2 Atualização do Arquivo 19
2.2.3 *Indicator-based Multiobjective Evolutionary Algorithm* 19
2.2.3.1 Atribuição de Aptidão 21
2.2.4 *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* III 22
2.2.5 *Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition* 24
2.2.5.1 Função de Agregação 25
2.2.5.2 MOEA/D com Substituição Global 26
2.2.6 *Strength Pareto Evolutionary Algorithm Based on Reference Direction* 26
2.2.7 Two_Arch2 28
2.3 Problemas de Otimização com Muitos Objetivos 29

3 – Análise dos Relacionamentos entre Objetivos 33
3.1 Trabalhos Relacionados 35
3.1.1 Técnica de Análise do *Fitness Landscape* 39
3.1.1.1 Etapa 1 - Análise global dos relacionamentos entre objetivos 39
3.1.1.2 Etapa 2 - Análise do intervalo (extensão) dos objetivos . . . 40
3.1.1.3 Etapa 3 - Análise das regiões de *trade-off* 41
3.1.1.4 Etapa 4: Análise do gráfico de dispersão para problemas multi-objetivo 42

4 – Serviços de Transporte Reativo a Demanda 44
4.1 Problemas de Roteamento de Veículos com Coletas e Entregas 45
4.2 *Dial-a-Ride Problem* 46
4.2.1 Modelo Matemático para o DARP 47

4.2.2 Revisão da Literatura do DARP Multiobjetivo . . . 49
4.3 Definição do Problema e Formulação Matemática . . . 50

5 – Análise da Natureza Multiobjetivo . . . 54
5.1 Conjunto de Instâncias de Teste . . . 54
5.2 Análise do *Fitness Landscape* . . . 54
5.2.1 Etapa 1 - Análise global do relacionamento entre os objetivos . . . 55
5.2.2 Etapa 2 - Análise do intervalo (extensão) dos objetivos . . . 58
5.2.3 Etapa 3 - Análise das regiões de trade-off . . . 60
5.2.4 Etapa 4 - Análise do gráfico de dispersão para problemas multi-objetivo 62

6 – Análise de Desempenho dos MOEAs . . . 65
6.1 Ambiente Computacional . . . 65
6.2 Métodos de Avaliação para Algoritmos Multiobjetivo . . . 65
6.2.1 Indicadores de Qualidade . . . 66
6.2.1.1 *Hypervolume* . . . 67
6.2.1.2 *Binary Additive ϵ-Indicator* . . . 67
6.2.2 Pontuação de Desempenho . . . 68
6.3 Configurações Gerais dos Experimentos Computacionais . . . 68
6.3.1 Componentes Gerais dos MOEAs . . . 68
6.3.1.1 Representação da solução . . . 68
6.3.1.2 Procedimento para Geração da População Inicial . . . 69
6.3.1.3 Operador de Recombinação (Crossover) . . . 70
6.3.1.4 Operador de Mutação . . . 71
6.3.2 Ajuste dos Parâmetros . . . 71
6.4 Resultados e Análises Experimentais . . . 72

7 – Abordagem Baseada no Paradigma de Dividir para Conquistar Desenvolvida para lidar com MOPs/MaOPs: Indução de Correlações Artificiais e Aprimoramento do Desempenho de MOEAs . . . 75
7.1 Trabalhos Relacionados . . . 76
7.2 Problema da Mochila com Muitos Objetivos . . . 83
7.3 Formulações com Objetivos Correlacionados . . . 84
7.4 Abordagem Baseada em Formulações com Objetivos Correlacionados . . . 87
7.5 Experimentos Computacionais e Análise dos Resultados . . . 88
7.5.1 Problema de Teste 3-500 . . . 90
7.5.2 Problema de Teste 4-500 . . . 102
7.5.3 Análise Quantitativa de Desempenho . . . 114

8 – Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo Baseados em Correlações Artificialmente Induzidas . . . 117

8.1 AIC-MOEA 117
8.1.1 Inicialização e Atualização do Grau de Contribuição 118
8.1.2 Seleção para Reprodução, Recombinação e Mutação 119
8.1.3 Inserção dos Indivíduos Filhos 120
8.1.4 Ajuste do Tamanho das Populações 120
8.1.5 Atualização do Arquivo 121
8.2 AIC-MOEAII 121
8.3 Problemas de Teste 121
8.4 Experimentos Computacionais e Análises dos Resultados 123

9 – Conclusões 133
9.1 Produção Bibliográfica 135

Referências 136

1 Introdução

Dentro do campo da Pesquisa Operacional (PO), o termo “otimização” está intrinsecamente ligado ao processo de buscar a melhor solução (ou solução ótima) para um problema, perante um determinado ponto de vista, dentre um conjunto de possíveis soluções. Tais problemas são encontrados predominantemente em áreas como ciência, engenharia, indústria, dentre outros domínios do conhecimento. No processo de otimização, presume-se que a qualidade de qualquer solução para um determinado problema possa ser mensurada de maneira quantificável, ou seja, reduzida a um valor numérico, de forma que seja possível a comparação entre possíveis soluções para o problema. Desta forma, para cada solução, é associado um valor numérico, e deseja-se encontrar uma (ou várias) solução(ões) com o valor ótimo (mínimo ou máximo), que é referida como solução ótima do problema (CORMEN et al., 2009).

Muitos problemas de otimização do mundo real envolvem a otimização simultânea de dois ou mais objetivos, frequentemente em conflito entre si. Essa classe de problemas é conhecida como Problemas de Otimização Multiobjetivo (*Multiobjective Optimization Problems*, MOPs). Devido à natureza conflitante dos objetivos, ao contrário da otimização mono-objetivo, que busca convergir para uma única solução ótima para o problema, MOPs não possuem uma única solução que seja simultaneamente ótima para todos os objetivos. Em vez disso, existe um conjunto de soluções denominado conjunto Pareto-ótimo, composto por soluções não dominadas, que representam os possíveis *trade-offs* entre os objetivos. Soluções nas quais um objetivo não pode ser aprimorado sem deteriorar pelo menos algum dos demais (COELLO et al., 2019). O mapeamento desse conjunto de soluções no espaço de objetivos é intitulado fronteira Pareto-ótimo. Embora os MOPs geralmente estejam associados a um conjunto formado por várias soluções Pareto-ótimo, na prática, apenas uma única solução, ou no máximo algumas soluções, serão selecionadas pelo tomador de decisões para serem efetivamente implementadas (JUNKER, 2004). Na ausência de objetivos preferenciais, cada solução do conjunto Pareto-ótimo é igualmente desejável.

De acordo com Jaimes (2011), tanto na otimização mono-objetivo quanto na multiobjetivo, uma importante característica compartilhada é a necessidade de estabelecer uma relação de preferência. Essa relação é utilizada para comparar soluções no espaço de objetivos com o intuito de guiar a busca e, possivelmente, convergir para soluções ótimas. Geralmente, na otimização mono-objetivo, a relação “menor ou igual a” é empregada (para problemas de minimização), de modo que entre duas soluções prevaleça aquela associada ao menor valor de função objetivo. Já na otimização multiobjetivo, as soluções são comparadas em um espaço de objetivos composto por vetores (um elemento por objetivo). Nesse contexto, a relação de dominância Pareto é frequentemente utilizada para comparar

soluções, sendo originalmente proposta por Francis Ysidro Edgeworth (EDGEWORTH, 1881) e, posteriormente, generalizada pelo economista Vilfredo Pareto (PARETO, 1896).

Para a maioria dos MOPs, obter todo o conjunto Pareto-ótimo pode ser desafiador e requer abordagens matemáticas e algorítmicas diferentes das adotadas para resolver problemas de otimização mono-objetivo. Ao resolver essa classe de problemas, o principal objetivo é encontrar um conjunto de soluções não-dominadas com boa convergência (próxima à fronteira Pareto-ótimo), boa diversidade (cobrindo o máximo possível de regiões da fronteira Pareto-ótimo) e uma distribuição uniforme (o mais uniformemente espaçado possível) (ELARBI et al., 2017). Em outras palavras, obter uma boa aproximação da fronteira Pareto-ótimo torna-se um resultado satisfatório.

Apesar dos avanços no desenvolvimento de diversas técnicas de programação matemática desde a década de 1970 para resolver MOPs (MIETTINEN, 1999; EHRGOTT, 2005), tais técnicas frequentemente apresentam limitações ao lidar com MOPs. Por exemplo, muitas delas são sensíveis à forma e/ou à continuidade da fronteira Pareto-ótimo. Além disso, em geral, produzem apenas uma única solução do conjunto Pareto-ótimo em cada execução. Portanto, é necessário realizar múltiplas execuções com diferentes configurações de parâmetros para obter uma representação satisfatória da fronteira Pareto-ótimo (MIETTINEN, 1999). Essas limitações têm impulsionado a criação e adoção de novas abordagens, bem como a adaptação de algumas já existentes, como os Algoritmos Evolutivos (*Evolutionary Algorithms*, EA) (GOLBERG, 1989).

O termo “Algoritmos Evolutivos” refere-se a uma classe de algoritmos de otimização estocástica que simulam o processo de evolução natural (ZITZLER; LAUMANNS; BLEULER, 2004). Desde sua aplicação inicial em MOPs, os Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (*Multiobjective Evolutionary Algorithms*, MOEAs), têm ganhado notável popularidade na comunidade da Pesquisa Operacional. Isso se deve, principalmente, à sua facilidade de uso, flexibilidade e capacidade de gerar e manter simultaneamente múltiplas soluções (conhecidas como população) em uma única execução. Além disso, esses algoritmos são eficazes na busca por soluções que representem um bom *trade-off* entre os objetivos em conflito otimizados. É importante destacar que os MOEAs, de modo geral, são menos sensíveis à forma ou continuidade da fronteira Pareto-ótimo (COELLO, 2006; COELLO et al., 2020).

Inicialmente, os MOEAs eram simples, essencialmente adaptações de tradicionais EAs mono-objetivo modificados para lidar com MOPs. Um dos primeiros MOEAs amplamente conhecidos foi o *Vector Evaluated Genetic Algorithm* (VEGA), proposto em 1985 por Schaffer (1985). Basicamente, o VEGA consiste em um simples Algoritmo Genético (Genetic Algorithm - GA) com um mecanismo de seleção modificado. A ideia central consiste em dividir a população em subpopulações de tamanho igual, cada uma representando um dos objetivos do MOP em questão, e o operador de seleção escolhe soluções em cada subpopulação com base em seu desempenho no objetivo correspondente. Além do VEGA,

outros MOEAs amplamente utilizados incluem os EAs baseados em função de agregação linear (JAKOB; GORGES-SCHLEUTER; BLUME, 1992; COELLO, 1996), assim como os EAs baseados em ordenação lexicográfica (FISHBURN, 1974).

Nas últimas décadas, os MOEAs emergiram como métodos proeminentes para a resolução de MOPs. Após o surgimento do VEGA, muitos MOEAs bem sucedidos foram propostos. Dentre eles, as abordagens baseadas na relação de dominância Pareto têm sido aplicadas com êxito na resolução de diversos problemas do mundo real. Estas abordagens utilizam a relação de dominância Pareto para comparar soluções da população e orientar o processo de busca. Tais abordagens têm se mostrado eficazes principalmente na resolução de MOPs com até três objetivos. O NSGA-II (DEB et al., 2002) e o SPEA2 (ZITZLER et al., 2001) são alguns dos algoritmos mais representativos dessa classe e dominaram o campo dos MOEAs por muitos anos.

Embora sejam aplicáveis a MOPs com qualquer número de objetivos, diversos estudos têm demonstrado que MOEAs baseados na relação de dominância Pareto enfrentam dificuldades ao lidar com problemas que possuem mais de três objetivos, intitulados Problemas de Otimização com Muitos Objetivos (*Many-objective Optimization Problems*, MaOPs) (Farina; Amato, 2002; KHARE; YAO; DEB, 2003; Purshouse; Fleming, 2003; Hughes, 2005; PURSHOUSE; FLEMING, 2007; SANTOS; TAKAHASHI, 2018). Essas dificuldades ocorrem principalmente porque praticamente todas as soluções na população se tornam mutuamente não-dominadas e, portanto, são incomparáveis entre si. A incomparabilidade das soluções em termos da relação de dominância Pareto dificulta o ranqueamento das soluções e enfraquece a pressão de seleção exercida, comprometendo assim a capacidade de busca desses MOEAs. Portanto, em geral, algoritmos que dependem exclusivamente da relação de dominância Pareto para comparar soluções tendem a ser inadequados para lidar com MaOPs (LI et al., 2015; SATO; ISHIBUCHI, 2023).

Devido às limitações de escalabilidade observadas nos MOEAs baseados na relação de dominância Pareto, uma ampla variedade de abordagens têm sido propostas nos últimos anos. Elas incluem abordagens baseadas em relações de dominância alternativas (DRECHSLER; DRECHSLER; BECKER, 2001; Farina; Amato, 2002; SATO; AGUIRRE; TANAKA, 2007; Tian et al., 2019), indicadores de qualidade (ZITZLER; KÜNZLI, 2004; BEUME; NAUJOKS; EMMERICH, 2007; BADER; ZITZLER, 2011; Tian et al., 2016; Tian et al., 2018; Sun; Yen; Yi, 2019), decomposição (ZHANG; LI, 2007; ZHANG; LIU; LI, 2009; WANG et al., 2014; FAN et al., 2019; DEB; JAIN, 2014; JIANG; YANG, 2017), informações de preferência (DEB; SUNDAR, 2006; THIELE et al., 2009; Wang; Purshouse; Fleming, 2013; VESIKAR; DEB; BLANK, 2018), redução de dimensionalidade (DEB; SAXENA, 2005; DEB; SAXENA, 2006; JAIMES; COELLO; CHAKRABORTY, 2008; Saxena et al., 2013; LUO; LI; LIN, 2018), dentre outras. No entanto, a maioria dos otimizadores multiobjetivos existentes enfrenta desafios comuns, como o aumento do número de soluções não-dominadas, ineficácia

dos operadores de cruzamento e mutação, dificuldade em representar as superfícies de *trade-offs*, alto custo computacional para estimar a medida de diversidade, dentre outros (BECHIKH; ELARBI; SAID, 2017).

Além disso, cada classe de MOEAs apresenta limitações específicas. Por exemplo, as abordagens baseadas em indicadores de qualidade, dependentes do uso de contribuições exatas de hipervolume (ZITZLER; KÜNZLI, 2004; BEUME; NAUJOKS; EMMERICH, 2007), tornam-se computacionalmente custosas à medida que o número de objetivos aumenta (BEUME et al., 2009; COELLO et al., 2019). As abordagens baseadas em decomposição podem não funcionar de maneira adequada para certas geometrias da fronteira Pareto-ótimo (ISHIBUCHI et al., 2016). Por outro lado, se cada objetivo estiver em conflito com qualquer outro objetivo, as abordagens que se apoiam na redução de dimensionalidade não poderão realizar reduções (BROCKHOFF; ZITZLER, 2007). Além disso, é crucial adotar uma estratégia capaz de identificar e eliminar objetivos sem que isso afete a relação de dominância induzida pelo conjunto original de objetivos e que, ao mesmo tempo, preserve a forma da fronteira Pareto-ótimo no espaço de objetivos reduzido (ISHIBUCHI; TSUKAMOTO; NOJIMA, 2008; COELLO et al., 2019).

Na literatura, é possível destacar diversos estudos que apresentam uma visão abrangente das dificuldades inerentes aos MaOPs, bem como os principais desafios decorrentes do aumento no número de objetivos e os recentes desenvolvimentos nessa área (ISHIBUCHI; TSUKAMOTO; NOJIMA, 2008; LÜCKEN; BARÁN; BRIZUELA, 2014; CHAND; WAGNER, 2015; JAIMES; COELLO, 2015; LI et al., 2015; MANE; RAO, 2017; COELLO et al., 2019; SATO; ISHIBUCHI, 2023). No entanto, embora a comunidade de otimização multiobjetivo esteja profundamente engajada no estudo e desenvolvimento de novas abordagens de busca destinadas a tratar MaOPs, há uma carência de pesquisas direcionadas aos problemas combinatórios, que lidam especificamente com a busca pela melhor combinação ou seleção de elementos em um conjunto de opções finito, ou possivelmente infinito, porém contável (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998). A grande maioria desses estudos aborda problemas contínuos (Tanabe; Ishibuchi; Oyama, 2017; Li et al., 2018; ZHAO et al., 2019; TANABE; ISHIBUCHI, 2020). Trabalhos como (PINHEIRO; LANDA-SILVA; ATKIN, 2015; LANKAITES PINHEIRO; LANDA-SILVA; ATKIN, 2017; LIEFOOGHE et al., 2017; GARCÍA-NÁJERA; LÓPEZ-JAIMES, 2018; LIEFOOGHE; LOPEZ-IBANEZ, 2023), que buscam identificar as principais características presentes nos MaOPs combinatórios e a influência delas no desempenho das principais abordagens de busca ainda são raros na literatura científica.

Conforme apontado por Verel, Liefooghe e Dhaenens (2011), a análise do *fitness landscape* de um problema de otimização específico possibilita uma compreensão mais aprofundada de sua geometria e a identificação de suas particularidades. Isso, por sua vez, fornece informações que podem servir como base para o desenvolvimento de abordagens

de busca mais eficazes. Um exemplo disso é destacado por Ishibuchi et al. (2016), que ressaltam como a escolha dos problemas de teste para uma análise comparativa de desempenho pode influenciar mais nos resultados obtidos do que o próprio número de objetivos otimizados simultaneamente. Essa propriedade tem sido reconhecida como uma possível fonte de dificuldade na otimização multiobjetivo, tanto por meio de estudos experimentais (PURSHOUSE; FLEMING, 2007; PRADITWONG; YAO, 2007; SCHUTZE; LARA; COELLO, 2011; WAGNER; BEUME; NAUJOKS, 2007) quanto por estudos analíticos (TEYTAUD, 2007; KNOWLES; CORNE, 2007; CORNE; KNOWLES, 2007). Além disso, conforme destacado por Li et al. (2019), os MaOPs podem ser ainda mais desafiadores se possuírem propriedades complexas que ainda não foram completamente abordadas por conjuntos de problemas de teste frequentemente utilizados em análises. Essas propriedades englobam a escalabilidade de objetivos (aumento no número de objetivos), a multi-modalidade, fronteira Pareto-ótimo complexa, a desconexão, a degeneração e possíveis vieses na diversidade ou convergência. Essa observação foi confirmada ao aplicar dois MOEAs de referência, o NSGA-III e o MOEA/D, a um novo conjunto de problemas de teste que incluí tanto MOPs quanto MaOPs com algumas das propriedades mencionadas. Os resultados deste estudo evidenciaram que esses algoritmos podem enfrentar dificuldades em se aproximar da fronteira Pareto-ótimo, tanto em termos de convergência quanto de diversidade, quando aplicados a cenários até então desconhecidos.

Diante de todas as informações apresentadas, fica claro que existem questões em aberto relacionadas à otimização de MaOPs, especialmente quando se trata de MaOPs combinatórios. Questionamentos como o apresentado por García-Nájera e López-Jaimes (2018), que indaga se as mesmas fontes de dificuldades observadas em problemas contínuos também podem ser aplicadas aos problemas combinatórios, ilustram esse contexto. Muitas outras perguntas também permanecem sem respostas definitivas. Além disso, apesar de ser uma etapa preliminar importante, a análise da natureza multiobjetivo dos conjuntos de problemas de teste utilizados ainda é negligenciada na maioria das pesquisas, o que pode levar a conclusões equivocadas.

Embora os MaOPs tenham atraído um interesse significativo devido aos desafios previamente mencionados e à sua relevância em aplicações do mundo real, a busca por MOEAs eficazes e eficientes, especialmente adaptados para lidar com esses problemas, permanece sendo uma área de pesquisa ativa. No entanto, problemas dessa classe têm se mostrado desafiadores para a maioria dos MOEAs existentes e, atualmente, não existe uma classe estabelecida de MOEAs que atenda adequadamente às necessidades da maioria dos MaOPs. Além disso, embora seja possível desenvolver mecanismos de seleção inovadores que vão além das abordagens tradicionais baseadas na relação de dominância Pareto, decomposição ou indicadores de qualidade, essa tarefa é complexa, conforme destacado por Coello et al. (2019).

Nesta tese, inicialmente, conduzimos análises com o objetivo de compreender como propriedades de um MaOP combinatório influenciam no desempenho de MOEAs projetados com base em diferentes estratégias. Para isso, empregamos uma formulação com muitos objetivos do *Dial-a-Ride Problem* (DARP), um problema combinatório amplamente estudado na comunidade de pesquisa operacional. A seguir, apresentamos as principais contribuições deste estudo:

- Apresentação de uma nova formulação matemática com muitos objetivos para o serviço de transporte reativo a demanda introduzido em Chevrier et al. (2010), Chevrier et al. (2012);
- Investigação do *fitness landscape* projetado otimizando problemas de teste com diferentes características, utilizando técnicas e ferramentas já validadas na literatura;
- Realização de uma análise comparativa de desempenho entre MOEAs amplamente utilizados na literatura, utilizando indicadores de qualidade frequentemente empregados em análises envolvendo MOPs e MaOPs.

Posteriormente, desviamos do foco principal das pesquisas atuais, as quais se concentram no desenvolvimento de novos MOEAs e na criação de estratégias de seleção inovadoras. Em vez disso, propomos uma técnica que modifica a formulação do problema de otimização abordado, com o intuito de alterar o processo de busca dos MOEAs, visando aprimorar a convergência, diversidade, escalabilidade e qualidade das soluções obtidas. Com o objetivo de expandir as áreas de busca e tornar o processo mais eficiente, além de otimizar a formulação original do MOP/MaOP em questão, a abordagem proposta cria e otimiza diversas formulações alternativas, nas quais correlações lineares artificiais são induzidas entre as funções objetivo originais. Ao conduzir buscas independentes utilizando diferentes formulações para o MOP/MaOP abordado, espera-se direcionar a busca para diferentes regiões do espaço de objetivos e, assim, alcançar regiões que seriam difíceis de explorar apenas otimizando a formulação original do MOP/MaOP utilizando algoritmos do estado da arte. Tendo isso em mente, o objetivo deste estudo é apresentar uma abordagem baseada no paradigma de dividir para conquistar que, por meio da criação de diferentes formulações com objetivos correlacionados, distribui e concentra a busca em diferentes regiões do espaço de objetivos. Vale destacar que a abordagem proposta pode ser facilmente integrada a qualquer MOEA já existente, sem demandar um esforço significativo.

Para viabilizar essa abordagem, é alocado um processo evolutivo completamente independente de um dado MOEA para cada uma das formulações, abrangendo a formulação original do problema em questão e todas as formulações com objetivos correlacionados criadas. Esses processos evolutivos são guiados de acordo com a formulação correspondente. Dentro do contexto evolutivo, cada um deles representa uma população que evolui de maneira independente das demais, como uma espécie de “ilha”.

Para validar a abordagem proposta, escolhemos um dos problemas de otimização combinatória mais estudados na literatura: o Problema da Mochila. Especificamente, utilizamos a sua formulação com muitos objetivos, frequentemente referida como o Problema da Mochila com Muitos Objetivos (*Many-objective Knapsack Problem*, MaOKP). Apesar de sua relativa simplicidade, o Problema da Mochila possui grande importância e é utilizado como base para modelar várias aplicações do mundo real, como logística, planejamento de produção, gerenciamento de estoques, seleção de portfólio, dentre outras. Sua adaptabilidade é evidente pelas inúmeras variantes documentadas na literatura científica, além de ser simples gerar problemas de teste. No entanto, como mencionado por Sahinkoc e Bilge (2022), apesar da multiplicidade de aplicações na vida real, das características distintas resultantes de sua natureza discreta e de seus requisitos específicos, os estudos focados em problemas de otimização combinatória ainda são escassos.

Dado que a abordagem proposta demonstrou eficácia no aprimoramento do desempenho de MOEAs de diferentes categorias, a utilizamos no desenvolvimento de dois novos MOEAs. Em ambos os MOEAs, cada uma das formulações criadas é vinculada a um conjunto distinto de indivíduos, nos quais o processo evolutivo é orientado pela formulação correspondente. No contexto evolutivo, cada um desses conjuntos de indivíduos representa uma subpopulação que evolui ao longo do processo evolutivo, operando como uma espécie de "ilha". A cada geração, novos indivíduos são gerados em uma das ilhas e compartilhados com as demais. No entanto, cada subpopulação retém apenas os indivíduos que são não-dominados com base na formulação associada. Dessa forma, os novos indivíduos criados em cada geração podem ser aproveitados ou descartados pelas subpopulações. Além disso, as subpopulações que mais contribuem para a geração de indivíduos com alta aceitação (de alta qualidade) terão maior probabilidade de serem selecionadas para reprodução durante o processo evolutivo. Dado que cada subpopulação evolui com base em uma das formulações, é esperado que cada uma explore de forma efetiva regiões específicas do espaço de objetivos original. No entanto, devido à natureza estocástica de alguns operadores presentes nos MOEAs, não há impedimento para que cada subpopulação explore também outras regiões.

1.1 Objetivos Gerais e Específicos

Essencialmente, este trabalho abrange uma ampla variedade de temas. Os objetivos gerais dessa tese são: (i) analisar e compreender a influência das propriedades de MaOPs combinatórios no desempenho de MOEAs projetados com base em diferentes estratégias. Para esse propósito, utilizamos uma formulação com muitos objetivos do *Dial-a-Ride Problem* (DARP), um problema combinatório amplamente estudado na comunidade de pesquisa operacional. (ii) Projetar e validar MOEAs que modificam a formulação do problema abordado com o objetivo de aprimorar o processo de busca.

Os objetivos específicos deste trabalho são os seguintes:

- Definir uma formulação matemática com muitos objetivos para o serviço de transporte reativo a demanda apresentado em Chevrier et al. (2010), Chevrier et al. (2012).
- Investigar o *fitness landscape* da formulação proposta por meio de técnicas e ferramentas já validadas na literatura com o intuito de obter *insights* que possam fundamentar a escolha e/ou elaboração de estratégias de busca mais adequadas para o problema abordado.
- Realizar uma análise comparativa de desempenho entre MOEAs amplamente utilizados na literatura e avaliar o desempenho e eficácia desses algoritmos ao aplicá-los a um MaOP combinatório utilizando indicadores de qualidade multiobjetivo.
- Apresentar uma nova abordagem que modifica a formulação do MOP/MaOP abordado, com o objetivo de aprimorar o processo de busca de MOEAs já existentes.
- Propor e desenvolver novos MOEAs capazes de lidar com MaOPs, além de validar sua eficácia por meio de conjuntos de problemas de teste com características diversas.

1.2 Organização do Texto

O restante deste trabalho está estruturado da seguinte forma:

- **Capítulo 2, Otimização Multiobjetivo:** Descreve o referencial teórico empregado neste estudo. Fornece uma definição formal do problema de otimização multiobjetivo, apresenta MOEAs oriundos de diversas categorias, introduz formalmente o problema de otimização com muitos objetivos e explora os principais desafios inerentes a essa classe de problemas, além de discutir as abordagens frequentemente utilizadas para sua resolução.

- **Capítulo 3, Análise do Relacionamento entre Objetivos:** Explora o estudo do relacionamento entre objetivos e realiza uma revisão abrangente da literatura, abordando as principais investigações centradas na análise do *"fitness landscape"* aplicada a MaOPs.

- **Capítulo 4, Serviços de Transporte Reativo a Demanda:** Apresenta a definição do problema abordado na primeira fase dessa tese, assim como uma nova formulação matemática com muitos objetivos para ele.

- **Capítulo 5, Análise da Natureza Multiobjetivo:** Apresenta uma análise do *fitness landscape* do problema abordado.

- **Capítulo 6, Análise da Performance dos MOEAs:** Conduz uma análise comparativa de desempenho entre oito MOEAs e apresenta os resultados obtidos.

- **Capítulo 7, Abordagem Baseada no Paradigma de Dividir para Conquistar Desenvolvida para lidar com MOPs/MaOPs: Indução de Correlações Artificiais e Aprimoramento do Desempenho de MOEAs:** Introduz uma abordagem que além da otimização da formulação original do problema em questão, cria e otimiza várias formulações alternativas, nas quais são induzidas correlações lineares artificiais entre as funções objetivo do problema. Além disso, apresenta os experimentos computacionais realizados com o objetivo de avaliar o impacto da utilização da abordagem proposta no comportamento de busca de populares MOEAs.

- **Capítulo 8, Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo Baseados em Correlações Artificialmente Induzidas:** Introduz dois novos MOEAs baseados em correlações induzidas artificialmente e apresenta uma análise comparativa de desempenho envolvendo MOEAs amplamente utilizados em estudos aplicados a MOPs e MaOPs.

- **Capítulo 9, Conclusões e Trabalhos Futuros:** São apresentadas as conclusões obtidas e novas perspectivas de trabalhos futuros.

2 Referencial Teórico

Neste capítulo, serão apresentados os principais conceitos relacionados à otimização multiobjetivo, considerados fundamentais para uma compreensão completa deste texto. Além disso, serão introduzidos os algoritmos multiobjetivo utilizados nas análises realizadas.

2.1 Otimização Multiobjetivo

A otimização multiobjetivo, também conhecida como otimização vetorial, consiste no processo de otimizar sistematicamente e simultaneamente um conjunto de funções objetivo (MARLER; ARORA, 2004). Conforme o próprio termo sugere, problemas de otimização multiobjetivo (Multi-objective Optimization Problems, MOPs), envolvem a otimização simultânea de múltiplos objetivos, frequentemente em conflito entre si. Os objetivos são tidos como conflitantes quando a melhoria em um deles só pode ser alcançada à custa da degradação de pelo menos um dos demais. No mundo real, a grande maioria dos problemas de tomada de decisão apresenta uma natureza intrinsecamente multiobjetivo (DEB, 2001).

Formalmente, um MOP pode ser definido por meio de um conjunto de m funções objetivo $f = (f_1, f_2, \dots f_m)$, um conjunto X de soluções factíveis no espaço de decisão e um conjunto Z, composto por possíveis pontos no espaço de objetivos $Z = f(X)$. Cada solução $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ é um vetor de n variáveis de decisão. Para cada solução $x \in X$, existe um ponto (vetor de objetivos) $z \in Z$ associado, denotado por $f : X \to Z$ com $z = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ (COELLO; LAMONT; VELDHUIZEN, 2007; DHAENENS; LEMESRE; TALBI, 2010).

Em MOPs com objetivos conflitantes, não há apenas uma única solução ótima. É incomum existir uma solução x^* que possui valor ótimo para todos os m objetivos otimizados. Existe um conjunto de soluções que são todas ótimas e, sem informações adicionais, nenhuma solução desse conjunto pode ser considerada superior a qualquer outra. Portanto, a noção de "ótimo" muda nesse contexto. O objetivo passa a ser encontrar bons compromissos (ou *trade-offs*) entre os objetivos (COELLO; LAMONT; VELDHUIZEN, 2007). Como resultado, conceitos alternativos foram formulados e adotados para avaliar a otimalidade. Em geral, a relação de preferência comummente adotada é conhecida como relação de dominância Pareto. Essa abordagem foi originalmente proposta por Francis Ysidro Edgeworth em Edgeworth (1881) e, posteriormente, generalizada por Vilfredo Pareto em Pareto (1896), como uma maneira de comparar soluções.

Definição 2.1.1. ***(Dominância Pareto)*** *Sem perda de generalidade, em um MOP com m funções objetivo a serem maximizadas, uma solução x domina outra solução x' ($x \prec x'$) se*

e somente se as seguintes condições forem atendidas (DEB, 2001):

- *A solução x não é pior que a solução x' em todos os objetivos ($\forall i : f_i(x) \geq f_i(x')$).*
- *A solução x é estritamente melhor que a solução x' em pelo menos um dos objetivos considerados ($\exists j : f_j(x) > f_j(x')$).*

Se qualquer uma destas duas condições for violada, a solução x não domina a solução x'. Além disso, se x não domina x', isso não implica que x' domina x.

Definição 2.1.2. ***(Pareto Otimalidade)*** *Uma solução $x^* \in X$ é considerada Pareto-ótimo se não existe uma outra solução $x \in X$ para a qual $x \prec x^*$ (DEB, 2001).*

Definição 2.1.3. ***(Conjunto de Soluções Não-Dominadas)*** *Dado um conjunto de soluções P, o conjunto de soluções não-dominadas P' é composto por todas aquelas que não são dominadas por nenhum outro elemento de P (DEB, 2001).*

De acordo com Eiben e Smith (2003), todas as soluções não-dominadas são caracterizadas por sua incapacidade de melhorar a qualidade de um dos objetivos otimizados sem prejudicar a qualidade de pelo menos um dos demais.

Definição 2.1.4. ***(Conjunto Pareto-ótimo)*** *Quando o conjunto de soluções P corresponde a todo o espaço de busca (ou seja, toda a região factível), definido como $P = X$, o conjunto de soluções não-dominadas P' é denominado conjunto Pareto-ótimo (DEB, 2001).*

Definição 2.1.5. ***(Fronteira Pareto-ótimo)*** *Conjunto de vetores de objetivos, o qual corresponde à imagem do conjunto Pareto-ótimo no espaço de objetivos (DEB, 2001).*

Diferentemente da otimização de problemas com um único objetivo (problemas mono-objetivo), em que o objetivo é encontrar uma única solução ótima global ou uma boa aproximação dela, a otimização de MOPs envolve dois propósitos distintos. Busca encontrar um conjunto de soluções que se aproxime o máximo possível da fronteira Pareto-ótimo, bem como encontrar um conjunto de soluções tão diversificado quanto possível, representando diferentes *trade-offs* entre os objetivos. Uma vez que ambos os propósitos são importantes, a eficácia de um algoritmo de otimização multiobjetivo está em buscar atender a ambos (DEB, 2001).

Definição 2.1.6. ***(Ideal Point)*** *Para cada uma das m funções objetivo, existe uma diferente solução ótima. O Ideal Point $z^I = (z_1^I, z_2^I, \ldots, z_m^I)$ é um vetor de objetivos composto pelos valores ótimos de cada objetivo extraídos dessas soluções. Em geral, o vetor de objetivos ideal está associado a uma solução infactível (DEB, 2001).*

Definição 2.1.7. ***(Nadir Point)*** *O Nadir Point $z^N = (z_1^N, z_2^N, \ldots, z_m^N)$ é um vetor de objetivos composto pelo pior valor de cada função objetivo, considerando todo o conjunto Pareto-ótimo (DEB, 2001).*

Geralmente, em situações em que a fronteira Pareto-ótimo é desconhecida, o *Ideal Point* e o *Nadir Point* são estimados com base no conjunto de soluções atual. O *Ideal Point* pode ser facilmente definido, selecionando o melhor valor de cada objetivo individualmente. No entanto, estimar o *Nadir Point* é uma tarefa mais desafiadora, que requer a consideração de certos critérios (BLANK; DEB; ROY, 2019). De acordo com Liu et al. (2017), quando um ponto no espaço de objetivos está mais próximo do *Ideal Point* e mais distante do *Nadir Point*, seu desempenho em termos de convergência tende a ser melhor.

2.2 Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Algoritmos Evolutivos (*Evolutionary Algorithms*, EAs), são abordagens de otimização que se fundamentam nos princípios da evolução natural para desenvolver estratégias de busca e otimização (DEB, 2001). De maneira iterativa, esses algoritmos simulam a evolução de um conjunto de indivíduos (soluções), empregando o conceito de competição para assegurar a sobrevivência dos mais aptos. Inspirados pelo campo da biologia, os EAs são compostos por mecanismos de seleção, mutação e recombinação. Conforme apontado por Talbi (2009), o sucesso desses métodos de otimização é motivado principalmente pela capacidade de resolver problemas complexos em diversos domínios e pela eficácia na solução de uma variedade de problemas práticos do mundo real.

Quando projetados para lidar com MOPs, os EAs são denominados algoritmos evolutivos multiobjetivo (*Multiobjective Evolutionary Algorithms*, MOEAs), e a categoria de otimização é intitulada Otimização Multiobjetivo Evolutiva (*Evolutionary Multiobjective Optimization*, EMO). De acordo com Coello (1999), Abraham e Jain (2005), os EAs destacam-se na resolução de problemas com múltiplas funções objetivo devido à capacidade de lidar com um conjunto de indivíduos, conhecido como população, simultaneamente. Isso permite a obtenção de vários membros do conjunto Pareto-ótimo em apenas uma única execução, ao contrário de técnicas tradicionais de programação matemática, que requerem múltiplas execuções independentes. Além disso, EAs são menos sensíveis à forma ou continuidade da fronteira Pareto.

2.2.1 Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II

O algoritmo *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), introduzido por Deb et al. (2002), representa uma versão aprimorada do algoritmo NSGA, proposto por Srinivas e Deb (1994), e pertence à classe de MOEAs elitistas. O NSGA-II se destaca como um dos MOEAs baseados na relação de dominância Pareto mais populares, especialmente na resolução de problemas multiobjetivo com até três objetivos. Sua popularidade é resultado direto de sua habilidade em gerar soluções de alta qualidade para uma diversidade de problemas complexos encontrados na literatura. O NSGA-II utiliza um método mais eficiente

para classificar os indivíduos não-dominados em comparação ao seu antecessor, o NSGA, e adota um mecanismo denominado distância de aglomeração, que não requer a definição de parâmetros, como seu estimador de densidade de soluções.

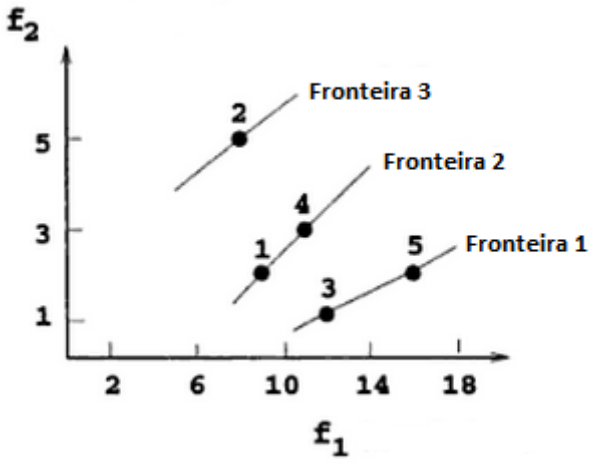


Figura 1 – Ordenação por grau de dominância. Adaptada de Deb (2001).

O processo de classificação por não-dominância, conhecido como *Fast Nondominated Sorting*, atribui, a cada indivíduo da população, uma das várias classes de não-dominância, frequentemente chamadas de fronteiras. Para isso, o conjunto de indivíduos é dividido em fronteiras $F_1, F_2, \ldots, F_k$ com base no grau de dominância, de modo que nenhum indivíduo em uma mesma fronteira domine qualquer outro. Após a conclusão desse processo de classificação, em termos da relação de dominância Pareto, a fronteira F_1 conterá os melhores indivíduos da população (indivíduos não dominados por outros) na geração atual, enquanto a fronteira F_k conterá os piores. Para uma melhor compreensão, a Figura 1 ilustra o espaço de objetivos para um MOP com duas funções objetivo, no qual f_1 é maximizada e f_2 é minimizada, e nesse gráfico, cinco pontos estão distribuídos em três fronteiras.

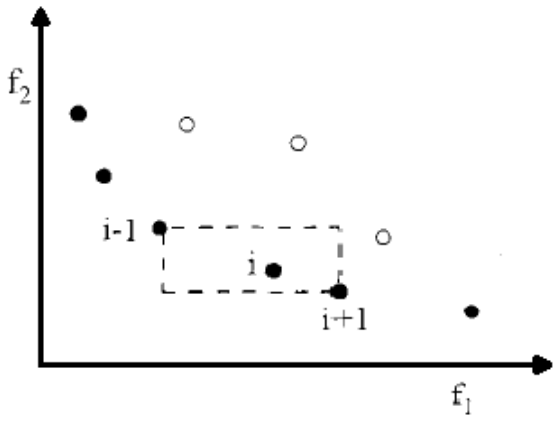


Figura 2 – Distância de Aglomeração. Adaptada de Deb (2001).

Para manter a diversidade na população, o NSGA-II emprega uma estratégia conhecida como distância de aglomeração (*Crowding Distance*). O operador distância de aglomeração estima a densidade de soluções ao redor de cada membro da população. O objetivo é distribuir a população de forma mais equilibrada nas fronteiras, valorizando as soluções que estão mais isoladas das demais. A Figura 2 ilustra o cálculo da distância de aglomeração para a solução i com base nas soluções vizinhas mais próximas, representadas por $i-1$ e $i+1$.

Conforme mencionado anteriormente, as principais características do NSGA-II incluem o uso do elitismo, a aplicação de um mecanismo de preservação da diversidade e a ênfase em soluções não-dominadas. O NSGA-II avalia a qualidade das soluções em termos de convergência em relação ao conjunto Pareto-ótimo e em termos de diversidade por meio dos operadores de classificação por não-dominância e de atribuição de distância de aglomeração, respectivamente. Com base nessas informações, uma solução x é preferida em relação a uma solução y, se tiver uma melhor classificação, ou seja, se pertencer a uma fronteira de menor índice. Se ambas tiverem a mesma classificação, a solução x é selecionada se tiver um valor de distância de aglomeração maior do que y. O Algoritmo 1 detalha o funcionamento geral do NSGA-II. Em seguida, os operadores de classificação por não-dominância e de distância de aglomeração são apresentados por meio dos Algoritmos 2 e 3, respectivamente.

Algoritmo 1: NSGA-II

Entrada: N (tamanho da população)
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

```
início
    n ← 0
    P_n ← Gera população inicial();
    Aplica o operador de classificação por não-dominância (P_n);
    enquanto critério de parada não satisfeito faça
        Q_n ← Aplica operadores de seleção, recombinação e mutação (P_n);
        R_n ← P_n ∪ Q_n
        F ← Aplica o operador de classificação por não-dominância (R_n);
        P_{n+1} ← ∅
        k ← 1
        enquanto |P_{n+1}| + |F_k| ≤ N faça
            Aplica o operador de distância de aglomeração (F_k)
            P_{n+1} ← P_{n+1} ∪ F_k
            k ← k + 1
        Aplica o operador de distância de aglomeração (F_k)
        Ordena em ordem decrescente de distância de aglomeração (F_k);
        P_{n+1} ← P_{n+1} ∪ F_k[1 : (N − |P_{n+1}|)]
        n ← n + 1
P_final ← P_n
retorna P_final
```

Inicialmente, uma população inicial P_0 de tamanho N é gerada de forma aleatória ou utilizando algum método específico, sendo N um parâmetro de entrada do algoritmo (linha 3). Posteriormente, P_0 é classificada utilizando o operador de classificação por não-dominância (linha 4). Em cada geração do algoritmo NSGA-II, uma população filha Q_n de tamanho N é gerada, aplicando os operadores de seleção (torneio binário), recombinação e mutação a P_n (linha 6). Em seguida, as duas populações são combinadas, formando o conjunto de soluções R_n de tamanho $2N$, que é avaliado por meio do operador de classificação por não-dominância (linhas 7 e 8). A construção da próxima população P_{n+1}, com tamanho N, inicia-se selecionando as soluções da melhor fronteira F_1, seguida pela segunda melhor fronteira F_2, e assim por diante, seguindo a ordem de classificação das fronteiras (linhas 11 a 14). Quando a próxima população não puder acomodar completamente a fronteira corrente F_k junto com as fronteiras anteriores, a fronteira F_k é ordenada em ordem decrescente de distância de aglomeração (linha 16). Em seguida, as $N - |P_{n+1}|$ primeiras soluções de F_k são utilizadas para completar P_{n+1} (linha 17). Em outras palavras, quando há mais soluções na fronteira corrente do que vagas disponíveis na próxima população, as soluções com maior valor de distância de aglomeração são selecionadas.

As gerações prosseguem até que um critério de parada específico seja alcançado (linha 5). No final do processo evolutivo, o algoritmo NSGA-II retorna as soluções não-dominadas da população resultante (linha 20). A Figura 3 ilustra o processo evolutivo realizado em uma geração do NSGA-II.

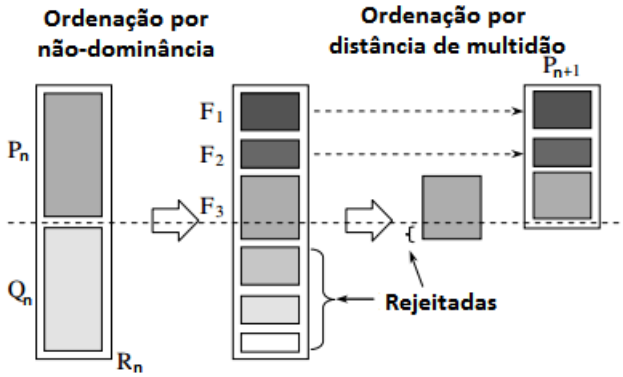


Figura 3 – Esquema do NSGA-II. Adaptada de Deb (2001).

2.2.1.1 *Fast Non-Dominated Sorting*

O operador de classificação por não-dominância tem como função atribuir a cada elemento de um conjunto de indivíduos uma classe de não-dominância, baseada em seu grau de não-dominância. Essa estratégia possui uma complexidade de tempo de O(mN^2), sendo m o número de objetivos e N o tamanho do conjunto de indivíduos. Dado um conjunto de indivíduos P definido como parâmetro de entrada, o operador de classificação por não-dominância retorna um conjunto de fronteiras, denotado como $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$.

O Algoritmo 2 descreve em detalhes as etapas do processo de classificação. Inicialmente, todos os indivíduos são comparados em pares e, para cada indivíduo $i \in P$, o conjunto S_i (armazena todos os indivíduos dominadas pelo elemento i) e o valor n_i (quantidade de indivíduos que dominam o elemento i) são definidos (linha 2 a 12). Posteriormente, é realizado o ranqueamento dos indivíduos e a construção das fronteiras (linha 13 a 23).

Algoritmo 2: ALGORITMO DE CLASSIFICAÇÃO POR NÃO-DOMINÂNCIA

```
   Entrada: P
   Saída: F
 1 início
 2     para cada solução i ∈ P faça
 3         S_i ← ∅
 4         n_i ← 0
 5         para cada solução j ∈ P faça
 6             se i ≺ j então
 7                 S_i ← S_i ∪ {j}
 8             se j ≺ i então
 9                 n_i ← n_i + 1
10         se n_i = 0 então
11             i_rank ← 1
12             F_1 ← F_1 ∪ {i}
13     k ← 1
14     enquanto F_k ≠ ∅ faça
15         Q ← ∅
16         para cada solução i ∈ F_k faça
17             para cada solução j ∈ S_i faça
18                 n_j ← n_j − 1
19                 se n_j = 0 então
20                     j_rank ← k + 1
21                     Q ← Q ∪ {j}
22         k ← k + 1
23         F_k = Q
24     retorna F
```

2.2.1.2 *Crowding Distance*

O operador de distância de aglomeração estima a densidade de pontos (vetores de objetivos) ao redor de um ponto específico i. Para isso, ele utiliza dois pontos adjacentes como referência para calcular a distância. Em essência, o valor $P[i]_{distancia}$ corresponde ao tamanho do maior cuboide (espaço que não contém outro ponto da população) que pode ser formado em torno do ponto i. Soluções cujas imagens no espaço de objetivos estão afastadas dos outros pontos recebem valores maiores para a distância de aglomeração. O Algoritmo 3 detalha como esse procedimento é realizado.

Algoritmo 3: ALGORITMO QUE COMPUTA A DISTÂNCIA DE AGLOMERAÇÃO

Entrada: P
1 **início**
2 $l \leftarrow |P|$
3 **para** *cada solução* $i \in P$ **faça**
4 $P[i]_{distancia} \leftarrow 0$
5 **para** *cada objetivo* m **faça**
6 $P \leftarrow$ Ordena (P, m)
7 $P[1]_{distancia} \leftarrow \infty$
8 $P[l]_{distancia} \leftarrow \infty$
9 **para** $i = 2$ *até* $(l - 1)$ **faça**
10 $P[i]_{distancia} \leftarrow P[i]_{distancia} + (P[i+1]_m - P[i-1]_m)/(f_m^{max} - f_m^{min})$

2.2.2 *Strenght Pareto Evolutionary Algorithm 2*

O *Strenght Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2) é um MOEA elitista assim como o NSGA-II. Introduzido por Zitzler et al. (2001), o SPEA2 foi desenvolvido com o objetivo de corrigir as deficiências encontradas em seu predecessor, o SPEA, proposto por Zitzler e Thiele (1999). As melhorias incluem o aprimoramento do esquema de atribuição de aptidão, a adição de uma técnica para estimar a densidade da vizinhança mais próxima e a utilização de um novo método para compactação do arquivo, que garante a preservação dos indivíduos localizados nas bordas da fronteira Pareto. O Algoritmo 4 detalha o processo evolutivo realizado pelo SPEA2.

Algoritmo 4: SPEA2

Entrada: N (tamanho da população), N' (tamanho do arquivo)
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)
1 **início**
2 $n \leftarrow 0$
3 $P_n \leftarrow$ Gera população inicial ();
4 $A_n \leftarrow \varnothing$
5 **enquanto** *critério de parada não satisfeito* **faça**
6 Calcula o valor de aptidão de cada indivíduo (P_n);
7 $A_{n+1} \leftarrow$ Aplica seleção populacional $(P_n \cup A_n, N')$;
8 **se** *critério de parada não foi atingido* **então**
9 $P_{n+1} \leftarrow$ Aplica operadores de seleção, recombinação e mutação (A_{n+1});
10 $n \leftarrow n + 1$
11 $P_{final} \leftarrow A_n$
12 **retorna** P_{final}

O processo de otimização do SPEA2 inicia-se com a criação de uma população inicial P_0 contendo N indivíduos, que pode ser gerada aleatoriamente ou por meio de algum método específico, sendo N um parâmetro de entrada do algoritmo. Além disso, é criado um conjunto vazio denominado arquivo A_0 (linhas 3 e 4). O arquivo é utilizado para armazenar

os melhores indivíduos encontrados ao longo do processo evolutivo. Durante cada iteração do fluxo principal do algoritmo SPEA2 (linhas 5 a 10), a aptidão de todos os indivíduos em P_n é calculada, e o arquivo de tamanho N' é atualizado, sendo N' um parâmetro de entrada do algoritmo (linha 7). Caso o critério de parada ainda não seja alcançado, novos indivíduos são gerados para a próxima população P_{n+1}, utilizando o arquivo A_{n+1}, que foi atualizado na etapa anterior (linhas 8 a 10). Quando o critério de parada é atingido, o SPEA2 retorna a última versão do arquivo (linhas 11 e 12), que contém os melhores indivíduos obtidos ao longo das gerações realizadas.

2.2.2.1 Atribuição de Aptidão

O método de atribuição de aptidão do algoritmo SPEA2, um dos módulos aprimorados em relação ao seu predecessor, o SPEA, avalia cada indivíduo da população considerando tanto os indivíduos que o dominam quanto os indivíduos que são dominados por ele.

Para cada indivíduo i na população P_n e no arquivo A_n, é atribuído um valor de força S_i, que representa o número de indivíduos em $P_n \cup A_n$ dominados pelo indivíduo i. Matematicamente, o cálculo da força do indivíduo i é expresso da seguinte maneira:

$$S_i = \mid \{j \mid j \in P_n \cup A_n \wedge i \prec j\} \mid \tag{1}$$

em que $\mid \cdot \mid$ representa a cardinalidade do conjunto. Conforme indicado pela Equação (1), os indivíduos que não dominam nenhum outro possuem $S_i = 0$. Com base nos valores calculados de S, a primeira parte do cálculo do valor de aptidão dos indivíduos é realizada da seguinte forma:

$$R_i = \sum_{j \in P_n \cup A_n, j \prec i} s(j) \tag{2}$$

Basicamente, o valor inicial de aptidão, representado por R_i e calculado de acordo com a Equação (2), corresponde à soma dos valores das forças de todos os indivíduos que dominam o indivíduo i. Quando um indivíduo não é dominado por nenhum outro, sua aptidão é definida como $R_i = 0$. No entanto, se o indivíduo i for dominado por vários outros, seu valor de R_i será elevado.

A segunda parte do cálculo da aptidão é uma medida de densidade, incorporada para distinguir indivíduos que possuem valores iguais de R_i. Esse cálculo de densidade basicamente utiliza o inverso da distância entre o indivíduo i e o k-ésimo vizinho mais próximo, sendo realizado da seguinte forma:

$$D_i = \frac{1}{(\alpha_i^k + 2)} \tag{3}$$

de forma que α_i^k representa a distância no espaço de objetivos entre o indivíduo i e seu k-ésimo vizinho mais próximo, sendo $k = \sqrt{N + N'}$. O valor final da aptidão F_i para o indivíduo i é obtido somando os valores R_i e D_i, conforme demonstrado na Equação (4).

$$F_i = R_i + D_i \tag{4}$$

2.2.2.2 Atualização do Arquivo

O processo de atualização do arquivo consiste em selecionar os N' melhores indivíduos presentes na população P_n e no arquivo A_n para a próxima geração $(n + 1)$. Para isso, todos os indivíduos não-dominados pertencentes a $P_n \cup A_n$ são transferidos para o novo arquivo A_{n+1}. Em outras palavras, são selecionados todos os indivíduos cujo valor de aptidão é menor que 1. Esse procedimento é representado matematicamente da seguinte forma:

$$A_{n+1} = \{i | i \in P_n \cup A_n \wedge F_i < 1\} \tag{5}$$

Após a cópia de todos os indivíduos não-dominados, podem ocorrer três situações: o número de indivíduos contidos no novo arquivo ser igual ao número máximo estabelecido ($|A_{n+1}| = N'$), ser inferior ($|A_{n+1}| < N'$), ou ser superior ($|A_{n+1}| > N'$). No primeiro caso, não há necessidade de ajustar a cardinalidade de A_{n+1}, e o procedimento de atualização é concluído. No segundo caso, o conjunto de indivíduos $P_n \cup A_n$ é ordenado em ordem crescente de aptidão, e os $N' - |A_{n+1}|$ primeiros indivíduos com $F_i > 1$ são utilizados para completar o novo arquivo. Por fim, no terceiro caso, é necessário realizar o procedimento de compactação do arquivo, que retira iterativamente indivíduos de A_{n+1} até que a condição $|A_{n+1}| = N'$ seja atendida.

A cada iteração, o procedimento de compactação do arquivo remove o indivíduo $i \in A_{n+1}$ que possui a menor distância em relação a outro indivíduo do conjunto. Se vários indivíduos possuírem a mesma menor distância, a segunda menor distância é considerada, e assim por diante, até que haja um desempate. Esse processo é concluído quando $|A_{n+1}| = N'$.

2.2.3 *Indicator-based Multiobjective Evolutionary Algorithm*

O algoritmo *Indicator-based Multiobjective Evolutionary Algorithm* (IBEA), proposto por Zitzler e Künzli (2004), é um dos primeiros MOEAs da classe de algoritmos baseados em indicadores, nos quais o processo de busca é guiado por um indicador de qualidade de performance. O procedimento de atribuição de aptidão (ou *fitness*) envolve comparações par-a-par, realizadas por meio de um indicador de qualidade, que determina um valor que representa a diferença de qualidade entre dois indivíduos. Na literatura, existem vários

indicadores de qualidade que podem ser incorporados ao IBEA, como o *binary* ϵ*-indicator*, o *binary additive* ϵ*-indicator*, o *hypervolume indicator*, entre outros. A possibilidade de escolha do indicador de qualidade ressalta a flexibilidade do IBEA, permitindo que os tomadores de decisão incorporem informações de preferência.

Definição 2.2.1. ***(Indicador de Qualidade)*** *Um* k*-indicador de qualidade* I *é uma função* $I : \Omega^k \rightarrow \mathbb{R}$*, que mapeia* k *conjuntos aproximados* $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ *para um número real* $I(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ *(ZITZLER et al., 2003).*

Conforme mencionado por Zitzler e Künzli (2004), a princípio, um indicador de qualidade pode receber um número arbitrário de argumentos, no entanto, os indicadores de qualidade unários ($k = 1$) são os mais comuns. Dentre os três indicadores de qualidade mencionados anteriormente, o *binary additive* ϵ*-indicator* (I_{ϵ^+}), que existe tanto na forma unária quanto na forma binária, foi escolhido para ser incorporado ao IBEA, que será referido como IBEA$_{I_{\epsilon^+}}$.

Os indicadores de qualidade binários permitem comparar a qualidade de cada um dos dois conjuntos aproximados analisados em relação ao outro. Sem perda de generalidade, assumindo que todas as funções objetivo devem ser minimizadas, o $I_{\epsilon^+}(A, B)$ determina o quanto o conjunto aproximado A é pior que o conjunto aproximado B em relação a todos os objetivos. Em outras palavras, quantifica o fator mínimo ϵ tal que qualquer vetor de objetivos do conjunto aproximado B seja ϵ-dominado por pelo menos um vetor de objetivos do conjunto aproximado A. De forma mais precisa, esse indicador de qualidade retorna o valor mínimo que deve ser adicionado em B para que ele seja fracamente dominado por A. Formalmente, o cálculo do $I_{\epsilon^+}(A, B)$ é definido da seguinte forma:

$$I_{\epsilon^+}(A, B) = \min_{\epsilon^+} \left\{ \forall x^2 \in B \; \exists \; x^1 \in A : f_i(x^1) - \epsilon^+ \leq f_i(x^2) \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\} \right\} \tag{6}$$

Conforme mencionado por Zitzler e Künzli (2004), a razão para utilizar indicadores de qualidade binários está relacionada ao fato de que eles constituem uma extensão natural da relação de dominância Pareto. Portanto, podem ser aplicados no cálculo da aptidão das soluções de forma análoga aos métodos convencionais baseados na relação de dominância Pareto. O Algoritmo 5 descreve o procedimento executado pelo IBEA.

Inicialmente, uma população inicial P_0 de tamanho N é gerada de forma aleatória ou utilizando algum método específico, sendo N um parâmetro de entrada do algoritmo (linha 3). Em cada geração do algoritmo IBEA, atribui-se um valor de aptidão a cada indivíduo de P_n, que reflete sua qualidade e será utilizado no processo de redução da população para o tamanho definido (N). Posteriormente, o procedimento de redução da população é realizado, exceto na primeira geração. Nessa etapa (linhas 6 a 9), a população começa com $2N$ indivíduos, e a cada iteração, o indivíduo com o menor valor de aptidão é removido,

Algoritmo 5: IBEA

Entrada: N (tamanho da população), K (fator de escala)
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

```
1  início
2      n ← 0
3      P_n ← Gera população inicial ();
4      enquanto critério de parada não satisfeito faça
5          Calcula o valor de aptidão de cada indivíduo (P_n, K);
6          enquanto |P_n| > N faça
7              Seleciona o indivíduo i ∈ P_n com menor valor de aptidão;
8              Remove o indivíduo i de P_n;
9              Atualiza o valor de aptidão de todos os indivíduos (P_n, K);
10         se critério de parada não foi atingido então
11             Q_n ← Aplica operadores de Seleção, Crossover e Mutação (P_n);
12             P_{n+1} ← P_n ∪ Q_n
13             n ← n + 1
14 P_final ← P_n
15 retorna P_final
```

seguido pela atualização dos valores de aptidão dos demais indivíduos. Esse processo se repete até que o tamanho da população retorne ao valor estabelecido (N). Caso o critério de parada não seja satisfeito, após o ajuste no tamanho da população, um conjunto de indivíduos filhos Q_n é gerado por meio dos operadores de seleção, recombinação e mutação. Em seguida, os indivíduos de Q_n são combinados com os indivíduos da população atual P_n, compondo a população da próxima geração P_{n+1} (linhas 12 e 13). A execução do algoritmo IBEA é encerrada quando o critério de parada é satisfeito.

2.2.3.1 Atribuição de Aptidão

Dada uma população P, o processo de atribuição de aptidão do IBEA tem como objetivo avaliar cada indivíduo com base em sua utilidade em relação aos objetivos considerados. Para isso, os autores propõem avaliar um indivíduo somando os valores retornados pelo indicador de qualidade I em relação ao restante da população P. Esse procedimento é demonstrado na Equação (7):

$$F'(x_1) = \sum_{x_2 \in P \setminus \{x_1\}} I(\{x_2\}, \{x_1\}) \tag{7}$$

Estabelecendo I_{ϵ^+} como o indicador de qualidade, para um problema com m funções objetivo, a Equação (7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F'(x_1) = \sum_{x_2 \in P \setminus \{x_1\}} \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} (f_i(x_2) - f_i(x_1)) \tag{8}$$

Para avaliar um indivíduo x_1, realiza-se o somatório das maiores distâncias entre o indivíduo corrente e todos os outros indivíduos de P, levando em consideração os objetivos a serem otimizados. Portanto, o valor de aptidão $F'(x_1)$ reflete a perda de qualidade que ocorreria se o indivíduo x_1 fosse removido de P. Dessa forma, o objetivo é maximizar $F'(x_1)$, o que implica em aumentar a probabilidade de que x_1 permaneça na população. Utilizando o indicador I_{ϵ^+}, a razão entre $F'(x_1)$ e o tamanho da população N resulta no valor médio de ϵ necessário para que o indivíduo x_1 seja dominado pelos demais indivíduos de P.

Conforme descrito por Zitzler e Künzli (2004), em vez de adotar o esquema de atribuição de aptidão mencionado anteriormente, o IBEA utiliza um esquema alternativo, que intensifica a influência dos indivíduos dominantes de P sobre os indivíduos dominados. Na Equação (9), essa abordagem revisada é apresentada:

$$F'(x^1) = \sum_{x^2 \epsilon P \setminus \{x^1\}} -e^{\frac{-I(\{x^2\},\{x^1\})}{k}} \tag{9}$$

O parâmetro K representa um fator de escala específico para o indicador de qualidade adotado e para o problema em questão. Além disso, o valor e corresponde ao número de Euler, também conhecido como a constante de Euler.

2.2.4 *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* III

Proposto por DEB e JAIN (2014), o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* III é um algoritmo elitista desenvolvido para lidar com MaOPs. Fundamentado no *framework* do NSGA-II, o NSGA-III apresenta alterações substanciais nos procedimentos de seleção para reprodução e sobrevivência. Essas modificações foram implementadas com o intuito de assegurar a preservação da diversidade entre os membros da população, especialmente em cenários que envolvem um alto número de objetivos.

O NSGA-III utiliza um conjunto predefinido de pontos de referência, distribuídos uniformemente no espaço de objetivos e selecionados de forma estruturada ou fornecidos previamente. Esses pontos de referência têm como finalidade auxiliar no controle da diversidade populacional ao longo do processo evolutivo conduzido pelo NSGA-III. Em cada geração, o NSGA-III busca encontrar soluções não-dominadas nas proximidades da interseção da fronteira Pareto-ótimo com cada direção de referência. Essas direções de referência são definidas pelos vetores que conectam o *Ideal Point* ao ponto de referência correspondente. O uso de múltiplos pontos de referência bem distribuídos possibilita a população convergir em direção à fronteira Pareto-ótimo ao longo de diversas direções de busca. O enfoque híbrido, que combina abordagens baseadas em dominância Pareto e decomposição, torna o NSGA-III uma ferramenta poderosa para lidar com MaOPs. Assim como o NSGA-II se consolidou como uma referência em estudos relacionados a MOPs, o

NSGA-III vem desempenhando um papel semelhante em pesquisas envolvendo MaOPs nos últimos anos.

Dado um conjunto de vetores de referência P_{ref}, um tamanho de população N e um critério de parada, o processo evolutivo conduzido pelo algoritmo NSGA-III é apresentado no Algoritmo 6.

Algoritmo 6: NSGA-III

Entrada: N (tamanho da população), P_{ref} (vetores de referência)
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

```
início
    t ← 0
    P_t ← Gera população inicial (N);
    Avalia indivíduos (P_t);
    Ordena por não-dominância (P_t);
    Mensura distância de aglomeração (P_t);
    enquanto critério de parada não satisfeito faça
        Q_t ← Aplica operadores de seleção, recombinação e mutação (P_t);
        Avalia indivíduos (Q_t);
        R_t ← P_t ∪ Q_t
        Ordena por não-dominância (R_t);
        Mensura distância de aglomeração (R_t);
        P_{t+1} ← Aplica seleção ambiental (R_t, P_ref, N)
        t ← t + 1
P_final ← P_t
retorna P_final
```

O NSGA-III opera com uma população de tamanho N, e cada iteração do fluxo principal inicia com uma população P_t. Conforme observado por Seada e Deb (2018), dado que o NSGA-III tem como objetivo selecionar apenas um membro da população por direção de referência, não há competição direta entre essas direções. Portanto, a seleção dos indivíduos para a etapa de reprodução ocorre de forma aleatória. Durante essa fase, são aplicados os operadores de recombinação e mutação à população P_t, gerando a população de indivíduos filhos Q_t. Posteriormente, de maneira semelhante ao NSGA-II, as populações P_t e Q_t são combinadas para formar a população R_t, que agora abrange $2N$ indivíduos. Em seguida, por meio da aplicação do Algoritmo 2, a população R_t é classificada em múltiplos níveis de não-dominância, resultando na identificação de várias fronteiras.

A primeira fronteira (f_1) consiste em indivíduos que não são dominados por nenhum outro membro em R_t. Na segunda fronteira (f_2), encontram-se os indivíduos dominados apenas por membros de f_1, e esse padrão continua para as fronteiras subsequentes. A partir da fronteira f_1, o processo de seleção de sobreviventes para a próxima população (P_{t+1}) ocorre de maneira sequencial, adicionando uma fronteira de cada vez, desde que seja possível acomodar todos os seus membros.

No entanto, em algum momento, uma das fronteiras conterá mais membros do que vagas disponíveis em P_{t+1}. Essa fronteira é denominada como F_l. Nesse caso, um operador de preservação de nicho é empregado para selecionar um subconjunto de F_l que preencherá as vagas remanescentes em P_{t+1}. Esse processo envolve a normalização dos indivíduos tanto em P_{t+1} quanto em F_l. Para uma compreensão mais detalhada do procedimento de normalização utilizado, consulte Blank, Deb e Roy (2019). Após o processo de normalização, cada membro de P_{t+1} e F_l é associado a uma direção de referência, para a qual possui a menor distância perpendicular. Para preencher as vagas disponíveis em P_{t+1}, o NSGA-III seleciona os membros de F_l associados às direções de referência com representação limitada ou ausente em P_{t+1}. Em outras palavras, os indivíduos de F_l localizados em áreas mais esparsas do espaço de objetivos são priorizados. O objetivo do operador de preservação de nicho é encontrar um membro da população para o maior número possível de direções de referência. A execução do NSGA-III é finalizada quando o critério de parada é alcançado.

2.2.5 *Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition*

O *Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition* (MOEA/D), proposto por Zhang e Li (2007), é um algoritmo de decomposição baseado em agregação que combina o tradicional método matemático de decomposição com EAs. No MOEA/D, um MOP com m funções objetivo é decomposto em m problemas mono-objetivo (subproblemas) por meio de vetores de pesos uniformemente distribuídos no espaço de objetivos. Esses subproblemas são otimizados simultaneamente em uma única execução do algoritmo. Cada subproblema está associado a um vetor de pesos específico e a um indivíduo da população atual. Esses subproblemas são otimizados e atualizados utilizando informações locais provenientes dos subproblemas vizinhos. A vizinhança de um subproblema é composta pelos T subproblemas mais próximos a ele, sendo a proximidade definida por meio da distância Euclidiana entre o vetor de pesos associado e os vetores de pesos dos outros subproblemas. A cada geração, a população atual é composta pelos melhores indivíduos obtidos até o momento para cada subproblema. Na etapa de decomposição, diferentes funções de escalarização podem ser empregadas, sendo as mais comuns: *Weighted Sum*, *Tchebychev* e *Penalty-Based Boundary Intersection*.

A cada geração, para cada subproblema, dois indivíduos são selecionados a partir da vizinhança do subproblema em questão para aplicação dos operadores de variação. Posteriormente, o esquema de atualização do MOEA/D substitui os atuais indivíduos dos subproblemas vizinhos quando o indivíduo gerado é melhor avaliado em termos da função de agregação utilizada. Esse processo se repete até que o critério de parada seja alcançado. O algoritmo 7 apresenta o procedimento de busca executado pelo MOEA/D.

Algoritmo 7: MOEA/D

Entrada: N (tamanho da população), λ (vetores de pesos), T (tamanho da vizinhança) , critério de parada
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

início
  $n \leftarrow 0$
  $P_n \leftarrow$ Gera População Inicial(N);
  $B \leftarrow$ Inicializa Estrutura de Vizinhança (λ, T);
  $z^* \leftarrow$ Inicializa Limite Inferior (P_n);
  $z^{nad} \leftarrow$ Inicializa Limite Superior (P_n);
  repita
    para $i \leq N$ **faça**
      k,$l \leftarrow$ Seleciona aleatoriamente duas soluções da Vizinhança ($B(i)$);
      $y \leftarrow$ Aplica Operador de Recombinação (x_k,x_l);
      $y' \leftarrow$ Aplica Operador de Mutação (y);
      $z^*, z^{nad} \leftarrow$ Atualiza Limites (y')
      para $j \in B(i)$ **faça**
        se $g^{TCH}(y'|\lambda^j, z^*, z^{nad}) \leq g^{TCH}(x_j|\lambda^j, z^*, z^{nad})$ **então**
          $x_j \leftarrow y'$;
    $n \leftarrow n + 1$
  até *critério de parada ser atingido*;
  $P_{final} \leftarrow P_n$
retorna P_{final}

2.2.5.1 Função de Agregação

Como mencionado anteriormente, existem diversas funções de escalarização para utilização em abordagens de decomposição baseada em agregação. Neste estudo, utilizamos a função de *Tchebychev*. Desta forma, para um dado indivíduo x, um vetor de pesos λ, o *ideal point* z^* e o *nadir point* z^{nad}, o problema de otimização escalar é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &Min\ g^{TCH}(x|\lambda, z^*, z^{nad}) = max_{1\leq i\leq m}\left\{\lambda_i \cdot \frac{f_i(x) - z_i^*}{z_i^{nad} - z_i^*}\right\} \\ &sujeito\ a\ x \in \Omega \end{aligned} \tag{10}$$

em que o *ideal point* $z^* = (z_1, \ldots, z_m)^T$ contém os menores valores encontrados até o momento para cada objetivo, enquanto o *nadir point* $z^{nad} = (z_1, \ldots, z_m)^T$ consiste nos maiores valores encontrados até o momento para cada objetivo. O vetor λ é o vetor de pesos associado ao subproblema em questão. Conforme Zhang e Li (2007), para cada solução Pareto-ótimo x, existe um vetor de pesos λ tal que x é a solução ótima do problema escalar representado pela Equação 10, e consequentemente, uma solução ótima do MOP decomposto.

2.2.5.2 MOEA/D com Substituição Global

Na versão original do MOEA/D, a cada geração, uma solução candidata x_c é gerada para cada subproblema i utilizando operadores genéticos. Durante a etapa de atualização, x_c é utilizada para substituir as soluções associadas aos subproblemas que compõem a vizinhança $B(i)$, ou seja, os subproblemas vizinhos ao subproblema i. No entanto, x_c pode não ser a solução mais adequada para esses subproblemas, o que pode resultar no seu descarte, a menos que uma ampla vizinhança de substituição seja utilizada. Como resultado, essa estratégia pode reduzir a diversidade populacional.

Dado que é provável que x_c seja adequado para alguns subproblemas que não pertencem à vizinhança $B(i)$, Wang et al. (2014) propuseram um novo esquema de substituição para o MOEA/D, denominado "substituição global". A cada nova solução candidata gerada, esse procedimento opera da seguinte forma:

1. Identifica o subproblema j mais adequado entre todos os subproblemas, ou seja, aquele em que x_c obtém o menor valor na função de agregação.
2. Seleciona os T_r vizinhos mais próximos do subproblema j para compor a vizinhança de substituição $B_r(j)$.
3. Para todo subproblema k pertencente a $B_r(j)$, a solução corrente x^k é substituída somente se x_c obtiver um valor de função de agregação melhor para o subproblema em questão.

De acordo com os autores, ao identificar os subproblemas apropriados, o esquema proposto permite uma transferência de informação mais eficiente. O algoritmo resultante da combinação entre o MOEA/D e a estratégia de substituição global é denominado MOEA/D com Substituição Global (MOEA/D *with Global Replacement*, MOEA/D-GR).

2.2.6 *Strength Pareto Evolutionary Algorithm Based on Reference Direction*

Proposto por Jiang e Yang (2017), o *Strength Pareto Evolutionary Algorithm Based on Reference Direction* (SPEA/R) é uma variante do algoritmo SPEA2, originalmente proposto por Zitzler et al. (2001). O SPEA/R foi projetado para lidar tanto com MOPs quanto com MaOPs e introduz mudanças significativas em comparação com o SPEA2 para melhorar seu desempenho. Uma das principais modificações do SPEA/R consiste na substituição do estimador de densidade baseado no vizinho mais próximo, conhecido por seu alto custo computacional. No SPEA/R, esse estimador é substituído por um novo método baseado em direções de referência. Além disso, o SPEA/R apresenta um novo esquema de atribuição de aptidão e uma nova estratégia de seleção ambiental que prioriza a diversidade em detrimento da convergência. Priorizando a diversidade sobre a convergência, o SPEA/R torna-se capaz de aumentar a pressão de seleção ao tratar MaOPs, nos quais uma parte significativa da população é não-dominada.

Dado o conjunto de direções de referência D_{ref}, que pode ser selecionado de forma estruturada ou fornecido previamente, juntamente com o tamanho da população N e o critério de parada, o fluxo principal do algoritmo SPEA/R é apresentado no Algoritmo 8.

Algoritmo 8: SPEA/R

Entrada: N (tamanho da população), D_{ref} (direções de referência), critério de parada
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

início
  $t \leftarrow 0$
  $P_t \leftarrow$ Gera população inicial(N);
  Avalia indivíduos (P_t);
  enquanto *critério de parada não satisfeito* **faça**
    $Q_t \leftarrow$ Aplica operadores de seleção, recombinação e mutação (P_t);
    Avalia indivíduos (Q_t);
    $R_t \leftarrow P_t \cup Q_t$
    $\overline{R_t} \leftarrow$ Normaliza vetores de objetivo(R_t);
    para *cada direção de referência* $i \in D_{ref}$ **faça**
      Identifica membros de $\overline{R_t}$ próximo à i
      $E(i) \leftarrow$ Associa ($\overline{R_t}, D_{ref}, i$);
      Calcula valores aptidão ($E(i)$);
      Atribui aptidão ($E(i)$);
    $P_{t+1} \leftarrow$ Aplica seleção ambiental (R_t, P_{ref}, N)
    $t \leftarrow t + 1$
$P_{final} \leftarrow P_t$
retorna P_{final}

Por meio do conjunto predefinido de direções de referência D_{ref}, o SPEA/R divide o espaço de objetivos em várias sub-regiões independentes. Em cada geração, partindo da população atual P_t, o processo de reprodução, que consiste na aplicação dos operadores genéticos, é executado por meio de um esquema restrito de acasalamento, com o objetivo de gerar a população de indivíduos filhos Q_t. Em seguida, a combinação de Q_t e P_t forma R_t, que é posteriormente normalizada. Cada indivíduo deste novo conjunto é então associado a uma direção de referência (ou a uma sub-região), de modo que o ângulo agudo formado seja o menor possível.

Geralmente, durante a etapa de seleção ambiental, a maioria dos MOEAs prioriza as soluções não-dominadas em R_t para compor a população da próxima geração P_{t+1}. Quando o número de soluções não-dominadas é superior a N, algumas estratégias secundárias são empregadas para determinar P_{t+1}, com o intuito de maximizar a diversidade populacional. No entanto, o SPEA/R adota uma abordagem de seleção ambiental que prioriza a diversidade sobre a convergência, com o objetivo de maximizar a diversidade populacional e intensificar a exploração de regiões menos exploradas durante o processo de busca. Conforme afirmam os autores, essa abordagem pode aumentar a pressão de seleção em cenários nos quais

uma parte significativa da população é composta por soluções não-dominadas. A abordagem proposta seleciona iterativamente um conjunto H, que consiste na solução mais apta de cada sub-região. Se for possível acomodar todas as soluções de H em P_{t+1} sem exceder o tamanho N, elas são transferidas diretamente para a nova população. Entretanto, quando a quantidade de soluções em H ultrapassa o número de vagas disponíveis, os integrantes de H com os melhores valores de aptidão são priorizados. A execução do SPEA/R é concluída quando o critério de parada é alcançado.

2.2.7 Two_Arch2

Introduzido por Wang, Jiao e Yao (2015), o Two_Arch2 é uma evolução do algoritmo com dois arquivos (*Two Arch*), que foi desenvolvido para abordar MaOPs. Essa abordagem mantém duas populações, que se concentram de maneira independente em convergência (CA) e diversidade (DA).

Dado os tamanhos de CA e DA, juntamente com o critério de parada, o fluxo principal do Two_Arch2 é apresentado no Algoritmo 9.

Algoritmo 9: TWO_ARCH2

Entrada: N_{CA} (tamanho de CA), N_{DA} (tamanho de DA), critério de parada
Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

início
  $t \leftarrow 0$
  $P_t \leftarrow$ Gera população inicial(N_{DA});
  Avalia indivíduos (P_t);
  $CA_t \leftarrow$ Gera Arquivo CA (P_t, N_{CA});
  $DA_t \leftarrow$ Gera Arquivo DA (P_t, N_{DA});
  enquanto *critério de parada não for satisfeito* **faça**
    $Q_t \leftarrow$ Aplica operadores de seleção, recombinação e mutação (CA_t, DA_t);
    Avalia indivíduos (Q_t);
    $CA_{t+1} \leftarrow$ Aplica seleção ambiental CA (CA_t, Q_t, N_{CA})
    $DA_{t+1} \leftarrow$ Aplica seleção ambiental DA (DA_t, Q_t, N_{DA})
    $t \leftarrow t + 1$
$P_{final} \leftarrow DA_t$
retorna P_{final}

O algoritmo Two_Arch2 é fundamentalmente semelhante a outros MOEAs, exceto pelo fato de que as soluções não-dominadas são divididas em dois arquivos: CA e DA. O arquivo CA auxilia a população a convergir rapidamente em direção à fronteira Pareto-ótimo, enquanto o arquivo DA busca adicionar maior diversidade populacional em espaços de objetivos com alta dimensionalidade. Nesse contexto, durante o processo de reprodução, o Two_Arch2 realiza cruzamentos entre soluções de CA e DA, aplicando mutação apenas em CA. Na etapa de atualização (seleção ambiental), CA e DA são atualizados de forma im-

pendente, utilizando diferentes relações de dominância. Esse fato caracteriza o Two_Arch2 como uma abordagem híbrida. Para a atualização de CA, o indicador de qualidade $I_{\epsilon+}$ é empregado como princípio de seleção, de maneira semelhante ao realizado pelo algoritmo IBEA. Após a etapa de reprodução, a população de indivíduos filhos é adicionada a CA. Iterativamente, o indivíduo com o pior valor de aptidão entre todos (ou seja, aquele cuja remoção causa a menor perda de qualidade em CA) é removido de CA. Esse processo continua até que CA alcance o tamanho predefinido de N indivíduos. Quanto ao procedimento de atualização de DA, uma combinação da tradicional relação de dominância Pareto e uma métrica de distância de aglomeração baseada na norma L_p, a qual é utilizada para mensurar a similaridade entre dois pontos, é empregada para promover a diversidade. O valor de p é definido como $1/m$, em que m representa o número de objetivos. Dados dois pontos z^1 e z^2 no espaço de objetivos, a similaridade entre eles é calculada da seguinte forma:

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^{m} |z_i^1 - z_i^2|^p)^{1/p} \tag{11}$$

Devido à baixa diversidade presente em CA, a aproximação da fronteira Pareto-ótimo obtida ao final do procedimento de otimização conduzido pelo algoritmo Two_Arch2 é constituída exclusivamente por soluções provenientes de DA.

2.3 Problemas de Otimização com Muitos Objetivos

Usualmente, MOPs compostos por múltiplos objetivos conflitantes (quatro ou mais objetivos) são intitulados problemas de otimização com muitos objetivos (*Many-Objective Optimization Problems*, MaOPs). Lidar com tais problemas tem apresentado novos e complexos desafios aos pesquisadores da área ao longo da última década. Isso ocorre porque a otimização desses problemas é consideravelmente mais desafiadora do que otimizar MOPs tradicionais, conforme apontado por Zhao et al. (2019).

De acordo com Ishibuchi, Tsukamoto e Nojima (2008), DEB e JAIN (2014), Li et al. (2015), Bechikh, Elarbi e Said (2017), Coello et al. (2019), os MOEAs estado da arte enfrentam diversos desafios ao buscar uma aproximação representativa da fronteira Pareto-ótimo quando aplicados a MaOPs. Estes desafios incluem:

- **Aumento do número de soluções não-dominadas:** À medida que a dimensionalidade do espaço de objetivos aumenta, a proporção de soluções não-dominadas (soluções igualmente boas de acordo com a relação de dominância Pareto) na população também cresce de forma significativa. A incomparabilidade das soluções, com base na relação de dominância Pareto, enfraquece a pressão de seleção exercida pelos MOEAs baseados apenas na relação de dominância Pareto, como o NSGA-II

e o SPEA2. Isso pode comprometer a eficácia desses algoritmos de busca quando aplicados aos MaOPs. Esse cenário é principalmente causado pelo fenômeno de resistência à dominância (*Dominance Resistance* - DR), e pelo mecanismo de promoção ativa da diversidade (*Active Diversity Promotion* - ADP) (PURSHOUSE; FLEMING, 2007). De acordo com Jaimes e Coello (2015), as soluções resistentes à dominância são aquelas que possuem pelo menos um objetivo de baixa qualidade, enquanto os demais objetivos se aproximam de seus valores ótimos. Isso significa que essas soluções são não-dominadas, mas estão distantes da fronteira Pareto-ótimo. Por outro lado, o mecanismo de promoção ativa da diversidade ocorre devido à ineficácia do primeiro critério de seleção em comparar soluções. Ele é caracterizado pelo uso do segundo critério de seleção, baseado na densidade das soluções, para determinar quais delas sobreviverão durante a etapa de seleção ambiental. Tanto a DR quanto a ADP dificultam a tarefa de convergência de alguns MOEAs, o que pode levar a um conjunto final de soluções estagnado, distante da fronteira Pareto-ótimo.

- **Aumento exponencial no número de soluções necessárias para obter uma completa aproximação da fronteira Pareto:** Dado que a fronteira Pareto é uma hiper-superfície no espaço de objetivos, a quantidade de pontos necessários para representá-la com precisão cresce exponencialmente à medida que o número de objetivos otimizados aumenta. Consequentemente, representar uma superfície de *trade-off* em espaços de objetivos de alta dimensionalidade torna-se um desafio. Como resultado, é necessário um conjunto extenso de soluções não-dominadas para obter uma aproximação completa da fronteira Pareto-ótimo.
- **Dificuldade de visualização da fronteira Pareto:** Para MaOPs, a representação visual da fronteira Pareto deixa de ser uma tarefa trivial. Esse fato é considerado um grande problema, uma vez que a visualização do conjunto de aproximação final desempenha um papel crucial em processos de tomada de decisões eficazes.
- **Possível ineficácia dos operadores de recombinação:** Em espaços de alta dimensionalidade, é provável que os membros da população estejam bastante distantes uns dos outros. Quando duas soluções pais estão distantes, é provável que os filhos gerados por meio de operadores de recombinação também estejam distantes de seus pais. Consequentemente, a operação de recombinação tende a ser ineficaz na produção de indivíduos promissores.
- **Alto custo computacional para mensurar diversidade:** Para mensurar o nível de aglomeração de uma dada população, a identificação de soluções vizinhas se torna computacionalmente custosa em espaços de objetivos de alta dimensionalidade. Além disso, a utilização de valores aproximados de diversidade, com o intuito de reduzir o custo computacional, pode resultar em uma distribuição insatisfatória da aproximação da fronteira Pareto obtida.

- **O cálculo dos indicadores de qualidade de desempenho são computacionalmente caros:** Espaços de objetivos de alta dimensionalidade requerem um esforço computacional maior para comparar o desempenho entre algoritmos utilizando alguns indicadores de qualidade. Por exemplo, a complexidade do cálculo da métrica de hipervolume aumenta exponencialmente à medida que o número de objetivos otimizados aumenta.

Nos últimos anos, tem sido evidente o aumento do engajamento da comunidade científica na proposição de estratégias para melhorar o desempenho dos MOEAs ao lidar com MaOPs, impulsionado principalmente pela ampla gama de aplicações. De forma geral, as metodologias mais comumente empregadas incluem:

- **Abordagens baseadas em relações de dominância alternativas:** Essas abordagens empregam relações de preferência alternativas, que relaxam a relação de dominância Pareto, para diferenciar soluções não-dominadas ao lidar com MaOPs, visando aumentar a pressão de seleção dos MOEAs. Alguns dos principais exemplos incluem: *Relation Favour* (DRECHSLER; DRECHSLER; BECKER, 2001), $(1-k)$-*dominance* (Farina; Amato, 2002), *Control the Dominance Area of Solutions* (CDAS) (SATO; AGUIRRE; TANAKA, 2007), *Strengthened Dominance Relation* (SDR) (Tian et al., 2019), entre outras.
- **Abordagens de decomposição baseadas em agregação:** Essas abordagens consistem na decomposição de um MOP/MaOP em diversos problemas de otimização mono-objetivo (*Single-objective Problems*, SOPs), conhecidos como subproblemas, por meio da utilização de funções de escalarização. Todos esses subproblemas são otimizados simultaneamente em uma única execução. Dessa maneira, é atribuído um valor de aptidão escalar a cada membro da população para indicar sua qualidade. Enquanto a convergência é promovida pela minimização da função de escalarização escolhida, a manutenção da diversidade é garantida pela utilização de vetores de pesos uniformemente distribuídos no espaço de objetivos. O MOEA mais proeminente que adota essa abordagem é o MOEA/D (ZHANG; LI, 2007; ZHANG; LIU; LI, 2009). Ao longo dos últimos anos, o MOEA/D tem servido como base para o desenvolvimento de novos MOEAs (WANG et al., 2014; FAN et al., 2019).
- **Abordagens de decomposição baseadas em conjuntos de referência:** Por meio de um conjunto de vetores de referência, essas abordagens particionam o espaço de objetivos de um MOP/MaOP em vários subproblemas menores, de forma que cada subproblema permaneça um MOP. Consequentemente, a população é desenvolvida em direção a diversas regiões do espaço de objetivos. Alguns dos principais exemplos de algoritmos que aplicam esses princípios são o NSGA-III (DEB; JAIN, 2014) e o SPEA/R (JIANG; YANG, 2017), ambos considerados abordagens híbridas.
- **Abordagens baseadas em indicador de qualidade:** Essas abordagens empregam

indicadores de qualidade para orientar o processo de busca. Em outras palavras, elas transformam um MOP em um problema com apenas um único objetivo, no qual um indicador de qualidade é otimizado. Um dos principais desafios dessa abordagem é a seleção de um indicador de qualidade que possa assegurar tanto a convergência quanto a diversidade do conjunto de soluções. Alguns dos principais exemplos de algoritmos pertencentes a essa classe são o IBEA (ZITZLER; KÜNZLI, 2004), o SMS_EMOA (BEUME; NAUJOKS; EMMERICH, 2007), o HypE (BADER; ZITZLER, 2011), o IGD-NS (Tian et al., 2016), o AR-MOEA (Tian et al., 2018) e o MaOEA/IGD (Sun; Yen; Yi, 2019).

- **Abordagens baseadas em informação de preferência:** Em vez de buscar um conjunto de soluções que se aproxime de toda a fronteira Pareto-ótimo, os algoritmos desta classe concentram-se em uma região específica da fronteira Pareto-ótimo, utilizando informações de preferência fornecidas pelo usuário (tomador de decisões). Um aspecto crucial dessa abordagem é determinar quando a informação de preferência é incorporada ao processo de otimização. Diante disso, essa classe de algoritmos é dividida em: algoritmos *a priori* (integração antes da busca), algoritmos interativos (integração durante a busca) e algoritmos *a posteriori* (integração após a busca). Entre os principais MOEAs que implementam essa abordagem, encontram-se o R-NSGA-II (DEB; SUNDAR, 2006), o PBEA (THIELE et al., 2009), o PICEA-g (Wang; Purshouse; Fleming, 2013), o PAR(nds)-DEMO e o PAR(ϵ)-DEMO (GOULART; CAMPELO, 2016), bem como o R-NSGA-III (VESIKAR; DEB; BLANK, 2018).
- **Abordagens baseadas em redução de dimensionalidade:** Abordagens viabilizadas para lidar com MaOPs com objetivos redundantes. Para muitos MaOPs com m objetivos, existe um subconjunto mínimo de k objetivos conflitantes ($k < m$) que tem o potencial de gerar uma fronteira Pareto-ótimo semelhante ao problema original. Esses k objetivos são referidos como essenciais, enquanto os demais são considerados redundantes (Saxena et al., 2013). Em cenários em que o número de objetivos pode ser reduzido a três ou menos, é razoável esperar que qualquer MOEA do estado da arte possa ser empregado de maneira eficaz. Dentre os principais estudos que abordam essa estratégia, destacam-se as pesquisas de (DEB; SAXENA, 2005; DEB; SUNDAR, 2006; JAIMES; COELLO; CHAKRABORTY, 2008; Saxena et al., 2013; WANG; YAO, 2016; LUO; LI; LIN, 2018).

3 Análise dos Relacionamentos entre Objetivos

O coeficiente de correlação é uma importante métrica da estatística descritiva que possibilita estudar e descrever o tipo de relação existente entre duas variáveis quantitativas. Por meio do coeficiente de correlação é possível quantificar a associação entre duas variáveis, identificando a intensidade (força) e a direção dessa relação, seja positiva ou negativa. Diversos testes estatísticos são empregados para calcular a correlação entre variáveis. O coeficiente de correlação de Pearson, também chamado de coeficiente de correlação produto-momento de Pearson (PEARSON; LEE, 1903; PEARSON, 1904), é um dos principais exemplos. Além disso, temos o coeficiente de correlação de Kendall (KENDALL, 1938) e o coeficiente de correlação da ordem de posto de Spearman (SPEARMAN, 1961). Enquanto o primeiro é um teste paramétrico que mensura relações lineares (a tendência pode ser traçada por uma linha reta), os outros dois são testes não-paramétricos baseados em postos. Estes últimos são indicados quando os dados não exibem um comportamento regular, com alguns pontos bastante afastados, ou quando representações gráficas sugerem um padrão crescente ou decrescente em formato de curva, indicando relações não-lineares monotônicas (a tendência está sempre na mesma direção, crescente ou decrescente).

O coeficiente de correlação amostral entre duas variáveis é denotado como r e é quantificado numericamente. Esse valor varia no intervalo entre -1 e 1. Quando é igual a 0, indica a ausência de correlação (ou seja, a relação é aleatória ou inexistente) entre as variáveis analisadas. Valores de $+1$ e -1 representam correlações perfeitas positiva e negativa, respectivamente. Um valor positivo de r indica que as variáveis variam na mesma direção, enquanto um valor negativo de r indica que as variáveis têm uma relação inversa. Valores próximos a 0 indicam uma correlação fraca. Quando as variáveis analisadas apresentam uma forte correlação positiva, o valor de r se aproxima de $+1$. Por outro lado, quando elas apresentam uma forte correlação negativa, o valor de r se aproxima de -1. A magnitude de r reflete a força da associação entre as variáveis. Em outras palavras, a intensidade da correlação aumenta de 0 em direção a $+1$ ou de 0 em direção a -1 (AKOGLU, 2018).

Normalmente, a análise de correlação é aplicada a MOPs com o objetivo de examinar a relação entre os objetivos otimizados. De acordo com Purshouse e Fleming (2003), o relacionamento entre os objetivos pode ser categorizado da seguinte maneira:

- Relacionamento de dependência
  - Conflito
  - Harmonia

- Relacionamento de independência

De acordo com os autores, em uma relação de conflito, à medida que o desempenho de um objetivo é aprimorado, o desempenho do outro deteriora. Isso significa que os valores dos objetivos variam com mesma intensidade (em relações lineares) em sentidos opostos. Em contrapartida, quando a relação é de harmonia (suporte), a melhoria em um objetivo está associada à melhoria no outro. Em outras palavras, os objetivos variam com a mesma intensidade (em relações lineares) na mesma direção. Quando variações em um objetivo nunca afetam o outro objetivo do par analisado, os objetivos são considerados independentes.

As classificações de dependência não são necessariamente mutuamente exclusivas. Portanto, a natureza do relacionamento pode mudar ao longo da fronteira Pareto. Além disso, quando a análise abrange toda a fronteira Pareto-ótimo, o relacionamento identificado é chamado de global; caso contrário, é caracterizado como local. É importante ressaltar que os relacionamentos entre objetivos, considerando um conjunto de soluções, podem variar ao longo do processo de busca (Purshouse; Fleming, 2003).

O aumento no número de objetivos conflitantes dificulta a representação eficaz da superfície de *trade-off* global por um MOEA. Em cenários com relações harmônicas, a remoção de um dos objetivos não altera a ordem parcial estabelecida pela relação de dominância Pareto. Quando essa identificação é feita com base na fronteira Pareto-ótimo, um dos objetivos do par é considerado redundante ou não essencial. Embora a inclusão de objetivos redundantes não comprometa a convergência em direção à fronteira Pareto-ótimo, ela pode impactar a diversidade na representação do *trade-off* da hiper-superfície, dependendo da forma como o estimador de densidade calcula a distância entre os vetores de objetivos.

A independência entre os objetivos em um problema de otimização global resulta na formação de múltiplas superfícies de *trade-off* independentes. Dessa forma, o problema pode ser decomposto em diversos subproblemas, que podem ser otimizados individualmente. De forma análoga a uma relação harmoniosa, é possível promover melhorias simultâneas em ambos os objetivos de um par. No entanto, em um par de objetivos independentes, a melhoria em um objetivo não implica necessariamente no aprimoramento do outro.

No estudo de Tan, Khor e Lee (2006), uma classificação alternativa é apresentada, categorizando conjuntos de funções objetivo de MOPs como totalmente conflitantes, parcialmente conflitantes ou sem conflitos. Dado um conjunto de soluções Φ, um conjunto de funções objetivo $F = \{f_1, f_2,...,f_m\}$ é considerado totalmente conflitante se não existirem duas soluções $(x,y) \in \Phi$ tal que $F(x) \prec F(y) \vee F(y) \prec F(x)$. Por outro lado, um conjunto de funções objetivo é considerado sem conflitos se toda par de soluções $(x,y) \in \Phi$ satisfaz a condição $F(x) \prec F(y) \vee F(y) \prec F(x)$. Por fim, quando um MOP não se enquadra em

nenhuma dessas duas categorias, é classificado como parcialmente conflitante. Nesse caso, um conjunto de funções objetivo é parcialmente conflitante se houver conjuntos não vazios contendo soluções $(x,y) \in \Phi$ tal que $F(x) \prec F(y) \vee F(y) \prec F(x)$. Geralmente, MOPs reais se encaixam nessa última categoria, que tem como objetivo principal obter um conjunto de soluções Pareto-ótimo que represente os *trade-offs* entre os objetivos em conflito. É importante ressaltar que, para qualquer MOP, existem múltiplas soluções Pareto-ótimo apenas em cenários onde os objetivos otimizados estão em conflito. Caso contrário, o conjunto Pareto-ótimo consistirá em apenas um elemento (DEB, 2001).

3.1 Trabalhos Relacionados

Segundo Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2015), a análise e compreensão das relações entre os objetivos em MOPs representam uma etapa fundamental no processo de otimização. As informações obtidas podem auxiliar no direcionamento da busca, considerando a estrutura do *fitness landscape* multiobjetivo em questão. Essa análise torna-se ainda mais relevante em MaOPs reais, pois possibilita o desenvolvimento de soluções mais eficazes.

Nos últimos anos, diversos estudos foram conduzidos com o objetivo de compreender a natureza multiobjetivo dos problemas. Purshouse e Fleming (2003) propôs uma plataforma para investigar os efeitos do aumento no número de objetivos, considerando diferentes tipos de relações entre pares de objetivos. Para a análise e visualização dessas relações em MOPs, foram empregados métodos qualitativos, como gráficos de coordenadas paralelas e gráficos de dispersão, além de métodos quantitativos, como o coeficiente de correlação de *Kendall*.

Castro-Gutierrez, Landa-Silva e Pérez (2011) conduziram uma análise da relação entre os objetivos otimizados aplicada à variante multiobjetivo do Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (*Multi-objective Vehicle Routing Problem with Time Windows*, MOVRPTW). A formulação abordada inclui cinco objetivos: minimizar o número de veículos, a distância total percorrida, o makespan, o tempo total de espera e o tempo total de atraso. Os conjuntos aproximados utilizados na análise foram obtidos por meio do algoritmo NSGA-II, e a correlação linear foi empregada para medir o grau de conflito entre os objetivos. De acordo com os resultados obtidos, o clássico conjunto de testes de Solomon (SOLOMON, 1987) não é totalmente adequado para investigar a variante multiobjetivo do problema, devido à fraca correlação observada entre os objetivos analisados. Isso sugere que há pouca interação, seja de conflito ou suporte, entre os objetivos durante o processo de busca. Diante desses resultados, os autores propuseram um novo conjunto de testes, que apresentou cenários mais realistas e desafiadores para o contexto multiobjetivo.

Ishibuchi et al. (2011a) demonstraram que a capacidade de convergência dos algoritmos baseados na relação de dominância Pareto, como o NSGA-II e o SPEA2,

não é prejudicada pelo aumento no número de objetivos quando esses são altamente correlacionados ou dependentes. Em contrapartida, neste mesmo cenário, o desempenho do MOEA/D é afetado negativamente. Além disso, os autores observaram que, em alguns problemas bi-objetivo, a adição de objetivos altamente correlacionados ou dependentes pode melhorar o desempenho dos MOEAs. Segundo eles, essas observações indicam que as dificuldades associadas à resolução de MaOPs dependem tanto das características intrínsecas do problema quanto das propriedades dos MOEAs empregados.

Verel, Liefooghe e Dhaenens (2011) realizaram uma análise experimental para investigar a aplicação de técnicas tradicionais de análise do *fitness landscape*, originalmente desenvolvidas para problemas mono-objetivo, no contexto de abordagens de busca multiobjetivo baseadas em conjuntos. Os autores avaliaram como a análise prévia das principais propriedades do problema multi-objetivo *NK-landscape* pode fundamentar adaptações e orientar o desenvolvimento de algoritmos multiobjetivo.

Em Ishibuchi, Yamane e Nojima (2012), os autores avaliaram o comportamento de busca de quatro algoritmos de otimização multiobjetivo (NSGA-II, SPEA2, MOEA/D e SMS-EMOA) quando aplicados a problemas de otimização combinatória biobjetivo, considerando diferentes granularidades em suas funções objetivo discretas. Com base nos resultados obtidos em experimentos computacionais, constatou-se que a diferença na granularidade das funções objetivo discretas influencia o processo de busca dos algoritmos, direcionando-os para determinadas regiões do espaço de objetivos. Além disso, verificou-se que a introdução de pequenos ruídos em funções objetivo discretas de alta granularidade melhora a capacidade de busca de alguns algoritmos. Posteriormente, em Ishibuchi, Yamane e Nojima (2013), esse estudo foi retomado com o objetivo de explicar por que funções objetivo discretas com alta granularidade (ou seja, com um grande número de valores possíveis) afetam negativamente a capacidade de busca dos quatros algoritmos analisados no trabalho anterior. Para isso, foram conduzidos experimentos computacionais a fim de avaliar o desempenho desses algoritmos em quatro tipos de problemas. Os resultados mostraram que a presença de objetivos discretos com alta granularidade melhora a capacidade de busca dos algoritmos NSGA-II e SPEA2 em problemas com muitos objetivos (mais de três objetivos). No entanto, essa característica prejudica o desempenho desses algoritmos quando aplicados a problemas bi-objetivo. Já o desempenho do MOEA/D e do SMS-EMOA é sempre deteriorado na presença de objetivos discretos com alta granularidade. Segundo os autores, objetivos com alta granularidade reduzem o número de soluções não-dominadas, preservando assim a pressão de seleção e contornando uma das principais dificuldades enfrentadas por abordagens baseadas na relação de dominância Pareto quando aplicadas a MaOPs, diferentemente do que ocorre em MaOPs contínuos. Dessa forma, o estudo evidencia que conclusões derivadas de análises baseadas em problemas com objetivos contínuos nem sempre podem ser estendidas a problemas com objetivos discretos.

Em Verel et al. (2013), os autores propuseram uma análise do *fitness landscape* de um problema de otimização combinatória multiobjetivo (*NK-landscapes*) com o objetivo de compreender sua geometria e, consequentemente, projetar algoritmos de busca local mais eficientes. Para isso, investigaram as propriedades do espaço de objetivos do problema, com especial atenção à correlação entre as funções objetivo. Além disso, analisaram a influência da dimensão do problema, do grau de não linearidade, do número de objetivos e da correlação entre eles na estrutura do conjunto Pareto-ótimo, considerando aspectos como cardinalidade, proporção de soluções Pareto-ótimo e número de soluções Pareto-ótimo locais. Com base nos resultados obtidos, os autores concluíram que a escolha das abordagens de busca, assim como o tamanho do arquivo de soluções, depende fortemente das características do problema.

Ishibuchi et al. (2014) analisaram o comportamento de três classes de MOEAs utilizando o problema da mochila com muitos objetivos (variando de 2 a 10 objetivos). A análise realizada contemplou uma abordagem baseada na relação de dominância Pareto (NSGA-II), duas abordagens baseadas em indicadores de qualidade (SMS-EMOA e HypE) e uma abordagem de decomposição baseada em funções de agregação (MOEA/D). Os experimentos computacionais evidenciaram a deterioração do desempenho das abordagens baseadas na relação de dominância Pareto, com o NSGA-II sendo superado pelos demais algoritmos. No entanto, os resultados também indicaram que o algoritmo NSGA-II supera os demais algoritmos considerados quando os objetivos são altamente correlacionados. Além disso, verificou-se que o comportamento de busca do algoritmo MOEA/D depende da função de agregação utilizada e de seus parâmetros. Enquanto algumas funções de agregação favorecem a convergência, outras contribuem para a diversidade populacional. Outro aspecto relevante identificado no estudo foi a melhoria do desempenho dos algoritmos quando o operador de recombinação é aplicado em soluções pais próximas no espaço de objetivos, considerando a distância euclidiana. Esta hipótese foi levantada com base no fato de que o algoritmo MOEA/D, que realiza reprodução local, apresentou melhores resultados para tamanhos menores de vizinhança. Isto é, selecionar soluções pais a partir de toda a população mostrou-se uma estratégia ineficaz para o problema analisado.

Em Giagkiozis e Fleming (2015), foi conduzido um estudo teórico para investigar, sob a perspectiva probabilística, se as abordagens baseadas em decomposição apresentam vantagens em relação às abordagens fundamentadas na relação de dominância Pareto em termos de convergência. Os resultados do estudo indicaram que a função de decomposição de *Chebyshev* exerce um efeito semelhante ao da relação de dominância Pareto quando se considera a probabilidade de encontrar soluções superiores. Além disso, verificou-se que o uso de informações prévias sobre o problema, como a geometria da fronteira Pareto, permite identificar a função de decomposição ótima, ou seja, a mais adequada para o problema analisado.

Em um estudo preliminar, García-Nájera e López-Jaimes (2015) analisaram as dificuldades encontradas ao otimizar o Problema de Coleta e Entrega (*Pickup and Delivery Problem*, PDP), considerando quatro objetivos. Tais objetivos são: minimizar o número de veículos, a distância total de viagem, a duração total de viagem, o tempo total de espera e o tempo total de atraso. Neste estudo, foram analisadas algumas propriedades, como: alteração na complexidade quando o número de objetivos considerados é ampliado, o nível de conflito entre cada par de objetivos e a variação no grau de complexidade de cada objetivo devido a alterações no *fitness landscape*. Para a análise, foram utilizados dois MOEAs: ϵ-MOEA e GN-MOEA.

Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2015) propuseram uma técnica para analisar e visualizar relacionamentos globais, locais e compostos entre objetivos, com o intuito de obter uma compreensão mais clara do *fitness landscape* em MOPs e da natureza multiobjetivo das instâncias de teste utilizadas. Com base em um conjunto de soluções não-dominadas, os autores utilizaram os mapas de *Karnaugh* (Karnaugh, 1953) para visualizar as relações compostas entre os objetivos. Além disso, também utilizaram um coeficiente de correlação e gráficos de dispersão para complementar a análise. A técnica proposta é composta por quatro etapas: analisar os relacionamento globais entre os objetivos, estimar o intervalo de valores de cada objetivo, identificar regiões de *trade-offs* utilizando mapas da região de *Karnaugh* e identificar relacionamentos locais entre objetivos por meio de gráficos de dispersão. Segundo os autores, essa técnica procura analisar relacionamentos entre objetivos sob múltiplas perspectivas, a fim de entender melhor o *fitness landscape* em MaOPs combinatórios, conhecidos por apresentarem *fitness landscape* irregulares e difíceis de avaliar. Para exemplificar o uso da técnica, ela foi aplicada em diferentes cenários do problema da mochila multidimensional multiobjetivo (*Multiobjective Multidimensional Knapsack Problem*, MOMKP) (LUST; TEGHEM, 2012). Segundo os autores, os resultados da análise ajudaram a identificar relacionamentos locais e complexos entre os objetivos, *trade-offs* não derivados de relacionamentos compostos por pares de objetivos, lacunas no *fitness landscape* e regiões de interesse. Além disso, diferentes conclusões sobre os relacionamentos dos objetivos foram alcançadas para diferentes instâncias, mesmo sendo cenários do mesmo problema. Posteriormente em Lankaites Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2017), esta técnica foi revista e sua investigação foi estendida a outros MaOPs.

Liefooghe et al. (2017) conduziram uma análise do *fitness landscape* multi-objetivo em diferentes formulações do problema bi-objetivo *permutation flowshop scheduling* com o objetivo de relacionar as características das instâncias do problema com as dificuldades enfrentadas por algoritmos de busca local baseados na relação de dominância Pareto. Para essa finalidade, os autores avaliaram o impacto das variações nas formulações do problema e da utilização de diferentes instâncias no desempenho de algoritmos multiobjetivo. Isto é, com base nessa análise, identificaram as características que tornam uma formulação ou uma instância do problema mais desafiadora de resolver.

Motivado pelo fato de que a maioria dos estudos sobre MaOPs aborda apenas problemas contínuos, García-Nájera e López-Jaimes (2018) apresentaram uma análise comparativa de desempenho envolvendo quatro MOEAs (ϵ-MOEA, MOEA/D, GN-MOEA e NSGA-III). Aplicada ao PDP, com o número de objetivos variando de 2 a 5, essa análise permitiu investigar as propriedades do PDP com muitos objetivos em relação à escalabilidade, identificando possíveis conflitos entre os objetivos e mensurando a proporção de soluções não-dominadas conforme o número de objetivos aumenta. Além disso, a análise avaliou como a dificuldade do PDP se altera com a ampliação do número de objetivos. Os resultados revelaram a existência de conflitos entre alguns dos objetivos otimizados e indicaram que a complexidade do problema aumenta à medida que mais objetivos são considerados.

É amplamente reconhecido que a maioria das conclusões obtidas em pesquisas e análises sobre MOPs e MaOPs contínuos nem sempre se aplica a problemas discretos. Além disso, em análises comparativa de desempenho envolvendo abordagens heurísticas, fatores além do número de objetivos influenciam os resultados, como a escolha dos problemas de teste (ISHIBUCHI et al., 2016). Ou seja, comportamentos e desempenhos podem variar devido a mudanças no cenário, algumas das quais ainda são desconhecidas. Portanto, é fundamental conduzir diferentes tipos de análises antes de utilizar algoritmos na resolução de problemas de otimização.

Neste capítulo foram apresentados conceitos e diversas pesquisas que realizaram análises aplicadas a variados MOPs e MaOPs discretos, que proporcionaram relevantes avanços e descobertas sobre o tema. Dentre essas pesquisas, a técnica de análise do *fitness landscape* introduzida em Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2015) e posteriormente aprimorada e validada em Lankaites Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2017), destaca-se devido à sua completude e profundidade. Portanto, neste trabalho, essa técnica foi selecionada como base para uma análise aplicada a uma formulação com muitos objetivos do *Dial-a-Ride Problem* (DARP). Tanto o problema abordado quanto a análise realizada serão detalhados nos próximos capítulos.

3.1.1 Técnica de Análise do *Fitness Landscape*

A seguir, apresentamos em detalhes a técnica de análise do *fitness landscape* introduzida por Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2015), Lankaites Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2017).

3.1.1.1 Etapa 1 - Análise global dos relacionamentos entre objetivos

Nesta etapa, possíveis relacionamentos globais entre os objetivos otimizados são identificados por meio do cálculo do coeficiente de correlação de kendall entre os valores das funções objetivo, conforme proposto por Purshouse e Fleming (2003). Para essa análise,

considera-se o conjunto completo de soluções não-dominadas obtido em todas as instâncias de teste utilizadas.

Segundo os autores, correlações fortemente conflitantes (valores inferiores a -0.5) indicam a existência de superfícies de *trade-off*. Em contrapartida, correlações fortemente harmoniosas (valores superiores a 0.5) sugerem que os objetivos podem ser agregados ou agrupados. Já os objetivos identificados como independentes (valores de correlação próximos ou iguais a zero) demonstram apenas que os objetivos do par analisado são globalmente independentes. No entanto, isso não implica a ausência de *trade-offs* locais em determinadas regiões do *fitness landscape*.

3.1.1.2 Etapa 2 - Análise do intervalo (extensão) dos objetivos

Em seguida, calcula-se a extensão de cada objetivo, definida como a diferença entre o melhor e o pior valor observado. Nesta etapa, o conhecimento do tomador de decisão sobre o problema abordado é essencial para determinar como proceder com cada objetivo, seja agrupando-os, removendo-os ou adotando outras estratégias. Além disso, essa abordagem pressupõe a existência de alguma forma de categorização das soluções em termos de qualidade, tornando necessária a expertise sobre o domínio do problema.

Um objetivo é considerado significativo quando seu intervalo é suficientemente amplo para permitir a classificação das soluções em diferentes categorias de qualidade, como boa e ruim, alta e baixa ou aceitável e inaceitável, dependendo do contexto do problema. A presença desse tipo de objetivo indica a existência de uma região de *trade-off* no *fitness landscape*. De maneira análoga, um objetivo é classificado como não significativo quando seu intervalo é pequeno a ponto de sua variabilidade ser irrelevante no contexto do problema, tornando desnecessária uma exploração mais intensa. Quando um objetivo apresenta uma ampla variação de valores, mas todos são considerados satisfatórios pelos tomadores de decisão, ele também pode ser classificado como não significativo.

Uma das estratégias para lidar com objetivos não significativos é ignorá-los. Se sua variabilidade for baixa em todo o conjunto de aproximação analisado, é possível que a otimização considerando apenas os demais objetivos ainda resulte em valores aceitáveis para os objetivos classificados como não significativos. Esse fato pode ser consequência de relacionamentos compostos ou das características específicas dos dados no cenário analisado. No entanto, é importante ressaltar que um objetivo com uma pequena variação no conjunto inicial de soluções não implica necessariamente que esse intervalo seja insignificante em todo o espaço de objetivos. Para verificar essa hipótese, pode-se remover o objetivo da otimização, gerar um novo conjunto de aproximação e recalcular seu intervalo com base nas novas soluções obtidas. Se o intervalo permanecer insignificante, é provável que o objetivo possa ser descartado.

Outra alternativa para tratar objetivos não significativos é agrupá-los. Essa aborda-

gem reduz a dimensionalidade do espaço de objetivos, mas o algoritmo multiobjetivo ainda manterá alguma pressão para otimizá-los. No entanto, os valores individuais obtidos para esses objetivos podem não ser tão satisfatórios quanto seriam caso fossem considerados separadamente no processo de otimização.

3.1.1.3 Etapa 3 - Análise das regiões de *trade-off*

A terceira etapa consiste em um método quantitativo baseado nos mapas de Karnaugh (Karnaugh, 1953), utilizado para classificar o espaço de objetivos em regiões de interesse. Esse processo auxilia na identificação de *trade-offs* e de relações complexas entre os objetivos.

Dado um conjunto de aproximação, a construção do mapa de regiões requer a definição de um valor limite (t_i) para cada objetivo F_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Valores de objetivo superiores a t_i são considerados bons ou aceitáveis, enquanto valores inferiores são classificados como ruins ou inadequados (no caso de um problema de maximização). Esses limites podem ser definidos com base no conhecimento do domínio ou de forma empírica. Por exemplo, o valor limite de cada objetivo pode ser estabelecido como a média dos valores observados para esse objetivo. Em seguida, cada valor de objetivo, em cada solução do conjunto de aproximação, é classificado como bom (0) ou ruim (1), de acordo com o valor limite definido para cada objetivo.

Para um MOP com m objetivos, o mapa resultante é composto por 2^m regiões, cada uma representando uma combinação única de objetivos classificados como bons e/ou ruins. Cada célula do mapa corresponde a uma região r_k e é identificada por uma codificação binária, na qual o dígito menos significativo representa o objetivo F_1, e o dígito mais significativo, o objetivo F_m. A construção do mapa envolve identificar a região correspondente a cada solução não-dominada e, posteriormente, calcular o número de soluções em cada região. Por exemplo, considere um vetor objetivo $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, em que apenas os objetivos F_2 e F_4 são classificados como bons. Essa configuração corresponde à região $r21$, pois $21_{10} = 10101_2$. Note que a região $R0$ representa as soluções que apresentam bons valores para todos os objetivos, de acordo com os valores limite estabelecidos.

A Tabela 1 apresenta o mapa de regiões para um MaOP com 5 objetivos, resultando em um total de 32 regiões. Para facilitar a identificação das regiões, emprega-se um esquema de sombreamento: regiões com tonalidades mais claras indicam um maior número de objetivos satisfatórios, enquanto aquelas com tonalidades mais escuras correspondem a um menor número de objetivos satisfatórios.

A utilização desse mapa auxilia na identificação de regiões de concentração de soluções no espaço de objetivos, além de facilitar a visualização de *trade-offs*. Quando a região $R0$ não está vazia, existem soluções com bons valores para todos os objetivos,

Tabela 1 – Mapa de Regiões para MaOPs com 5 Objetivos

	F5↑				F5↓				
	F2↑		F2↓		F2↑		F2↓		
F4↑	r0	r1	r3	r2	r16	r17	r19	r18	F3↑
	r4	r5	r7	r6	r20	r21	r23	r22	F3↓
F4↓	r12	r13	r15	r14	r28	r29	r31	r30	
	r8	r9	r11	r10	r24	r25	r27	r26	F3↑
	F1↑	F1↓		F1↑		F1↓		F1↑	

o que indica que o problema pode ser resolvido por meio de algoritmos de otimização mono-objetivo. Este fato também pode sugerir que os valores limite utilizados podem ser aumentados até que os *trade-offs* se tornem evidentes. Por outro lado, se a maioria das soluções estiver concentrada na região $R_{(2^m-1)}$, é provável que os valores limite definidos estejam excessivamente altos, sendo necessário reduzi-los para obter uma análise mais precisa. Caso não haja soluções em R_0, mas elas estejam distribuídas por diferentes regiões do mapa, os *trade-offs* foram identificados e o mapa pode ser utilizado para visualizá-los. Além disso, variar os valores limite dos objetivos pode auxiliar na investigação e no esclarecimento dos *trade-offs* entre os objetivos. Mapas de região construídos a partir de variações nos valores limite podem fornecer informações adicionais sobre a natureza multiobjetivo do problema.

3.1.1.4 Etapa 4: Análise do gráfico de dispersão para problemas multi-objetivo

Nesta etapa, gráficos de dispersão são utilizados para exibir os conjuntos de aproximação normalizados. Para isso, um dos objetivos considerados deve ser cuidadosamente selecionado para compor o eixo x em todos os gráficos de dispersão bidimensionais, enquanto os demais objetivos serão representados individualmente no eixo y em cada gráfico gerado. Idealmente, o objetivo selecionado para compor o eixo x dos gráficos deve apresentar uma distribuição ampla e homogênea de valores ao longo de sua extensão, evitando tanto lacunas no gráfico quanto a concentração excessiva de soluções em uma pequena região. Tais cenários dificultariam a interpretação adequada dos resultados. Além disso, pode ser interessante testar diferentes opções para o eixo x, a fim de identificar qual objetivo fornece informações mais relevantes ou verificar se distintas escolhas resultam em *insights* complementares. A partir desse conjunto de gráficos, é possível identificar aspectos como relacionamentos locais (conflitantes ou harmônicos), padrões relevantes, lacunas no espaço de objetivos, *trade-offs* bem distribuídos e regiões isoladas. Essas informações podem ser valiosas para o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes para o problema em questão. Além disso, se diferentes instâncias de teste de um problema apresentarem *landscapes* consistentes, os algoritmos projetados terão maior potencial para resolver novas instâncias

do mesmo problema.

4 Serviços de Transporte Reativo a Demanda

Transporte Reativo à Demanda (*Demand Responsive Transport*, DRT) é o termo utilizado para nomear serviços de transporte flexíveis que operam sob demanda por meio de uma frota de veículos (ônibus, vans, carros, etc.), a qual é programada para transportar passageiros conforme suas necessidades (MAGEEAN; NELSON, 2003). Para solicitar um serviço DRT, os usuários enviam requisições nas quais determinam os locais e horários desejados para embarque e desembarque. Em geral, um serviço DRT é operacionalizado de forma compartilhada. De acordo com Ambrosino, Nelson e Romanazzo (2004), os serviços DRT são considerados uma forma intermediária de transporte, situados entre os serviços de transporte convencionais, realizados por ônibus (compartilhado e geral), e os táxis (individual e personalizado).

Este capítulo aborda um problema de otimização, introduzido por Chevrier et al. (2010), Chevrier et al. (2012), que modela um serviço DRT. Formulado como um *Dial-a-Ride Problem* (DARP) multiobjetivo, esse problema envolve a otimização do planejamento tanto do roteamento (definição das rotas) quanto da programação (definição dos horários de atendimento). A Figura 4 apresenta um fluxograma que ilustra como o serviço DRT é operacionalizado.

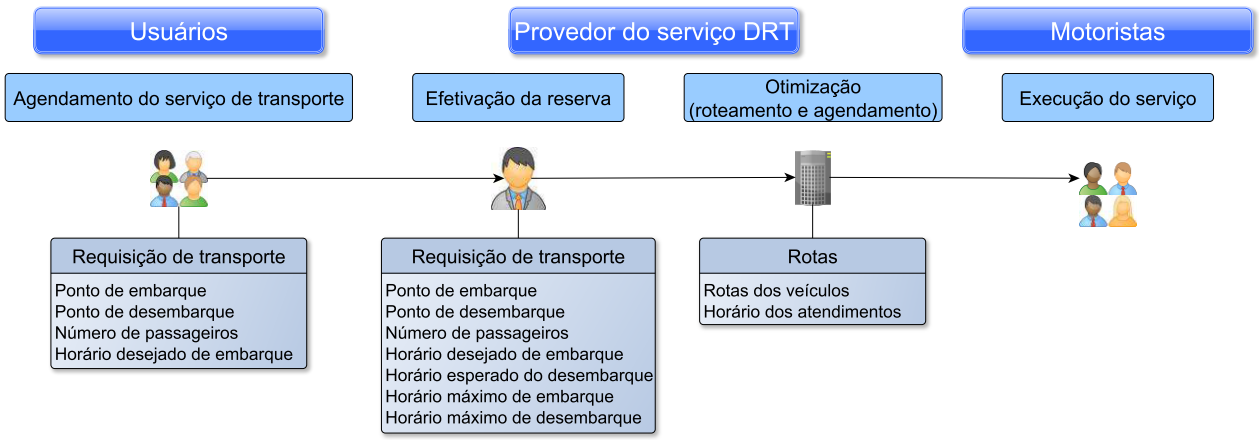


Figura 4 – Fluxograma da operação do serviço DRT

Conforme apresentado, para requisitar o serviço DRT, o usuário deve enviar uma requisição de transporte, informando os pontos de embarque e desembarque, o número de assentos necessários e o horário desejado para o embarque. Após o recebimento de cada requisição, o provedor do serviço DRT confirma a reserva. Quando o período de reservas

é encerrado, os planejamentos de roteamento e programação são realizados de forma otimizada, com o objetivo de minimizar custos operacionais e maximizar a qualidade do serviço prestado. Em seguida, o planejamento é executado pelos veículos que compõem a frota. Este estudo aborda a etapa de otimização, na qual abordagens heurísticas são empregadas com o objetivo de encontrar as melhores soluções, ou seja, os planejamentos mais eficientes.

A seguir, será apresentada uma definição formal do problema de otimização abordado, juntamente com uma possível modelagem matemática. No entanto, primeiramente serão introduzidas as classes de problemas que constituem a base teórica do problema, acompanhadas por uma revisão da literatura correspondente.

4.1 Problemas de Roteamento de Veículos com Coletas e Entregas

A classe de problemas de roteamento de veículos com coletas e entregas (*Vehicle Routing Problem with Pickups and Deliveries*, VRPPD) compreende todos os problemas caracterizados pelo transporte de bens ou passageiros entre pontos (locais) de coleta e de entrega. Esse transporte é operacionalizado por meio de uma frota de veículos, inicialmente localizada em um depósito, a qual deve atender um conjunto de requisições de transporte. Cada requisição é composta por um ponto de coleta, um ponto de entrega e uma demanda que deverá ser transportada entre estes dois pontos (TOTH; VIGO, 2002; PARRAGH; DOERNER; HARTL, 2008). Dado um conjunto de usuários e suas respectivas demandas, o principal objetivo do VRPPD consiste em planejar um conjunto de rotas que minimize os custos operacionais, respeitando um conjunto de restrições.

Conforme Parragh, Doerner e Hartl (2008), a classe de problemas VRPPD compreende o Problema de Coleta e Entrega (*Pickup and Delivery Problem*, PDP) e o *Dial-a-Ride Problem* (DARP). Ambos os problemas são baseados em requisições de transporte compostas por um par de pontos, sendo um associado à coleta e o outro à entrega da carga. No entanto, enquanto o PDP lida com o transporte de bens ou produtos, o DARP foca no transporte de passageiros. De acordo com Parragh, Doerner e Hartl (2010), essa diferença geralmente se reflete em restrições adicionais, objetivos extras ou até mesmo na substituição dos objetivos clássicos relacionados a custo, visando assegurar a qualidade do serviço prestado aos clientes. Essas restrições e objetivos adicionais tornam o DARP mais complexo e difícil de ser resolvido. O que diferencia o DARP é justamente a perspectiva humana presente no transporte de passageiros, exigindo um equilíbrio entre a maximização da qualidade do serviço e a minimização dos custos operacionais (CORDEAU; LAPORTE, 2007).

4.2 *Dial-a-Ride Problem*

O *Dial-a-Ride Problem* (DARP) é um problema clássico de roteirização e programação de veículos em que a carga transportada são passageiros. O problema consiste em projetar rotas e definir horários de atendimento para um conjunto de usuários, que solicitam serviços de transporte de coleta e entrega entre locais de origem e destino desejados. No DARP, cada requisição de transporte é composta por um ponto de embarque (coleta), um ponto de desembarque (entrega) e suas respectivas janelas de tempo, que estabelecem intervalos durante os quais os atendimentos (embarque e desembarque) devem ocorrer ao longo do dia. Dado um conjunto de requisições de transporte, o provedor do serviço planeja o transporte dos passageiros, que será realizado por meio de uma frota de veículos. No DARP, o serviço de transporte é compartilhado, ou seja, passageiros provenientes de diferentes requisições podem ser transportados simultaneamente pelo mesmo veículo. Usualmente, o planejamento das rotas busca atender um conjunto de requisições de transporte, minimizando os custos operacionais, tradicionalmente relacionados ao número de rotas e à distância total percorrida, enquanto satisfaz um conjunto de restrições, como a quantidade de veículos disponíveis, a capacidade dos veículos, as janelas de tempo, o tempo máximo de viagem, dentre outras (CORDEAU; LAPORTE, 2007). De acordo com Cordeau (2006), encontrar uma solução viável para o DARP é um problema NP-completo.

De acordo com Toth e Vigo (2014), o conjunto de rotas planejadas deve satisfazer às seguintes condições:

- Atendimento: cada usuário deve ser servido somente uma vez.
- Depósito: todo veículo deve iniciar e finalizar a rota no depósito.
- Acoplamento: a coleta e a entrega do usuário deve ser realizada pelo mesmo veículo.
- Precedência: cada usuário deve ser coletado e depois entregue pelo veículo.
- Capacidade: a capacidade máxima do veículo nunca deve ser violada.
- Janelas de tempo: cada usuário deve embarcar e desembarcar em horários dentro dos intervalos definidos pelas janelas de tempo.
- Duração máxima da rota: a duração total das rotas não deve exceder um valor máximo estabelecido.
- Tempo máximo de viagem: a duração total da viagem de cada passageiro não deve exceder um valor máximo estabelecido.

Dentre as diversas aplicações práticas do DARP identificadas na literatura, destacam-se os serviços de transporte porta-a-porta destinados a idosos e pessoas com deficiência (passageiros com mobilidade reduzida). Nesse tipo de serviço, os clientes geralmente fazem duas requisições ao longo do dia: uma para o transporte da casa do usuário para algum outro local (*outbound request*) como hospitais ou clínicas, e outra para a viagem de retorno (*inbound request*) (CORDEAU et al., 2007). Embora geralmente direcionado para esse nicho, serviços DARP também são aplicados em diversos outros contextos, como transporte

escolar, ambulâncias, turismo, dentre outros (PAQUETTE; CORDEAU; LAPORTE, 2009).

Os serviços *Dial-a-Ride* podem operar tanto em um contexto estático quanto em um contexto dinâmico. No primeiro caso, todas as requisições são conhecidas antes do início do processo de planejamento das rotas, as quais os veículos irão percorrer ao longo do dia. Já no segundo caso, além das requisições enviadas antes da elaboração das rotas, novas requisições podem surgir ao longo do dia, e as rotas já existentes são ajustadas em tempo real para atender as novas demandas. Caso não seja possível acomodar as novas requisições nas rotas, são criadas outras para efetuar o serviço (CORDEAU, 2006). Na prática, problemas dinâmicos são frequentemente tratados como sequências de subproblemas estáticos. A solução atual pode ser adaptada sempre que uma nova requisição é realizada, ou um conjunto composto por novas requisições pode ser armazenado e periodicamente incorporado em lotes às rotas existentes (CORDEAU et al., 2007).

4.2.1 Modelo Matemático para o DARP

Um dos principais modelos matemáticos propostos para o DARP foi apresentado por Cordeau (2006). Nesse modelo de programação linear inteira mista, é abordado o caso estático do problema, o qual foi definido da seguinte forma: dado um conjunto de n usuários (ou requisições) a serem atendidos e um grafo completo direcionado $G = (N, A)$, em que $N = P \cup D \cup \{0,2n+1\}$ e A representam, respectivamente, os conjuntos de vértices e arcos. Os subconjuntos $P = \{1,\ldots,n\}$ e $D = \{n+1,\ldots,2n\}$ contêm os vértices de embarque e desembarque dos passageiros, respectivamente. Para cada usuário i, está associado um vértice de embarque i e um vértice de desembarque $n+i$. Os vértices 0 e $2n+1$ representam os depósitos de origem e destino dos veículos.

Seja K o conjunto de veículos disponíveis. Para cada $k \in K$ são conhecidas a capacidade máxima Q_k e a duração total máxima T_k da rota que o veículo pode realizar. Em cada vértice $i \in N$, são definidos uma quantidade de passageiros q_i e uma duração de serviço não negativa d_i, dedicada ao embarque ou desembarque de passageiros. Para os vértices de coleta e entrega, temos que $q_i = -q_{n+i}$, com $i = 1,\ldots,n$, e $d_i \geq 0$. Nos depósitos, $q_0 = q_{2n+1} = 0$ e $d_0 = d_{2n+1} = 0$. Cada arco $(i,j) \in A$ possui um custo de deslocamento c_{ij} e um tempo de viagem t_{ij} associados. É definido um tempo de viagem máximo L para os usuários. Além disso, para cada nó é associada uma janela de tempo $[e_i, l_i]$, em que e_i e l_i representam, respectivamente, o horário mais cedo e o mais tarde para o início do serviço no nó i.

As variáveis de decisão definidas para esse modelo são:

- x_{ij}^k: variável binária definida como 1 se o veículo k percorre o arco (i,j); 0 caso contrário.
- B_i^k: horário no qual o veículo k inicia o serviço no nó i; 0 se o nó não é servido pelo

veículo.

- Q_i^k: ocupação do veículo k após visitar o nó i; 0 se o nó não é servido pelo veículo.
- L_i^k: duração da viagem do usuário i no veículo k; 0 se o usuário não é servido pelo veículo.

O modelo matemático desse problema é, então, dado por:

Função Objetivo

$$F = \min \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij}^k x_{ij}^k \tag{12}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ij}^k = 1 \qquad \forall i \in P, \tag{13}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^k - \sum_{j \in N} x_{n+i,j}^k = 0 \qquad \forall i \in P, k \in K, \tag{14}$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1 \qquad \forall k \in K, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji}^k - \sum_{j \in N} x_{ij}^k = 0 \qquad \forall i \in P \cup D, k \in K, \tag{16}$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,2n+1}^k = 1 \qquad \forall k \in K, \tag{17}$$

$$B_j^k \geq B_i^k + d_i + t_{ij} - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k) \qquad \forall i \in N, j \in N, k \in K, \tag{18}$$

em que $M_{ij}^k \geq \max\{0, li + d_i + t_{ij} - e_j\}$

$$Q_j^k \geq Q_i^k + q_j - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k) \qquad \forall i \in N, j \in N, k \in K, \tag{19}$$

em que $W_{ij}^k \geq \min\{Q_k, Q_k + q_i\}$

$$L_i^k = B_{n+1}^k - (B_i^k + d_i) \qquad \forall i \in P, \forall k \in K, \tag{20}$$

$$B_{2n+1}^k - B_0^k \leq T_k \qquad \forall k \in K, \tag{21}$$

$$e_i \leq B_i^k \leq l_i \qquad \forall i \in N, k \in K, \tag{22}$$

$$t_{i,n+i} \leq L_i^k \leq L \qquad \forall i \in P, k \in K, \tag{23}$$

$$\max\{0, q_i\} \leq Q_i^k \leq \min\{Q_k, Q_k + q_i\} \qquad \forall i \in N, k \in K, \tag{24}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad \forall i \in N, j \in N, k \in K. \tag{25}$$

A função objetivo (12) busca minimizar o custo total de roteamento. Os conjuntos de restrições (13) e (14) garantem que cada requisição seja servida exatamente uma única vez e que o mesmo veículo visite tanto o nó de origem quanto o nó de destino de cada usuário, respectivamente. Os conjuntos de restrições (15), (17) e (16) asseguram que as rotas iniciem no depósito de origem, terminem no depósito de destino e que, se um veículo

visitar um nó, ele deve deixar esse nó, respectivamente. Os conjuntos de restrições (18) e (19) garantem a consistência dos horários de atendimento e da ocupação dos veículos em cada nó, respectivamente. O conjunto de restrições (20) determina a duração da viagem de cada usuário, a qual é delimitada pelo conjunto de restrições (23). O conjunto de restrições (21) limita a duração total de cada rota, enquanto os conjuntos de restrições (22) e (24) asseguram que as janelas de tempo sejam satisfeitas e que a capacidade máxima dos veículos não seja excedida, respectivamente. Por fim, o conjunto de restrições (25) define que as variáveis x_{ij} sejam binárias.

4.2.2 Revisão da Literatura do DARP Multiobjetivo

As primeiras pesquisas que abordaram o tema transporte de passageiros surgiram na década de 1970 (WILSON et al., 1971; WILSON; WAYNE, 1976; WILSON; COLVIN, 1977). No entanto, após os estudos realizados por Cordeau e Laporte (2003), Cordeau (2006), o DARP passou a receber uma atenção crescente da comunidade científica, com a maioria das pesquisas focadas em aplicações práticas do problema. Revisões abrangentes da literatura sobre o DARP e algumas de suas principais variantes foram realizadas por Cordeau e Laporte (2007), Parragh, Doerner e Hartl (2010), Molenbruch, Braekers e Caris (2017), Ho et al. (2018), os quais apresentaram os principais estudos, conjuntos de instâncias de teste, metodologias de solução e áreas de aplicação, assim como sugestões para direções futuras de pesquisa.

Dentre os diversos trabalhos que abordam o DARP, a maioria busca otimizar funções objetivo relacionadas aos custos operacionais, como a minimização do custo total de roteamento (CORDEAU; LAPORTE, 2003), a minimização da distância total percorrida pela frota de veículos (RITZINGER; PUCHINGER; HARTL, 2016), e a minimização do número de veículos necessários (CHEVRIER et al., 2010; CHEVRIER et al., 2012). Outros objetivos incluem a maximização da eficiência de utilização dos veículos (REKIEK; DELCHAMBRE; SALEH, 2006), a maximização da taxa de ocupação de passageiros (GARAIX et al., 2011), a maximização do lucro total (receita menos custo total) (PARRAGH; SOUSA; ALMADA-LOBO, 2014), além da otimização da carga de trabalho da equipe (LIM; ZHANG; QIN, 2016).

De acordo com Molenbruch, Braekers e Caris (2017), otimizar apenas um único objetivo operacional em um DARP não proporciona qualquer incentivo para melhorar a qualidade do serviço. Embora muitas formulações asseguram a qualidade do serviço prestado ao usuário por meio de restrições, como a imposição de janelas de tempo, tempo máximo de viagem do usuário, tempo máximo de espera, dentre outros. Usualmente, objetivos relacionados à qualidade do serviço são frequentemente considerados em substituição ao objetivo operacional ou em conjunto com ele. O segundo caso resulta em um DARP multiobjetivo. A seguir, serão apresentados alguns dos principais trabalhos que propuseram

técnicas viabilizadas para abordar DARPs multiobjetivo em geral, não necessariamente o DARP específico deste estudo.

A maneira mais simples de tratar o DARP multiobjetivo é por meio da soma ponderada dos objetivos. Essa técnica escalariza um conjunto de objetivos por meio de um conjunto de pesos definido pelo usuário, resultando em um único objetivo (JORGENSEN; LARSEN; BERGVINSDOTTIR, 2007; CUBILLOS; RODRIGUEZ; CRAWFORD, 2007; MAURI; ANTONIO; LORENA, 2009; MELACHRINOUDIS; ILHAN; MIN, 2007; KIRCHLER; CALVO, 2013). Uma abordagem alternativa é utilizar uma função objetivo lexicográfica, na qual os objetivos são otimizados de acordo com uma hierarquia estabelecida com base na importância relativa de cada objetivo (GARAIX et al., 2011; SCHILDE; DOERNER; HARTL, 2011; SCHILDE; DOERNER; HARTL, 2014). Uma terceira abordagem utilizada para tratar a variante multiobjetivo do DARP é o uso de métodos baseados em relação de dominância, que utilizam relações de preferência para guiar a busca (PARRAGH et al., 2009; CHEVRIER et al., 2010; CHEVRIER et al., 2012; PAQUETTE et al., 2013; MOLENBRUCH et al., 2017; GUERREIRO; CARDOSO; FERNANDES, 2019; GUERREIRO; CARDOSO; FERNANDES, 2020).

4.3 Definição do Problema e Formulação Matemática

Introduzido por Chevrier et al. (2010) e posteriormente abordado por Chevrier et al. (2012), o serviço DRT em estudo pode ser formulado como um *Dial-a-Ride Problem* (DARP) multiobjetivo, o qual otimiza um conjunto de funções objetivo, enquanto satisfaz um conjunto de restrições. Com base na formulação do DARP mono-objetivo proposta por Cordeau (2006), VIANA (2016) apresentaram uma formulação matemática para o problema abordado. Originalmente, são otimizadas simultaneamente três funções objetivo: a minimização do número de rotas necessárias, da duração total das rotas e do atraso total no desembarque dos passageiros. No entanto, com o propósito de analisar a escalabilidade de alguns dos principais MOEAs já propostos, foram adicionados neste estudo dois novos objetivos: a minimização da distância total das rotas e do tempo total de espera dos usuários para o embarque. Dessa forma, o problema se torna um MaOP. Dado que o problema abordado é uma generalização do clássico DARP, esse problema também é classificado como NP-completo.

Dado um conjunto de n usuários (ou requisições) a serem atendidos, o serviço DRT abordado pode ser definido por meio de um grafo completo direcionado $G = (V, A)$, em que $V = V^+ \cup V^- \cup \{0,2n+1\}$ e A representam, respectivamente, os conjuntos de vértices e arcos. Os subconjuntos $V^+ = \{1,\ldots,n\}$ e $V^- = \{n+1,\ldots,2n\}$ contêm, respectivamente, os vértices de coleta (embarque) e de entrega (desembarque). Para cada usuário i, está associado um vértice de embarque i e um vértice de desembarque $n+i$. Os vértices 0 e

$2n + 1$ representam os depósitos de origem e destino dos veículos.

Assim como no DARP, o conjunto K representa uma frota homogênea composta por k veículos idênticos, todos com capacidade Q. Para cada requisição $i = 1 \ldots n$, são definidos uma quantidade de passageiros q_i, e uma duração de serviço não negativa d_i, dedicada ao embarque ou desembarque de passageiros. Nos vértices de coleta e entrega ($i = 1, \ldots, n$), temos $q_i = -q_{n+i}$ e $d_i > 0$. Já nos vértices associados aos depósitos, temos $q_0 = q_{2n+1} = 0$ e $d_0 = d_{2n+1} = 0$. Para cada arco $(i,j) \in A$, são associadas uma distância de viagem d_{ij} e um tempo de viagem t_{ij}.

Para cada requisição $i = 1, \ldots, n$, é estabelecido um horário desejado de embarque h_{i^+}. A duração da janela de tempo associada ao ponto de embarque w_{i^+} é proporcional ao tempo de percurso entre os pontos i e $n + i$, representado por $t_{i,n+i}$, e definida como $w_{i^+} = k_w \cdot t_{i,n+i}$, em que k_w é um coeficiente não negativo que determina a duração alocada para a janela de tempo de embarque. Dessa forma, o horário máximo de embarque h'_{i^+} é determinado por $h'_{i^+} = h_{i^+} + w_{i^+}$. O horário teórico de chegada ao ponto de desembarque h_{i^-} corresponde à soma do horário desejado de embarque com a duração do percurso de i para $n + i$, ou seja, $h_{i^-} = h_{i^+} + t_{i,n+i}$. O horário máximo de desembarque h'_{i^-} é dado por $h'_{i^-} = h_{i^+} + (k_r \cdot t_{i,n+i})$, em que k_r é um coeficiente de relaxação, com $k_r > k_w$ e $k_r > 1$.

A seguir, será apresentado o modelo de programação linear inteira mista proposto, que se baseia na formulação apresentada por Cordeau (2006).

Variáveis de decisão:

- x_{ij}^k: variável binária definida como 1 se o veículo k percorre o arco (i,j); 0 caso contrário.
- v^k: variável binária definida como 1 se o veículo k é utilizado; 0 caso contrário.
- t^k: tempo total de viagem do veículo k se o mesmo é utilizado; 0 caso contrário.
- d^k: distância total de viagem do veículo k se o mesmo é utilizado; 0 caso contrário.
- D_i: tempo de atraso no desembarque do usuário i.
- W_i: tempo de espera para o embarque do usuário i.
- H_i^k: horário no qual o veículo k inicia o atendimento no nó i; 0 se o nó não é servido pelo veículo k.
- Q_i^k: ocupação do veículo k após visitar o nó i; 0 se o nó não é servido pelo veículo k.

Funções Objetivo:

$$F_1 = \min \sum_{k \in K} v^k \tag{26}$$

$$F_2 = \min \sum_{k \in K} t^k \tag{27}$$

$$F_3 = \min \sum_{i \in V^-} D_i \tag{28}$$

$$F_4 = \min \sum_{k \in K} d^k \tag{29}$$

$$F_5 = \min \sum_{i \in V^+} W_i \tag{30}$$

Sujeito a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in V^+, \tag{31}$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k - \sum_{j \in V} x_{n+i,j}^k = 0 \quad \forall i \in V^+, k \in K, \tag{32}$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j}^k = v^k \quad \forall k \in K, \tag{33}$$

$$\sum_{j \in V} x_{ji}^k - \sum_{j \in V} x_{ij}^k = 0 \quad \forall i \in V^+ \cup V^-, k \in K, \tag{34}$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,2n+1}^k = v^k \quad \forall k \in K, \tag{35}$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k \leq v^k \quad \forall i \in V^+, k \in K, \tag{36}$$

$$H_j^k \geq H_i^k + d_i + t_{ij} - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k) \quad \forall i \in V, j \in V, k \in K \tag{37}$$

onde $M_{ij}^k \geq \max\{0, h_{i^-} + d_i + t_{ij} - h_{j^+}\}$

$$Q_j^k \geq Q_i^k + q_j - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k) \quad \forall i \in V, j \in V, k \in K, \tag{38}$$

onde $W_{ij}^k \geq \min\{Q, Q + q_i\}$

$$t^k = H_{2n+1}^k - H_0^k \quad \forall k \in K, \tag{39}$$

$$D_i \geq \max\{0, H_i^k - h_{i^-}\} \quad \forall i \in V^-, k \in K, \tag{40}$$

$$W_i \geq \max\{0, H_i^k - h_{i^+}\} \quad \forall i \in V^+, k \in K, \tag{41}$$

$$v^{k-1} \geq v^k \forall k \in K \backslash 1, \tag{42}$$

$$v^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, \tag{43}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall i \in V, j \in V, k \in K$$

$$t^k \geq 0, \quad \forall k \in K$$

$$h_{i^+} \leq H_i^k \leq h_{i^+} + w_{i^+} \quad \forall i \in V^+, k \in K$$

$$h_{i^-} \leq H_i^k \leq h'_{i^-} \quad \forall i \in V^-, k \in K,$$

$$\max\{0, q_i\} \leq Q_i^k \leq \min\{Q, Q + q_i\} \quad \forall i \in V, k \in K.$$

As funções objetivo (26), (27), (28), (29) e (30) minimizam, respectivamente, o número de rotas realizadas, a duração total das viagens, o atraso total nos desembarques, a distância total das rotas e o tempo total de espera para os embarques. Os conjuntos de

restrições (31) e (32) garantem que cada requisição seja atendida exatamente uma vez e que o mesmo veículo visite os nós de embarque e desembarque. Os conjuntos de restrições (33), (35) e (34) asseguram que cada rota inicie no depósito de origem, termine no depósito de destino e, se o veículo visita um nó, deve também sair desse nó, respectivamente. O conjunto de restrições (36) certifica que o veículo será considerado utilizado se atender a alguma requisição. Os conjuntos de restrições (37) e (38) garantem a consistência dos horários de visita e da ocupação dos veículos. Os conjuntos de restrições (39), (40) e (41) definem, respectivamente, a duração da rota de cada veículo, o atraso na chegada aos nós de desembarque e o tempo de espera para o embarque nos nós de coleta. O conjunto de restrições (42) elimina simetrias na utilização dos veículos, forçando o uso daqueles de menor índice. Por fim, o conjunto de restrições (43) definem as variáveis binárias e os limites de cada variável do modelo, assegurando que cada usuário seja atendido dentro de sua respectiva janela de tempo e que a capacidade dos veículos seja respeitada em cada visita.

5 Análise da Natureza Multiobjetivo

Neste capítulo, será apresentada uma análise do *fitness landscape* aplicada à formulação do serviço DRT discutida no Capítulo 4. Para esse fim, utilizaremos a técnica proposta por Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2015), Lankaites Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2017), previamente apresentada no Capítulo 3.

5.1 Conjunto de Instâncias de Teste

Com o objetivo de analisar a natureza multiobjetivo do serviço DRT abordado em diferentes cenários, este estudo empregou dois conjuntos de instâncias de teste com características distintas, apresentados por Chevrier et al. (2010) e posteriormente utilizados por Chevrier et al. (2012). Cada conjunto contém 10 instâncias de teste, cada uma com 100 usuários (requisições de transporte).

O primeiro conjunto, denominado *"Rnd100"*, é composto por instâncias de teste com uma distribuição quase homogênea de usuários, apresentando janelas de tempo conflitantes. Nesse conjunto, as requisições de transporte foram geradas de maneira aleatória. O segundo conjunto, denominado *"Gravit100"*, contém instâncias de teste com uma distribuição heterogênea de usuários, em que as requisições de transporte foram geradas com base em um modelo geográfico de fluxos de pessoas ou cargas.

A formulação original do problema considera apenas o tempo de viagem ($t_{i,j}$) em cada aresta $(i,j) \in A$. Tanto em Chevrier et al. (2010) quanto em Chevrier et al. (2012), não foram atribuídos valores relacionados à distância ($d_{i,j}$) entre dois vértices. Para este estudo, embora isso não represente à realidade, assumiu-se que o valor associado à distância entre cada par de vértices fosse igual ao tempo de viagem correspondente ($t_{i,j} = d_{i,j}$). É importante ressaltar que, em problemas reais, o tempo de viagem entre dois vértices provavelmente não estará diretamente relacionado à distância dessa forma. No entanto, valores de distância foram incorporados às instâncias de teste para permitir sua utilização no processo de otimização da formulação do MaOP abordado neste estudo.

5.2 Análise do *Fitness Landscape*

A análise apresentada a seguir baseou-se na técnica proposta por Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2015), Lankaites Pinheiro, Landa-Silva e Atkin (2017), com o objetivo de investigar a natureza multiobjetiva do serviço DRT proposto por Chevrier et al. (2010), Chevrier et al. (2012) quando formulado como um MaOP. Conforme detalhado no capítulo 3,

essa técnica consiste em quatro etapas que permitem a visualização e análise de relações locais e globais entre os objetivos otimizados. Para adaptar a análise ao contexto abordado e torná-la mais aderente, essa técnica foi aplicada com algumas modificações específicas. No entanto, a estrutura original de cada etapa foi preservada, e quaisquer alterações realizadas serão destacadas ao longo do texto.

Conforme já mencionado, o serviço DRT apresentado por Chevrier et al. (2010), Chevrier et al. (2012) originalmente visa minimizar o número de rotas utilizadas, a duração total das rotas e o atraso total nos desembarques. No entanto, para transformar o problema em um MaOP, este estudo incorporará a minimização da distância total das rotas e do tempo total de espera para o embarque dos passageiros. Dessa forma, a nova formulação abrangerá um total de 5 objetivos a serem minimizados. Para simplificar a visualização, os objetivos relacionados ao número de rotas utilizadas, duração total das rotas, atraso total nos desembarques, distância total das rotas e tempo total de espera para os embarques foram designados como $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ e $F5$, respectivamente.

Para realizar a análise, foram utilizadas quatro instâncias de teste de cada conjunto apresentado. Visando assegurar a confiabilidade dos resultados, para cada instância de teste, o conjunto de soluções não-dominadas analisado foi obtido pelos algoritmos NSGA-III e IBEA, MOEAs pertencentes a diferentes categorias. Ambos os algoritmos operaram com uma população de 212 indivíduos, um critério de parada de 100 mil avaliações de aptidão, e probabilidades de recombinação e mutação de 0.8 e 0.2, respectivamente. No algoritmo NSGA-III, foi empregada a abordagem sistemática proposta por Das e Dennis (1998) para gerar os pontos de referência em um hiperplano normalizado, enquanto para o algoritmo IBEA, utilizou-se o indicador de qualidade ϵ-*additive* para guiar seu processo evolutivo. Para cada instância de teste, foram realizadas 30 execuções independentes para ambos os algoritmos. Assim, o conjunto de aproximação utilizado nas análises é composto por todas as soluções não-dominadas obtidas a partir das 30 aproximações do conjunto Pareto geradas por ambos os MOEAs.

5.2.1 Etapa 1 - Análise global do relacionamento entre os objetivos

Nesta etapa, o objetivo é identificar e analisar as associações globais entre os objetivos otimizados. Diferentemente da técnica original, esta análise foi conduzida tanto de forma global para cada conjunto de instâncias de teste quanto individualmente para cada instância de teste. Além disso, o coeficiente de correlação de Kendall foi substituído pelo coeficiente de Spearman, que também mede relações monotônicas, sejam elas lineares ou não. Também foi utilizado o coeficiente de Pearson, que quantifica exclusivamente relações lineares.

As Figuras 5 e 6 apresentam, com o suporte visual de mapas de calor, as matrizes de correlação de Pearson e Spearman obtidas para os conjuntos de instâncias *"Gravit100"*

e *"Rnd100"*, respectivamente. Quanto mais próximo de $+1$ for o coeficiente de correlação, indicando uma relação mais forte e harmoniosa entre o par de objetivos, mais escura será a tonalidade do azul na célula correspondente. Em contrapartida, quanto mais próximo de -1 estiver o coeficiente de correlação, indicando uma relação de conflito mais intensa entre os objetivos, mais escura será a tonalidade do vermelho na célula correspondente. Já um coeficiente de correlação próximo ou igual a zero resulta em uma coloração mais clara, sugerindo uma relação de baixa intensidade ou ausência de correlação.

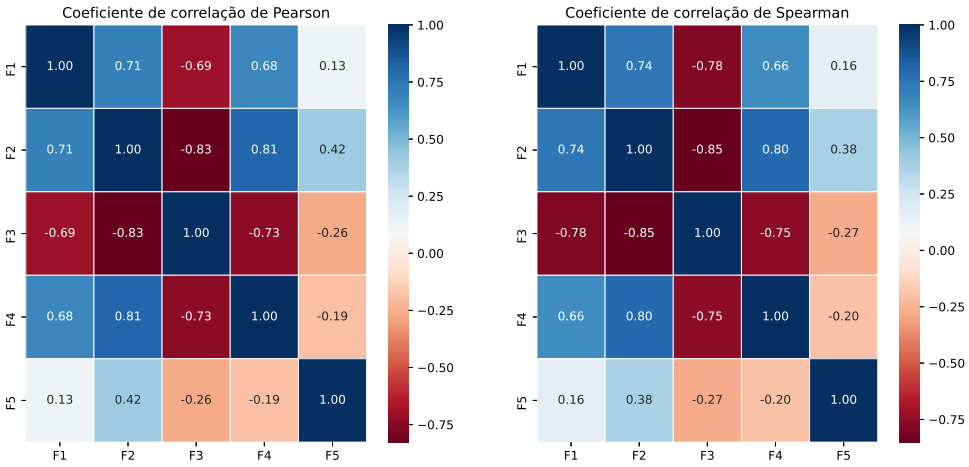


Figura 5 – Mapa de calor aplicado à matriz de correlação de Pearson e Spearman referente ao conjunto de instâncias *"Gravit100"*.

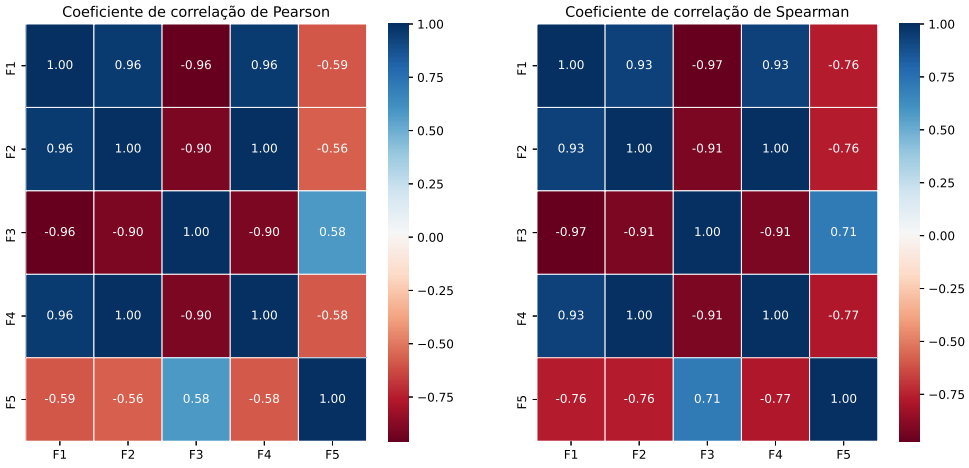


Figura 6 – Mapa de calor aplicado à matriz de correlação de Pearson e Spearman referente ao conjunto de instâncias *"Rnd100"*.

Com base nos resultados obtidos utilizando ambos os coeficientes de correlação, observa-se a existência de relações globais de alta intensidade entre os objetivos, tanto

de conflito quanto de harmonia, quando os MaOPs são aplicados a instâncias de teste de ambos os conjuntos. Nota-se que o objetivo $F3$ apresenta altos níveis de conflito em relação aos objetivos $F1$, $F2$ e $F4$, os quais, por sua vez, demonstram relações de harmonia entre si. O gráfico da Figura 6 revela correlações ainda mais fortes para o conjunto *"Rnd100"*. Por exemplo, o par de objetivos ($F2$, $F4$) apresenta uma correlação perfeita (igual a $+1$), indicando que esses objetivos variam na mesma direção e com a mesma intensidade. Adicionalmente, para as instâncias do conjunto *"Gravit100"*, o objetivo $F5$ apresenta coeficientes de correlação baixos em relação aos demais objetivos. Em contrapartida, no conjunto *"Rnd100"*, a intensidade das correlações de $F5$ com os demais objetivos indica relações de conflito ou harmonia de alto intensidade, evidenciando uma mudança de comportamento entre os dois conjuntos de instâncias de teste.

As Figuras 7 e 8 apresentam, por meio de gráficos de coordenadas paralelas, os valores dos coeficientes de correlação de Pearson (eixo y) obtidos para cada par de objetivos (eixo x) nas quatro instâncias de teste dos conjuntos *"Gravit100"* e *"Rnd100"*, respectivamente. Observa-se uma baixa variação nos valores dos coeficientes de correlação entre as instâncias de teste pertencentes ao mesmo conjunto. Portanto, os conjuntos analisados apresentam propriedades relativamente homogêneas.

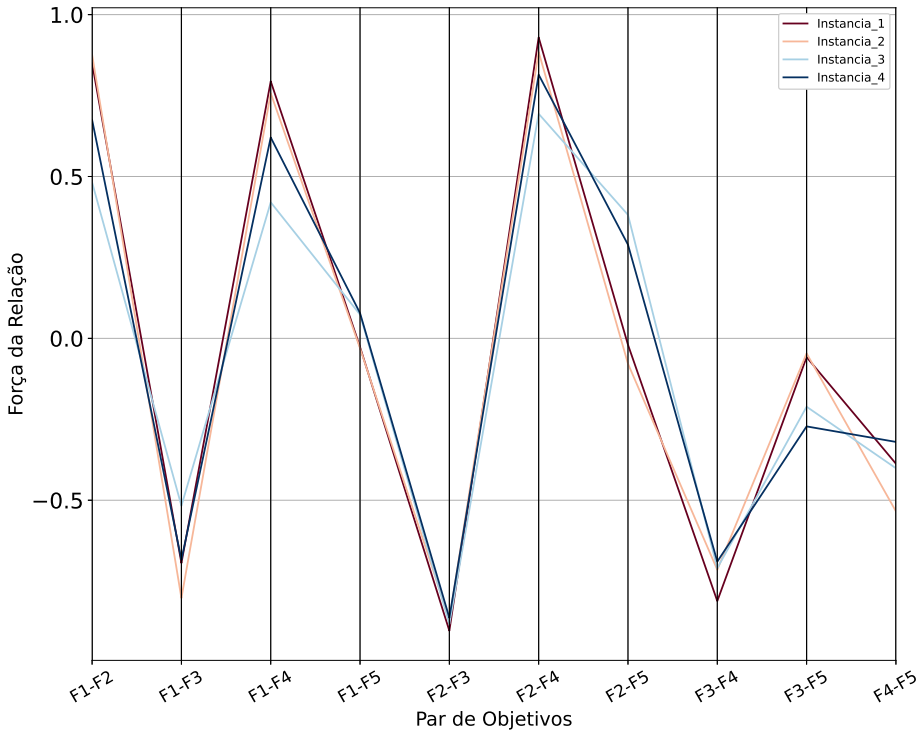


Figura 7 – Coeficiente de correlação de Pearson entre os objetivos em cada instância de teste do conjunto *"Gravit100"*.

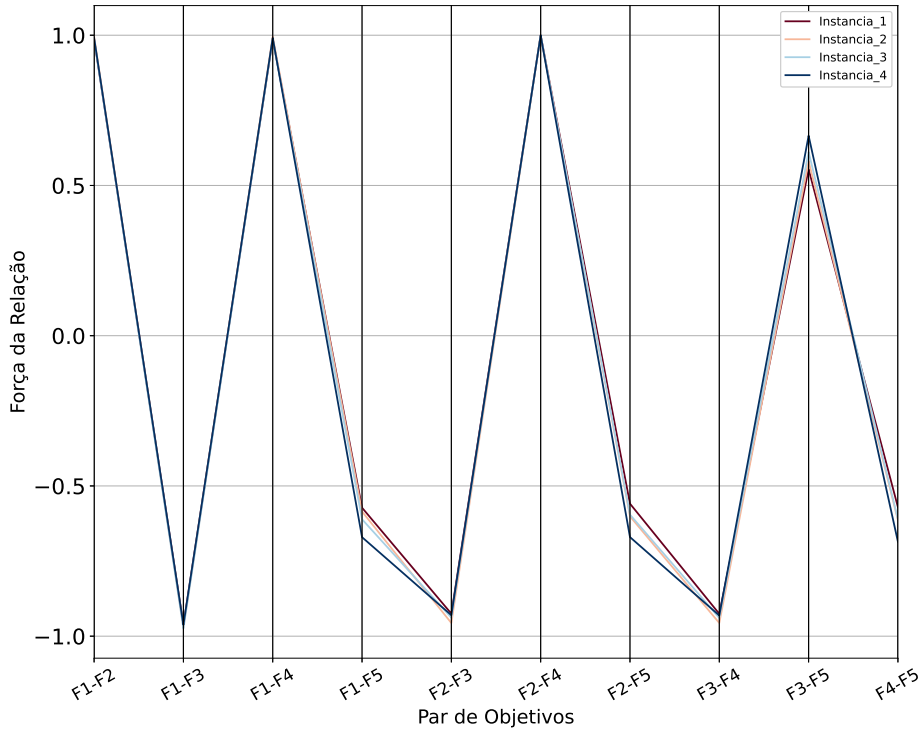


Figura 8 – Coeficiente de correlação de Pearson entre os objetivos em cada instância de teste do conjunto *"Rnd100"*.

Com base nas observações realizadas nesta análise, é evidente que ambos os conjuntos de instâncias de teste apresentam características de natureza multiobjetivo. Portanto, eles impõem desafios interessantes e complexos no que diz respeito à aplicação de algoritmos multiobjetivo.

5.2.2 Etapa 2 - Análise do intervalo (extensão) dos objetivos

Nesta etapa, é apresentado o intervalo (extensão) dos valores obtidos para cada objetivo por meio de gráficos do tipo *violinplot*, semelhantes aos gráficos *boxplots*, mas com a capacidade adicional de exibir a densidade de probabilidade dos dados, permitindo informações mais detalhadas, como a distribuição dos dados dentro do intervalo interquartil. As figuras 9 e 10 apresentam as distribuições dos valores de cada objetivo para as instâncias de teste dos conjuntos *"Gravit100"* e *"Rnd100"*, respectivamente. Cada figura é composta por cinco gráficos, um para cada objetivo otimizado. Em cada gráfico, a distribuição dos valores do objetivo correspondente em cada instância de teste é representada por uma forma geométrica semelhante a um violino. O ponto branco em cada violino indica o valor da mediana, enquanto a barra preta que atravessa o centro do violino corresponde ao intervalo interquartil.

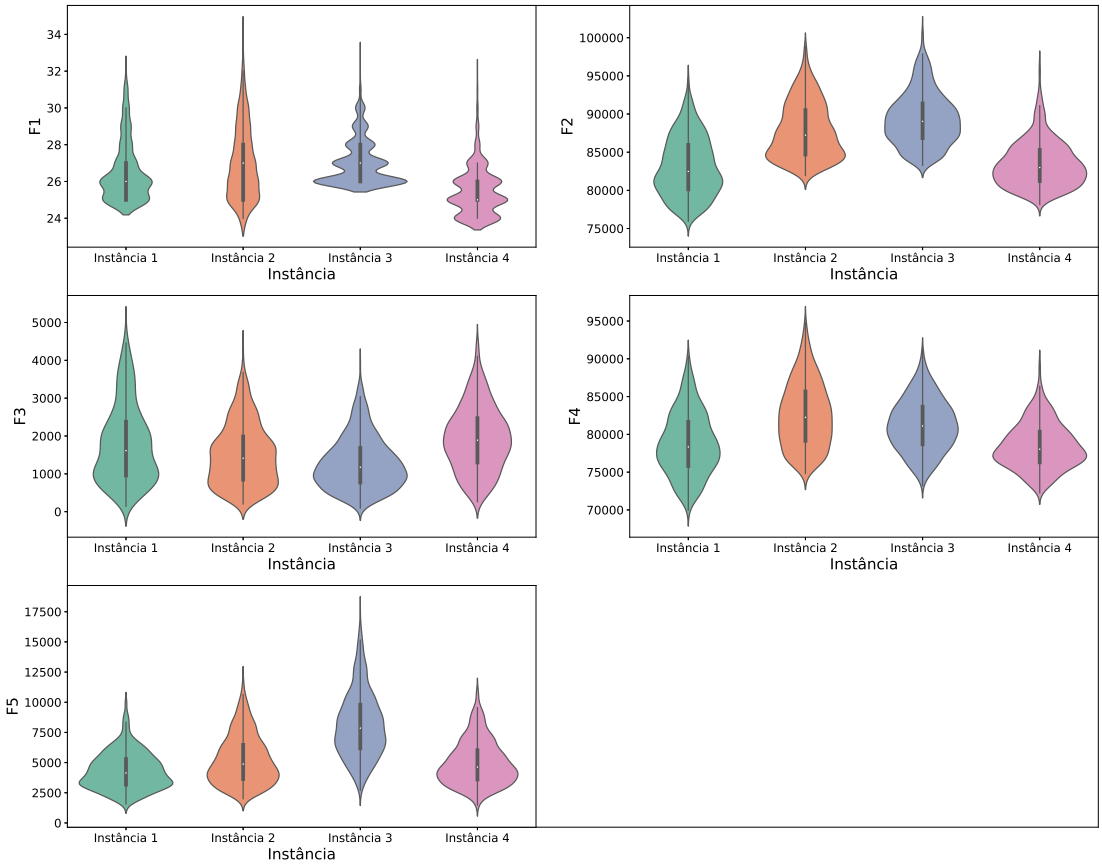


Figura 9 – Extensão dos objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Gravit100"*.

Como pode ser observado na Figura 9, entre os objetivos otimizados, apenas o objetivo $F1$ apresenta um intervalo de valores relativamente pequeno. Essa observação era esperada, pois cada instância de teste consiste em 100 requisições de transporte. Portanto, o cenário mais desfavorável para esse objetivo seria a necessidade de 100 rotas distintas, correspondendo a uma rota para cada requisição de transporte. Além disso, nota-se que, para todos os objetivos, os valores obtidos parecem concentrar-se dentro do intervalo interquartil. Um aspecto adicional relevante é que, em quase todas as instâncias de teste deste conjunto, os objetivos $F3$ e $F5$, focados na minimização das inconveniências enfrentadas pelos usuários, apresentam intervalos com início próximo ou igual a zero. Isso indica que algumas das soluções encontradas conseguem, de maneira satisfatória, representar a perspectiva dos usuários, resultando em uma otimização eficaz da qualidade do serviço.

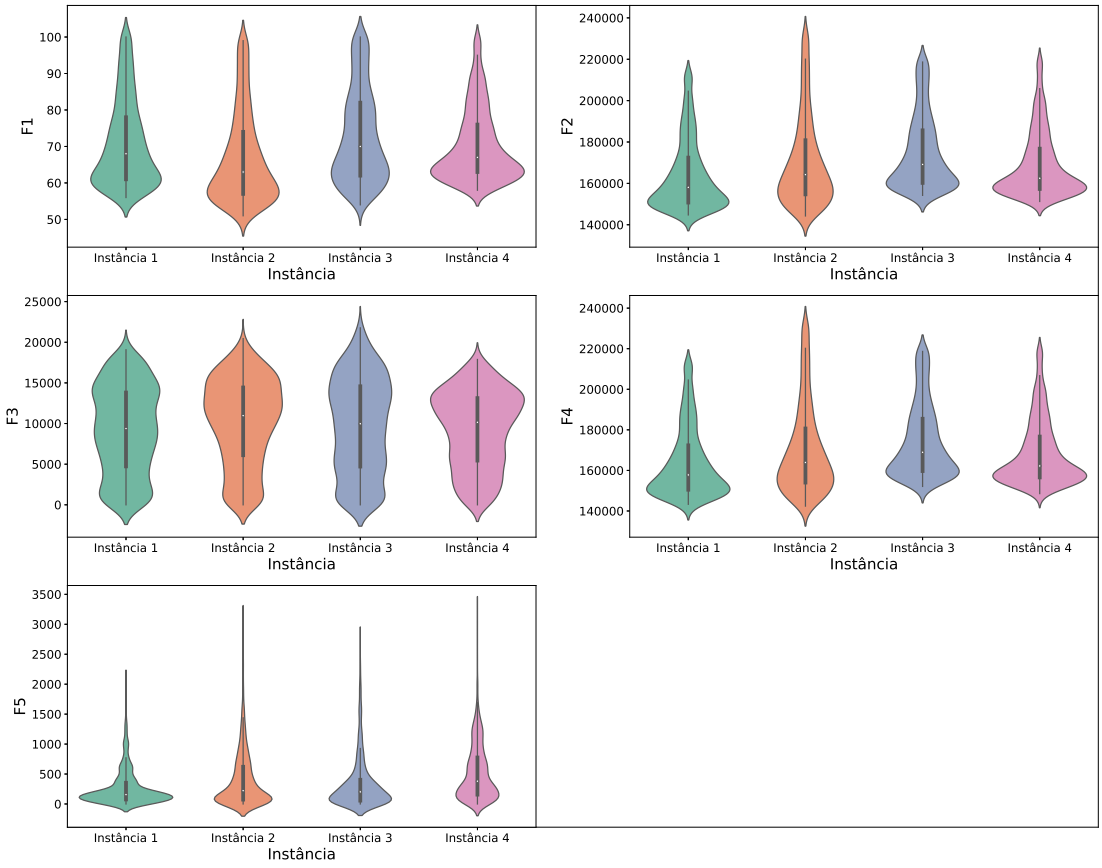


Figura 10 – Extensão dos objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Rnd100"*.

Os resultados obtidos para as instâncias de teste pertencentes ao conjunto *"Rnd100"*, apresentados na Figura 10, exibem comportamentos semelhantes aos do conjunto anterior. No entanto, observa-se que os valores obtidos para o objetivo $F3$ variam de forma uniforme ao longo de sua extensão, enquanto os valores obtidos para o objetivo $F5$ estão concentrados próximos a zero, com poucos valores na parte superior do intervalo.

5.2.3 Etapa 3 - Análise das regiões de trade-off

Nesta etapa, as Tabelas 3 e 4 apresentam os mapas de região referentes aos conjuntos de instância de teste *"Gravit100"* e *"Rnd100"*, respectivamente. Com o intuito de facilitar a identificação das regiões, o mapa de região para MaOPs com 5 objetivos é novamente exibido na Tabela 2. Para a construção dos mapas, a mediana de cada objetivo foi adotada como valor limite. Portanto, dado que todos os objetivos são minimizados,

os valores de objetivo inferiores à mediana são classificados como bons (alta qualidade), enquanto aqueles superiores à mediana correspondente são classificados como ruins (baixa qualidade).

Tabela 2 – Mapa de Regiões para MaOPs com 5 Objetivos

	F5↑				F5↓				
	F2↑		F2↓		F2↑		F2↓		
F4↑	r0	r1	r3	r2	r16	r17	r19	r18	F3↑
	r4	r5	r7	r6	r20	r21	r23	r22	F3↓
F4↓	r12	r13	r15	r14	r28	r29	r31	r30	
	r8	r9	r11	r10	r24	r25	r27	r26	F3↑
	F1↑	F1↓		F1↑		F1↓		F1↑	

Tabela 3 – Mapa de Regiões para o conjunto de instâncias *"Gravit100"*.

	F5↑				F5↓				
	F2↑		F2↓		F2↑		F2↓		
F4↑	0.00%	0.61%	0.14%	0.00%	0.52%	2.23%	5.81%	1.48%	F3↑
	11.35%	5.27%	0.00%	0.02%	15.73%	5.20%	0.40%	1.24%	F3↓
F4↓	4.17%	2.88%	1.90%	1.45%	0.05%	0.00%	0.00%	0.33%	
	0.35%	1.36%	18.50%	1.97%	0.14%	0.14%	14.93%	1.83%	F3↑
	F1↑	F1↓		F1↑		F1↓		F1↑	

Tabela 4 – Mapa de Regiões para o conjunto de instâncias *"Rnd100"*.

	F5↑				F5↓				
	F2↑		F2↓		F2↑		F2↓		
F4↑	0.00%	0.57%	0.03%	0.00%	0.74%	1.57%	0.07%	0.09%	F3↑
	8.01%	0.30%	0.00%	0.20%	38.13%	0.22%	0.01%	0.05%	F3↓
F4↓	0.20%	0.03%	0.99%	1.72%	0.00%	0.00%	0.01%	0.14%	
	0.00%	0.01%	37.67%	0.07%	0.14%	0.08%	8.66%	0.30%	F3↑
	F1↑	F1↓		F1↑		F1↓		F1↑	

Em uma análise ampla, observa-se que, em ambos os mapas, as soluções estão distribuídas por quase todas as regiões. Além disso, as regiões r_0 e r_{2^m-1} (r_{31}) apresentam praticamente nenhuma solução. Portanto, é provável que abordagens mono-objetivo não sejam adequadas para a otimização do MaOP analisado, e a escolha da mediana de cada objetivo como valor limite mostrou-se adequada. Em ambos os mapas, a maioria das soluções está concentrada nas regiões r_4, r_{11}, r_{20} e r_{27}. Esse padrão indica que é possível alcançar valores de alta qualidade para os objetivo $F1$, $F2$ e $F4$ apenas quando o objetivo $F3$ apresenta valores de baixa qualidade, e vice-versa. Portanto, existem compensações (*trade-offs*) que provavelmente o tomador de decisões precisará considerar.

5.2.4 Etapa 4 - Análise do gráfico de dispersão para problemas multiobjetivo

A quarta e última etapa desta análise tem como objetivo identificar os associações locais entre os objetivos, utilizando gráficos de dispersão. Diferentemente da abordagem original, os valores das funções objetivo não foram normalizados nesta etapa. Essa escolha é justificada pelo fato de que as instâncias de teste pertencentes a um mesmo conjunto apresentam valores de função objetivo em intervalos semelhantes. As figuras 11 e 12 apresentam os gráficos de dispersão correspondentes aos conjuntos de instâncias de teste *"Gravit100"* e *"Rnd100"*, respectivamente.

De acordo com os gráficos apresentados nas Figuras 11 e 12, não há indícios de relações locais entre os objetivos. No entanto, ambas as representações gráficas corroboram os resultados obtidos na Etapa 1, que indicaram a presença de relações globais tanto de conflito quanto de harmonia. Por exemplo, os gráficos referentes aos pares de objetivos ($F1$, $F3$), ($F2$, $F3$) e ($F3$, $F4$) revelam relações de conflito, em que os objetivos de cada par variam em direções opostas. Nesses casos, os pontos estão dispostos de tal forma que, à medida que o objetivo do eixo x aumenta, o valor do objetivo representado no eixo y diminui, indicando a presença de superfícies de *trade-off*. Por outro lado, os pares de objetivos ($F1$, $F2$), ($F1$, $F4$) e ($F2$, $F4$) exibem relações de suporte, em que os objetivos de cada par variam na mesma direção. Nestes casos, observa-se uma concentração significativa de pontos partindo do canto inferior esquerdo em direção ao canto superior direito dos gráficos correspondentes, ou seja, à medida que os valores no eixo x aumentam, os valores no eixo y também aumentam.

Conforme apresentado na Figura 12, o par de objetivos ($F2$, $F4$) exibe uma correlação linear positiva perfeita, comprovada numericamente na Etapa 1 da análise, na qual esse par de objetivos obteve o valor máximo de coeficiente de correlação ($+1$) utilizando os coeficientes de Pearson e Spearman. Embora os gráficos de dispersão correspondentes aos pares de objetivos ($F1$, $F2$) e ($F1$, $F4$) também indiquem uma correlação positiva clara, eles não apresentam uma relação linear (linha reta). Além disso, as relações envolvendo o objetivo $F5$ apresentam mudanças de comportamento entre os conjuntos de instâncias de teste. No conjunto *"Gravit100"*, os dados estão dispostos de forma desorganizada, em um formato de nuvem. Por outro lado, nos gráficos correspondentes ao conjunto de instâncias de teste *"Rnd100"*, os dados indicam relações que envolvem tanto conflito quanto harmonia entre o objetivo $F5$ e os demais.

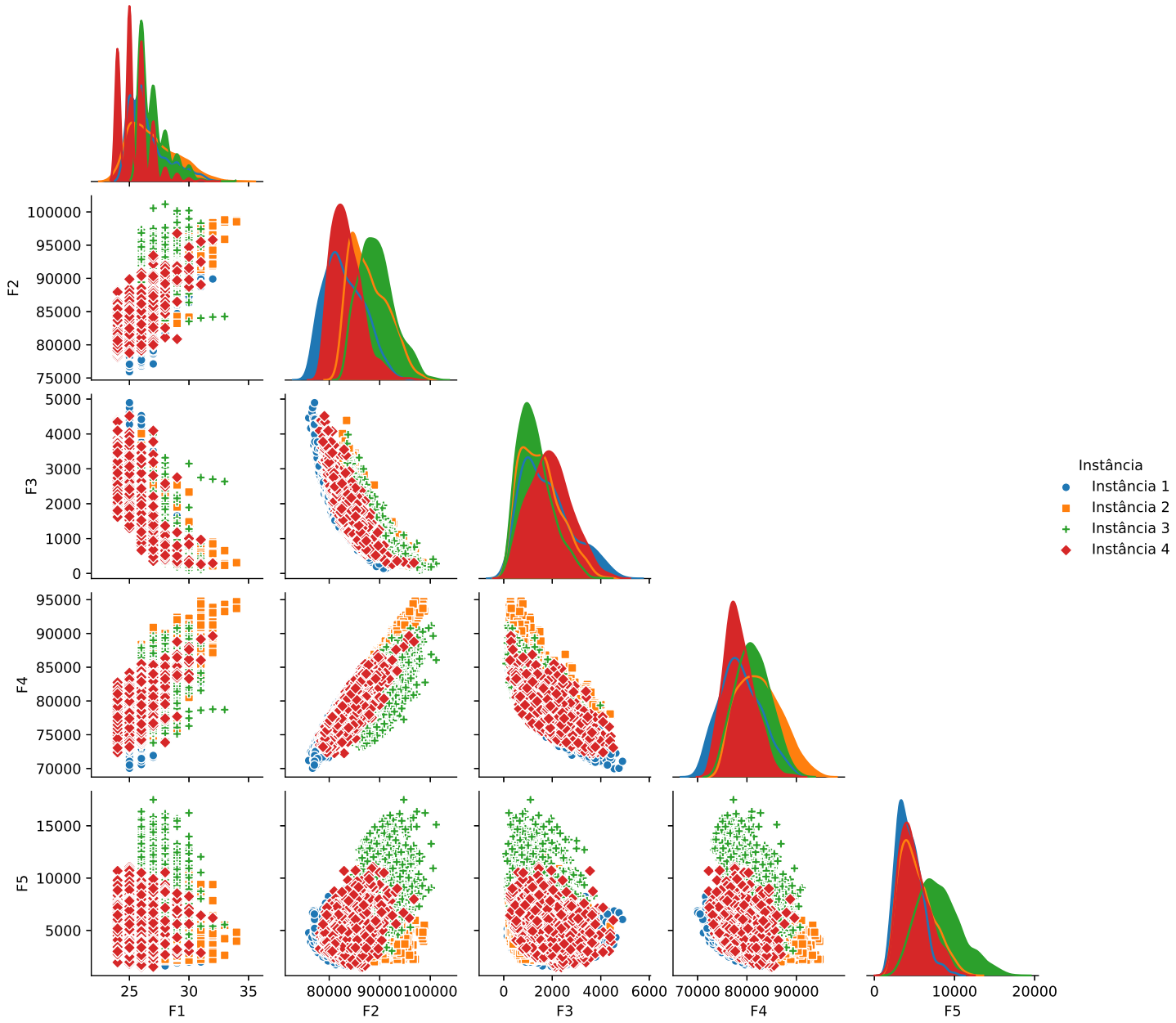


Figura 11 – Gráfico de dispersão para cada par de objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Gravit100"*.

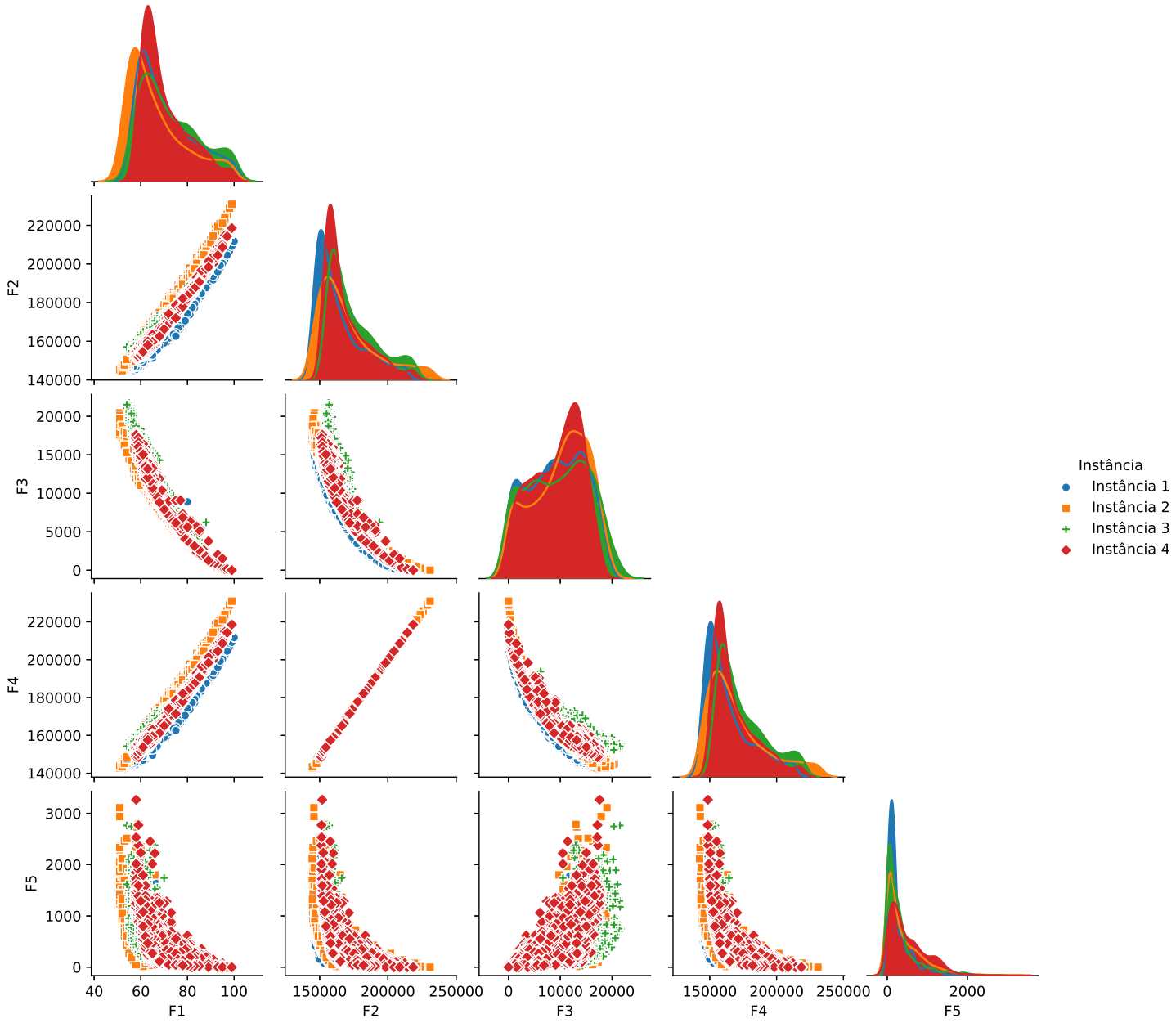


Figura 12 – Gráfico de dispersão para cada par de objetivos referente ao conjunto de instâncias *"Rnd100"*.

6 Análise de Desempenho dos MOEAs

Neste capítulo, apresentamos uma análise comparativa de desempenho que considera oito MOEAs (NSGA-II, SPEA2, IBEAϵ+, NSGA-III, SPEA-R, MOEA/D, MOEA/D-GR e Two-ARCH2), projetados com base em diferentes estratégias. Desta forma, a análise realizada abrange algoritmos que se baseiam na relação de dominância Pareto, em indicadores de qualidade, em pontos de referência, em decomposição e no uso de dois arquivos. Para essa análise, empregamos a formulação do DARP com cinco objetivos apresentada no Capítulo 4 e utilizamos os dois conjuntos de instâncias de teste apresentados no Capítulo 5, com o propósito de avaliar os comportamentos e comparar o desempenho dos oito MOEAs ao serem aplicados a um complexo MaOP combinatório.

6.1 Ambiente Computacional

Os experimentos computacionais foram realizados em um computador equipado com um processador Intel Xeon E5-2630 v4 (2.2GHz, 10 núcleos, 25 MB de cache, 85W), 32GB de memória RAM e o sistema operacional *CentOS* 6.6. Os algoritmos utilizados foram implementados na linguagem de programação C++.

6.2 Métodos de Avaliação para Algoritmos Multiobjetivo

Na otimização de problemas mono-objetivo, a avaliação da qualidade de uma solução final obtida por qualquer abordagem consiste apenas em calcular a diferença relativa entre o valor encontrado e o melhor valor conhecido (possivelmente a solução ótima) para a instância de teste em questão. No entanto, para MOPs/MaOPs ($m > 1$), não há uma métrica natural de qualidade, o que torna a avaliação dos resultados uma tarefa não trivial.

Quando um algoritmo multiobjetivo atinge o critério de parada estabelecido, ele retorna um conjunto composto exclusivamente por soluções não-dominadas (incomparáveis), denominado conjunto de aproximação (HANSEN; JASZKIEWICZ, 1998), definido da seguinte forma:

Definição 6.2.1. ***(Conjunto de Aproximação)*** *Seja $A \subseteq Z$ um conjunto de vetores de objetivos. Dizemos que A é um conjunto de aproximação se nenhum de seus elementos domina fracamente qualquer outro vetor de objetivos em A, sendo Z o espaço de objetivos.*

Em geral, a geração completa do conjunto de soluções Pareto-ótimo de um determinado MOP é uma tarefa computacionalmente custosa e frequentemente impraticável, principalmente devido à complexidade de submeter MOPs a métodos exatos (ZITZLER

et al., 2003). Diante disso, a abordagem convencional para avaliação de desempenho e comparação de MOEAs baseia-se no uso de indicadores de qualidade, também conhecidos como métricas de desempenho. Cada indicador de qualidade adotado tende a enfatizar características específicas dos conjuntos de aproximação analisados, convertendo cada conjunto de aproximação obtido em um valor numérico que reflete sua qualidade. No entanto, é essencial garantir que os objetivos otimizados estejam devidamente escalados antes da aplicação de alguns indicadores de qualidade. Para isso, em cada instância de teste γ, é gerado o conjunto Z_{γ}^{all}, resultante da união de todos os conjuntos de aproximação obtidos pelos MOEAs avaliados. Posteriormente, com base em todos os pontos contidos em Z_{γ}^{all}, são determinados os pontos $z^{min} = (z_1^{min}, \ldots, z_m^{min})$ e $z^{max} = (z_1^{max}, \ldots, z_m^{max})$, nos quais z_k^{min} e z_k^{max} representam os limites inferior e superior do $k-$ésimo objetivo otimizado, respectivamente. Finalmente, cada ponto $z \in Z^{all}$ é normalizado de acordo com a seguinte equação:

$$z_k = \frac{z_k - z_k^{min}}{z_k^{max} - z_k^{min}} \ \forall k \in \{1 \ldots m\} \tag{44}$$

Após o procedimento de normalização, todos os valores de função objetivo de cada ponto em Z_{γ}^{all} passarão a variar dentro do intervalo $[0,1]$. Por fim, para cada instância de teste γ, é construído um conjunto de referência Z_{γ}^{*}, contendo todos os pontos não-dominados do conjunto Z_{γ}^{all} correspondente.

6.2.1 Indicadores de Qualidade

Na literatura, diversos indicadores de qualidade são utilizados para avaliar a qualidade dos conjuntos de aproximação obtidos por abordagens multiobjetivo. De acordo com Tian et al. (2019), a qualidade de um conjunto de aproximação é geralmente avaliada com base em três aspectos: convergência, extensão e uniformidade. O primeiro aspecto refere-se à proximidade em relação à fronteira Pareto-ótimo. O segundo aspecto representa a distância entre os pontos extremos da fronteira analisada. Por fim, o terceiro aspecto está relacionado à uniformidade das distancias entre pares de pontos adjacentes. Na comunidade de otimização multiobjetivo, a combinação dos aspectos uniformidade e extensão é denominada diversidade.

Conforme Zitzler et al. (2003), ao comparar um grupo de conjuntos de aproximação, é essencial que os indicadores de qualidade utilizados apresentem compatibilidade e robustez em relação à maioria das relações de dominância, ou seja, devem ser capazes de representar tais relações de forma adequada. A seguir, são apresentados os indicadores de qualidade empregados nesta análise.

6.2.1.1 *Hypervolume*

Introduzido por Zitzler e Thiele (1998), Zitzler e Thiele (1999), o indicador de qualidade *Hypervolume* (I_{HV}) calcula o hiper-volume da região do espaço de objetivos que é fracamente dominada por um conjunto de aproximação A. Quanto maior o valor de I_{HV}, melhor é a qualidade dos vetores de objetivos pertencentes a A. Em outras palavras, o objetivo é maximizar I_{HV}. Conforme apontado por Knowles, Thiele e Zitzler (2006), para calcular I_{HV} é necessário definir um ponto de referência que seja pelo menos fracamente dominado por todos os pontos de Z^{all}. Nessa análise, como todos os pontos de Z^{all} foram normalizados, esse ponto de referência torna-se a tupla $(1{,}1{,}1{,}1{,}1)$, no caso de $m = 5$.

O indicador de qualidade I_{HV} é estritamente monotônico em relação à dominância Pareto. Além disso, ele é capaz de quantificar tanto a convergência quanto a diversidade do conjunto de aproximação avaliado. Portanto, quanto mais próximos os vetores de objetivos de A estiverem da fronteira Pareto-ótimo, maior será o valor de I_{HV}. Simultaneamente, um valor elevado de I_{HV} também pode indicar que os vetores de objetivos em A estão distribuídos de forma uniforme no espaço de objetivos. Para calcular o hiper-volume dos conjuntos de aproximação avaliados neste estudo, foi utilizado o algoritmo proposto por Fonseca, Paquete e López-Ibánez (2006).

6.2.1.2 *Binary Additive ϵ-Indicator*

Proposto por Zitzler et al. (2003), o *Bynary Additive ϵ-Indicator* (I_{ϵ^+}) é um indicador de qualidade que mensura convergência. Baseado no conceito de ϵ-dominância, $I_{\epsilon^+}(A, B)$ calcula o fator mínimo ϵ necessário para que qualquer vetor de objetivos do conjunto de aproximação B seja ϵ-dominado por pelo menos um vetor de objetivos do conjunto de aproximação A. Considerando que o problema em questão minimiza m funções objetivo, $I_{\epsilon^+}(A, B)$ é computado da seguinte forma:

$$I_{\epsilon^+}(A, B) = \inf_{\epsilon \in \Re} \{\forall\ z^2 \in B\ \exists\ z^1 \in A : z^1 \preceq_{\epsilon+} z^2\} \tag{45}$$

sendo que um ponto $z^1 \in Z$ ϵ-domina um segundo ponto $z^2 \in Z$ ($z^1 \preceq_{\epsilon+} z^2$) se, e somente se:

$$\forall\ 1 \leq i \leq m : z_i^1 \leq \epsilon + z_i^2 \tag{46}$$

Dado que o conjunto Pareto-ótimo do MaOP abordado não é conhecido para nenhuma das instâncias de teste utilizadas, neste estudo foi empregada a variante unária deste indicador de qualidade (FONSECA et al., 2005). Desta forma, para cada instância de teste γ, um conjunto de aproximação A é avaliado utilizando o conjunto de referência Z_γ^*, composto por todas as soluções não-dominadas obtidas ao longo dos experimentos computacionais. Quanto menor for o valor de $I_{\epsilon^+}(A, Z_\gamma^*)$, melhor será a qualidade de A.

6.2.2 Pontuação de Desempenho

Com base nos valores de I_{HV} e I_{ϵ^+}, foram conduzidas análises estatísticas utilizando um teste estatístico não paramétrico. Para cada instância de teste, realizou-se uma comparação par-a-par dos algoritmos, aplicando o teste de *Wilcoxon-Mann-Whitney* (*Wilcoxon rank-sum test*). A hipótese nula estabelece que não há diferença significativa entre os valores médios obtidos pelos dois algoritmos, considerando que a diferença nos resultados é puramente ocasionada ao acaso. Por outro lado, a hipótese alternativa afirma que a diferença observada não é aleatória. Os testes de hipóteses foram conduzidos com um nível de significância de $\alpha = 0.05$.

Para avaliar o desempenho de cada MOEA em cada instância de teste, adotou-se a abordagem proposta por Bader e Zitzler (2011), que classifica diferentes algoritmos por meio de testes estatísticos. Suponha que, para cada instância de teste, n algoritmos $A_1 \dots A_n$ sejam comparados com base nos valores de um indicador de qualidade qualquer. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ e $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$, δ_{ij} assumirá o valor 1 se o algoritmo A_j superar significativamente o algoritmo A_i, de acordo com o teste de *Wilcoxon-Mann-Whitney*. Caso contrário, δ_{ij} será 0. Desta forma, a pontuação de desempenho para o algoritmo A_i ($P(A_i)$) é calculada da seguinte maneira:

$$P(A_i) = \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}}^{n} = \delta_{ij} \tag{47}$$

em que $P(A_i)$ representa quantos algoritmos superam o algoritmo A_i em uma determinada instância de teste. Quanto menor esse valor, melhor será o desempenho do algoritmo. Quando $P(A_i)$ é igual a zero, significa que nenhum outro algoritmo obteve conjuntos de aproximação significantemente melhores com base em um determinado indicador de qualidade.

6.3 Configurações Gerais dos Experimentos Computacionais

6.3.1 Componentes Gerais dos MOEAs

Nesta seção, serão apresentados os componentes evolutivos gerais que foram utilizados na composição dos MOEAs avaliados. Tanto o procedimento de geração da população inicial quanto os operadores de variação empregados foram inicialmente introduzidos por VIANA (2016) e, posteriormente, utilizados em Viana et al. (2019).

6.3.1.1 Representação da solução

Em geral, em problemas de roteamento de veículos com múltiplos veículos, é comum que uma solução seja representada por meio de um conjunto de rotas, que, por sua vez,

consistem em sequências de pontos. Computacionalmente, uma solução é codificada como um vetor bi-dimensional, isto é, vetores de rotas. Cada vetor de rota representa o itinerário que um veículo deverá percorrer, e os pontos na rota são organizados conforme a ordem de visitação. Tanto o ponto inicial quanto o ponto final de cada rota correspondem ao depósito, que serve como ponto de partida e de retorno para todos os veículos da frota. No entanto, para evitar desafios relacionados à precedência de pontos, algo comum em problemas como o DARP e outros problemas similares, a sequência de pontos foi substituída por uma sequência de identificadores de requisições de transporte.

Cada requisição de transporte está associada a um par de pontos que representam os locais de embarque e desembarque. Portanto, a primeira aparição do identificador de uma requisição em uma rota corresponde ao ponto de partida do usuário, enquanto a segunda aparição corresponde ao ponto de destino. No entanto, para simplificar a identificação da ação a ser realizada em cada parada do veículo, o identificador que representa o embarque é precedido por um sinal positivo (+), enquanto o identificador que representa o desembarque é precedido por um sinal negativo (-). Esses identificadores, juntamente com seus sinais, são armazenados no vetor correspondente a rota na ordem em que os atendimentos devem ser executadas pelo motorista. A Figura 13 exemplifica uma solução para uma instância de teste fictícia composta por 8 requisições de transporte, distribuídas em 4 rotas.

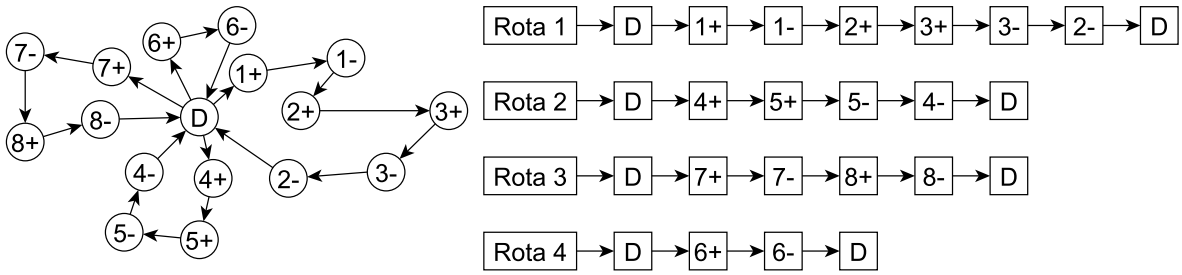


Figura 13 – Esquema de representação de uma solução.

6.3.1.2 Procedimento para Geração da População Inicial

O procedimento de geração da população inicial adotado considera o horário desejado para o embarque (h_{i^+}) informado pelos usuários e o tempo necessário para um veículo se deslocar do depósito até o ponto de embarque (t_{D,i^+}), visando identificar as requisições de transporte de maior urgência. Desta forma, as requisições que demandam maior antecedência na partida dos veículos são priorizadas.

Inicialmente, esse procedimento ordena todas as requisições de transporte disponíveis de acordo com o valor $h_{i^+} - t_{D,i^+}$. Em seguida, as l primeiras requisições são atribuídas a l veículos distintos, sendo l um parâmetro de entrada. Desta forma, as requisições mais

distantes do depósito e/ou mais urgentes recebem prioridade em relação às demais. Posteriormente, as requisições restantes são ordenadas conforme os horários de embarque (h_{i^+}) e, de forma sequencial, são adicionadas de maneira factível a uma rota já existente, escolhida aleatoriamente. Caso a inserção não seja possível, uma nova rota (veículo) é alocada para atender a requisição. Vale destacar que, em cada solução gerada, o número de rotas pode variar entre l e o número total de requisições de transporte disponíveis (pior caso, considerando a função objetivo que minimiza o número de rotas realizadas).

6.3.1.3 Operador de Recombinação (Crossover)

Projetado com base no clássico operador de recombinação com um ponto de corte, o operador de recombinação utilizado combina dois indivíduos pais, selecionados da população corrente, com o objetivo de gerar dois indivíduos filhos C_1 e C_2. O procedimento proposto é composto por cinco etapas, explicadas na Figura 14.

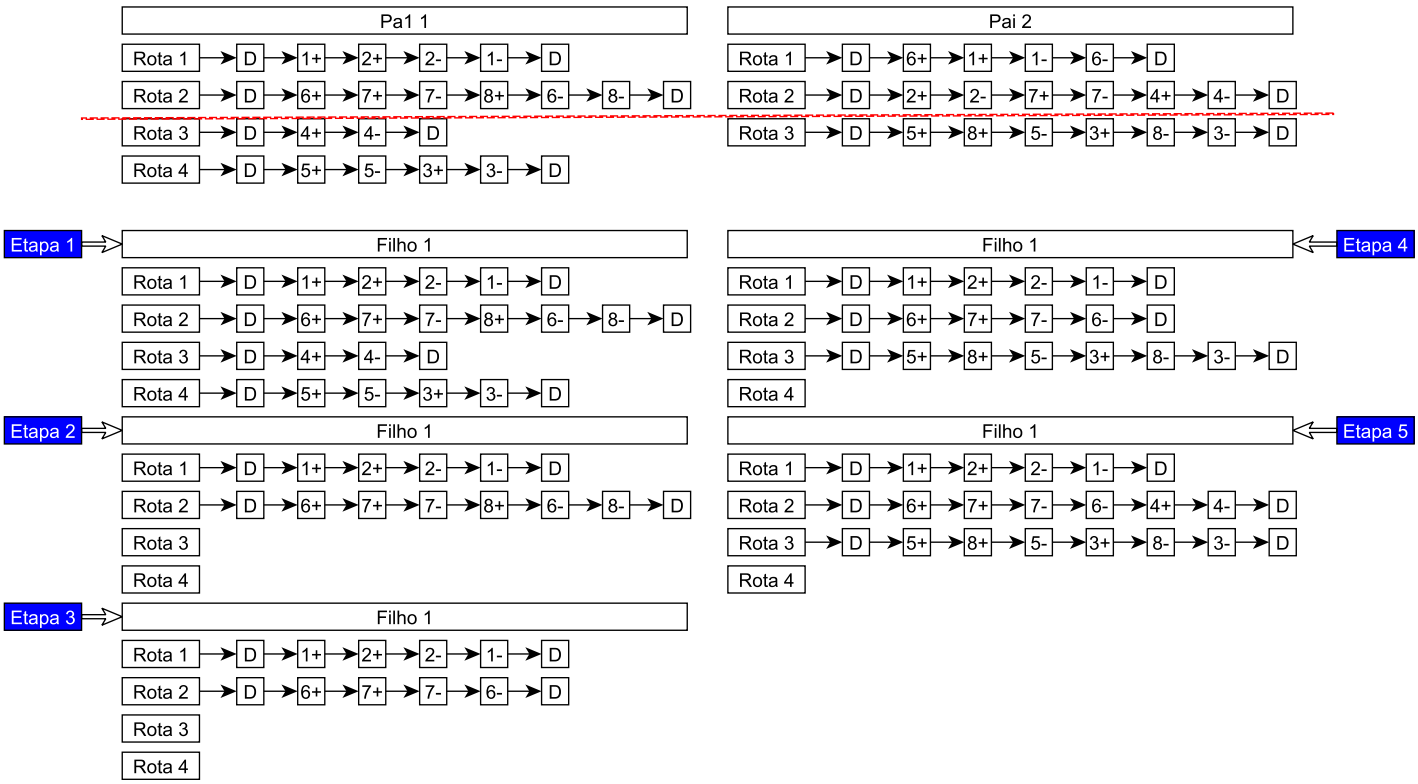


Figura 14 – Esquema de aplicação do operador de recombinação.

A partir de dois indivíduos pais P_1 e P_2, inicia-se a geração do primeiro indivíduo filho (C_1) realizando uma cópia do indivíduo P_1 (primeira etapa). Para modificar C_1, seleciona-se um ponto de corte l entre 1 e $\min(|P_1|, |P_2|)$. Posteriormente, todas as rotas no vetor de rotas de C_1 indexadas após l são removidas (segunda etapa). Para evitar duplicidade de atendimentos, todas as requisições de transporte em P_2 alocadas em rotas indexadas após

l e que já estejam alocadas à alguma das rotas de C_1 são removidos de C_1 (terceira etapa). Em seguida, todas as rotas em P_2 indexadas após l são adicionadas em C_1 (quarta etapa). Por fim, todas as requisições de transporte que ainda não foram atribuídas a alguma das rotas de C_1 são inseridas na rota e na posição que possibilita o menor custo de inserção possível (quinta etapa), isto é, o menor acréscimo na duração total das rotas do indivíduo C_1. O individuo C_2 é produzido da mesma maneira, invertendo os papeis de P_1 e P_2. Para controlar a frequência de realização dos cruzamentos, define-se uma probabilidade Pr, denominada taxa de recombinação.

6.3.1.4 Operador de Mutação

Com o objetivo de introduzir diversidade à população, o operador de mutação utilizado seleciona aleatoriamente duas rotas diferentes do indivíduo corrente (r_1 e r_2). Em seguida, uma requisição req é escolhida aleatoriamente e removida de r_1. O processo de reinserção de req no indivíduo começa por r_2. Caso não seja possível inserir a requisição de forma que preserve a factibilidade do indivíduo, tenta-se a inserção na rota seguinte. Este processo continua enquanto não for possível realizar uma inserção factível e houver rotas. Se nenhuma outra rota, além de r_1, puder atender a requisição de maneira factível, isto é, respeitando todas as restrições, uma nova rota (veículo) é criada para realizar o atendimento. O procedimento que verifica a viabilidade da inserção inicia as tentativas sempre pelo final da rota, buscando afetar o mínimo possível de atendimentos e, assim, reduzir o impacto no atraso total dos desembarques. Para controlar a frequência em que as mutações ocorrem durante o processo evolutivo, define-se uma probabilidade Pm, denominada taxa de mutação.

6.3.2 Ajuste dos Parâmetros

Para assegurar a equidade na análise de desempenho, os parâmetros associadas a um MOEA que influenciam diretamente o consumo e o tempo computacional, como o tamanho da população e o critério de parada, foram padronizados para todos os algoritmos avaliados. Considerando a natureza estocástica dos MOEAs, foram realizadas 31 execuções independentes para cada algoritmo em cada instância de teste.

Para a geração do conjunto de pontos ou direções de referência, elemento essencial para as abordagens baseadas em decomposição, foi empregada a abordagem sistemática proposta por Das e Dennis (1998). Para sua aplicação, é necessário definir o número de divisões p e o número de objetivos m considerados. De acordo com DEB e JAIN (2014), caso o valor definido para p não seja igual ou superior a m ($p \geq m$), não serão gerados pontos intermediários no hiperplano normalizado. Portanto, considerando que o MaOP abordado possui 5 objetivos e foram estabelecidas 6 divisões, serão gerados 210 pontos. Dessa forma, para os algoritmos MOEA/D e MOEA/D-GR, foram utilizadas populações de

tamanho $N = 210$. Já para o NSGA-III e SPEA-R, optou-se por populações de tamanho igual ao menor múltiplo de quatro maior que 210, resultando em $N = 212$. Para os demais MOEAs avaliados, foi adotado o tamanho de população $N = 212$. Além disso, todas as execuções de cada MOEA foram encerradas após 100 mil avaliações de aptidão.

Os parâmetros relacionados aos operadores genéticos, como as taxas de recombinação e mutação, foram calibrados por meio de experimentos computacionais com o objetivo de identificar as condições que proporcionam o melhor desempenho dos algoritmos avaliados. Com base em experimentos computacionais preliminares, as taxas de recombinação $P_r = 1{,}0$ e mutação $P_m = 0{,}2$ apresentaram os melhores resultados para todos os MOEAs testados. Portanto, esses valores foram adotados em todos os experimentos computacionais subsequentes.

Para os parâmetros específicos de cada MOEA, foram utilizados os valores definidos nos estudos em que os algoritmos foram introduzidos. Abaixo estão detalhados os parâmetros e seus respectivos valores:

- **MOEA/D e MOEA/D-GR:** A abordagem *Tchebychev* foi selecionada como método de escalarização, e o tamanho da vizinhança foi definido como $N \times 0{,}1$.
- **IBEAϵ+:** O parâmetro k, utilizado no cálculo da aptidão, foi definido como $0{,}05$.
- **SPEA2**: O tamanho do arquivo definido como 100.
- **Two_ARCH2:** O tamanho do arquivo CA foi definido como 100 e o valor de p, utilizado na norma L_p, foi estabelecido como $1/M$.

Por fim, foram definidos alguns parâmetros associados ao problema otimizado:

- Com o objetivo de simular uma frota de veículos homogênea, todos os veículos foram definidos com uma capacidade máxima de quatro passageiros ($Q = 4$), além do motorista.
- Com base em Chevrier et al. (2012), a duração do serviço nos pontos de atendimento foi considerada nula ($d_i = 0, \forall i \in V^+ \cup V^-$).
- Com base em Chevrier et al. (2012), as constantes utilizadas nos cálculos das janelas de tempo e das relaxações foram definidas como $0{,}2$ e $1{,}5$, respectivamente.

6.4 Resultados e Análises Experimentais

Para proporcionar uma apresentação mais clara dos resultados da análise comparativa de desempenho, eles serão exibidos em duas etapas, uma para cada conjunto de instâncias de teste. As Tabelas 5 e 6 apresentam os valores médios dos indicadores de qualidade I_{HV} e I_{ϵ^+}, respectivamente, obtidos pelos MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Gravit100"*. De maneira similar, as Tabelas 7 e 8 exibem os valores médios dos indicadores I_{HV} e I_{ϵ^+}, respectivamente, obtidos pelos MOEAs para as instâncias de teste

do conjunto *"Rnd100"*. Para cada instância de teste, cada valor médio é acompanhado por um número inteiro entre parênteses localizado à sua direita, que representa a classificação obtida pelo algoritmo correspondente, determinada com base na pontuação de desempenho detalhada na Seção 6.2.2. O algoritmo melhor classificado está destacado em negrito.

Tabela 5 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Gravit100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{HV}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito.

Instância	IBEA	MOEA/D	MOEA/D-GR	NSGA-II	NSGA-III	SPEA2	SPEA-R	Two_ARCH2
Gravit100_0	0,9565 (2)	0,9028 (3)	0,8831 (4)	0,7991 (7)	0,8478 (5)	0,7285 (8)	0,813 (6)	**0,9763 (1)**
Gravit100_1	1,0017 (2)	0,9293 (3)	0,932 (3)	0,7777 (7)	0,8719 (5)	0,7142 (8)	0,8214 (6)	**1,0229 (1)**
Gravit100_2	**0,9538 (1)**	0,8957 (3)	0,8942 (3)	0,7784 (7)	0,8488 (5)	0,7311 (8)	0,7951 (6)	**0,9458 (1)**
Gravit100_3	0,979 (2)	0,9263 (3)	0,9279 (3)	0,8332 (7)	0,8636 (5)	0,765 (8)	0,8556 (5)	**1,0171 (1)**
Gravit100_4	**1,0689 (1)**	0,9825 (3)	0,9727 (3)	0,886 (7)	0,9443 (5)	0,8172 (8)	0,9142 (6)	**1,0711 (1)**
Gravit100_5	1,0066 (2)	0,9398 (3)	0,9398 (3)	0,8297 (7)	0,8972 (5)	0,791 (8)	0,8461 (6)	**1,0316 (1)**
Gravit100_6	**0,9514 (1)**	0,8835 (4)	0,8947 (3)	0,781 (6)	0,8329 (5)	0,7256 (8)	0,7942 (6)	**0,9535 (1)**
Gravit100_7	**1,0215 (1)**	0,9788 (3)	0,9588 (4)	0,869 (7)	0,9204 (5)	0,8078 (8)	0,8939 (6)	**1,0329 (1)**
Gravit100_8	**1,0866 (1)**	1,0262 (3)	1,0196 (3)	0,9024 (7)	0,9662 (5)	0,8433 (8)	0,9528 (6)	**1,0976 (1)**
Gravit100_9	1,0466 (2)	0,9667 (3)	0,9755 (3)	0,8441 (7)	0,932 (5)	0,7681 (8)	0,875 (6)	**1,0677 (1)**

Tabela 6 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Gravit100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{ϵ^+}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito.

Instância	IBEA	MOEA/D	MOEA/D-GR	NSGA-II	NSGA-III	SPEA2	SPEA-R	Two_ARCH2
Gravit100_0	**0,1123 (1)**	0,1317 (3)	0,1411 (4)	0,1892 (6)	0,1504 (5)	0,2072 (7)	0,2195 (8)	**0,1119 (1)**
Gravit100_1	0,0938 (2)	0,1428 (4)	0,1364 (3)	0,2028 (6)	0,1484 (4)	0,2152 (7)	0,2133 (7)	**0,0881 (1)**
Gravit100_2	**0,1056 (1)**	0,1389 (3)	0,1385 (3)	0,1679 (6)	0,145 (5)	0,1846 (7)	0,2126 (8)	0,1154 (2)
Gravit100_3	**0,1059 (1)**	0,136 (3)	0,1337 (3)	0,1916 (6)	0,1496 (5)	0,1961 (6)	0,2162 (8)	**0,1032 (1)**
Gravit100_4	**0,1024 (1)**	0,1446 (3)	0,1534 (4)	0,1847 (6)	0,1581 (4)	0,1981 (7)	0,208 (8)	**0,1032 (1)**
Gravit100_5	0,0957 (2)	0,1369 (3)	0,135 (3)	0,1761 (6)	0,1538 (5)	0,1927 (7)	0,2221 (8)	**0,0864 (1)**
Gravit100_6	**0,1043 (1)**	0,1471 (3)	0,1413 (3)	0,1748 (6)	0,1566 (5)	0,205 (7)	0,2102 (7)	**0,1009 (1)**
Gravit100_7	**0,0953 (1)**	0,1212 (3)	0,1229 (3)	0,1667 (6)	0,1371 (5)	0,1797 (7)	0,1887 (7)	**0,095 (1)**
Gravit100_8	**0,095 (1)**	0,1359 (3)	0,1303 (3)	0,1823 (6)	0,1556 (5)	0,2027 (8)	0,1948 (7)	**0,0989 (1)**
Gravit100_9	**0,0994 (1)**	0,1376 (3)	0,1352 (3)	0,1861 (6)	0,1429 (3)	0,2072 (7)	0,199 (7)	**0,0942 (1)**

De acordo com os resultados apresentados nas Tabelas 5 e 6, os algoritmos Two_ARCH2 e IBEA obtiveram os melhores resultados com relação aos indicadores I_{HV} e I_{ϵ^+}, portanto obtiveram os melhores conjuntos de aproximação em termos de convergência e diversidade. Com destaque para o Two_ARCH2, que para algumas instâncias de teste obteve melhor classificação em relação ao IBEA. É importante ressaltar que, o processo evolutivo dos algoritmos Two_ARCH2 (em uma de suas populações) e IBEA são baseados no indicador I_{ϵ^+}, o que, de certa forma, proporciona alguma vantagem a estes algoritmos em relação aos demais quando utilizado o mesmo indicador para comparação de desempenho. Em seguida, aparecem os dois representantes da estratégia de decomposição baseada em agregação (MOEA/D e MOEA/D-GR), o que provavelmente indica que a distribuição dos vetores de peso gerados foi adequada à geometria da fronteira Pareto do problema. Entre todos os MOEAs avaliados, o NSGA-III obteve desempenho intermediário nesse conjunto de instâncias de teste. Os algoritmos SPEA-R, NSGA-II e SPEA2 apresentaram as piores performances. Em relação aos dois últimos, o desempenho ruim pode ser explicado pela

incapacidade das abordagens baseadas na relação de dominância Pareto em lidar com problemas de otimização com alto número de objetivos. Por fim, é possível notar que, para este conjunto de instâncias de teste em particular, mesmo utilizando diferentes indicadores de qualidade, as classificações obtidas são bastante similares.

Tabela 7 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Rnd100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{HV}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito.

Instância	IBEA	MOEA/D	MOEA/D-GR	NSGA-II	NSGA-III	SPEA2	SPEA-R	Two_ARCH2
Rnd100_0	0,8786 (2)	0,7991 (3)	0,7885 (4)	0,7837 (4)	0,7836 (4)	0,7787 (7)	0,7307 (8)	**0,907 (1)**
Rnd100_1	0,8464 (2)	0,7547 (3)	0,7436 (5)	0,7262 (6)	0,7553 (3)	0,7184 (7)	0,7015 (8)	**0,8648 (1)**
Rnd100_2	0,8428 (2)	0,7614 (3)	0,7505 (4)	0,7394 (6)	0,7541 (4)	0,721 (7)	0,6775 (8)	**0,8616 (1)**
Rnd100_3	0,8277 (2)	0,7492 (3)	0,7427 (4)	0,7141 (6)	0,7392 (4)	0,7101 (6)	0,6623 (8)	**0,8472 (1)**
Rnd100_4	0,888 (2)	0,8293 (4)	0,8211 (7)	0,8285 (4)	0,8247 (6)	0,8364 (3)	0,7611 (8)	**0,9063 (1)**
Rnd100_5	0,851 (2)	0,7813 (3)	0,7728 (4)	0,7736 (4)	0,7649 (6)	0,7577 (6)	0,7026 (8)	**0,8684 (1)**
Rnd100_6	0,8149 (2)	0,7584 (3)	0,7404 (4)	0,6935 (7)	0,7387 (4)	0,7249 (6)	0,6874 (7)	**0,8381 (1)**
Rnd100_7	0,8085 (2)	0,7504 (3)	0,7404 (4)	0,7021 (6)	0,7172 (5)	0,7044 (6)	0,6756 (8)	**0,8266 (1)**
Rnd100_8	0,8495 (2)	0,7667 (3)	0,749 (4)	0,7278 (6)	0,7366 (5)	0,724 (6)	0,696 (8)	**0,8726 (1)**
Rnd100_9	0,8901 (2)	0,828 (3)	0,8166 (5)	0,8223 (4)	0,8096 (6)	0,8014 (7)	0,7205 (8)	**0,8995 (1)**

Tabela 8 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para as instâncias de teste do conjunto *"Rnd100"*. A tabela mostra os valores médios de I_{ϵ^+}. Os números entre parenteses indicam a classificação dos MOEAs com base no valor da pontuação de desempenho. O MOEA melhor classificado está destacado em negrito.

Instância	IBEA	MOEA/D	MOEA/D-GR	NSGA-II	NSGA-III	SPEA2	SPEA-R	Two_ARCH2
Rnd100_0	0,0458 (2)	0,1304 (4)	0,1429 (7)	0,1364 (4)	0,1309 (4)	0,1197 (3)	0,2441 (8)	**0,0422 (1)**
Rnd100_1	0,0441 (2)	0,1424 (5)	0,1532 (6)	0,1585 (6)	0,1318 (3)	0,1293 (3)	0,2421 (8)	**0,038 (1)**
Rnd100_2	0,0463 (2)	0,1118 (4)	0,1226 (5)	0,137 (7)	0,1077 (3)	0,1211 (5)	0,2331 (8)	**0,0418 (1)**
Rnd100_3	0,0428 (2)	0,1224 (3)	0,1502 (7)	0,1206 (3)	0,1351 (6)	0,1173 (3)	0,2435 (8)	**0,037 (1)**
Rnd100_4	0,0417 (2)	0,13 (5)	0,1495 (7)	0,1083 (4)	0,1306 (5)	0,0889 (3)	0,2311 (8)	**0,0296 (1)**
Rnd100_5	**0,0474 (1)**	0,1108 (3)	0,1313 (6)	0,1253 (6)	0,1121 (3)	0,1177 (3)	0,2187 (8)	**0,0496 (1)**
Rnd100_6	0,0611 (2)	0,1323 (5)	0,1427 (6)	0,1443 (6)	0,1205 (3)	0,1158 (3)	0,2373 (8)	**0,0431 (1)**
Rnd100_7	0,0494 (2)	0,1333 (3)	0,1408 (6)	0,1523 (7)	0,1301 (3)	0,1277 (3)	0,229 (8)	**0,0469 (1)**
Rnd100_8	**0,0466 (1)**	0,1282 (4)	0,135 (6)	0,1511 (7)	0,1183 (3)	0,1278 (4)	0,2364 (8)	**0,0448 (1)**
Rnd100_9	0,0396 (2)	0,1115 (6)	0,1296 (7)	0,1062 (3)	0,1076 (3)	0,1073 (3)	0,2393 (8)	**0,0366 (1)**

Conforme os resultados apresentados nas Tabelas 7 e 8, para o conjunto de instâncias *"Rnd100"*, os algoritmos Two_ARCH2 e IBEA novamente obtiveram as melhores classificações para ambos os indicadores de qualidade. Novamente, com destaque para o algoritmo Two_ARCH2, que obteve a melhor classificação em todas as instâncias do conjunto. No geral, os algoritmos MOEA/D, NSGA-II e NSGA-III obtiveram desempenhos inferiores somente ao Two_ARCH2 e IBEA. Considerando o indicador I_{ϵ^+}, o algoritmo MOEA/D-GR apresentou uma queda de desempenho. Em contrapartida, o algoritmo SPEA2 obteve uma significativa melhora, destacando-se pela capacidade de convergência. Por fim, para ambos os indicadores, o SPEA-R apresentou o pior desempenho dentre os demais algoritmos.

7 Abordagem Baseada no Paradigma de Dividir para Conquistar Desenvolvida para lidar com MOPs/MaOPs: Indução de Correlações Artificiais e Aprimoramento do Desempenho de MOEAs

Diante dos desafios associados aos problemas de otimização multiobjetivo que envolvem três ou mais objetivos, em vez de concentrar-se exclusivamente no desenvolvimento de novos MOEAs e estratégias de seleção, este capítulo introduz uma abordagem que, além de otimizar a formulação original do problema, cria e otimiza várias formulações alternativas, com o objetivo de expandir a área de busca e tornar o processo de otimização mais eficiente. Nessas formulações alternativas, são induzidas correlações lineares artificiais entre as funções objetivo do problema. Especificamente, em cada formulação alternativa, duas das funções objetivo da formulação original são preservadas, enquanto cada uma das demais é substituída por uma combinação linear entre ela própria e uma das duas funções objetivo mantidas. Para garantir a preservação do espaço de soluções factíveis, todas as formulações alternativas utilizam o mesmo conjunto de restrições da formulação original. Baseada no paradigma de "dividir para conquistar", a abordagem proposta consiste em um MOEA distribuído (*distributed MOEA*, dMOEA) que executa, de forma independente, um processo evolutivo distinto (execução isolada de um dado MOEA) tanto para a formulação original do problema quanto para cada formulação alternativa criada, buscando ampliar o alcance da busca realizada, direcionando-a para diferentes regiões do espaço de objetivos. Essa estratégia visa aprimorar a convergência e a diversidade dos algoritmos, além de melhorar a qualidade das soluções obtidas. Ressalta-se que cada formulação alternativa é utilizada exclusivamente para conduzir o processo evolutivo ao qual está associada. Ao término de cada execução, o conjunto de aproximação gerado é reavaliado com base na formulação original do problema, e apenas as soluções não-dominadas são retornadas como resultado final do algoritmo.

Ao conduzir buscas independentes utilizando tanto a formulação original do problema quanto diferentes formulações alternativas, que apresentam objetivos artificialmente correlacionados, a abordagem proposta distribui o processo de busca e concentra os esfor-

ços em diversas regiões distintas do espaço de objetivos. Essa estratégia visa facilitar o alcance de áreas que dificilmente seriam exploradas apenas pela otimização da formulação original do MOP/MaOP, mesmo utilizando algoritmos do estado da arte. Além disso, a abordagem proposta pode ser facilmente integrada a qualquer MOEA existente com o mínimo de esforço. Neste estudo, aplicamos essa abordagem a MOEAs de diferentes categorias, e os resultados obtidos comprovam sua eficácia em aprimorar o desempenho dos MOEAs, tanto na resolução de MOPs quanto de MaOPs.

Para validar a eficácia da abordagem proposta ao integrá-la aos MOEAs, selecionamos um dos problemas de otimização combinatória amplamente estudados na literatura: o Problema da Mochila (*Knapsack Problem*, KP). Especificamente, utilizamos uma formulação com três objetivos, intitulada *Multi-Objective Knapsack Problem* (MOKP), e uma formulação com mais de três objetivos, frequentemente referida na literatura como *Many-Objective Knapsack Problem* (MaOKP). Apesar de sua relativa simplicidade, o KP possui grande relevância, servindo como base para a modelagem de diversas aplicações reais, como problemas de logística, planejamento de produção, gestão de estoque, seleção de portfólio, entre outros. Sua adaptabilidade é evidenciada pelas inúmeras variantes documentadas na literatura científica. Além disso, instâncias de teste para MOKPs e MaOKPs podem ser geradas de forma relativamente simples. No entanto, apesar da multiplicidade de aplicações reais, das características distintivas decorrentes de sua natureza discreta e de seus requisitos específicos, os estudos que abordam problemas de otimização multi-objetivo combinatórios ainda são escassos.

7.1 Trabalhos Relacionados

Ao longo das últimas décadas, diversas abordagens foram propostas com o objetivo de mitigar os desafios associados à maioria dos MaOPs. Entre essas abordagens, destacam-se as baseadas em relações de dominância alternativas à relação de dominância Pareto, indicadores de qualidade e métodos de decomposição, entre outras. Contudo, tais abordagens também possuem limitações específicas, evidenciando a necessidade de soluções inovadoras que possam lidar com uma ampla variedade de MaOPs.

Embora comparações diretas com trabalhos anteriores não sejam viáveis, recorremos a pesquisas relevantes para respaldar e validar a viabilidade da abordagem proposta. Além disso, mesmo que alguns desses trabalhos não abordem o mesmo MOP/MaOP, eles compartilham conceitos ou técnicas semelhantes, o que reforça a fundamentação da solução proposta.

Uma das vertentes amplamente exploradas na resolução de MaOPs consiste em abordagens que simplificam o problema por meio de modificações no conjunto original de funções objetivo, buscando preservar, tanto quanto possível, a estrutura original do

problema. Nesse contexto, estratégias voltadas para a redução da dimensionalidade do espaço de objetivos em MaOPs foram discutidas por Brockhoff e Zitzler (2006), Brockhoff e Zitzler (2007), que levantaram alguns questionamentos, tais como: todos os objetivos são realmente necessários para preservar as características do problema? Sob quais condições a redução de objetivos é viável? Como um conjunto mínimo de objetivos pode ser computado? Nesses estudos, os autores introduziram o Problema do Subconjunto Mínimo de Objetivos (*Minimum Objective Subset Problem*, MOSS) e apresentaram um *framework* matemático geral capaz de determinar se todos os objetivos otimizados são necessários para preservar as características do problema. Além disso, identificaram as condições que viabilizam uma redução no conjunto de objetivos e demonstraram como calcular um subconjunto mínimo de objetivos utilizando algoritmos exatos e heurísticos. Outro exemplo relevante é a abordagem de soma ponderada baseada em correlação proposta por Murata e Taki (2009), Murata e Taki (2010). Nesses estudos, os autores demonstraram a eficácia do uso de informações de correlação entre objetivos para agrupar objetivos relacionados, reduzindo, assim, o número de objetivos a serem otimizados. O algoritmo proposto combina uma abordagem de soma ponderada com uma técnica baseada em arquivo, visando superar a dificuldade de convergir para soluções Pareto-ótimo ao ser aplicado a MaOPs. Os resultados demonstraram que a redução do número de objetivos por meio do agrupamento baseado em correlação permitiu ao NSGA-II operar de forma mais eficiente, exercendo uma melhor pressão de busca direcionada ao conjunto de soluções Pareto ao ser aplicado a MaOPs.

Alguns estudos presentes na literatura propuseram abordagens baseadas na otimização de subconjuntos de objetivos, derivados do conjunto original de objetivos do problema. De maneira geral, essas abordagens “decompõem”a formulação original do problema para construir formulações menores, com um número reduzido de objetivos. Por exemplo, os algoritmos MEANDS (LAFETA et al., 2018) e MEANDS-II (LAFETA; OLIVEIRA, 2019) mantêm, ao longo do processo evolutivo, um conjunto de soluções não-dominadas (considerando a relação de dominância Pareto) para cada subconjunto composto por k objetivos, sendo k um valor definido no intervalo $[2, M]$. Dessa forma, esses algoritmos lidam simultaneamente com $2^M - M - 1$ conjuntos de soluções não-dominadas, abrangendo diferentes níveis de granularidades. Ao atingir o critério de parada, os algoritmos retornam o conjunto de soluções não-dominadas com base na formulação original do problema.

Em Aguirre e Tanaka (2009a), Aguirre e Tanaka (2009b), os autores propuseram um método para resolver MaOPs que se baseia na divisão do espaço de objetivos em subespaços e na execução de uma geração do processo evolutivo em cada subespaço, concentrando a busca em regiões menores do espaço de objetivos. O método proposto utiliza uma estratégia de partição para agendar a amostragem dos subespaços, assegurando que diferentes regiões sejam exploradas ao longo das gerações. Adicionalmente, foi empregado um procedimento adaptativo de ϵ-classificação para reclassificar as soluções dentro de cada

subespaço. Esse procedimento concede uma vantagem seletiva a algumas das soluções inicialmente bem classificadas em todo o espaço de objetivos, permitindo que a seleção priorize a exploração. Os autores destacam que a combinação entre o particionamento do espaço de objetivos, a estratégia de particionamento e a ϵ-classificação adaptativa promove uma busca mais eficaz, resultando em uma melhor convergência e diversidade de soluções para os MaOPs. Três estratégias de particionamento foram analisadas: aleatória, fixa e com deslocamento. O método proposto foi implementado com base na arquitetura do algoritmo NSGA-II. Posteriormente, uma nova estratégia de particionamento, baseada em informações de conflito entre objetivos, foi proposta em Jaimes et al. (2010), Jaimes et al. (2011), Jaimes et al. (2014). Para tratar MaOPs, essa estratégia divide o espaço de objetivos em diversos subespaços com base na análise de conflito entre objetivos, obtida a partir da aproximação da fronteira Pareto da geração corrente. Segundo os autores, ao dividir os objetivos com base no grau de conflito entre eles, é possível decompor um MOP/MaOP em diversos subproblemas de menor dimensionalidade, assegurando que cada subproblema preserve, tanto quanto possível, a estrutura original do problema. Para enfatizar a busca em regiões menores do espaço de objetivos, essa estratégia foi integrada ao algoritmo NSGA-II, de modo que os processos de classificação por não-dominância e seleção fossem realizados de forma independente em cada subespaço.

De acordo com Deb, Zope e Jain (2003), Luna e Alba (2015), o uso de EAs na resolução de MOPs é amplamente difundido na comunidade de pesquisa em computação evolutiva, principalmente por sua capacidade de encontrar soluções *trade-off* em uma única execução e por sua menor sensibilidade à forma da fronteira Pareto-ótimo, permitindo assim a resolução de uma ampla variedade de MOPs. Apesar dessas vantagens, esses algoritmos podem ser computacionalmente custosos, principalmente por dois fatores. O primeiro é que, em geral, eles precisam explorar uma grande parte do espaço de busca para obter um conjunto de soluções bem distribuído ao longo da fronteira Pareto-ótimo, o que resulta em um maior número de avaliações das funções objetivo. Além disso, à medida que o número de objetivos aumenta, a quantidade de soluções não-dominadas cresce, e o número de soluções necessárias para representar uma superfície multidimensional também se torna elevado. Isso exige que os MOEAs utilizem populações de maior tamanho. O segundo fator está relacionado aos próprios MOPs, muitos dos quais são derivados de cenários reais e, frequentemente, envolvem um alto custo computacional para a avaliação das funções objetivo e das restrições. O uso de esquemas de paralelismo surge como uma opção atraente quando os MOEAs demandam um uso intensivo de recursos computacionais. Como esses algoritmos adotam uma abordagem baseada em população, eles são particularmente adequados para paralelização, uma vez que seus principais operadores (recombinação, mutação e avaliação da função objetivo) podem ser executados de forma independente em diferentes indivíduos (LUNA; NEBRO; ALBA, 2006). Segundo, (FIGUEIRA et al., 2010), MOEAs paralelos ou distribuídos apresentam não apenas maior eficiência em tempo de

computação, mas também uma maior capacidade de encontrar soluções de alta qualidade quando realizam múltiplas buscas evolutivas em diferentes direções. Além disso, essa estrutura distribuída permite que um dMOEA mantenha a diversidade populacional, evitando ótimos locais e facilitando o processo de busca multiobjetivo (GONG et al., 2015). No contexto da otimização multiobjetivo, a computação distribuída permite atribuir a cada processador ou nó computacional a tarefa de explorar uma região específica da fronteira Pareto-ótimo (DEB; ZOPE; JAIN, 2003). Para uma visão abrangente dessas abordagens, recomenda-se a consulta aos *surveys* apresentados por Cheshmehgaz, Haron e Sharifi (2015), Gong et al. (2015), que apresentam análises detalhadas e discussões aprofundadas sobre as metodologias e aplicações desses algoritmos.

Em Deb, Zope e Jain (2003), os autores propuseram um MOEA distribuído baseado no algoritmo NSGA-II com o objetivo de encontrar um conjunto de soluções bem distribuído ao longo da fronteira Pareto-ótimo. Essa abordagem, fundamentada no paradigma de dividir para conquistar, utilizou um modelo de ilhas com migração e aplicou o princípio de dominância guiada (BRANKE; KAUSSLER; SCHMECK, 2001) para atribuir diferentes direções de busca a diferentes ilhas (processadores). Por meio de um critério de dominância modificado, essa abordagem divide implicitamente a busca em diferentes regiões, atribuindo a cada processador uma região específica do espaço de objetivos, com o intuito de encontrar apenas uma região específica da fronteira Pareto-ótimo. No entanto, cada processador ainda pode dedicar parte de seu esforço à exploração de todo o espaço de busca disponível. O conceito de dominância guiada é definido por meio de uma transformação baseada em funções ponderadas dos objetivos, que altera a definição de dominância, permitindo que uma maior região se torne dominada por qualquer solução, em comparação à definição de dominância usual. Dado que uma maior região é dominada, a fronteira Pareto-ótimo completa (de acordo com a definição de dominância original) pode não ser necessariamente não-dominada de acordo com essa nova definição de dominância, o que possibilita enfatizar determinadas regiões da fronteira Pareto-ótimo durante o processo de busca. Os resultados apresentados demonstraram que o uso de múltiplos processadores permite obter um conjunto de soluções amplamente distribuído, com boa eficiência computacional. No entanto, para que a transformação seja bem-sucedida, é necessário conhecer previamente alguns vetores de objetivo pertencentes à fronteira Pareto-ótimo, isto é, conhecer a sua forma. Além disso, essa abordagem é aplicável exclusivamente em casos que a fronteira Pareto-ótimo é convexa.

Com o objetivo de ampliar a aplicabilidade a fronteiras Pareto-ótimo não-convexas, Branke et al. (2004) introduziram uma abordagem baseada na separação por cones. Essa abordagem permite que diferentes processadores se concentrem em distintas regiões da fronteira Pareto-ótimo, dividindo explicitamente o espaço de busca em diferentes regiões e atribuindo cada uma delas a um processador específico para exploração. Isso é viabilizado por meio da adição de restrições explícitas a cada processador, possibilitando uma explora-

ção direcionada. As análises realizadas demonstraram que o algoritmo NSGA-II, quando integrado à abordagem proposta, apresentou um desempenho superior tanto em relação ao NSGA-II padrão (com uma única população) quanto a uma abordagem baseada no modelo de ilhas convencional. Além disso, essa abordagem opera independentemente da geometria (forma) da fronteira Pareto-ótimo, sendo eficaz mesmo para fronteiras côncavas e não contínuas.

Em Mansour, Basseur e Saubion (2018), foi proposto um framework cooperativo baseado em múltiplas populações, que integra o algoritmo de busca local multiobjetivo IBMOLS (BASSEUR; BURKE, 2007), baseado em indicador de qualidade, a um modelo cooperativo. Essa abordagem tem como objetivo otimizar a qualidade global da aproximação do conjunto Pareto-ótimo, evoluindo várias subpopulações em paralelo, cada uma executando uma configuração distinta do IBMOLS. O algoritmo emprega uma versão ponderada do indicador de qualidade ϵ-*Additive Indicator* (I_{ϵ^+}), utilizando diferentes vetores de peso. Além disso, todas as populações mantidas cooperam entre si por meio do compartilhamento de um arquivo composto por soluções não-dominadas, que armazena as melhores soluções encontradas ao longo do processo de otimização e é utilizado para re-inicializar periodicamente cada subpopulação. De maneira geral, esse algoritmo utiliza múltiplos processos de busca paralelos que exploram diferentes direções no espaço objetivo, por meio de uma versão ponderada do indicador de qualidade (I_{ϵ^+}). Em comparação com diversos algoritmos aproximados da literatura aplicados ao conhecido problema da mochila multiobjetivo 0/1, o framework demonstrou a capacidade de encontrar soluções *trade-off* de alta qualidade dentro das restrições de tempo estabelecidas, superando diferentes algoritmos da literatura.

Em Liu, Du e Guo (2019), foi desenvolvido um algoritmo evolutivo baseado em múltiplas populações, guiado por um único objetivo, para resolver tanto MOPs quanto MaOPs que possuem fronteiras Pareto com diferentes geometrias (formas). O algoritmo é estruturado em três etapas. Na primeira, cada subpopulação otimiza um único objetivo para gerar bons pontos ideais e pontos de referência. A segunda etapa consiste em um processo paralelo de otimização multiobjetivo baseado em múltiplas populações, no qual um mecanismo de particionamento do espaço objetivos é empregado para transformar o MOP/MaOP em múltiplos subproblemas. Cada subpopulação é associada a um desses subproblemas, e um novo mecanismo de compartilhamento de informações entre subpopulações é utilizado para equilibrar diversidade e convergência. Um conjunto de vetores de peso é dividido em K subconjuntos, cada um correspondente a uma determinada sub-região não isolada do espaço de objetivos e atribuído a uma subpopulação. Por fim, na terceira etapa, as K subpopulações são combinadas com o objetivo de aprimorar ainda mais a convergência e obter uma fronteira Pareto bem distribuída, realizando um novo processo de otimização multiobjetivo. Os resultados experimentais demonstraram que o algoritmo proposto superou nove MOEAs representativos, tanto quando aplicados a MOPs quanto a MaOPs.

Em Kantour, Bouroubi e Chaabane (2019), foi apresentado o *Parallel Criterion-based Partitioning MOEA* (PCPMOEA), um MOEA paralelo aplicado ao problema da mochila multi-objetivo multidimensional (Multidimensional Multi-objective Knapsack Problem, MOMKP). Desenvolvido com base no modelo *master/worker*, o algoritmo adota uma estratégia de busca baseada na partição periódica de soluções potencialmente eficientes, que são distribuídas entre múltiplos MOEAs operando em diferentes populações. Cada MOEA concentra-se na otimização de um único objetivo, combinando abordagens baseadas tanto em critério quanto em dominância. A abordagem proposta é orquestrada por um algoritmo de monitoramento, que atualiza periodicamente as soluções eficientes e as redistribui entre os MOEAs, visando alcançar dois subobjetivos principais: minimizar a distância entre as soluções não-dominadas atuais e o ponto ideal, além de garantir uma boa distribuição das soluções potencialmente eficientes. Um estudo experimental comparou o algoritmo proposto com quatro algoritmos amplamente reconhecidos na literatura, demonstrando resultados conclusivos quanto à convergência e diversidade das soluções.

Ao analisar as semelhanças entre as abordagens mencionadas anteriormente e a proposta neste estudo, é importante observar que, ao considerar formulações compostas por um subconjunto dos objetivos de um MOP/MaOP, essencialmente eles estão criando combinações lineares em que os valores da força da correlação assumem apenas os valores 0 ou 1. Em outras palavras, um objetivo é totalmente considerado ou completamente removido do processo de otimização. Para fins explicativos, suponha-se um problema com três funções objetivo, F_1, F_2 e F_3, todas a serem minimizadas. Considera-se F_1 como a base da combinação linear e F_3 como a função objetivo a ser substituída pela combinação linear G_3. Se a correlação for artificialmente induzida com força zero, otimiza-se diretamente a própria F_3, ou seja, $G_3 = F_3$. Por outro lado, ao utilizar uma correlação com força igual a 1, F_3 é anulada e substituída por F_1, resultando em $G_3 = F_1$. É importante destacar que a otimização de um MOP composto pelas funções objetivo F_1, F_2 e G_3, em que $G_3 = F_1$, não é equivalente à otimização de um problema bi-objetivo formado apenas pelas funções objetivo F_1 e F_2. No entanto, ao obter melhores valores para a função objetivo F_1, consequentemente também se obtêm melhores valores para G_3.

Outros estudos têm se concentrado na detecção e compreensão das fontes de dificuldades inerentes aos MaOPs, associando-as tanto às características dos próprios problemas quanto às dos MOEAs utilizados para resolvê-los. Em Ishibuchi et al. (2011a), Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015), foram analisados os comportamentos de MOEAs amplamente utilizados, pertencentes a três classes distintas, quando aplicados a MaOPs com objetivos correlacionados ou dependentes. Esses estudos confirmaram a deterioração do desempenho de algoritmos baseados na relação de dominância Pareto ao lidarem com MaOPs. No entanto, demonstraram que o NSGA-II apresentou um desempenho satisfatório e até mesmo superou outros algoritmos quando os objetivos eram altamente correlacionados ou dependentes. Além disso, os autores sugeriram a potencial utilidade da multiobjetivização

de problemas bi-objetivos para problemas com múltiplos objetivos e objetivos dependentes. Também concluíram que o MOEA/D obteve um desempenho satisfatório em uma ampla gama de problemas de teste, porém apresentou padrões de busca distintos dependendo da escolha da função de escalarização e dos valores de seus parâmetros. Ademais, sua capacidade de busca foi prejudicada pelo aumento no número de objetivos, mesmo quando esses eram altamente correlacionados ou dependentes. De acordo com os autores, essas observações, juntamente com outras não mencionadas aqui, mas detalhadas nos seus estudos, sugerem que a dificuldade de otimizar MaOPs depende tanto das características dos MOEAs quanto da natureza intrínseca dos próprios problemas.

Em Ishibuchi et al. (2011b), o desempenho do MOEA/D foi analisado em MOPs com objetivos altamente correlacionados. Os experimentos, baseados em instâncias do problema da mochila multiobjetivo, demonstraram que a inclusão de objetivos correlacionados degrada significativamente o desempenho do MOEA/D, enquanto apresenta pouco ou nenhum impacto negativo no NSGA-II e no SPEA2. Esses resultados ressaltam a importância de ajustar os vetores de peso de acordo com a correlação entre os objetivos do problema.

Em um estudo recente conduzido por Liefooghe e Lopez-Ibanez (2023), diversos MOPs e MaOPs foram analisados para refutar a suposição de que problemas com muitos objetivos são intrinsecamente mais difíceis de otimizar do que aqueles com dois ou três objetivos. O estudo teve como objetivo fornecer evidências empíricas de que o aumento no número de objetivos tende a reduzir a complexidade do *lanscape* que está sendo otimizado. Um dos tópicos abordados na análise foi a influência da correlação entre objetivos no desempenho dos algoritmos quando aplicados a MaOPs. É de conhecimento que objetivos com correlação forte positiva não adicionam dificuldades significativas ao processo de otimização, pois a melhora em um objetivo tende a resultar na melhora dos demais. Por outro lado, objetivos não correlacionados ou com correlação negativa apresentam maior desafio do ponto de vista de otimização. Os resultados do estudo indicaram que, de maneira geral, à medida que o número de objetivos aumenta, o grau de conflito entre os valores associados aos objetivos tende a diminuir e convergir para zero. Essa observação se mantém válida tanto ao considerar o conjunto completo de soluções quanto ao analisar exclusivamente as soluções Pareto-ótimo obtidas ao final do processo evolutivo. Isso sugere que, independentemente do grau de conflito entre as funções objetivo do problema, a intensidade das correlações entre os valores dos objetivos tende a diminuir conforme o número de objetivos aumenta. Além disso, constatou-se que, à medida que o número de objetivos aumenta, torna-se mais fácil encontrar pelo menos uma solução Pareto-ótimo, quase independentemente das dificuldades associadas à forma do *landscape*, e buscas locais raramente ficam presas em ótimos locais, o que favorece a convergência para melhores aproximações. Segundo os autores, o principal desafio em lidar com MaOPs consiste em evitar a revisitação de soluções ou regiões da fronteira Pareto-ótimo já exploradas, bem como em identificar um subconjunto dessa fronteira que maximize alguma métrica de qualidade ou preferencia do

tomador de decisão.

7.2 Problema da Mochila com Muitos Objetivos

O problema da mochila (*Knapsack Problem*, KP) é um clássico problema de otimização combinatória que tem sido amplamente explorado tanto em estudos teóricos (PISINGER, 2005; SMITH-MILES; CHRISTIANSEN; MUÑOZ, 2021) quanto em estudos experimentais (DUDZIŃSKI; WALUKIEWICZ, 1987; MARTELLO; TOTH, 1987; MARTELLO; TOTH, 1990; BAZGAN; HUGOT; VANDERPOOTEN, 2009) ao longo das últimas décadas. Em sua forma mais simples, o KP consiste em selecionar um subconjunto de itens com pesos e benefícios variados com o objetivo de maximizar o benefício total, respeitando a restrição de que o peso total dos itens selecionados não deve exceder a capacidade da mochila.

O MaOKP é uma extensão do KP, a qual considera múltiplos objetivos a serem otimizados simultaneamente. Nessa variante, cada item está associado a um benefício e a um peso para cada mochila (objetivo). Ao resolver o MaOKP, busca-se selecionar um subconjunto de itens que maximize o benefício total de cada mochila, respeitando a capacidade de cada uma. Com base na formulação bi-objetivo apresentada em Zitzler e Thiele (1999), um MaOKP pode ser definido da seguinte forma:

$$\text{Maximize: } F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_M(\mathbf{x})); \tag{48}$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \leq c_i, \quad i = 1,2,\ldots,M; \tag{49}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,\ldots,n; \tag{50}$$

$$\text{em que } f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1,2,\ldots,M; \tag{51}$$

em que M representa o número de funções objetivo (correspondentes às diferentes mochilas), n é o número de itens disponíveis, e x_j é a variável de decisão que determina se o item j é selecionado ($x_j = 1$) ou não ($x_j = 0$) para ser incluído em todas as mochilas. Uma solução para este MaOKP é representada por meio de um vetor binário de tamanho n. Portanto, ao selecionar o item j, é importante ressaltar que todas as M mochilas conterão esse item. Além disso, $a_{i,j}$ é um valor inteiro que representa o lucro obtido quando o item j é selecionado para a mochila i, enquanto $b_{i,j}$ é um valor inteiro que corresponde ao peso do item j na mochila i. Cada mochila i possui uma capacidade c_i, que deve ser respeitada. Conforme estabelecido em Zitzler e Thiele (1999), a capacidade de cada mochila foi definida como sendo 50% da soma de todos os pesos associados a ela. Vale destacar que, ao contrário das formulações apresentadas em Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015), esta

formulação inclui uma restrição de capacidade para cada mochila (função objetivo). Como resultado, cada problema de teste terá um conjunto único de soluções factíveis.

7.3 Formulações com Objetivos Correlacionados

Neste estudo, introduzimos duas novas estratégias para a construção de formulações com objetivos correlacionados (formulações alternativas), derivadas da abordagem proposta em Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015). Essa abordagem consiste em substituir algumas das funções objetivo de um MOP/MaOP por novas funções objetivo criadas por meio de combinações lineares entre dois objetivos. Supondo que o MOP/MaOP em questão possua M funções objetivo, a formulação alternativa é construída da seguinte forma:

$$\text{Maximize: } l(\mathbf{x}) = (l_1(\mathbf{x}), l_2(\mathbf{x}), \ldots, l_M(\mathbf{x})) \tag{52}$$

$$\text{Subject to: (49) e (50).} \tag{53}$$

A formulação com objetivos correlacionados mantém as mesmas restrições da formulação original, preservando, assim, o espaço de soluções factíveis. Os objetivos correlacionados $l_i(x)$ são definidos a partir dos objetivos originais $f_i(x)$ por meio de um valor real $\alpha \in [0,1]$, conforme apresentado a seguir:

$$l_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1,2 \tag{54}$$

$$l_i(\mathbf{x}) = \alpha \cdot f_1(\mathbf{x}) + (1-\alpha) \cdot f_i(\mathbf{x}), \quad i = 3,5,\ldots,M \tag{55}$$

$$l_i(\mathbf{x}) = \alpha \cdot f_2(\mathbf{x}) + (1-\alpha) \cdot f_i(\mathbf{x}), \quad i = 4,6,\ldots,M. \tag{56}$$

Observe que as funções objetivo $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são preservadas e passam a ser denotadas como $l_1(x)$ e $l_2(x)$, respectivamente. Cada função objetivo pertencente ao subconjunto de funções objetivo indexadas por números impares ($i = 3,5\ldots,M$) é definida como uma combinação linear de si mesma com a função objetivo $f_1(x)$, na qual o peso de $f_1(x)$ é definido pelo valor de α, e o peso da própria função, por $(1-\alpha)$. Analogamente, as funções objetivo pertencentes ao subconjunto de funções objetivo indexadas por números pares ($i = 4,6,\ldots,M$) são definidas como combinações lineares de si mesmas com a função objetivo $f_2(x)$, atribuindo-se o valor de α como peso de $f_2(x)$ e $(1-\alpha)$ como o peso da respectiva função. Essa forma de construção da formulação alternativa com objetivos correlacionados segue as diretrizes propostas por Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015).

Neste contexto, o valor de α pode ser interpretado como a intensidade (força) da correlação artificialmente introduzida entre as funções objetivo. Quando α assume seu valor mínimo ($\alpha = 0$), $l_i(x)$ é igual a $f_i(x)$. Em contrapartida, quando α assume seu valor máximo

($\alpha = 1$), $l_i(x)$ passa a ser igual a $f_1(x)$ ou $f_2(x)$, dependendo do subconjunto ao qual o índice da função objetivo pertence. Essencialmente, o valor de α controla a influência das funções objetivo $f_1(x)$ e $f_2(x)$ na construção das combinações lineares.

Conforme descrito em Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015), uma formulação com objetivos correlacionados é sempre construída utilizando as funções objetivos $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como base para todas as combinações lineares, associando objetivos ímpares a outros ímpares e objetivos pares a outros pares. Dessa forma, a única maneira de criar formulações distintas é variando o valor de α, que determina a intensidade da correlação artificialmente induzida. Com base nessa estratégia, nossa primeira abordagem supera essa limitação construindo uma formulação com objetivos correlacionados utilizando como base cada diferente par de funções objetivo que inclua uma função objetivo com índice ímpar e outra com índice par. Portanto, para um MOP/MaOP com M funções objetivo, essa estratégia resulta na construção de $(M/2 \cdot M/2)$ formulações alternativas. É importante destacar que, independentemente do par de objetivos escolhido como base, a criação das combinações lineares segue a mesma diretriz apresentada em Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015).

Tabela 9 – Formulações com objetivos correlacionados construídas para um MaOkP com 4 funções objetivo, conforme a primeira estratégia.

Formulação	Objetivos Fixados	Objetivos Correlacionados
1	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1{,}2$	$l_3(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
2	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1{,}4$	$l_3(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$ $l_2(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$
3	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 3{,}2$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
4	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 3{,}4$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_2(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$

Conforme apresentado na Tabela 9, ao considerar um MaOkP com quatro funções objetivo como exemplo, essa primeira abordagem resulta na construção de quatro formulações distintas com objetivos correlacionados, uma para cada possível par de funções objetivo composto por um objetivo par e outro ímpar. Em cada formulação com objetivos correlacionados criada, a intensidade da correlação artificialmente induzida, representada por α, é parametrizada. Neste estudo, analisamos quatro valores específicos de α ($\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$). Dessa forma, para um problema formulado com quatro funções objetivo, essa abordagem gera um total de 16 formulações alternativas distintas derivadas da formulação original.

Como essa primeira abordagem seleciona apenas pares de funções objetivo compostos por uma função objetivo com índice ímpar e outra com índice par, e as combinações lineares são construídas combinando funções objetivo ímpares entre si e funções objetivos pares entre si, apenas uma amostra de todas as possíveis formulações com objetivos

correlacionados é criada. Para superar essa limitação, propomos uma segunda abordagem que cria todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados. Nessa abordagem, não há restrições na seleção do par de objetivos que servirá de base para a construção das combinações lineares (objetivos correlacionados). Desta forma, existem $C_{M,2} = \frac{M(M-1)}{2}$ possíveis combinações de pares de objetivos para formar a base das combinações lineares. Além disso, como também não há restrições sobre a escolha de qual objetivo do par será selecionado para compor cada combinação linear, para cada diferente par de objetivos selecionados como base, existem $C_{M-2,(M-2)/2}$ possíveis formas de construir as $M-2$ combinações lineares existentes em cada formulação com objetivos correlacionados. Dessa forma, essa abordagem gera um total de $(C_{M,2} \cdot C_{M-2,(M-2)/2})$ formulações alternativas.

Tabela 10 – Formulações com objetivos correlacionados construídas para um MaOkP com 4 funções objetivo, conforme a segunda estratégia.

Formulação	Objetivos Fixados	Objetivos Correlacionados
1	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1,2$	$l_3(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
2	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1,2$	$l_3(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
3	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1,3$	$l_2(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
4	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1,3$	$l_2(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
5	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1,4$	$l_2(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$ $l_3(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$
6	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1,4$	$l_2(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$ $l_3(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$
7	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 2,3$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
8	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 2,3$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_4(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_4(x)$
9	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 2,4$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_3(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$
10	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 2,4$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_3(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$
11	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 3,4$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_2(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$
12	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 3,4$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_4(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$ $l_2(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$

Conforme apresentado na Tabela 10, para um MaOKP com quatro funções objetivo, essa segunda abordagem resulta na construção de 12 formulações com objetivos correlacionados distintas. Como consideramos quatro valores específicos para α ($\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$), um total de 48 formulações alternativas distintas serão construídas a partir da formulação original do problema.

7.4 Abordagem Baseada em Formulações com Objetivos Correlacionados

A abordagem proposta tem como objetivo aprimorar o desempenho de um MOEA com o mínimo esforço. Para isso, são criadas diferentes formulações alternativas derivadas da formulação original, nas quais correlações lineares artificiais são induzidas entre os objetivos. Além da otimização baseada na formulação original do problema, para cada formulação alternativa do MOP/MaOP criada, é alocada uma execução independente do MOEA selecionado, na qual o processo evolutivo é conduzido com base na formulação correspondente. Ao término de todas as execuções, os conjuntos de aproximação obtidos são convertidos de volta para a formulação original do MOP/MaOP, combinados, e apenas as soluções não-dominadas (segundo a formulação original) são retornadas como saída do otimizador. Devido às suas características, a abordagem proposta pode ser categorizada como um MOEA distribuído, no qual múltiplos processos evolutivos independentes ocorrem simultaneamente, diferenciando-se apenas pelo conjunto de funções objetivo sendo otimizado. Essa estratégia visa direcionar buscas independentes para diferentes regiões do espaço de objetivos, permitindo alcançar diferentes partes da fronteira Pareto-ótimo em uma única execução. Uma descrição detalhada da abordagem proposta é apresentada no Algoritmo 10.

Algoritmo 10: MOEA DISTRIBUÍDO

Entrada: N (tamanho da população), $criterio_parada$ (critério de parada), F (conjunto composto por f formulações distintas do MOP/MaOP), $MOEA$ (MOEA utilizado), I (conjunto composto pelos valores das intensidades das correlações artificialmente induzidas)

Saída: P_{final} (aproximação da fronteira Pareto-ótimo)

1 **início**
2 $n \leftarrow 0$
3 $P_n \leftarrow$ Gera aleatóriamente uma população inicial de tamanho n
4 $All \leftarrow \varnothing$
5 **para** *cada* $f \in F$ **faça**
6 **para** *cada* $i \in I$ **faça**
7 $P' \leftarrow$ Exacuta o $MOEA$ utilizando a formulação f, a intensidade i e a população P_n até alcançar o critério de parada $criterio_parada$
8 $P' \leftarrow$ Avalia a população P' com base na formulação original
9 $All \leftarrow All \cup P'$
10 $P_{final}l \leftarrow$ Filtra apenas as soluções não-dominadas em All
11 **retorna** P_{final}

7.5 Experimentos Computacionais e Análise dos Resultados

Nesta seção, conduzimos experimentos computacionais com o objetivo de avaliar o impacto da utilização da abordagem proposta no comportamento de busca de MOEAs amplamente utilizados na literatura. Além disso, comparamos o desempenho dos MOEAs integrados à abordagem proposta com suas respectivas versões de referência, com o intuito de mensurar o ganho de desempenho. Para esse estudo, selecionamos os algoritmos NSGA-II (DEB et al., 2002), NSGA-III (DEB; JAIN, 2014), IBEA (ZITZLER; KÜNZLI, 2004) e MOEAD (ZHANG; LI, 2007), pertencentes a diferentes categorias, para integrar a abordagem proposta. Para a realização dos experimentos computacionais, utilizamos exclusivamente a estratégia que gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados e adotamos o MOKP com três objetivos e o MaOKP com quatro objetivos como problemas de teste. Seguindo a metodologia de Ishibuchi, Akedo e Nojima (2015), os valores inteiros dos benefícios e pesos foram gerados aleatoriamente dentro do intervalo $[10, 100]$. Ambos os problemas de teste possuem 500 itens. Denotamos os problemas de teste com três objetivos e quatro objetivos como 3-500 e 4-500, respectivamente.

Para garantir avaliações consistentes e justas, todos os experimentos computacionais foram conduzidos no ambiente do MOEA Framework (HADKA, 2015), um framework Java de código aberto e de uso livre desenvolvido para tarefas de otimização multiobjetivo. Embora o ambiente inclua uma implementação do MOKP, utilizamos uma codificação própria do problema nesta análise, devido à adoção de uma formulação distinta. Todos os testes computacionais foram executados em um computador com processador AMD Ryzen 7 5700G (3.80 GHz), 32 GB de RAM e sistema operacional Windows 11 Pro.

Em todos os experimentos computacionais, para ambos os problemas de teste, adotamos as seguintes especificações gerais de parâmetros nos quatro MOEAs:

- **Codificação:** vetor binário de comprimento 500.
- **Critério de parada:** 100.000 avaliações da função objetivo para as versões de referência dos MOEAs e 100.000 avaliações da função objetivo para cada formulação mantida pelos MOEAs integrados à abordagem proposta.
- **Operador de recombinação:** cruzamento uniforme com probabilidade de $0{,}8$.
- **Operador de mutação:** inversão de bits com probabilidade de $2/500$.
- **Tamanho da população:** 100 para o problema de teste 3–500 e 120 para o problema de teste 4–500.

Em relação aos parâmetros específicos de cada MOEA, para o MOEA/D, selecionamos a função de escalarização *Tchebycheff* e definimos o tamanho da vizinhança como $N \times 0{,}1$. Para o IBEA, adotamos o ϵ*-additive indicator* como indicador de qualidade e estabelecemos o valor do parâmetro k, utilizado no cálculo da aptidão dos indivíduos, em $0{,}05$.

Para ambos os problemas de teste, tratamos soluções infactíveis por meio de uma estratégia de reparo gulosa amplamente estabelecida e eficaz, previamente utilizada em pesquisas anteriores (ZITZLER; THIELE, 1999; ISHIBUCHI; AKEDO; NOJIMA, 2015). Essa estratégia opera de forma iterativa até que todas as restrições sejam devidamente atendidas, ou seja, até que a capacidade de todas as mochilas seja respeitada. Para isso, itens são removidos iterativamente em ordem crescente de um valor específico calculado, definido da seguinte forma:

$$q_j = \max\{a_{i,j}/b_{i,j} | i = 1, 2, \cdots, M\}, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{57}$$

A ordem de remoção dos itens é definida conforme a Equação (57), independentemente do número de itens e do número de objetivos do problema de teste.

Para avaliar a qualidade dos conjuntos de aproximação gerados nos experimentos computacionais, seguimos o protocolo proposto por Knowles, Thiele e Zitzler (2006). Inicialmente, para cada problema de teste γ, construímos o conjunto Z_γ^{all} combinando todos os conjuntos de aproximação obtidos pelos algoritmos avaliados. Em seguida, identificamos os valores mínimo e máximo para cada função objetivo em Z_γ^{all}, denominados $\mathbf{z}^{\text{min}} = [z_1^{\text{min}}, \cdots, z_m^{\text{min}}]$ e $\mathbf{z}^{\text{max}} = [z_1^{\text{max}}, \cdots, z_m^{\text{max}}]$, em que z_k^{min} e z_k^{max} representam, respectivamente, os limites inferior e superior do k-ésimo objetivo otimizado. Com base nesses limites, cada ponto $\mathbf{z} \in Z_\gamma^{\text{all}}$ é normalizado para garantir que todos os valores das funções objetivo estejam dentro do intervalo $[0,1]$. Por fim, para cada problema de teste γ, construímos um conjunto de referência Z_γ^*, que contém todos os pontos não-dominados pertencentes a Z_γ^{all}.

Três diferentes indicadores de qualidade foram utilizados para avaliar o desempenho dos algoritmos: o Hipervolume (I_{HV}) (ZITZLER; THIELE, 1998), o *Binary ϵ-Additive Indicator* (I_{ϵ^+}) (ZITZLER et al., 2003) e o *Inverted Generational Distance Plus* (IGD_+)(ISHIBUCHI et al., 2015). Exceto para o I_{HV}, quanto menor o valor obtido para o indicador de qualidade, melhor a qualidade do conjunto de aproximação correspondente. Destaca-se que, para o IGD_+ e o I_{ϵ^+}, o conjunto Z_γ^*, uma aproximação do conjunto Pareto-ótimo, é utilizado como referência nós cálculos dos indicadores de qualidade.

Com base nos valores obtidos para os indicadores de qualidade I_{HV}, I_{ϵ^+} e IGD_+, foram realizadas análises estatísticas por meio de um teste não paramétrico, uma vez que a suposição de normalidade dos dados foi rejeitada em todos os casos. Para cada problema de teste, comparações pareadas entre os algoritmos foram conduzidas utilizando o teste de *Wilcoxon rank-sum* (também conhecido como teste de *Wilcoxon-Mann-Whitney*). A hipótese nula estabelece que os valores dos indicadores de qualidade obtidos pelos dois algoritmos comparados não diferem significativamente em termos de localização, sendo quaisquer variações observadas atribuídas ao acaso. Por outro lado, a hipótese alternativa afirma que esses valores diferem significativamente em localização. Os testes de hipóteses foram

conduzidos considerando um nível de significância de 95%.

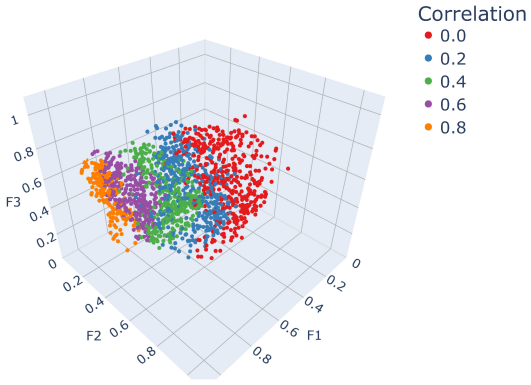
7.5.1 Problema de Teste 3-500

Para um MOKP com três funções objetivo, a abordagem proposta alocará um novo processo evolutivo do MOEA escolhido tanto para a formulação original do problema quanto para cada combinação possível entre uma formulação com objetivos correlacionados (apresentadas na Tabela 11) e um valor de força de correlação induzida (α). Portanto, considerando que serão geradas seis formulações com objetivos correlacionados e utilizados quatro valores distintos de força de correlação ($\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$), a abordagem proposta executará simultaneamente um total de 25 processos evolutivos (execuções independentes do MOEA) em cada execução. Vale destacar que, como esse problema de teste possui apenas três funções objetivo, cada formulação com objetivos correlacionados terá apenas uma combinação linear (objetivo correlacionado), enquanto as outras duas funções objetivo permanecem inalteradas em relação à formulação original.

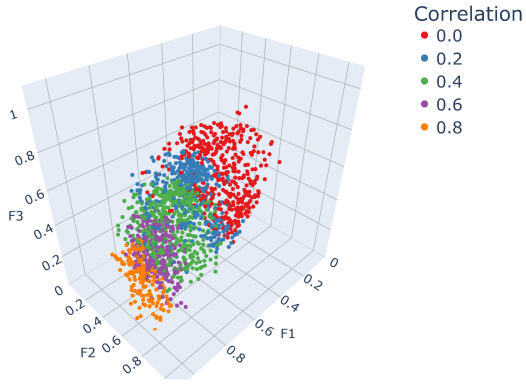
Tabela 11 – Formulações com objetivos correlacionados construídas para um MOkP com 3 funções objetivo, conforme a segunda estratégia.

Formulação	Objetivos Fixados	Objetivos Correlacionados
F3 based on F1	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1{,}2$	$l_3(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$
F2 based on F1	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1{,}3$	$l_2(x) = \alpha \cdot f_1(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$
F1 based on F2	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 2{,}3$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$
F3 based on F2	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1{,}2$	$l_3(x) = \alpha \cdot f_2(x) + (1-\alpha) \cdot f_3(x)$
F1 based on F3	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 2{,}3$	$l_1(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_1(x)$
F2 based on F3	$l_i(x) = f_i(x),\ i = 1{,}3$	$l_2(x) = \alpha \cdot f_3(x) + (1-\alpha) \cdot f_2(x)$

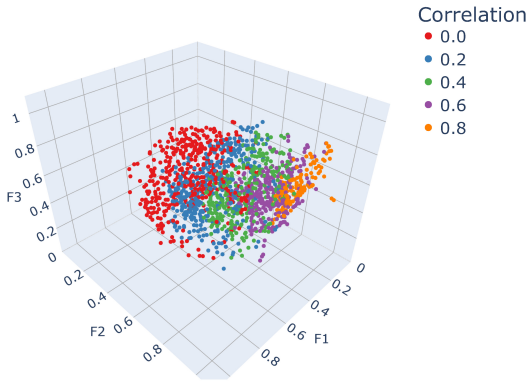
A Figura 15 apresenta os pontos não-dominados obtidos na geração final das 30 execuções do algoritmo MOEA/D para cada formulação com objetivos correlacionados. Para melhor visualização, os pontos não-dominados associados a cada formulação são exibidos em gráficos separados. As cores identificam os pontos com base nos valores de força de correlação ($\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$), sem, no entanto, representar o aumento ou a diminuição na força da correlação artificialmente induzida. Além disso, em todos os seis gráficos da Figura 15, destacamos em vermelho os pontos nâo-dominados obtidos ao otimizar a formulação original do problema de teste (rotulados como 0.0, indicando a ausência de correlação artificialmente induzida). Esse conjunto de pontos em vermelho é idêntico nos seis gráficos, sendo resultado da execução do MOEA/D otimizando a formulação original com um critério de parada de 100.000 avaliações da função objetivo em 30 execuções. Por fim, vale ressaltar que, embora cada gráfico contenha apenas pontos não-dominados em relação à formulação correspondente, alguns desses pontos podem ser dominados quando comparados com aqueles obtidos na otimização de outras formulações.



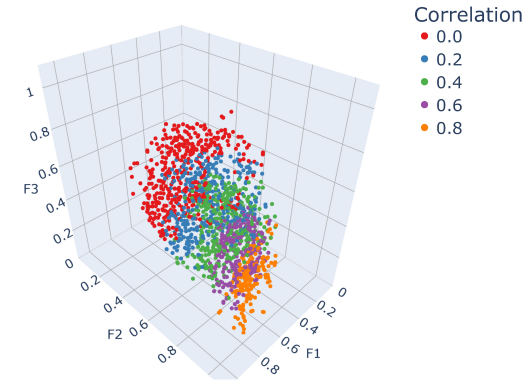
(a) F1 based on F2



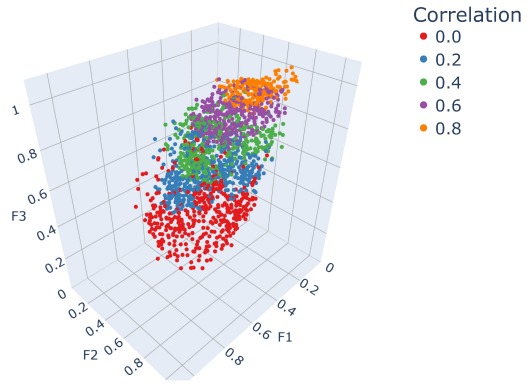
(b) F1 based on F3



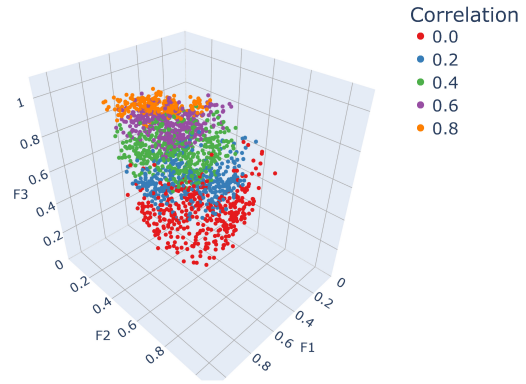
(c) F2 based on F1



(d) F2 based on F3



(e) F3 based on F1

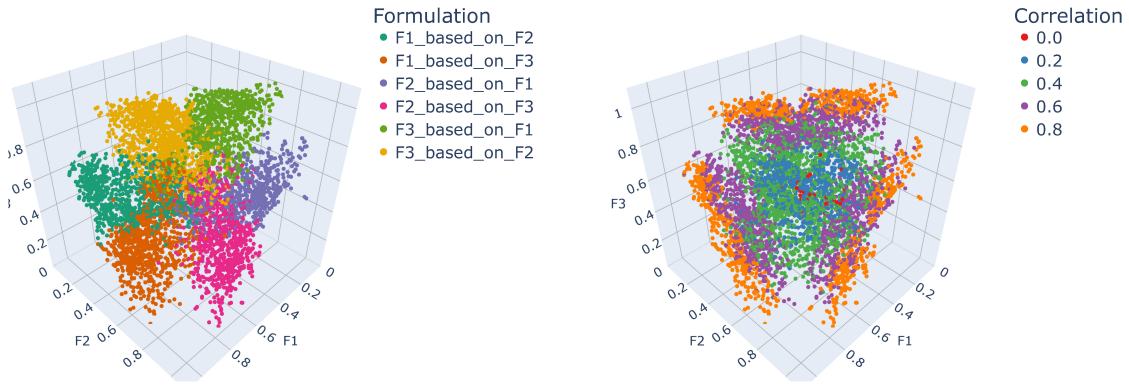


(f) F3 based on F2

Figura 15 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida.

Ao analisar cada gráfico individualmente, identificam-se dois pontos fundamentais. Primeiro, a introdução intencional de correlações artificiais entre os objetivos possibilita alcançar regiões no espaço de objetivos diferentes daquelas alcançadas ao executar o mesmo algoritmo otimizando a formulação original do problema de teste. Esse resultado evidencia o impacto positivo da incorporação de objetivos correlacionados na formulação utilizada para guiar o processo evolutivo do MOEA/D. Além disso, observa-se que, nos seis gráficos que representam as formulações com objetivos correlacionados, os pontos não-dominados obtidos para cada valor de força de correlação tendem a se agrupar, embora haja alguns casos de interseção. Essa tendência sugere que, ao adotar diferentes valores para a força da correlação artificialmente induzida em uma mesma formulação, é possível explorar e direcionar a busca para diferentes regiões do espaço de objetivos.

Ao considerar os seis gráficos simultaneamente e utilizar o conjunto de pontos destacados em vermelho como referência, observa-se que a otimização de diferentes formulações com objetivos correlacionados, combinada com a variação da força da correlação artificialmente induzida, permite ao MOEA/D explorar direções de busca distintas. Portanto, torna-se possível alcançar diferentes regiões do espaço de objetivos que, normalmente, não seriam exploradas ao otimizar apenas a formulação original do problema.



(a) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente à formulação que o originou.

(b) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente ao valor da força de correlação empregada para gerá-lo.

Figura 16 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D integrado à abordagem proposta.

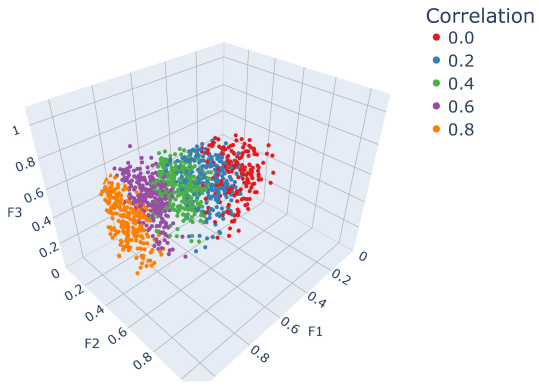
Os dois gráficos apresentados na Figura 16 oferecem uma visão consolidada das principais observações levantadas na análise da Figura 15. Ambos os gráficos exibem todos os pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D integrado à abordagem proposta. No gráfico à esquerda, cada ponto não-dominado é representado por uma cor distinta, correspondente à formulação que o gerou. Esse gráfico reforça a análise anterior, evidenciando que cada formulação alternativa direciona o processo de busca do MOEA para uma região específica do espaço de objetivos. Já no gráfico à direita, as cores indicam o valor da força de

correlação artificialmente induzida. Observa-se que a variação desse parâmetro também influencia a direção da busca, independentemente da formulação alternativa utilizada, resultando na exploração de diferentes regiões do espaço de objetivos. Além disso, vale destacar que os pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D ao otimizar a formulação original do MOKP, representados em vermelho, tendem a se concentrar na região próxima ao joelho da aproximação da fronteira Pareto-ótimo. À medida que o valor da força de correlação aumenta, os pontos gradualmente se afastam dessa região, distribuindo-se mais em direção às extremidades da fronteira.

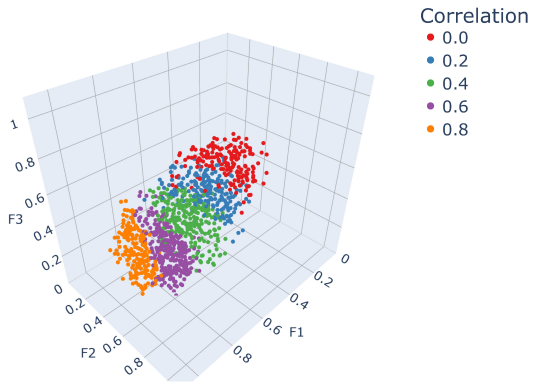
Para apresentar os resultados obtidos pelo algoritmo NSGA-III ao ser integrado à abordagem proposta (Figuras 17 e 18), utilizamos a mesma estratégia de visualização adotada anteriormente para o algoritmo MOEA/D (Figuras 15 e 16). De maneira análoga ao MOEA/D, a Fig. 17 evidencia que o NSGA-III, ao utilizar formulações com objetivos correlacionados aplicando diferentes forças de correlação, explora regiões do espaço de objetivos que, em geral, não seriam exploradas ao otimizar apenas a formulação original do problema. Esses resultados indicam que tanto a formulação com objetivos correlacionados adotada quanto o valor da força de correlação induzida influenciam a direção da busca conduzida pelo NSGA-III.

Apesar das semelhanças, algumas diferenças podem ser observadas nos resultados do NSGA-III em comparação com os obtidos para o MOEA/D. Em ambas as figuras, nota-se um comportamento de agrupamento mais pronunciado no NSGA-III, com poucas interseções entre os diferentes grupos. Esse padrão pode ser atribuído à compatibilidade entre a abordagem proposta e a estratégia de busca adotada pelo NSGA-III. Enquanto a abordagem proposta conduz buscas independentes em diferentes regiões do espaço de objetivos por meio de formulações com objetivos correlacionados distintas, o NSGA-III maximiza e preserva efetivamente a diversidade por meio de sua estratégia de nicho baseada em pontos de referência. Outra observação relevante diz respeito à cardinalidade do conjunto de pontos não-dominados obtido pelo NSGA-III ao otimizar a formulação original do MOKP. Como pode ser observado no gráfico da direita da Figura 18, representado em vermelho, o número de pontos não-dominados é visualmente imperceptível. No entanto, próximo ao centro (joelho) da aproximação da fronteira Pareto-ótimo, há um ponto não-dominado obtido pelo NSGA-III otimizando a formulação original. Esse resultado evidencia a eficácia da alocação de múltiplos processos evolutivos conduzidos por diferentes formulações com objetivos correlacionados.

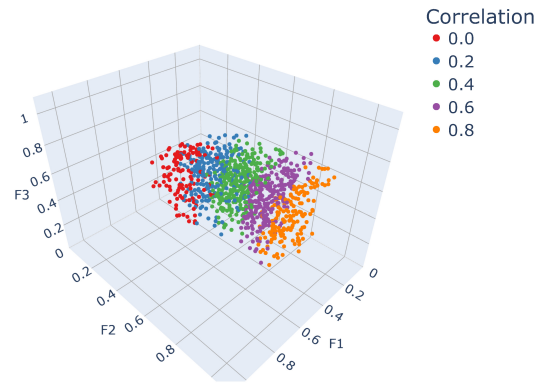
As Figuras 19 e 20 apresentam os pontos não-dominados obtidos na geração final das 30 execuções do IBEA e do NSGA-II, respectivamente, ambos integrados à abordagem proposta e aplicados ao problema de teste 3-500. Em ambas as figuras, cada gráfico exibe os pontos não-dominados obtidos ao otimizar uma formulação com objetivos correlacionados ao longo de 30 execuções. De modo geral, ambos os MOEAs, quando



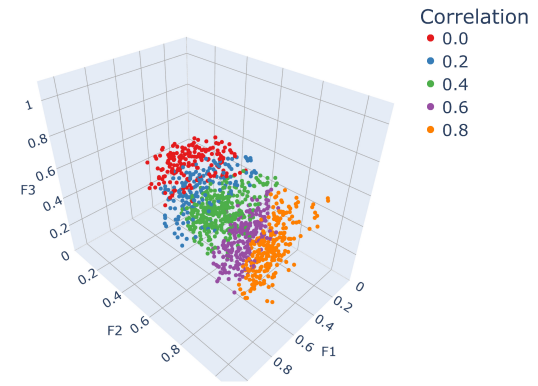
(a) F1 based on F2



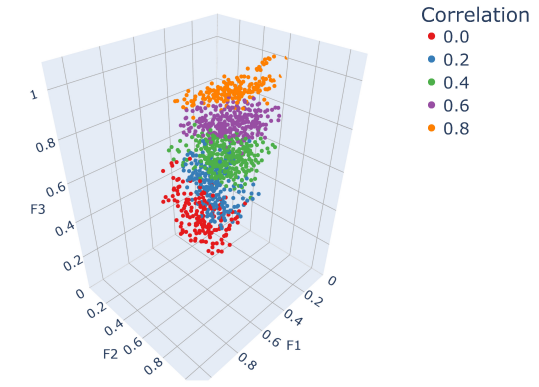
(b) F1 based on F3



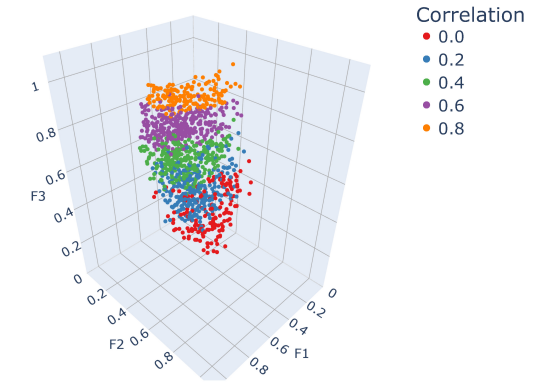
(c) F2 based on F1



(d) F2 based on F3

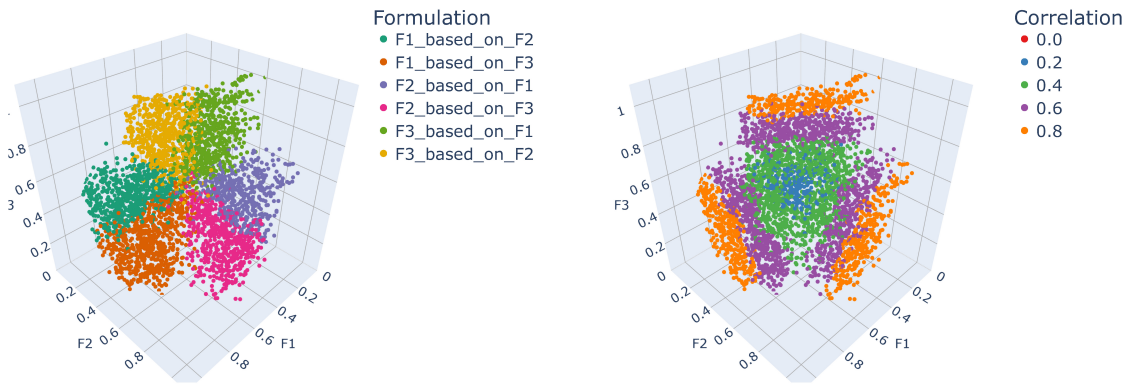


(e) F3 based on F1



(f) F3 based on F2

Figura 17 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida.



(a) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente à formulação que o originou.

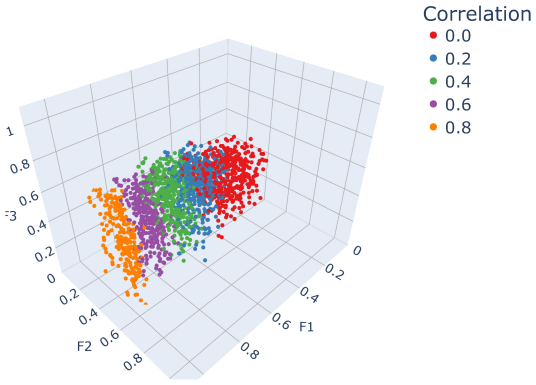
(b) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente ao valor da força de correlação empregada para gerá-lo.

Figura 18 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III integrado com à abordagem proposta.

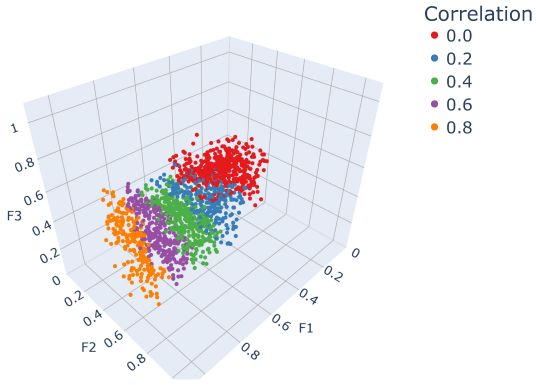
integrados à abordagem proposta, apresentaram comportamentos bastante semelhantes. Tomando como referência os pontos em vermelho, que correspondem à otimização da formulação original do MOKP, observa-se que a otimização de diferentes formulações com objetivos correlacionados permite aos algoritmos explorar direções de busca distintas, alcançando diversas regiões do espaço de objetivos. Além disso, a variação do valor da força da correlação artificialmente induzida também influencia a exploração e a orientação da busca, conduzindo-a a diferentes regiões do espaço de objetivos.

Com o objetivo de avaliar a contribuição de cada formulação com objetivos correlacionados utilizada e de cada valor de força de correlação induzida, agregamos todos os pontos obtidos por cada MOEA integrado à abordagem proposta e, em seguida, selecionamos apenas os pontos não-dominados. Os conjuntos resultantes são apresentados nas Figuras 21 e 22, correspondentes ao IBEA e ao NSGA-II, respectivamente. Tanto na Figura 21 quanto na Figura 22, observa-se claramente que o uso de diferentes formulações com objetivos correlacionados e valores de força de correlação influencia significativamente o comportamento de busca de ambos os MOEAs. Dependendo da formulação com objetivos correlacionados e do valor da força de correlação adotados, o MOEA explora regiões específicas do espaço de objetivos. Além disso, nos dois gráficos, os pontos estão nitidamente agrupados conforme a formulação com objetivos correlacionados e o valor da força da correlação utilizados, evidenciando que a parametrização de ambos possibilita a emulação de processos evolutivos com diferentes comportamentos a partir da mesma população inicial.

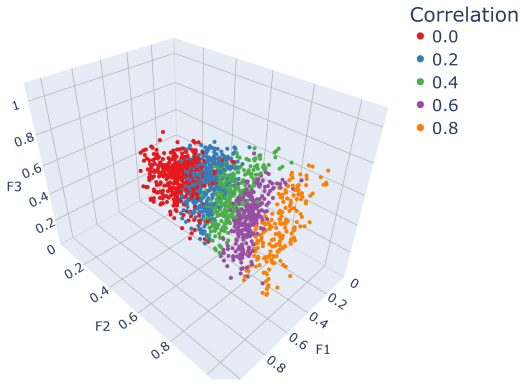
Assim como observado para o MOEA/D e o NSGA-III, no caso do IBEA e do NSGA-II, à medida que a intensidade da correlação artificialmente induzida aumenta, os pontos



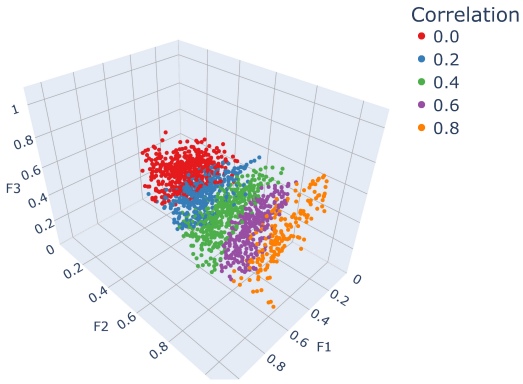
(a) F1 based on F2



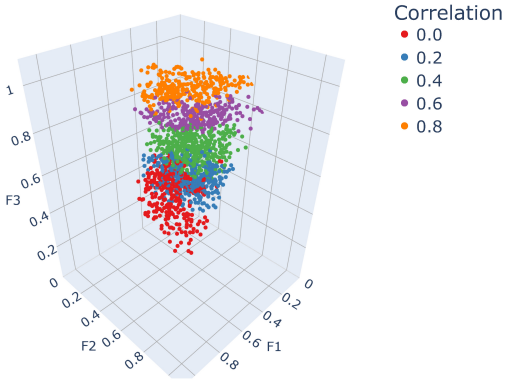
(b) F1 based on F3



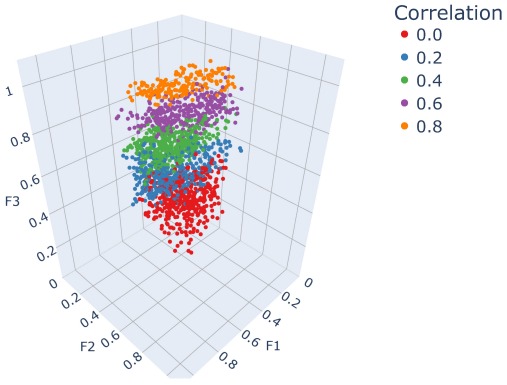
(c) F2 based on F1



(d) F2 based on F3

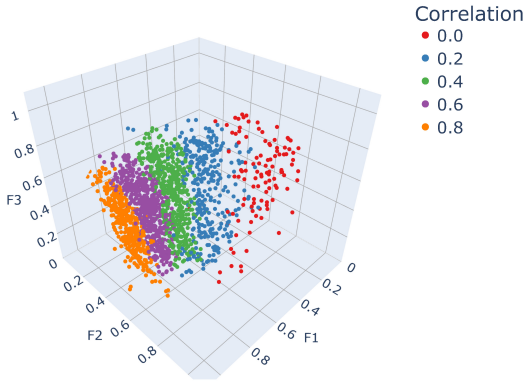


(e) F3 based on F1

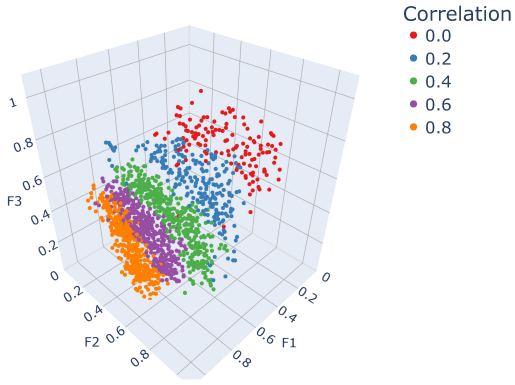


(f) F3 based on F2

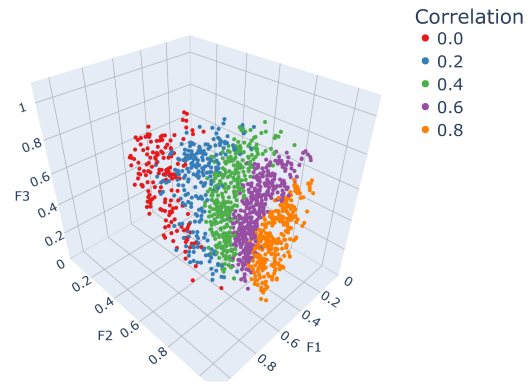
Figura 19 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida.



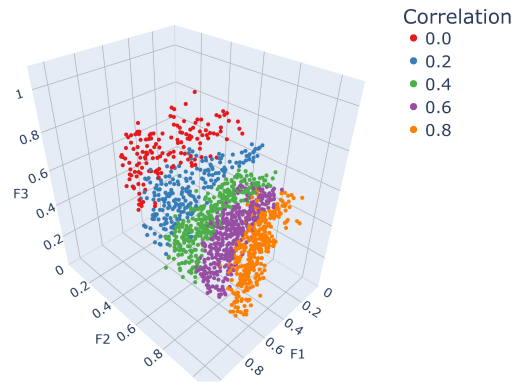
(a) F1 based on F2



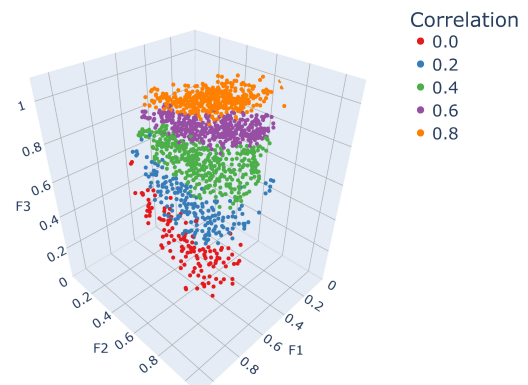
(b) F1 based on F3



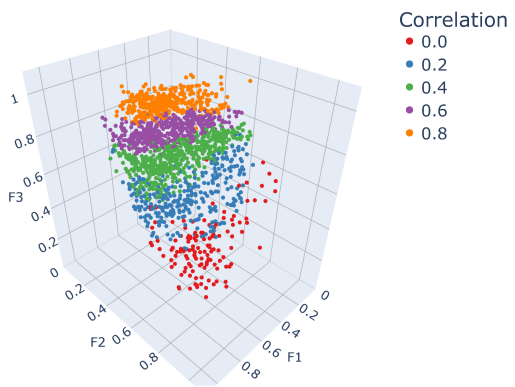
(c) F2 based on F1



(d) F2 based on F3



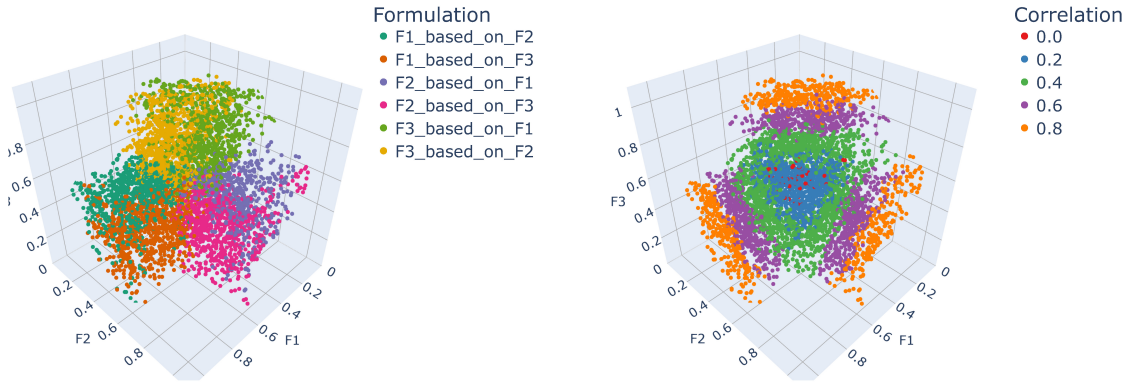
(e) F3 based on F1



(f) F3 based on F2

Figura 20 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II utilizando diferentes formulações alternativas e variando a força da correlação artificialmente induzida.

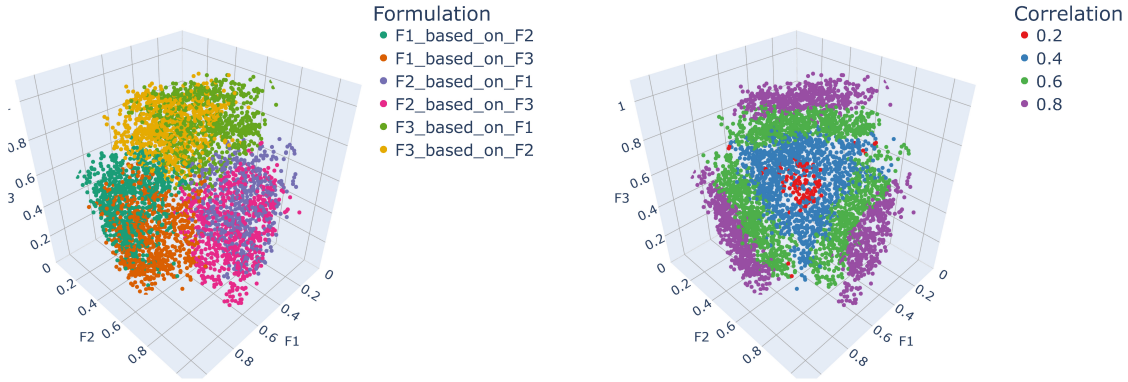
tendem a se afastar do centro da aproximação da fronteira Pareto-ótimo, movendo-se em direção às regiões das bordas. Além disso, é importante notar que, para o NSGA-II, nenhum dos pontos obtidos ao otimizar a formulação original do MOKP é não-dominado. Esse resultado evidencia a eficácia da otimização de formulações com objetivos correlacionados com diferentes valores de força de correlação, além da otimização exclusiva da formulação original do MOKP.



(a) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente à formulação que o originou.

(b) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente ao valor da força de correlação empregada para gerá-lo.

Figura 21 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA integrado à abordagem proposta.



(a) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente à formulação que o originou.

(b) Para cada ponto não-dominado é atribuída uma cor distinta, correspondente ao valor da força de correlação empregada para gerá-lo.

Figura 22 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II integrado à abordagem proposta.

Considerando que a integração dos MOEAs à abordagem proposta aprimora a capacidade de busca desses algoritmos, é de suma importância determinar se direcionar o processo de busca para diferentes regiões do espaço de objetivos resulta em conjuntos

de aproximação com maior convergência e diversidade, quando comparados à otimização exclusiva da formulação original. Para assegurar uma comparação justa, realizamos ajustes nos experimentos computacionais. Como a abordagem proposta destina um processo evolutivo independente à formulação original do problema (1) e a cada combinação de formulação com objetivos correlacionados (6) e valor de força de correlação utilizado (4), com um critério de parada de 100.000 avaliações da função objetivo, permitimos que a versão de referência do MOEA, ao otimizar exclusivamente a formulação original, realize $(((6 \cdot 4) + 1) \cdot 100.000)$ avaliações de função objetivo em cada uma das 30 execuções. Esse ajuste foi realizado para garantir que a versão de referência do MOEA disponha de um recurso computacional comparável ao da versão integrada à abordagem proposta. Por fim, é importante ressaltar que as 30 execuções foram conduzidas utilizando as mesmas sementes empregadas nos experimentos computacionais com os MOEAs integrados à abordagem proposta.

Nesta análise, todas as figuras são compostas por cinco gráficos. Os gráficos no canto superior esquerdo e no canto inferior esquerdo exibem, respectivamente, todos os pontos obtidos pelo MOEA integrado à abordagem proposta e os pontos não-dominados. De forma semelhante, os gráficos no centro superior e no centro inferior apresentam, respectivamente, todos os pontos obtidos pelo MOEA de referência e os pontos não-dominados. Por fim, o gráfico no canto inferior direito combina os pontos não-dominados de ambos os algoritmos, exibidos nos dois gráficos anteriores.

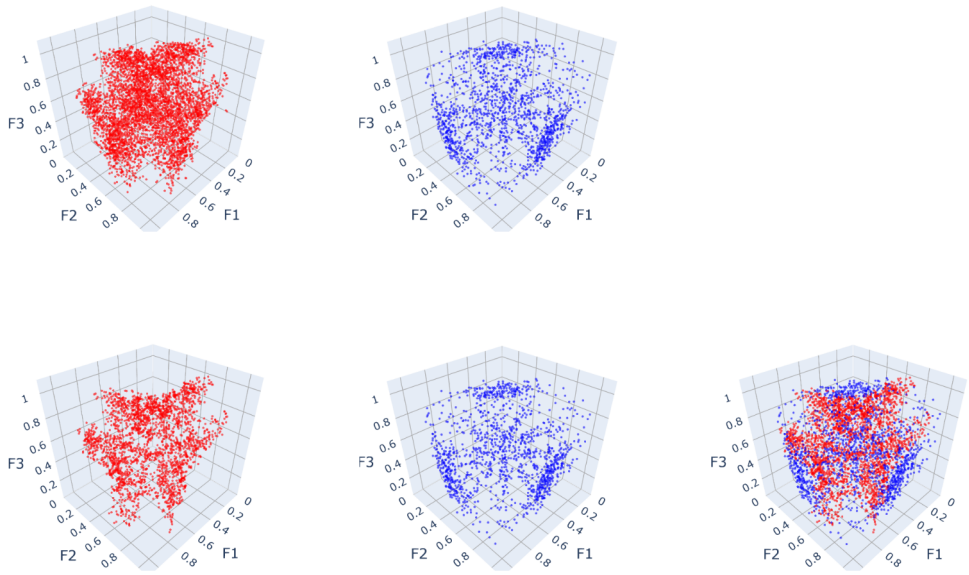


Figura 23 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o MOEA/D integrado à abordagem proposta e o MOEA/D de referência.

De acordo com a Figura 23, observa-se que o algoritmo MOEA/D integrado à abordagem proposta (MOEA/D$_{corr}$) obteve um número maior de pontos em comparação com a versão de referência (MOEA/D$_{ref}$), 4225 contra 1411. Além disso, nota-se que os pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D$_{ref}$ estão predominantemente concentrados ao longo das bordas da aproximação da fronteira Pareto-ótimo obtida. Por outro lado, o MOEA/D$_{corr}$ apresenta um número maior de pontos não-dominados na região central. É importante destacar que ambos os algoritmos, neste experimento, foram bem-sucedidos na exploração de uma ampla área do espaço de objetivos, embora os pontos não-dominados obtidos por cada um estejam, em sua maioria, concentrados em diferentes regiões do espaço de objetivos.

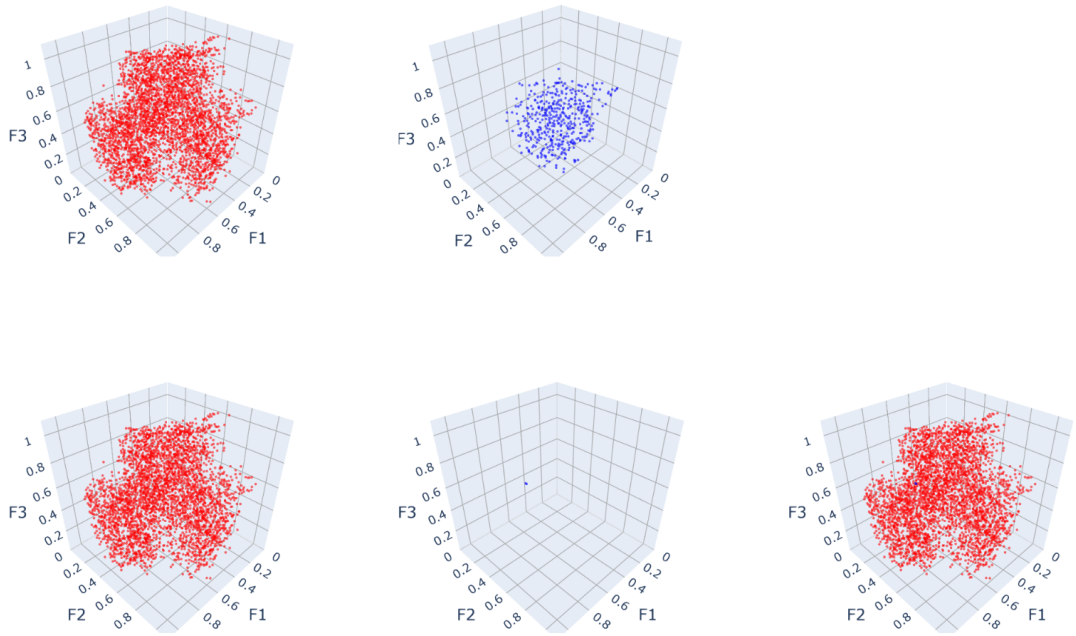


Figura 24 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGA-III integrado à abordagem proposta e o NSGA-III de referência.

A Figura 24 apresenta os resultados relativos ao algoritmo NSGA-III. Observa-se um aprimoramento significativo quando o NSGA-III é integrado à abordagem proposta (NSGA-III$_{corr}$). É importante destacar que, no caso do NSGA-III$_{corr}$, um alto percentual dos pontos obtidos são não-dominados. Em contraste, entre todos os pontos gerados pela versão de referência NSGA-III$_{ref}$, apenas dois pontos são não-dominados. Além disso, nota-se que o NSGA-III$_{ref}$ apresentou uma exploração limitada do espaço de objetivos, abrangendo apenas uma pequena região. Por outro lado, a versão do NSGA-III integrada à

abordagem proposta demonstrou uma exploração mais ampla, cobrindo uma área maior do espaço de objetivos.

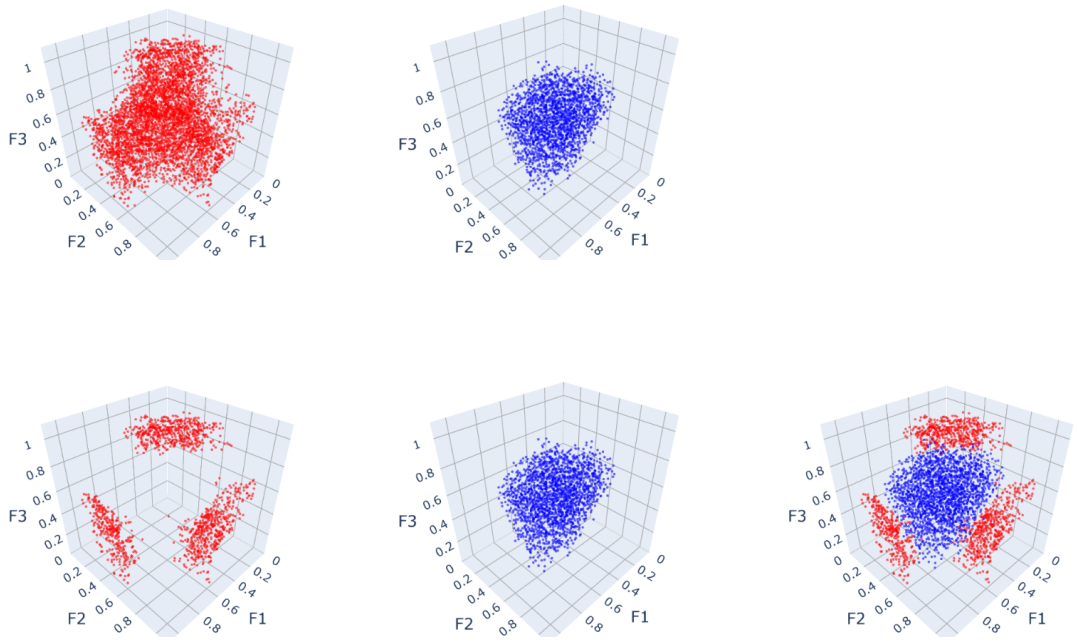


Figura 25 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o IBEA integrado à abordagem proposta e o IBEA de referência.

A Figura 25 exibe os resultados obtidos com o uso do algoritmo IBEA. Observa-se que, embora o IBEA integrado à abordagem proposta (IBEA$_{corr}$) explore uma gama mais ampla de regiões no espaço de objetivos, apenas os pontos localizados nos extremos da fronteira Pareto são não-dominados. Além disso, vale destacar que a maioria dos pontos obtidos pela versão de referência (IBEA$_{ref}$) é não-dominado. Portanto, pode-se deduzir que o IBEA$_{corr}$ apresenta uma capacidade superior de exploração do espaço de objetivos, pois obtém pontos não-dominados distribuídos ao longo da fronteira Pareto. Por outro lado, o IBEA$_{ref}$ concentra sua busca em uma região menor do espaço de objetivos, evidenciando uma capacidade aprimorada de exploração local.

De acordo com a Figura 26, observa-se que o algoritmo NSGA-II integrado à abordagem proposta (NSGA-II$_{corr}$) obteve um número significativamente maior de pontos em comparação com a versão de referência (NSGA-II$_{ref}$), 3896 contra 528. Além disso, em contraste com o IBEA, o NSGA-II$_{ref}$ explora uma área mais ampla do espaço de objetivos em relação ao NSGA-II$_{corr}$. No entanto, apenas os pontos localizados nos extremos da fronteira Pareto são não-dominados.

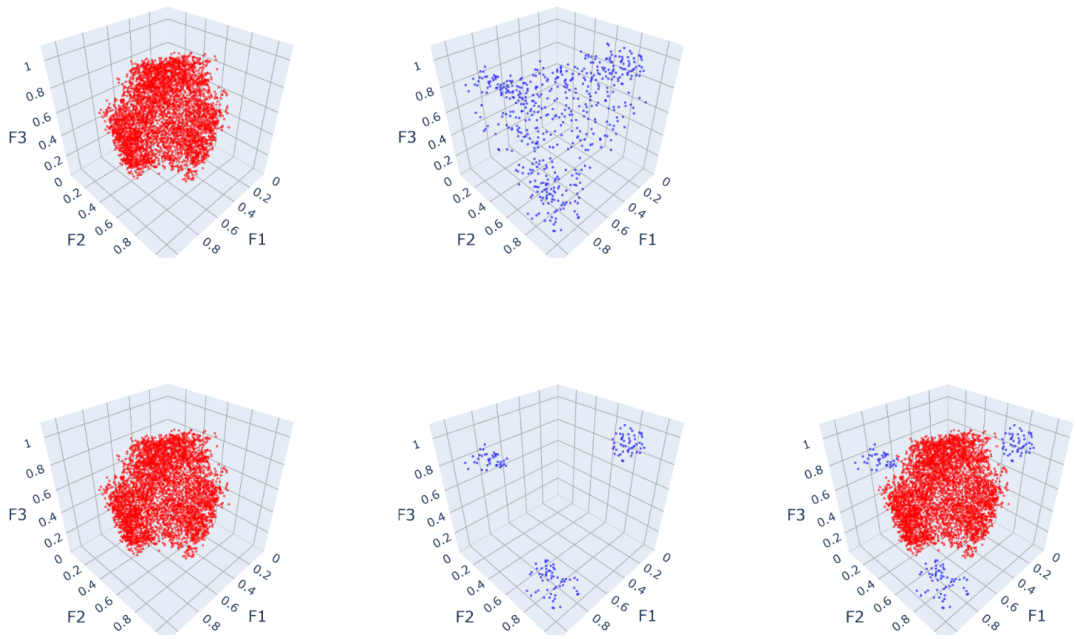


Figura 26 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGA-II integrado à abordagem proposta e o NSGA-II de referência.

7.5.2 Problema de Teste 4-500

Devido à impraticabilidade de apresentar os resultados obtidos para o problema de teste 4-500 por meio de gráficos de dispersão tridimensionais, optamos por utilizar gráficos de coordenadas paralelas para conduzir análises semelhantes às realizadas para o problema de teste 3-500.

As Figuras 27, 28, 29 e 30 apresentam todos os pontos não-dominados obtidos pelos algoritmos MOEA/D, IBEA, NSGA-III e NSGA-II, respectivamente, para o problema de teste 4-500. É importante destacar que, assim como no problema de teste 3-500, o procedimento de classificação por não-dominância foi realizado de forma independente para cada MOEA. Consequentemente, não é possível estabelecer comparações diretas entre diferentes MOEAs. Em vez disso, o objetivo é analisar os resultados para identificar padrões e similaridades compartilhados por todos os algoritmos.

Cada figura contém um gráfico específico para cada formulação com objetivos correlacionados, em que os pontos não-dominados são exibidos no gráfico correspondente à formulação que os gerou. Para os quatro MOEAs analisados, observa-se que cada uma das 12 formulações com objetivos correlacionados direciona o processo evolutivo para regiões distintas no espaço de objetivos, resultando em variações significativas nas faixas

de valores obtidos para cada objetivo nos diferentes gráficos. Embora, individualmente, o conjunto de aproximação obtido por cada formulação alternativa possa não superar o conjunto obtido otimizando a formulação original do problema em termos da relação de dominância Pareto ou indicadores de qualidade, seu uso coletivo aprimora a capacidade de busca dos MOEAs. Essa abordagem colaborativa contribui, sobretudo, para a diversidade da aproximação da fronteira Pareto-ótimo retornada ao final de cada execução.

As Figuras 31, 32, 33 e 34 apresentam todos os pontos não-dominados obtidos pelos algoritmos MOEA/D, IBEA, NSGA-III e NSGA-II, respectivamente, para o problema de teste 4-500. No entanto, diferentemente das análises anteriores, cada figura contém um gráfico para cada valor de força de correlação utilizado, em que os pontos não-dominados são exibidos no gráfico correspondente à força de correlação que os gerou.

Para todos os MOEAs, o número de pontos não-dominados obtidos ao otimizar a formulação original do problema (sem correlações artificialmente induzidas) é significativamente menor em comparação com os cenários em que correlações são artificialmente induzidas. No caso do NSGA-II, todos os pontos obtidos ao otimizar a formulação original do MaOKP são dominados. Essa diferença provavelmente pode ser explicada por duas hipóteses. Primeiro, a otimização de formulações com objetivos correlacionados possibilita que os MOEAs obtenham soluções de maior qualidade em termos de convergência e diversidade. Além disso, como cada valor de força de correlação é aplicado a cada diferente formulação criada, há um maior número de processos evolutivos alocados para as formulações com objetivos correlacionados. Outra observação relevante diz respeito à faixa de valores das funções objetivo. Para todos os MOEAs analisados, à medida que a intensidade da correlação artificialmente induzida aumenta, os intervalos entre os valores das funções objetivo se tornam mais amplos.

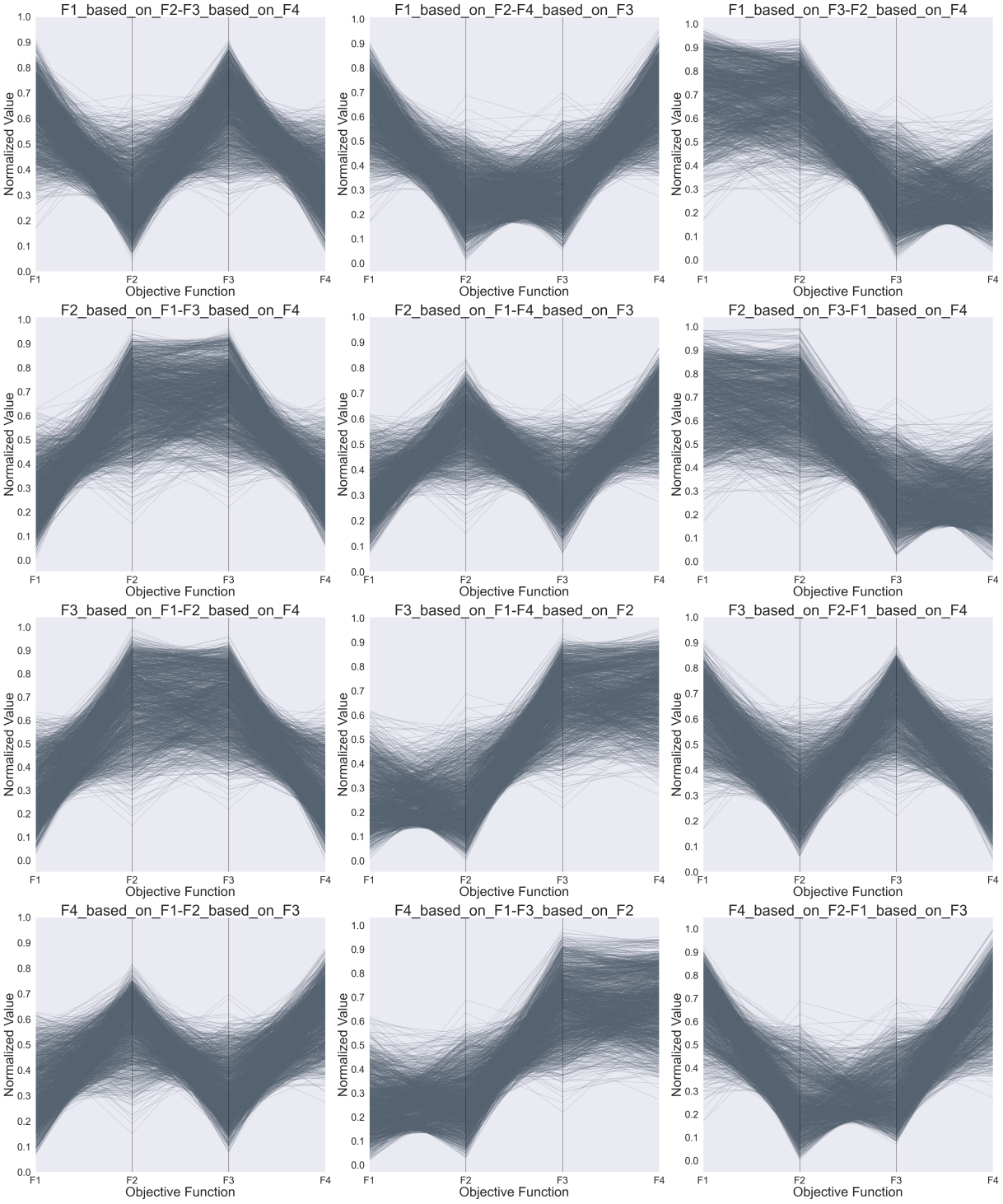


Figura 27 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados.

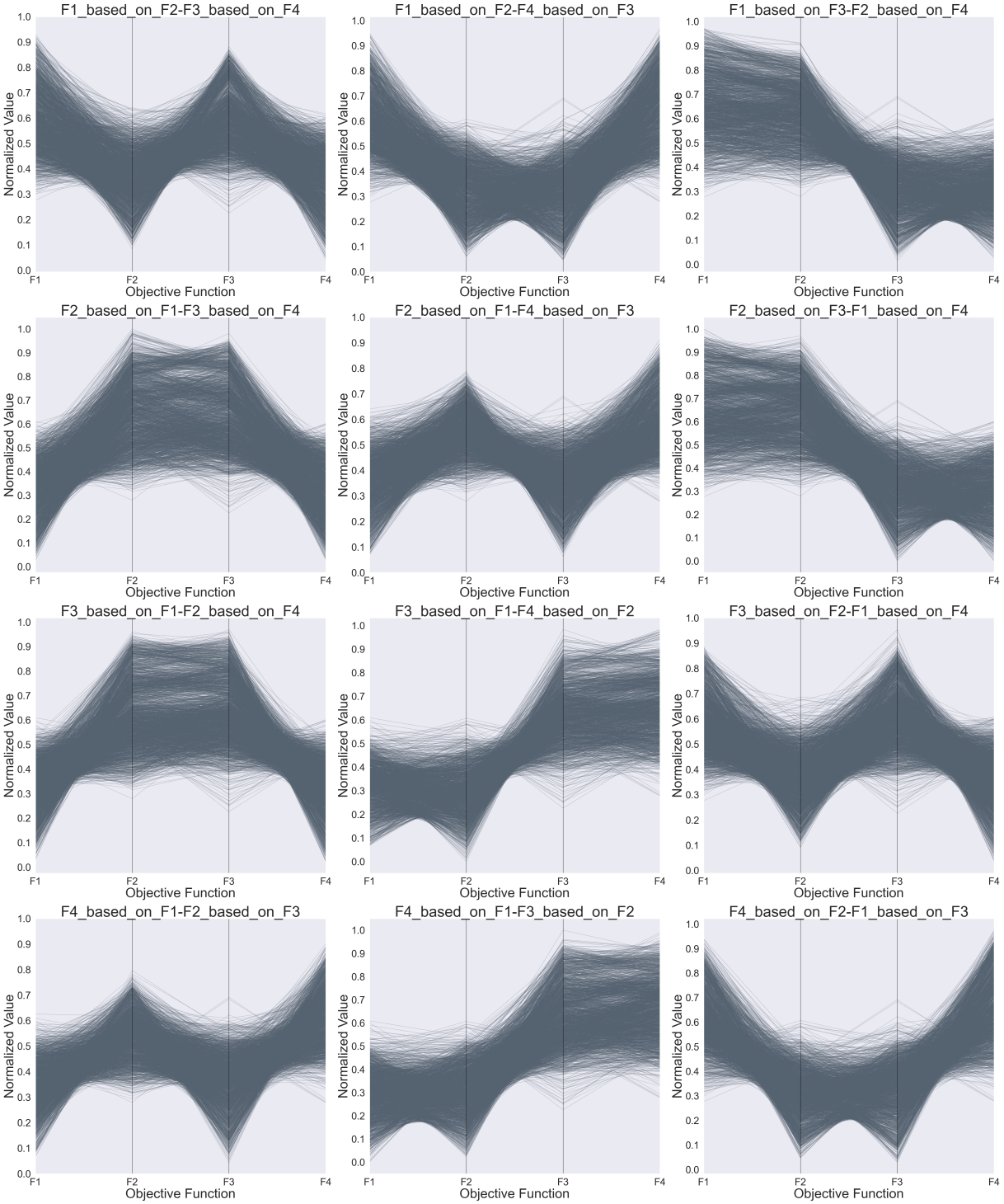


Figura 28 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados.

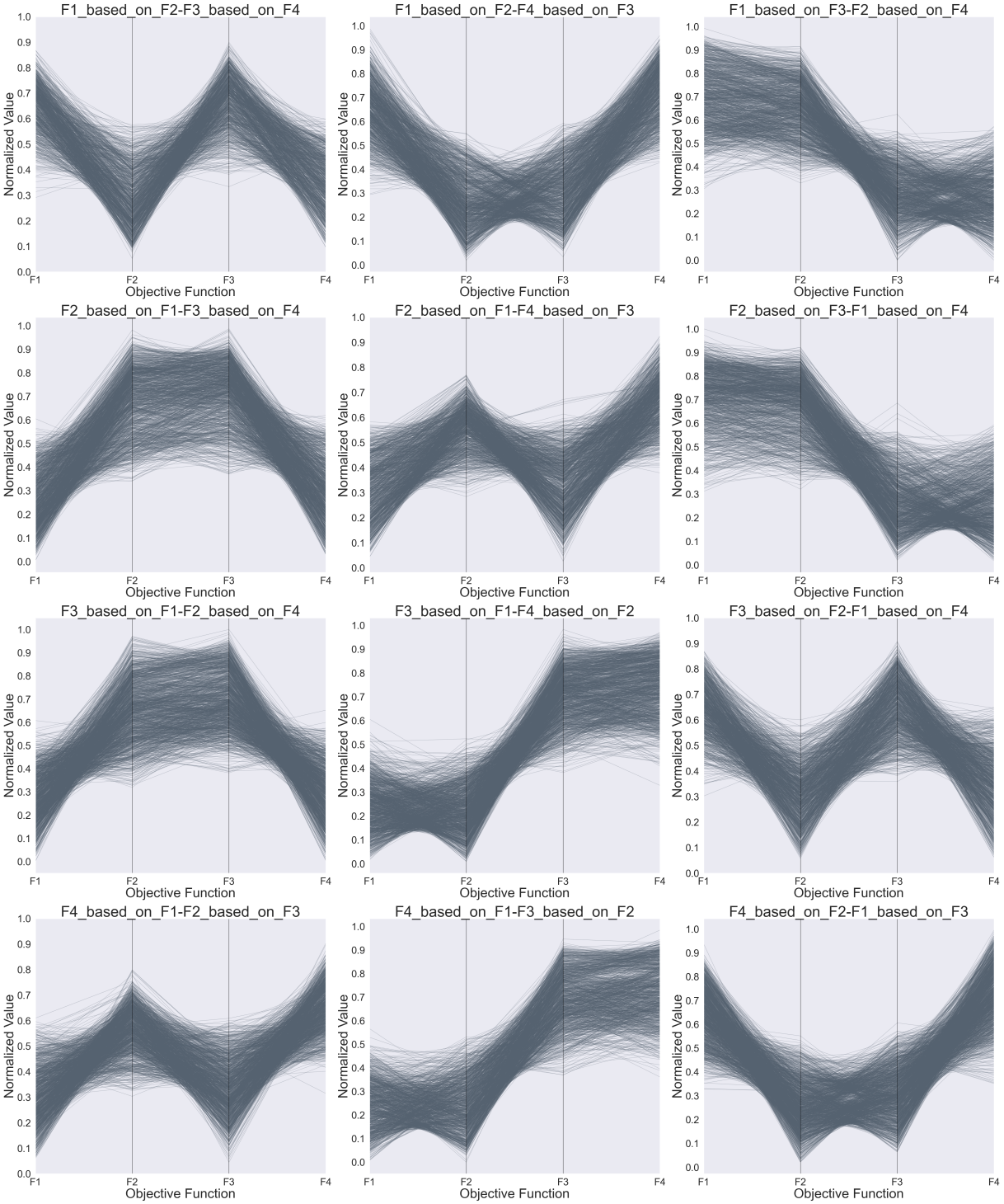


Figura 29 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados.

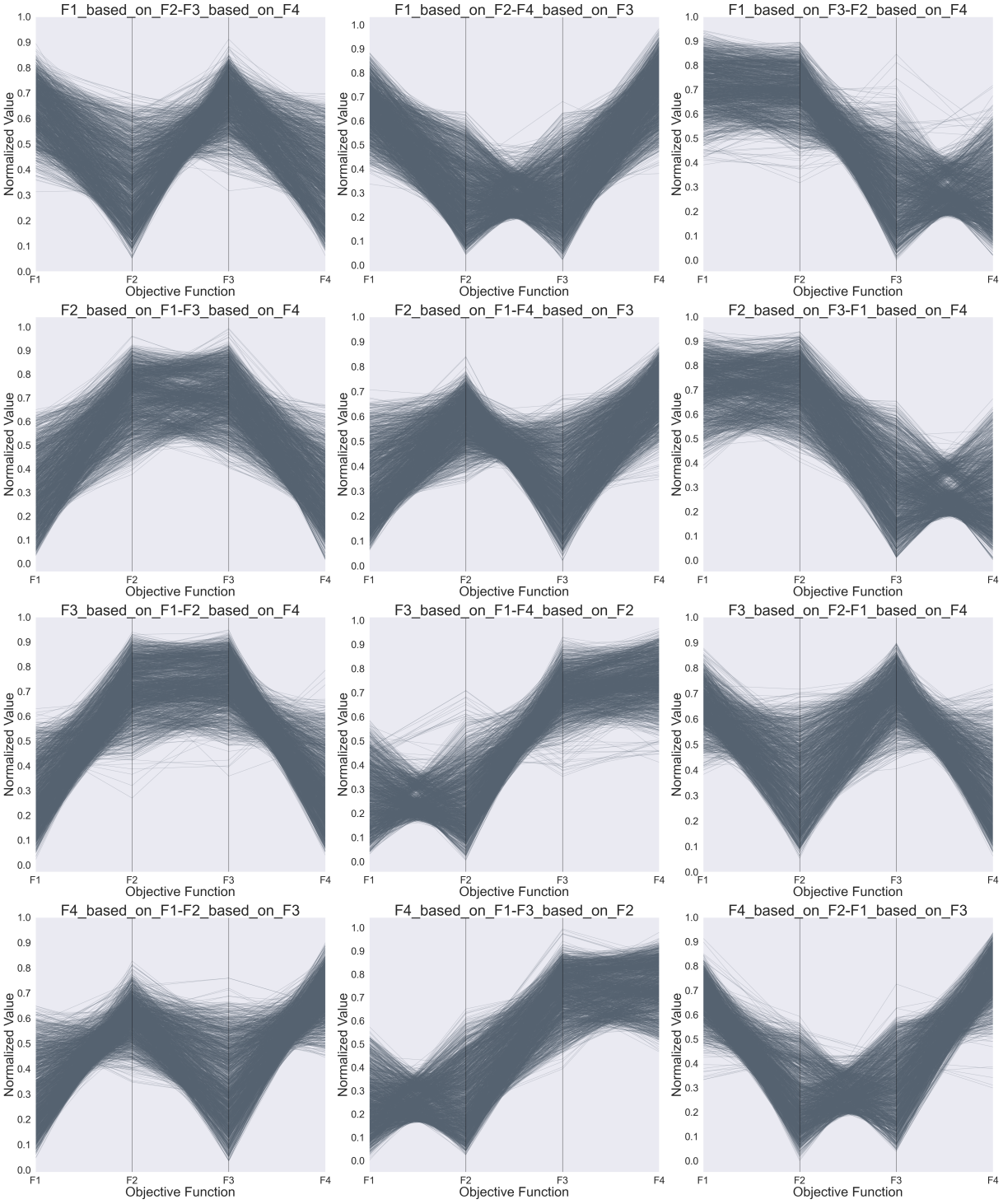


Figura 30 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II otimizando diferentes formulações com objetivos correlacionados.

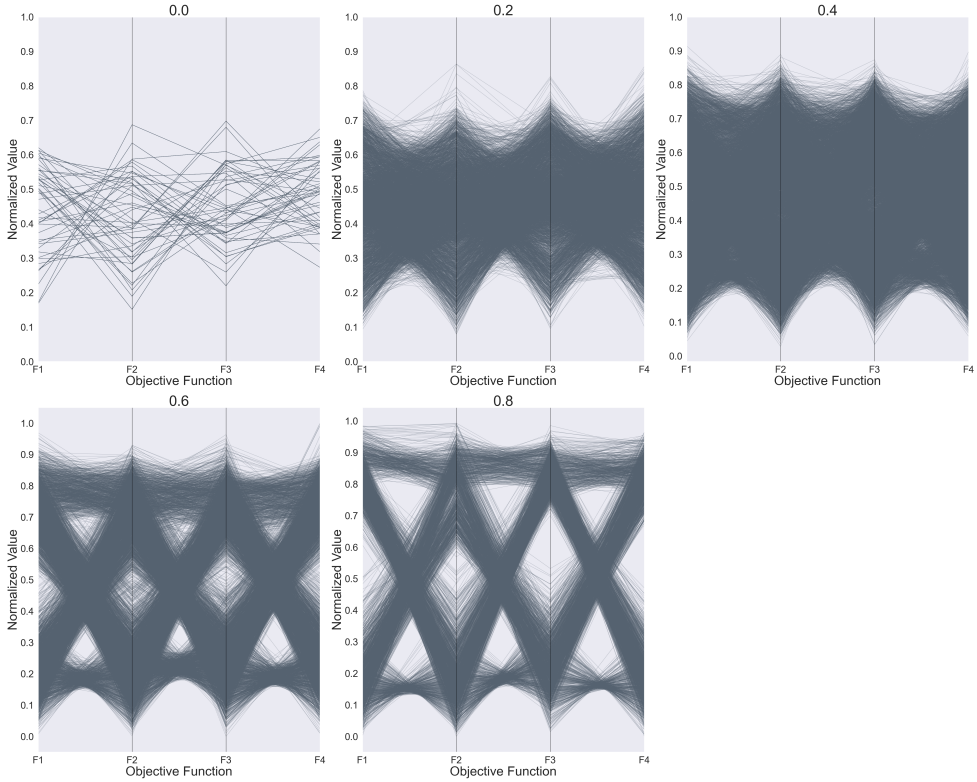


Figura 31 – Pontos não-dominados obtidos pelo MOEA/D usando diferentes valores de força de correlação.

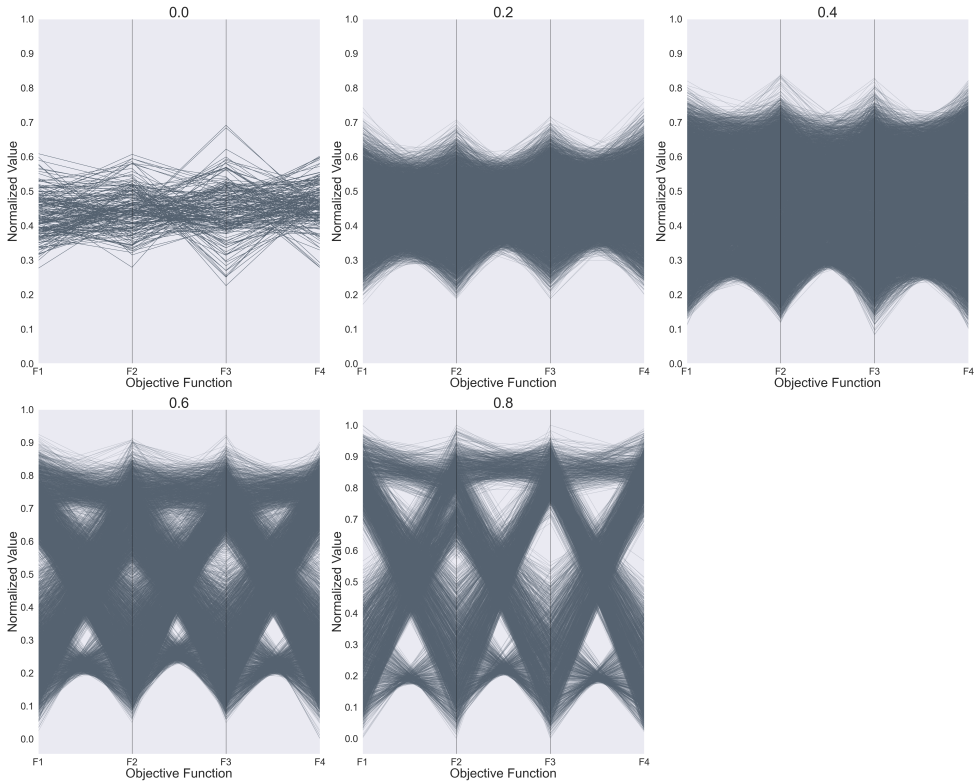


Figura 32 – Pontos não-dominados obtidos pelo IBEA usando diferentes valores de força de correlação.

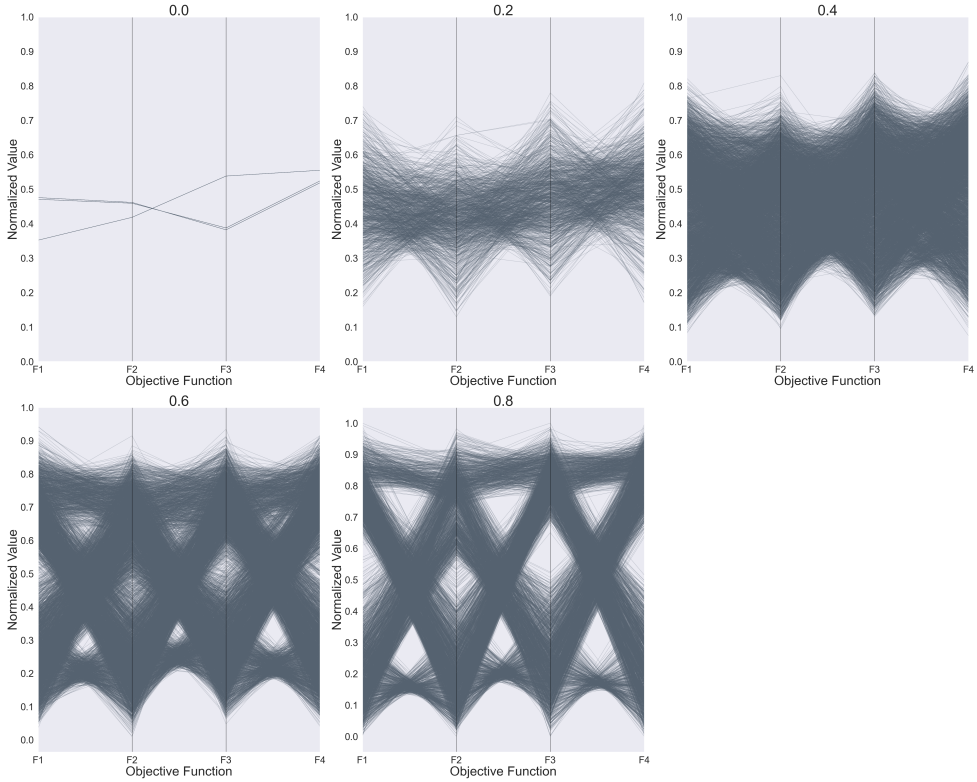


Figura 33 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-III usando diferentes valores de força de correlação.

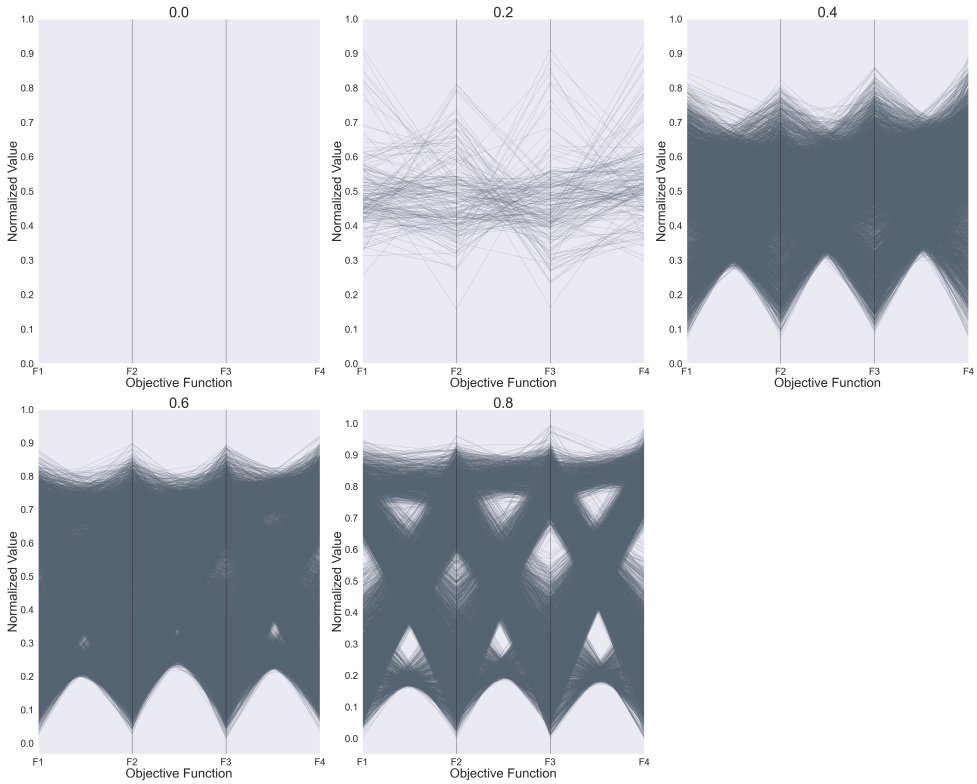


Figura 34 – Pontos não-dominados obtidos pelo NSGA-II usando diferentes valores de força de correlação.

Para avaliar visualmente o impacto de iniciar um processo evolutivo para cada combinação de formulação com objetivos correlacionados e valor de força de correlação, além da otimização da formulação original do problema abordado, ajustamos a configuração dos experimentos computacionais para o problema de teste 4-500, seguindo a mesma estratégia adotada no problema de teste 3-500. A abordagem proposta aloca um processo evolutivo independente para a formulação original (1) e para cada combinação de formulação com objetivos correlacionados (12) e valor de força de correlação artificialmente induzida (4), com um critério de parada de 100.000 avaliações da função objetivo. Portanto, para assegurar que a versão de referência do MOEA esteja sujeita a condições comparáveis àquelas da versão integrada à abordagem proposta, no contexto da análise referente ao problema de teste 4-500, permitimos que a versão de referência do MOEA efetuasse um total de $(((12 \cdot 4) + 1) \cdot 100.000)$ avaliações da função objetivo em cada uma das 30 execuções. Todas as execuções foram realizadas utilizando as mesmas sementes empregadas nos experimentos computacionais envolvendo os MOEAs integrados à abordagem proposta.

Assim como no problema de teste 3-500, conduzimos esta análise considerandos os algoritmos MOEA/D, NSGA-III, IBEA e NSGA-II, cujos resultados obtidos são apresentados nas Figuras 35, 36, 37 e 38, respectivamente. Em todas as figuras, os gráficos no canto superior esquerdo e inferior esquerdo exibem, respectivamente, todos os pontos obtidos pelo MOEA correspondente integrado à abordagem proposta e os pontos não-dominados. De forma análoga, os gráficos no canto superior direito e inferior direito mostram, respectivamente, todos os pontos obtidos pela versão de referência do MOEA e os pontos não-dominados. Devido ao grande número de pontos obtidos por cada uma das duas versões, optamos por não exibir os pontos não-dominados obtidos por ambas em um único gráfico de coordenadas paralelas para o problema de teste 4-500. Em vez disso, apresentaremos gráficos separados para cada versão do MOEA, facilitando a visualização e a análise dos resultados.

Conforme apresentado na Figura 35, observa-se que, embora a versão de referência do MOEA/D e sua versão integrada à abordagem proposta tenham apresentado resultados semelhantes em termos da amplitude dos valores obtidos para as funções objetivo, a versão integrada à abordagem proposta foi capaz de encontrar aproximadamente oito vezes mais soluções distintas em comparação com a versão de referência correspondente. Além disso, verifica-se que, assim como na análise quantitativa de desempenho realizada por meio de indicadores de qualidade, que será apresentada a seguir, o MOEA/D foi o algoritmo que apresentou o menor ganho de desempenho entre os quatro MOEAs avaliados quando integrado à abordagem proposta.

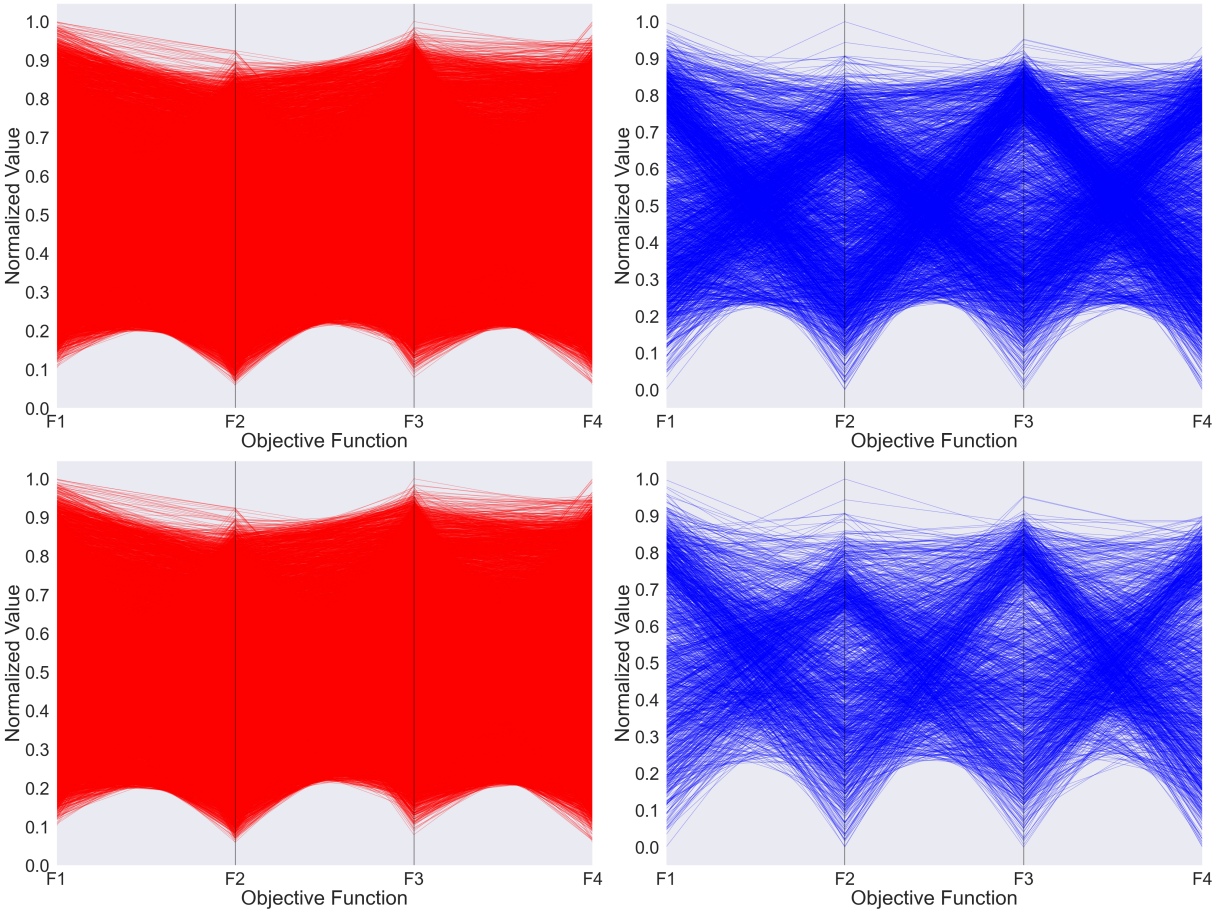


Figura 35 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o MOEA/D integrado à abordagem proposta e o MOEA/D de referência.

Ao compararmos o desempenho da versão de referência do NSGA-III com sua versão integrada à abordagem proposta, nota-se um comportamento distinto daquele observado para o MOEA/D. A Figura 36, destaca três aspectos principais. Primeiramente, o NSGA-III integrado à abordagem proposta obteve um número significativamente maior de pontos em comparação com a versão de referência (aproximadamente de 16 vezes mais). Além disso, essa versão alcançou valores para as funções objetivo com maior amplitude. Por fim, mais de 99% dos pontos obtidos pela versão de referência do NSGA-III são dominados. Portanto, conclui-se que a integração do NSGA-III à abordagem proposta melhora significativamente seu desempenho.

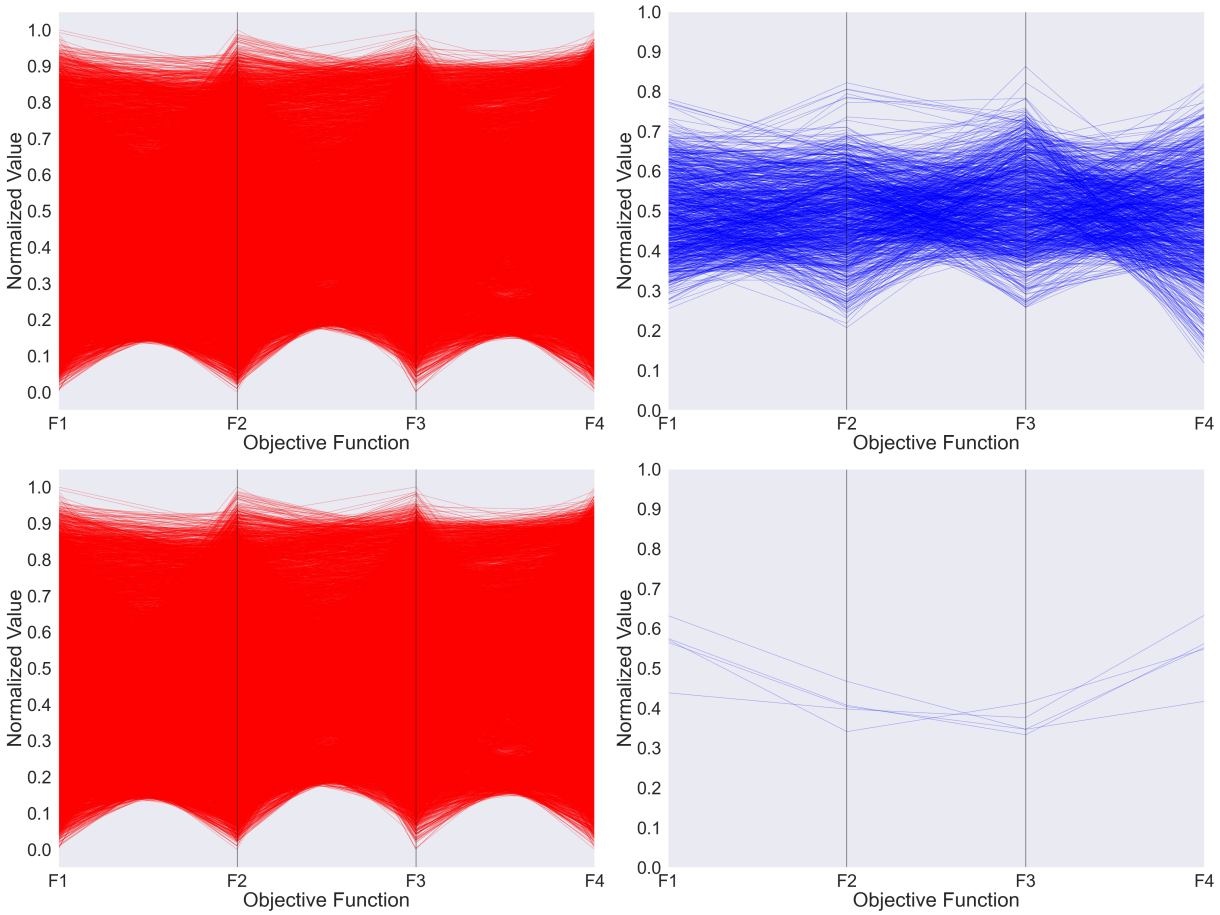


Figura 36 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGA-III integrado à abordagem proposta e o NSGA-III de referência.

A Figura 37 apresenta os resultados obtidos utilizando o algoritmo IBEA. Semelhante aos outros MOEAs, a versão do IBEA integrada à abordagem proposta encontrou um número significativamente maior de soluções do que sua versão de referência (aproximadamente 8 vezes mais). No entanto, o percentual de pontos não-dominados é maior na versão de referência (90% contra 50%). Esses valores indicam que, embora o IBEA integrado à abordagem proposta explore uma região mais ampla do espaço de objetivos e obtenha uma maior diversidade de pontos, aproximadamente 50% dos pontos encontrados são dominados. Em contraste, apenas 10% dos pontos gerados pela versão de referência do IBEA são dominados.

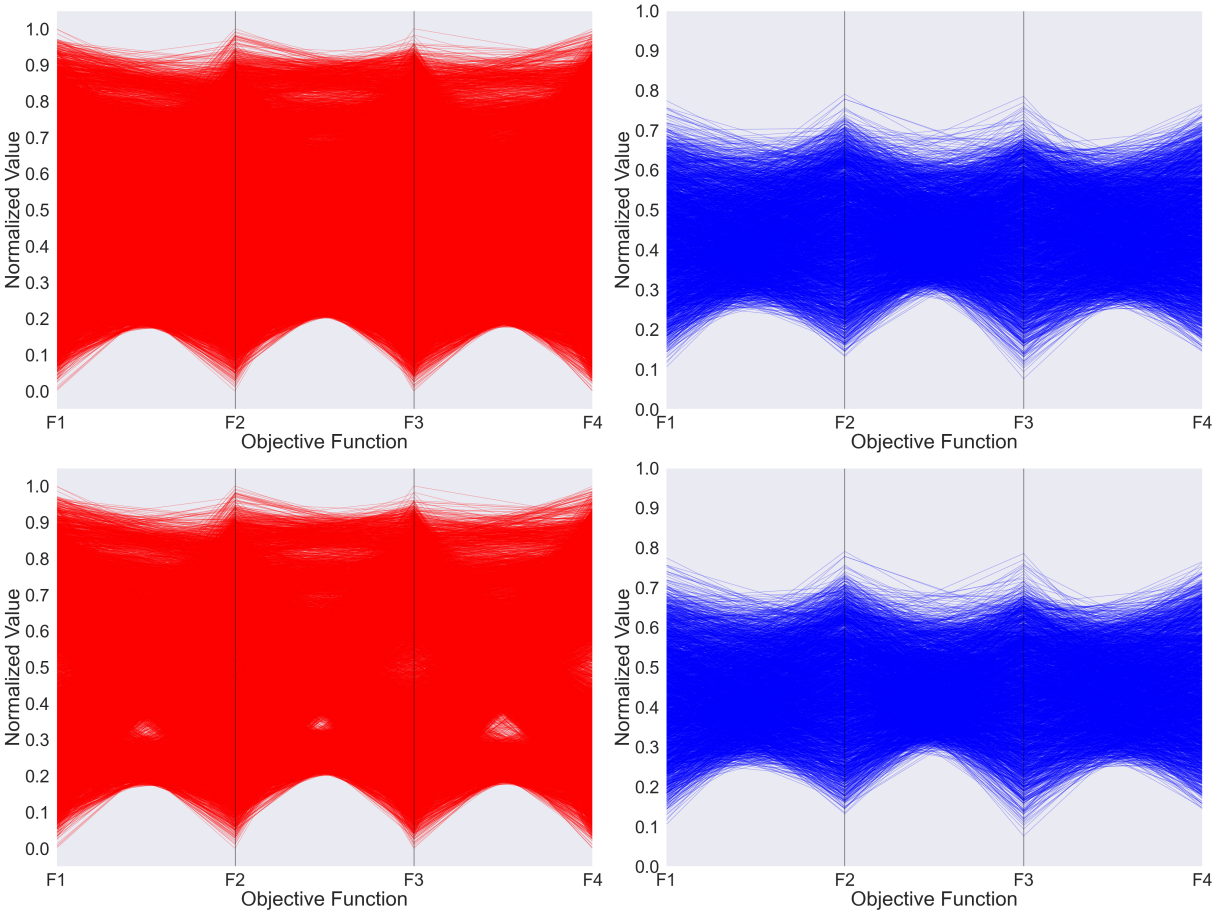


Figura 37 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o IBEA integrado à abordagem proposta e o IBEA de referência.

A Figura 38 apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo NSGA-II. Observa-se que o NSGA-II integrado à abordagem proposta encontrou um número ainda maior de pontos do que sua versão de referência (aproximadamente 21 vezes mais). Além disso, menos de 14% dos pontos obtidos pela versão de referência do NSGA-II são não-dominados. Notavelmente, a maioria desses pontos não-dominados está localizada nas extremidades da fronteira Pareto, com valores de função objetivo próximos às extremidades dos eixos.

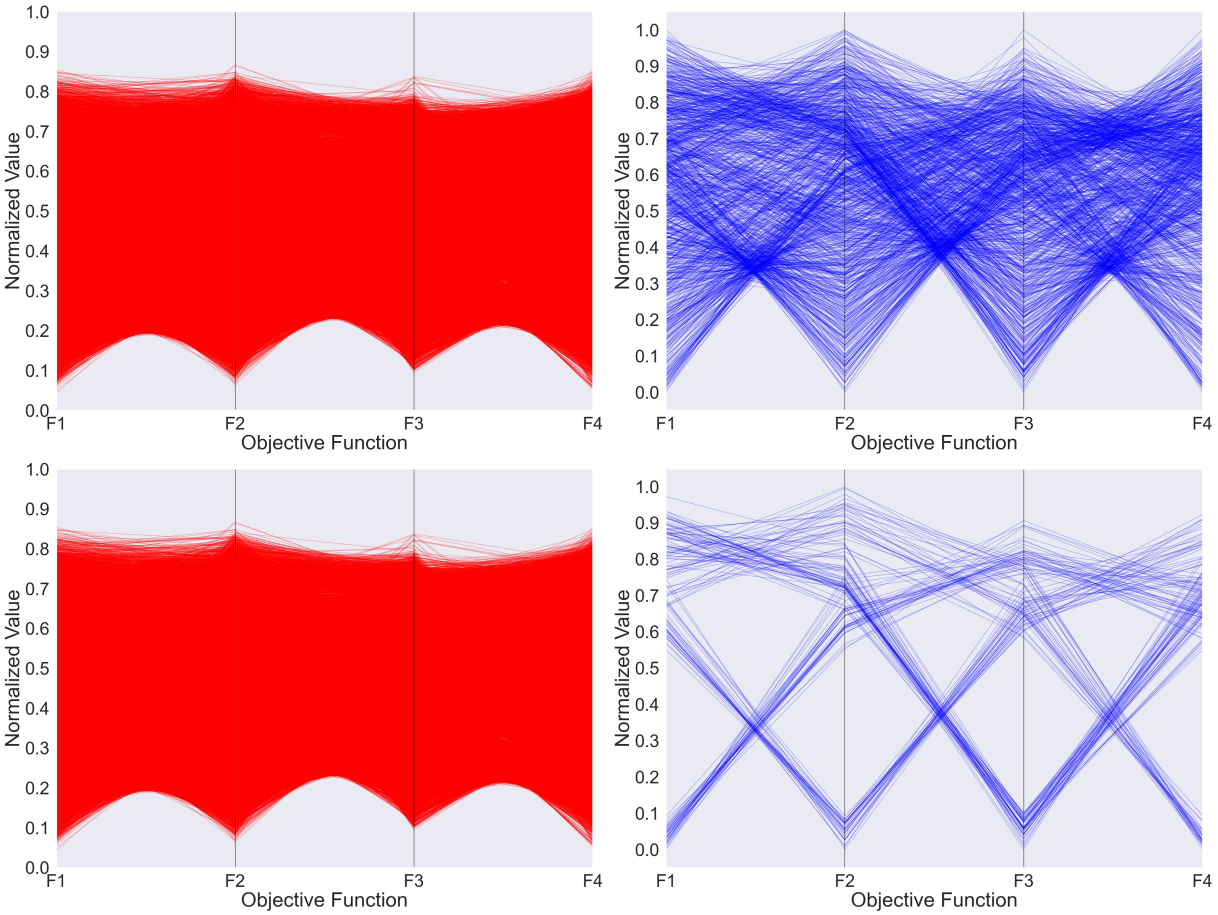


Figura 38 – Comparação da distribuição de todos os pontos obtidos e pontos não-dominados entre o NSGAII integrado à abordagem proposta e o NSGAII de referência.

7.5.3 Análise Quantitativa de Desempenho

Conforme mencionado no início desta seção, é fundamental seguir uma série de etapas para assegurar a equidade na análise comparativa de desempenho baseada em indicadores de qualidade entre cada MOEA em sua versão de referência e sua versão integrada à abordagem proposta.

Nesta análise, utilizamos três indicadores de qualidade para avaliar o desempenho dos algoritmos examinados. Com base nos valores obtidos para I_{HV}, IGD_+ e I_{ϵ^+}, para cada instância de teste, realizamos uma comparação par-a-par entre a versão de referência do MOEA (MOEA$_{ref}$) e sua versão integrada à abordagem proposta (MOEA$_{corr}$) por meio do teste estatístico de Wilcoxon-Mann-Whitney.

As Tabelas 12 e 13 apresentam os valores médios obtidos para cada indicador de qualidade ao longo das 30 execuções aplicadas aos problemas de teste 3-500 e 4-500, respectivamente, para cada algoritmo. É importante destacar que, nesta análise, cada MOEA é comparado exclusivamente com sua versão correspondente integrada à

abordagem proposta. Portanto, os resultados devem ser analisados de forma independente para cada algoritmo. Os valores médios destacados em negrito indicam que o algoritmo associado obteve um desempenho superior ao seu concorrente. Além disso, a presença de um asterisco indica que a diferença entre os algoritmos é estatisticamente significativa.

Tabela 12 – Resultados obtidos para o problema de teste 3-500

	I_{HV}	$IGD+$	$I_{\epsilon+}$
IBEA$_{corr}$	**1,2197***	0,0345	**0,0934***
IBEA$_{ref}$	1,1659	**0,0309***	0,1166
MOEA/D$_{corr}$	**1,0451***	**0,0250***	**0,0894***
MOEA/D$_{ref}$	1,0352	0,0366	0,1054
NSGA-II$_{corr}$	**1,0042***	**0,0190***	**0,1572***
NSGA-II$_{ref}$	0,8160	0,1667	0,2105
NSGA-III$_{corr}$	**1,2077***	**0,0226***	**0,0775***
NSGA-III$_{ref}$	0,8180	0,1262	0,2577

Com base nos resultados apresentados na Tabela 12, observa-se que a integração dos MOEAs à abordagem proposta tende a aprimorar seu desempenho. No entanto, há uma exceção para o algoritmo IBEA em relação ao indicador de qualidade IGD+. Nota-se também que, enquanto os algoritmos IBEA e MOEA/D integrados à abordagem proposta apresentam melhorias mais discretas, os algoritmos NSGA-II e NSGA-III apresentam ganhos significativos ao adotar a abordagem proposta. Esse resultado sugere que os algoritmos baseados na relação de dominação Pareto beneficiam-se da alocação de múltiplos processos evolutivos guiados por formulações com objetivos correlacionados, aprimorando sua capacidade de busca.

Tabela 13 – Resultados obtidos para o problema de teste 4-500

	I_{HV}	$IGD+$	$I_{\epsilon+}$
IBEA$_{corr}$	**1,0495***	**0,0315***	**0,0969***
IBEA$_{ref}$	0,8465	0,0754	0,1980
MOEA/D$_{corr}$	**0,9073***	**0,0268***	**0,1507***
MOEA/D$_{ref}$	0,8475	0,0738	0,1615
NSGA-II$_{corr}$	**1,0669***	**0,0222***	**0,1148***
NSGA-II$_{ref}$	0,6034	0,2474	0,3187
NSGA-III$_{corr}$	**1,0823***	**0,0299***	**0,0911***
NSGA-III$_{ref}$	0.4675	0,2181	0,3984

Quando analisamos os resultados apresentados na Tabela 13, fica evidente que, no contexto de um MaOP, a adoção da abordagem proposta resulta em um aprimoramento significativo no desempenho dos MOEAs. Para o problema de teste 4-500, todos os MOEAs analisados apresentam melhorias expressivas tanto em termos de convergência quanto

de diversidade, conforme apontado pelos indicadores de qualidade. Além disso, todas as comparações em pares revelam diferenças estatisticamente significativas entre ao algoritmos comparados.

8 Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo Baseados em Correlações Artificialmente Induzidas

Neste capítulo, apresentamos dois novos MOEAs, fundamentados na abordagem discutida no Capítulo 7. Ambos foram intitulados como Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo baseado em Correlações Artificialmente Induzidas (*Artificially Induced Correlations Based Multi-objective Evolutionary Algorithm* - AIC-MOEA), sendo diferenciados pela inclusão do sufixo “II”, resultando em AIC-MOEA e AIC-MOEAII. Tanto o AIC-MOEA quanto o AIC-MOEAII mantêm e evolui múltiplas populações, permitindo conduzir diferentes processos evolutivos em apenas uma única execução. Além da população que evolui com base na formulação original do problema, os algoritmos propostos também mantêm uma população independente para cada formulação com objetivos correlacionados gerada. Adicionalmente, é mantido um arquivo, que armazena todos os indivíduos não-dominados com base na formulação original encontrados durante o processo evolutivo. Como cada população evolui conforme uma das formulações, espera-se que cada uma delas explore, de forma efetiva, regiões específicas do espaço de objetivos original. No entanto, devido à natureza estocástica de alguns operadores presentes nos MOEAs, não há impedimento para que cada população também explore outras regiões. É relevante destacar que ambos os MOEAs permitem a aplicação de qualquer uma das estratégias de construção de formulações com objetivos correlacionados apresentadas no Capítulo 7. Quando integrados à estratégia que gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados, os algoritmos AIC-MOEA e AIC-MOEAII serão referidos, respectivamente, como AIC-MOEA$_{All}$ e AIC-MOEAII$_{All}$. Por fim, ressalta-se que o número de formulações com objetivos correlacionados geradas, bem como a quantidade de populações mantidas pelos MOEAs propostos, dependem da estratégia adotada.

8.1 AIC-MOEA

O algoritmo AIC-MOEA inicia sua execução gerando N indivíduos para compor a população inicial T_0. Estes indivíduos podem ser gerados aleatoriamente ou por meio de um procedimento específico para o problema abordado. Como cada população mantida pelo AIC-MOEA evolui com base na formulação original do problema ou em uma das formulações com objetivos correlacionados geradas, cada indivíduo presente em T_0 é utilizado para povoar essas populações. Apenas indivíduos não-dominados, de acordo com a formulação correspondente, são inseridos nessas populações. Desta forma, um mesmo indivíduo pode

ser armazenado em múltiplas populações, desde que seja não-dominado em todas as populações às quais pertence. Caso um determinado indivíduo de T_0 não seja utilizado em nenhuma das populações mantidas, isso indica que, com base em todas as formulações consideradas, esse indivíduo é dominado por pelo menos um outro indivíduo pertencente à população. Portanto, o tamanho inicial de todas as populações mantidas pode variar de 1 a N.

Após a etapa de inicialização, o processo evolutivo (conjunto de gerações) é executado até que se atinja um número fixo de avaliações da função objetivo, denotado por A_{max}. Dado que antes de avaliar um indivíduo com base em qualquer uma das formulações com objetivos correlacionados é necessário avaliá-lo primeiro com base na formulação original do problema, optamos por considerar apenas essa avaliação inicial como uma avaliação efetiva da função objetivo (isto é, contabilizada para verificar o critério de parada). Essa decisão se justifica devido ao baixo custo computacional necessário para calcular as combinações lineares a partir dos valores originais das funções objetivo.

Em cada geração, o AIC-MOEA executa, sequencialmente, sete procedimentos: seleção para reprodução, recombinação, mutação, atualização das populações, atualização do grau de contribuição das populações, ajuste do tamanho de cada população (se necessário) e, por fim, atualização do arquivo. Uma descrição detalhada do AIC-MOEA é apresentada no Algoritmo 11.

8.1.1 Inicialização e Atualização do Grau de Contribuição

Inicialmente definido como zero, o grau de contribuição associado a uma população é uma medida quantitativa que expressa o quanto essa população contribui para a evolução das populações mantidas pelo AIC-MOEA. Conforme será detalhado a seguir, a execução dos operadores de variação exige, primeiramente, a seleção de dois indivíduos provenientes de algumas das populações existentes, a partir dos quais dois novos indivíduos são gerados. A cada geração, o grau de contribuição de uma população é atualizado sempre que um de seus indivíduos for selecionado para reprodução e pelo menos um dos descendentes gerados for aceito para inserção em alguma das populações mantidas. O valor adicionado corresponde ao número de populações nas quais cada novo indivíduo for aceito para inserção. Por outro lado, caso ambos os indivíduos gerados sejam rejeitados em todas as populações, o grau de contribuição das populações envolvidas é reduzido em uma unidade. Desta forma, quanto maior for a contribuição de uma população para a geração de indivíduos de bom desempenho ao longo das gerações anteriores, maior será a probabilidade dessa população ser selecionada para reprodução na geração atual.

Algoritmo 11: AIC-MOEA

Entrada: N (tamanho da população), A_{max} (número máximo de avaliações da função objetivo), F (conjunto de formulações do problema)
Saída: $Arquivo$ (conjunto de soluções não-dominadas encontradas)

início
  $Avaliacoes \leftarrow 0$
  $T_0 \leftarrow$ Gera aleatoriamente uma população inicial de tamanho N
  $Populacoes \leftarrow \varnothing$
  $Arquivo \leftarrow \varnothing$
  $GrausDeContribuicao \leftarrow$ Inicializar valores com zero
  para *cada formulação* $f \in F$ **faça**
    $Populacao_f \leftarrow \varnothing$
    para *cada indivíduo* $x \in T_0$ **faça**
      se x *não é dominado por qualquer indivíduo de* $Populacao_f$ *com base na formulação* f **então**
        $Populacao_f \leftarrow Populacao_f \cup \{x\}$
    $Populacoes \leftarrow Populacoes \cup \{Populacao_f\}$
  repita
    $Populacao \leftarrow$ SelecionarPopulacao($Populacoes$)
    $pai_1, pai_2 \leftarrow$ SelecionarParaReproducao($Populacao$)
    $filho_1, filho_2 \leftarrow$ Recombinar(pai_1, pai_2)
    $filho_1, filho_2 \leftarrow$ Mutar($filho_1, filho_2$)
    AtualizarPopulacoesGrauDeContribuicao($Populacoes$, $GrausDeContribuicao$, $filho_1$, $filho_2$)
    se *NecessarioAjustarTamanho*($Populacoes$, N_{max}) **então**
      AjustarTamanhoPopulacoes($Populacoes$, N_{max})
    AtualizarArquivo($Arquivo$, $filho_1$, $filho_2$)
    $Avaliacoes \leftarrow Avaliacoes + 2$
  até $Avaliacoes < A_{max}$;
  AjustarTamanhoArquivo($Arquivo$)
  retorna $Arquivo$

8.1.2 Seleção para Reprodução, Recombinação e Mutação

A cada geração, o algoritmo AIC-MOEA gera dois novos indivíduos por meio da recombinação de dois indivíduos selecionados entre as populações mantidas. O procedimento de seleção para reprodução proposto consiste em duas etapas. Primeiramente, uma população é escolhida por meio de um torneio de tamanho t, baseado no grau de contribuição das populações. O valor de t indica quantas populações serão comparadas para determinar a vencedora do torneio (neste estudo, utilizamos $t = 2$, ou seja, um torneio binário). No AIC-MOEA, a seleção por torneio é exclusivamente guiada pelo grau de contribuição das populações, sendo vencedora aquela que apresentar o maior grau de contribuição dentre as envolvidas no torneio. Após a seleção de uma população, dois indivíduos distintos são escolhidos a partir desta população para serem combinados. A adoção de um esquema de reprodução restrito, que permite a recombinação apenas entre indivíduos de

uma mesma população, fundamenta-se em estudos que indicam que a recombinação de indivíduos distantes ou significativamente diferentes, em problemas com múltiplos objetivos (MaOPs), tende a gerar descendentes de baixa qualidade (ISHIBUCHI; AKEDO; NOJIMA, 2012; ISHIBUCHI et al., 2014; DEB; JAIN, 2012; DEB; JAIN, 2014; JIANG; YANG, 2017). Essa tendência foi corroborada por experimentos computacionais, cujos resultados serão apresentados posteriormente. Uma vez selecionados dois indivíduos distintos, o AIC-MOEA realiza o cruzamento entre eles para gerar dois novos indivíduos. Em seguida, aplica-se o operador de mutação conforme uma taxa de mutação predefinida, representada por p_{mut}. Vale destacar que o processo de recombinação ocorre em todas as gerações.

8.1.3 Inserção dos Indivíduos Filhos

A cada geração, dois novos indivíduos são criados, e o AIC-MOEA deve atualizar as populações mantidas, incluindo aquela que forneceu os indivíduos pais. Para isso, o AIC-MOEA tenta inserir os dois indivíduos filhos em cada uma das populações existentes. Um indivíduo filho será inserido em uma determinada população somente se não for dominado por qualquer indivíduo já presente nela, considerando a formulação do problema atribuída à população. Caso já exista na população um indivíduo com o mesmo vetor de objetivos do indivíduo filho que está sendo considerado para inserção, a inserção não será realizada. Se o indivíduo filho for aceito para inserção e dominar outros indivíduos da população, todos os indivíduos dominados por ele serão removidos. No entanto, também é possível que a inserção não resulte em modificações, ou seja, o indivíduo filho não é dominado por qualquer outro indivíduo da população, mas também não domina nenhum deles.

8.1.4 Ajuste do Tamanho das Populações

A cada geração, o AIC-MOEA verifica se o número de indivíduos em cada população ultrapassou o tamanho máximo pré-estabelecido (N_{max}). Quando isso ocorre, o AIC-MOEA ajusta o tamanho da população por meio do procedimento de seleção de sobreviventes empregado no algoritmo *Indicator-based Multiobjective Evolutionary Algorithm* (IBEA) (ZITZLER; KÜNZLI, 2004). O algoritmo IBEA utiliza um indicador de qualidade (neste estudo, utiliza-se o *binary additive* ϵ*-indicator* - $I_{\epsilon+}$) para guiar a seleção de indivíduos sobreviventes a cada geração, buscando alcançar uma boa aproximação da fronteira Pareto-ótimo. Diferentemente do IBEA, o AIC-MOEA aplica esse procedimento apenas quando o tamanho de alguma população excede N_{max} com o objetivo de melhorar a convergência, reduzir o tempo de processamento e otimizar o uso de memória. Além disso, todos os cálculos necessários para a aplicação desse procedimento são realizados com base nos vetores de objetivo computados de acordo com a formulação atribuída à população cujo tamanho está sendo reajustado. Neste estudo, avaliamos três valores distintos para $N_{max} = \{N, 1.5 \times N, 0.2 \times N\}$.

8.1.5 Atualização do Arquivo

Como os ajustes são realizados sempre que o tamanho das populações excede N_{max}, existe o risco de que indivíduos de alta qualidade sejam eliminados ao longo do processo evolutivo. Para evitar que isso ocorra, o AIC-MOEA mantém um arquivo externo baseado na formulação original do problema abordado, que não participa diretamente do processo evolutivo. A cada geração, os indivíduos filhos gerados são inseridos nesse arquivo seguindo a mesma estratégia utilizada para as populações. Dessa forma, o arquivo contém exclusivamente indivíduos não-dominados. Ao término da execução do algoritmo AIC-MOEA, o tamanho desse arquivo é ajustado para N utilizando o mesmo procedimento descrito na Seção 8.1.4. Esse ajuste tem como objetivo garantir uma comparação justa com os demais algoritmos considerados na análise de desempenho. Por fim, os N indivíduos selecionados compõem o conjunto de aproximação da fronteira Pareto, que representa a saída do AIC-MOEA.

8.2 AIC-MOEAII

O algoritmo AIC-MOEAII é uma variante do AIC-MOEA, que se diferencia principalmente na estratégia de geração de indivíduos filhos e na atualização das populações. Diferentemente do AIC-MOEA, que gera apenas dois indivíduos filhos por geração, o AIC-MOEAII gera múltiplos indivíduos a cada iteração. Algoritmos com essa característica são geralmente classificados como algoritmos evolutivos geracionais. No AIC-MOEAII, o número de indivíduos filhos gerados por geração corresponde ao número de indivíduos da população inicial (N). Como consequência, o AIC-MOEAII realiza um menor número de gerações ao longo da execução em comparação com o AIC-MOEA. No entanto, os demais procedimentos do AIC-MOEAII permanecem idênticos aos do AIC-MOEA. Em determinados cenários, a estratégia adotada pelo AIC-MOEA pode apresentar certa vantagem em termos de velocidade de convergência, visto que, a cada operação de recombinação, os indivíduos filhos gerados em cruzamentos anteriores ficam imediatamente disponíveis para seleções futuras de reprodução. Uma descrição detalhada do AIC-MOEAII é apresentada no Algoritmo 12.

8.3 Problemas de Teste

Neste estudo, diversos problemas de teste foram empregados para avaliar o desempenho dos algoritmos propostos em comparação com MOEAs amplamente utilizados em pesquisas. No total, foram utilizados quatro conjuntos de problemas de teste, cada um com características distintas. Cada conjunto é constituído por um problema de teste para cada número de objetivos considerado, com $M = \{4,6,8,10\}$. A seguir, apresentamos a descrição

Algoritmo 12: AIC-MOEAII

Entrada: N (tamanho da população), A_{max} (número máximo de avaliações da função objetivo), F (conjunto de formulações do problema)
Saída: $Arquivo$ (conjunto de soluções não dominadas encontradas)

início
  $Avaliacoes \leftarrow 0$
  $T_0 \leftarrow$ Gera aleatoriamente uma população inicial de tamanho N
  $Populacoes \leftarrow \varnothing$
  $Arquivo \leftarrow \varnothing$
  $GrausDeContribuicao \leftarrow$ Inicializar valores com zero
  para *cada formulação* $f \in F$ **faça**
    $Populacao_f \leftarrow \varnothing$
    para *cada indivíduo* $x \in T_0$ **faça**
      se x *não é dominado por qualquer indivíduo de* $Populacao_f$ *com base na formulação* f **então**
        $Populacao_f \leftarrow Populacao_f \cup \{x\}$
    $Populacoes \leftarrow Populacoes \cup \{Populacao_f\}$
  repita
    repita
      $Populacao \leftarrow$ SelecionarPopulacao($Populacoes$)
      $pai_1, pai_2 \leftarrow$ SelecionarParaReproducao($Populacao$)
      $filho_1, filho_2 \leftarrow$ Recombinar(pai_1, pai_2)
      $filho_1, filho_2 \leftarrow$ Mutar($filho_1, filho_2$)
      $Filhos \leftarrow Filhos \cup \{filho_1, filho_2\}$
    até $Filhos < N$;
    AtualizarPopulacoesGrauDeContribuicao($Populacoes$, $GrausDeContribuicao$, $Filhos$)
    se *NecessarioAjustarTamanho*($Populacoes$, N_{max}) **então**
      AjustarTamanhoPopulacoes($Populacoes$, N_{max})
    AtualizarArquivo($Arquivo$, $filho_1$, $filho_2$)
    $Avaliacoes \leftarrow Avaliacoes + 2$
  até $Avaliacoes < A_{max}$;
  AjustarTamanhoArquivo($Arquivo$)
  retorna $Arquivo$

de cada conjunto, juntamente com a respectiva estratégia de geração:

- **Problemas teste com objetivos gerados aleatoriamente (ISHIBUCHI; AKEDO; NOJIMA, 2015)**: Tanto os valores de a_{ij} quanto os valores de b_{ij} são números inteiros determinados aleatoriamente dentro do intervalo $[10{,}100]$.
- **Problemas teste aleatórios independentes (LANKAITES PINHEIRO; LANDA-SILVA; ATKIN, 2017)**: Tanto os valores de a_{ij} quanto os valores de b_{ij} são números inteiros determinados aleatoriamente dentro do intervalo $[1{,}1000]$.
- **Problemas teste com objetivos conflitantes e pesos não correlacionados (LANKAITES PINHEIRO; LANDA-SILVA; ATKIN, 2017)**: Enquanto b_{ij} e a_{1j} são números inteiros determinados aleatoriamente dentro do intervalo $[1{,}1000]$, a_{ij} são números intei-

ros determinados aleatoriamente dentro do intervalo $[max\{900-a_{i-1,j},1\},min\{1100-a_{i-1,j},1000\}]$ para $i = \{2,3,\ldots,M\}$.

- **Problemas teste com objetivos conflitantes e pesos correlacionados (LANKAITES PINHEIRO; LANDA-SILVA; ATKIN, 2017)**: Enquanto a_{1j} é um número inteiro determinado aleatoriamente dentro do intervalo $[1,1000]$, a_{ij} são números inteiros determinados aleatoriamente dentro do intervalo $[max\{900 - a_{i-1,j},1\},min\{1100 - a_{i-1,j},1000\}]$ para $i = \{2,3,\ldots,M\}$. Já b_{1j} é um número inteiro determinado aleatoriamente dentro do intervalo $[max\{900 - |a_{1,j} - a_{M,j}|,1\},min\{1100 - |a_{1,j} - a_{M,j}|,1000\}]$ para $i = \{2,3,\ldots,M\}$ e b_{ij} são números inteiros determinados aleatoriamente dentro do intervalo $[max\{900 - |a_{i,j} - a_{i-1,j}|,1\},min\{1100 - |a_{i,j} - a_{i-1,j}|,1000\}]$ para $i = \{2,3,\ldots,M\}$

8.4 Experimentos Computacionais e Análises dos Resultados

Nesta seção, apresentamos os experimentos computacionais realizados neste estudo. O objetivo é identificar as versões dos algoritmos propostos que apresentam melhor desempenho e compará-las com MOEAs amplamente utilizados na literatura. No total, foram consideradas 24 abordagens, incluindo 20 diferentes variações dos MOEAs propostos e 5 MOEAs (IBEA, MOEA/D, NSGA-II, NSGA-III e Two_Arch2) frequentemente empregados em análises comparativas de desempenho para MOPs e MaOPs.

Considerando que um maior número de populações demanda mais recursos computacionais, analisamos, dentre as diversas versões dos algoritmos AIC-MOEA e AIC-MOEAII, o impacto das duas estratégias de construção de formulações com objetivos correlacionados apresentadas no Capítulo 7. O objetivo é verificar se a geração de todas as formulações com objetivos correlacionados possíveis melhora o desempenho dos MOEAs propostos. Além disso, investigamos dois esquemas de reprodução: um que permite o cruzamento entre indivíduos de diferentes populações (seleção inter-populacional) e outro que restringe a recombinação a indivíduos da mesma população (seleção intra-populacional). Também consideramos três estratégias para o ajuste do tamanho das populações ao longo do processo evolutivo. A primeira estratégia, denominada T1, trunca as populações quando atingem o tamanho definido para a população inicial (N). Na segunda estratégia, denominada T2, o truncamento ocorre sempre que o número de indivíduos excede $1{,}5 \times N$, ou seja, quando ultrapassa em 50% o tamanho da população inicial. A terceira estratégia, denominada T3, realiza o truncamento quando a população atinge 20% do tamanho definido para a população inicial ($0{,}2 \times N$). Dentre as três estratégias, a T3 executa o procedimento de ajuste com maior frequência, porém reduz a demanda por recursos computacionais, principalmente de armazenamento em memória. Em contrapartida, a estratégia T2 permite preservar um maior número de soluções não-dominadas em cada população, mas exige mais recursos computacionais, especialmente quando combinada com a abordagem que

gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados.

Os algoritmos propostos e os provenientes da literatura foram implementados em C++. Todos os testes computacionais foram realizados em um computador com processador AMD Ryzen 7 5700G (3.80 GHz), 32 GB de RAM, e sistema operacional Windows 11 Pro.

Devido a natureza estocástica dos MOEAs, foram realizadas 30 execuções independentes (com diferentes sementes) para cada algoritmo em cada problema de teste. Com o objetivo de garantir equidade na análise comparativa de desempenho, as configurações de parâmetros gerais que influenciam diretamente o consumo de recursos computacionais de um MOEA, como o tamanho da população e o critério de parada, foram padronizados para todos os algoritmos avaliados.

Em todos os experimentos computacionais, independentemente do conjunto de problemas de teste, foram utilizadas as mesmas especificações gerais de parâmetros para todos os MOEAs, assegurando uniformidade nas avaliações. A seguir, apresentamos essas especificações:

- **Codificação:** vetor binário de comprimento 500.
- **Critério de Parada:** 100.000 avaliações da função objetivo.
- **Operador de recombinação:** cruzamento uniforme com probabilidade de $0{,}8$.
- **Operador de mutação:** operador de inversão de bits com probabilidade de $2/500$.
- **Tamanho da população:** 120 para $M = 4$, 126 para $M = 6$, 120 para $M = 8$ e 220 para $M = 10$.

Com relação aos parâmetros específicos de cada MOEA, no MOEA/D, adotamos a função de escalarização *Tchebycheff* e definimos o tamanho da vizinhança como $N \times 0{,}1$. No IBEA, utilizamos o ϵ*-additive indicator* como indicador de qualidade e fixamos o valor do parâmetro k, empregado no cálculo da aptidão dos indivíduos, em $0{,}05$. Por fim, para o Two_Arch2, o tamanho do arquivo (CA) foi definido como 100, enquanto o valor de p, utilizado na norma L_p, foi configurado como $1/M$.

Com o objetivo de avaliar como os MOEAs propostos se comparam com MOEAs populares presentes na literatura, optamos por considerar, na análise comparativa de desempenho, apenas as versões dos algoritmos AIC-MOEA e AIC-MOEAII que utilizam as duas estratégias de construção de formulações com objetivos correlacionados, o esquema de seleção intra-populacional e a estratégia T3 para o ajuste do tamanho das populações, uma vez que essas configurações apresentaram o melhor desempenho nos experimentos computacionais realizados.

A análise comparativa de desempenho será apresentada em duas etapas. Na primeira, para cada indicador de qualidade utilizado, serão apresentados os valores médios obtidos pelos MOEAs em cada problema de teste. Como o objetivo é comparar o desempenho dos diferentes MOEAs, é fundamental verificar se as diferenças identificadas nos

resultados são estatisticamente significativas. Com base nos valores obtidos para os indicadores de qualidade I_{HV}, IGD_+ e I_{ϵ^+}, foram conduzidas análises estatísticas utilizando um teste não paramétrico. Para cada problema de teste, as comparações entre pares de MOEAs foram realizadas por meio do teste de Wilcoxon rank-sum (também conhecido como teste de Wilcoxon-Mann-Whitney). Na análise estatística, a hipótese nula assume que os valores de um indicador de qualidade obtidos pelos dois algoritmos do par avaliado não apresentam diferenças estatisticamente significativas em termos de localização, sendo qualquer variação atribuída ao acaso. Já a hipótese alternativa sugere que esses valores diferem significativamente em localização. Os testes foram realizados com um nível de significância de 95%.

Para cada problema de teste, as análises estatísticas fornecerão as seguintes informações sobre cada algoritmo: a frequência com que o algoritmo superou seus concorrentes com uma diferença estatisticamente significativa, o número de casos em que não houve diferença significativa entre os resultados, e a quantidade de vezes em que o algoritmo foi superado com uma diferença estatisticamente significativa nos resultados.

As Tabelas 14, 16 e 18 apresentam os valores médios resultantes das 30 execuções realizadas de cada MOEA para os indicadores de qualidade I_{HV}, IGD_+ e I_{ϵ^+}, respectivamente. Seguindo a mesma organização, as Tabelas 15, 17 e 19 contêm os resultados das análises estatísticas para cada MOEA em relação aos indicadores de qualidade I_{HV}, IGD_+ e I_{ϵ^+}, respectivamente. Nas três primeiras tabelas citadas, os MOEAs com melhor desempenho estão destacados em negrito, enquanto, nas tabelas subsequentes, os valores em negrito correspondem às melhores performances de acordo com as análises estatísticas.

De acordo com a Tabela 14, que exibe os resultados obtidos utilizando o indicador de qualidade I_{HV}, é evidente que as abordagens propostas superaram os algoritmos da literatura avaliados, independentemente do conjunto de problemas teste e do número de objetivos. É notável que as quatro variações das abordagens propostas obtiveram as médias mais altas, indicando que os MOEAs propostos alcançaram conjuntos de aproximação que refletem uma exploração mais eficaz e uma cobertura mais abrangente da fronteira Pareto. Em outras palavras, esses MOEAs encontraram soluções que apresentam melhores *trade-offs* entre os objetivos otimizados e que dominam uma área mais ampla do espaço de objetivos. Além disso, destaca-se que as versões dos algoritmos AIC-MOEA e AIC-MOEAII que empregaram a estratégia que gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados apresentaram um desempenho superior em comparação às versões que utilizaram a estratégia que gera apenas uma amostra desas formulações. Entre os algoritmos da literatura, o IBEA apresentou os melhores resultados. É importante ressaltar que, nos conjuntos de problemas de teste *CorrelatedConflictingInstances* e *UncorrelatedConflictingInstances*, nos quais existem associações entre os benefícios das mochilas, o algoritmo NSGA-II superou seu sucessor, o algoritmo NSGA-III. De acordo com

a Tabela 15, as discrepâncias observadas entre os algoritmos propostos e os da literatura são estatisticamente significativas.

Conforme a tabela 16, que apresenta os resultados obtidos utilizando o indicador de qualidade IGD_+, observa-se que o domínio dos MOEAs propostos que utilizaram a estratégia que gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados é ainda maior. Isso sugere que, com base na aproximação da Fronteira Pareto-ótimo obtida ao filtrar todas as soluções não-dominadas encontradas nos experimentos computacionais, os algoritmos propostos conseguiram produzir conjuntos de soluções com melhor convergência e diversidade (cobertura) em relação aos demais MOEAs. Ao analisarmos os resultados dos testes estatísticos, apresentados na Tabela 17, para o problema teste com oito objetivos do conjunto *IndependentRandomInstances*, é perceptível que, embora o valor médio obtido pelo algoritmo IBEA seja ligeiramente superior, não há diferença significativa em relação à abordagem proposta que obteve o melhor desempenho. Além disso, apenas para dois problemas de teste, não foram encontradas diferenças estatisticamente significativas entre as abordagens propostas que utilizaram a estratégia que gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados e aquelas que geram apenas uma amostra.

Com base nos resultados obtidos utilizando o indicador de qualidade I_{ϵ^+}, conforme apresentado nas tabelas 18 e 19, é possível identificar um padrão semelhante ao observado para os outros indicadores de qualidade. É evidente a superioridade das abordagens propostas em relação aos MOEAs da literatura, especialmente as versões dos algoritmos AIC-MOEA e AIC-MOEAII, que empregaram a estratégia que gera todas as possíveis formulações com objetivos correlacionados. Esse fato indica que os MOEAs propostos conseguiram obter conjuntos de soluções com melhor convergência para a aproximação da fronteira Pareto-ótimo.

Tabela 14 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para todos os problemas de teste de cada conjunto utilizado. A tabela mostra os valores médio de I_{HV} destacando em negrito o MOEA que obteve o melhor valor para o indicador de qualidade.

Problema de Teste	IBEA	MOEA/D	NSGA-II	NSGA-III	AIC-MOEA Intra_T3	AIC-MOEA All_Intra_T3	AIC-MOEAII Intra_T3	AIC-MOEAII All_Intra_T3	Two_Arch2
CorrelatedConflictingInstances 4	1,2224	1,1110	1,2357	1,0888	1,1385	1,3217	1,1238	**1,3315**	1,2018
CorrelatedConflictingInstances 6	1,5172	1,2576	1,5060	1,1985	1,4120	1,6502	1,3935	**1,6717**	1,4976
CorrelatedConflictingInstances 8	1,8131	1,3971	1,4999	1,4583	1,6902	**2,0170**	1,6716	2,0101	1,8109
CorrelatedConflictingInstances 10	1,7420	1,2043	1,1851	1,3170	1,6470	**1,9365**	1,6665	1,9264	1,6611
IndependentRandomInstances 4	0,9234	0,9820	0,6314	0,7005	1,0993	1,1105	1,1142	**1,1243**	0,8640
IndependentRandomInstances 6	1,0098	0,9311	0,4010	0,6685	**1,2535**	1,2496	1,2440	1,2529	0,8946
IndependentRandomInstances 8	1,1379	0,9211	0,1834	0,5955	1,4292	1,4288	**1,4438**	1,4239	0,8096
IndependentRandomInstances 10	1,3034	1,0508	0,2143	0,7168	1,6170	**1,6255**	1,5666	1,5789	0,8341
IshibuchiInstances 4	0,9788	1,0528	0,7078	0,7417	1,1763	1,1826	**1,2022**	1,1772	0,9211
IshibuchiInstances 6	1,0430	0,9541	0,4809	0,6389	1,2902	**1,3149**	1,3120	1,2995	0,8810
IshibuchiInstances 8	1,2101	1,0087	0,2814	0,6137	1,5435	**1,5569**	1,5410	1,5182	0,9016
IshibuchiInstances 10	1,3368	1,0396	0,2553	0,5424	1,7862	**1,7925**	1,7065	1,7050	0,8584
UncorrelatedConflictingInstances 4	0,8023	0,7115	0,7830	0,7216	0,6975	0,9082	0,6889	**0,9147**	0,7868
UncorrelatedConflictingInstances 6	0,5438	0,4186	0,4989	0,3926	0,4719	0,6111	0,4711	**0,6178**	0,5172
UncorrelatedConflictingInstances 8	0,3489	0,2445	0,2762	0,2393	0,3061	0,3814	0,3026	**0,3837**	0,3162
UncorrelatedConflictingInstances 10	0,2096	0,1321	0,1484	0,1503	0,1968	0,2242	0,2035	**0,2284**	0,1843

Tabela 15 – Resultados dos testes estatísticos obtidos para os oito MOEAs em todos os problemas de teste de cada conjunto, com base nos valores do indicador de qualidade I_{HV}. Os MOEAs com o melhor desempenho estão destacados em negrito.

Problema de Teste	IBEA	MOEA/D	NSGA-II	NSGA-III	AIC-MOEA Intra_T3	AIC-MOEA All_Intra_T3	AIC-MOEAII Intra_T3	AIC-MOEAII All_Intra_T3	Two_Arch2
CorrelatedConflictingInstances 4	5/0/3	1/0/7	6/0/2	0/0/8	3/0/5	7/0/1	2/0/6	**8/0/0**	4/0/4
CorrelatedConflictingInstances 6	5/1/2	1/0/7	4/2/2	0/0/8	3/0/5	7/0/1	2/0/6	**8/0/0**	4/1/3
CorrelatedConflictingInstances 8	5/1/2	0/0/8	2/0/6	1/0/7	3/1/4	**7/1/0**	3/1/4	**7/1/0**	5/1/2
CorrelatedConflictingInstances 10	6/0/2	0/1/7	0/1/7	2/0/6	3/2/3	**7/1/0**	3/2/3	**7/1/0**	3/2/3
IndependentRandomInstances 4	3/0/5	4/0/4	0/0/8	1/0/7	5/2/1	5/3/0	5/3/0	**6/2/0**	2/0/6
IndependentRandomInstances 6	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	2/0/6
IndependentRandomInstances 8	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	2/0/6
IndependentRandomInstances 10	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	5/3/0	**6/2/0**	5/2/1	5/3/0	2/0/6
IshibuchiInstances 4	3/0/5	4/0/4	0/0/8	1/0/7	5/2/1	5/3/0	**7/1/0**	5/2/1	2/0/6
IshibuchiInstances 6	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	5/2/1	**6/2/0**	5/3/0	5/3/0	2/0/6
IshibuchiInstances 8	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	2/0/6
IshibuchiInstances 10	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	**7/1/0**	**7/1/0**	5/1/2	5/1/2	2/0/6
UncorrelatedConflictingInstances 4	6/0/2	2/1/5	4/1/3	2/1/5	0/1/7	**7/1/0**	0/1/7	**7/1/0**	4/1/3
UncorrelatedConflictingInstances 6	6/0/2	1/0/7	4/0/4	0/0/8	2/1/5	7/0/1	2/1/5	**8/0/0**	5/0/3
UncorrelatedConflictingInstances 8	6/0/2	0/1/7	2/0/6	0/1/7	3/1/4	**7/1/0**	3/1/4	**7/1/0**	5/0/3
UncorrelatedConflictingInstances 10	6/0/2	0/0/8	1/1/6	1/1/6	4/0/4	7/0/1	5/0/3	**8/0/0**	3/0/5

Tabela 16 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para todos os problemas de teste de cada conjunto utilizado. A tabela mostra os valores médio de IGD_+ destacando em negrito o MOEA que obteve o melhor valor para o indicador de qualidade.

Problema de Teste	IBEA	MOEA/D	NSGA-II	NSGA-III	AIC-MOEA Intra_T3	AIC-MOEA All_Intra_T3	AIC-MOEAII Intra_T3	AIC-MOEAII All_Intra_T3	Two_Arch2
CorrelatedConflictingInstances 4	0,0207	0,0345	0,0402	0,0485	0,0255	**0,0131**	0,0285	0,0144	0,0248
CorrelatedConflictingInstances 6	0,0216	0,0433	0,0560	0,0529	0,0231	**0,0148**	0,0239	**0,0148**	0,0226
CorrelatedConflictingInstances 8	0,0257	0,0597	0,1169	0,0543	0,0282	**0,0180**	0,0289	0,0191	0,0338
CorrelatedConflictingInstances 10	0,0439	0,1090	0,1609	0,0987	0,0495	**0,0293**	0,0468	0,0315	0,0553
IndependentRandomInstances 4	0,0786	0,1156	0,3300	0,1842	0,0563	0,0536	0,0592	**0,0527**	0,1117
IndependentRandomInstances 6	0,0703	0,1086	0,4780	0,1537	0,0718	0,0631	0,0740	**0,0626**	0,1213
IndependentRandomInstances 8	0,0752	0,1159	0,6621	0,1614	0,0798	**0,0746**	0,0800	0,0760	0,1799
IndependentRandomInstances 10	0,0855	0,0827	0,5662	0,1323	0,0749	**0,0668**	0,0902	0,0787	0,1929
IshibuchiInstances 4	0,0681	0,1089	0,3067	0,1769	0,0495	**0,0471**	0,0500	0,0501	0,0972
IshibuchiInstances 6	0,0690	0,1107	0,4183	0,1720	0,0651	**0,0596**	0,0671	0,0619	0,1275
IshibuchiInstances 8	0,0735	0,1065	0,5523	0,1667	0,0709	**0,0659**	0,0723	0,0675	0,1569
IshibuchiInstances 10	0,0870	0,0950	0,4938	0,1967	0,0682	**0,0649**	0,0794	0,0708	0,1823
UncorrelatedConflictingInstances 4	0,0705	0,1097	0,0803	0,1067	0,1160	0,0315	0,1202	**0,0295**	0,0782
UncorrelatedConflictingInstances 6	0,0757	0,1504	0,1006	0,1688	0,1187	0,0378	0,1194	**0,0355**	0,0904
UncorrelatedConflictingInstances 8	0,0906	0,1917	0,1376	0,1974	0,1396	0,0451	0,1421	**0,0435**	0,1075
UncorrelatedConflictingInstances 10	0,0898	0,2266	0,1534	0,1658	0,1306	0,0427	0,1217	**0,0386**	0,1145

Tabela 17 – Resultados dos testes estatísticos obtidos para os oito MOEAs em todos os problemas de teste de cada conjunto, com base nos valores do indicador de qualidade IGD_+. Os MOEAs com o melhor desempenho estão destacados em negrito.

Problema de Teste	IBEA	MOEA/D	NSGA-II	NSGA-III	AIC-MOEA Intra_T3	AIC-MOEA All_Intra_T3	AIC-MOEAII Intra_T3	AIC-MOEAII All_Intra_T3	Two_Arch2
CorrelatedConflictingInstances 4	6/0/2	2/0/6	1/0/7	0/0/8	4/1/3	**7/1/0**	3/0/5	**7/1/0**	4/1/3
CorrelatedConflictingInstances 6	5/1/2	2/0/6	0/1/7	0/1/7	3/2/3	**7/1/0**	3/2/3	**7/1/0**	3/3/2
CorrelatedConflictingInstances 8	6/0/2	1/0/7	0/0/8	2/0/6	4/1/3	**7/1/0**	4/1/3	**7/1/0**	3/0/5
CorrelatedConflictingInstances 10	6/0/2	1/0/7	0/0/8	2/0/6	4/1/3	**7/1/0**	4/1/3	**7/1/0**	3/0/5
IndependentRandomInstances 4	4/0/4	2/1/5	0/0/8	1/0/7	5/3/0	**6/2/0**	5/1/2	**6/2/0**	2/1/5
IndependentRandomInstances 6	4/2/2	3/0/5	0/0/8	1/0/7	4/2/2	**7/1/0**	4/2/2	**7/1/0**	2/0/6
IndependentRandomInstances 8	**4/4/0**	3/0/5	0/0/8	2/0/6	**4/4/0**	**4/4/0**	**4/4/0**	**4/4/0**	1/0/7
IndependentRandomInstances 10	3/2/3	3/3/2	0/0/8	2/0/6	6/1/1	**8/0/0**	3/2/3	5/2/1	1/0/7
IshibuchiInstances 4	4/0/4	2/0/6	0/0/8	1/0/7	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	3/0/5
IshibuchiInstances 6	4/2/2	3/0/5	0/0/8	1/0/7	4/3/1	**7/1/0**	4/2/2	6/2/0	2/0/6
IshibuchiInstances 8	4/2/2	3/0/5	0/0/8	1/0/7	4/3/1	**7/1/0**	4/2/2	6/2/0	2/0/6
IshibuchiInstances 10	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	6/2/0	**7/1/0**	5/0/3	6/1/1	2/0/6
UncorrelatedConflictingInstances 4	6/0/2	2/1/5	4/1/3	2/1/5	0/1/7	**7/1/0**	0/1/7	**7/1/0**	4/1/3
UncorrelatedConflictingInstances 6	6/0/2	1/0/7	4/0/4	0/0/8	2/1/5	**7/1/0**	2/1/5	**7/1/0**	5/0/3
UncorrelatedConflictingInstances 8	6/0/2	0/1/7	2/2/4	0/1/7	2/2/4	**7/1/0**	2/2/4	**7/1/0**	5/0/3
UncorrelatedConflictingInstances 10	6/0/2	0/0/8	2/0/6	1/0/7	3/0/5	7/0/1	4/0/4	**8/0/0**	5/0/3

Tabela 18 – Resultados obtidos pelos oito MOEAs para todos os problemas de teste de cada conjunto utilizado. A tabela mostra os valores médio de I_{ϵ^+} destacando em negrito o MOEA que obteve o melhor valor para o indicador de qualidade.

Problema de Teste	IBEA	MOEA/D	NSGA-II	NSGA-III	AIC-MOEA Intra_T3	AIC-MOEA All_Intra_T3	AIC-MOEAII Intra_T3	AIC-MOEAII All_Intra_T3	Two_Arch2
CorrelatedConflictingInstances 4	0,1206	0,1725	0,0869	0,1629	0,1712	0,0616	0,1766	**0,0520**	0,1328
CorrelatedConflictingInstances 6	0,1178	0,1964	0,0832	0,2077	0,1566	0,0798	0,1646	**0,0691**	0,1197
CorrelatedConflictingInstances 8	0,1214	0,2146	0,1081	0,2053	0,1672	0,0886	0,1724	**0,0862**	0,1090
CorrelatedConflictingInstances 10	0,1238	0,2316	0,1373	0,1685	0,1682	0,0822	0,1587	**0,0736**	0,1174
IndependentRandomInstances 4	0,2488	0,2079	0,3510	0,3343	0,1907	0,1715	0,1816	**0,1645**	0,2578
IndependentRandomInstances 6	0,2256	0,2479	0,4174	0,3106	0,1768	**0,1624**	0,1805	0,1656	0,2389
IndependentRandomInstances 8	0,1989	0,2491	0,5007	0,3232	0,1723	**0,1701**	0,1725	0,1705	0,2583
IndependentRandomInstances 10	0,1900	0,2374	0,4295	0,2728	0,1674	**0,1522**	0,1663	0,1564	0,2261
IshibuchiInstances 4	0,2468	0,1921	0,3328	0,3409	0,1631	0,1680	**0,1431**	0,1677	0,2539
IshibuchiInstances 6	0,2140	0,2340	0,3962	0,3212	0,1685	**0,1543**	0,1564	0,1605	0,2477
IshibuchiInstances 8	0,1877	0,2226	0,4493	0,3157	0,1446	**0,1416**	0,1496	0,1459	0,2341
IshibuchiInstances 10	0,1797	0,2324	0,4043	0,3296	0,1349	**0,1323**	0,1418	0,1377	0,2294
UncorrelatedConflictingInstances 4	0,2001	0,2675	0,1995	0,2354	0,2824	0,0654	0,2937	**0,0541**	0,2015
UncorrelatedConflictingInstances 6	0,2147	0,3282	0,2138	0,3340	0,2971	0,0592	0,3009	**0,0493**	0,2210
UncorrelatedConflictingInstances 8	0,2401	0,3534	0,2219	0,3661	0,3203	0,0722	0,3173	**0,0654**	0,2216
UncorrelatedConflictingInstances 10	0,2295	0,3842	0,2260	0,2872	0,3000	0,0615	0,2968	**0,0555**	0,2301

Tabela 19 – Resultados dos testes estatísticos obtidos para os oito MOEAs em todos os problemas de teste de cada conjunto, com base nos valores do indicador de qualidade I_{ϵ^+}. Os MOEAs com o melhor desempenho estão destacados em negrito.

Problema de Teste	IBEA	MOEA/D	NSGA-II	NSGA-III	AIC-MOEA Intra_T3	AIC-MOEA All_Intra_T3	AIC-MOEAII Intra_T3	AIC-MOEAII All_Intra_T3	Two_Arch2
CorrelatedConflictingInstances 4	5/0/3	0/2/6	6/0/2	2/1/5	1/2/5	7/0/1	0/1/7	**8/0/0**	4/0/4
CorrelatedConflictingInstances 6	4/1/3	1/0/7	6/1/1	0/0/8	2/1/5	6/1/1	2/1/5	**8/0/0**	4/1/3
CorrelatedConflictingInstances 8	4/0/4	0/0/8	5/1/2	1/0/7	2/1/5	**7/1/0**	2/1/5	**7/1/0**	5/1/2
CorrelatedConflictingInstances 10	5/1/2	0/0/8	4/0/4	1/1/6	1/1/6	7/0/1	3/0/5	**8/0/0**	5/1/2
IndependentRandomInstances 4	2/1/5	4/0/4	0/1/7	0/1/7	5/1/2	6/2/0	5/2/1	**7/1/0**	2/1/5
IndependentRandomInstances 6	4/0/4	2/1/5	0/0/8	1/0/7	5/3/0	**6/2/0**	5/1/2	**6/2/0**	2/1/5
IndependentRandomInstances 8	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	2/0/6
IndependentRandomInstances 10	4/0/4	2/0/6	0/0/8	1/0/7	5/1/2	**7/1/0**	5/1/2	**7/1/0**	3/0/5
IshibuchiInstances 4	2/1/5	4/0/4	0/1/7	0/1/7	5/2/1	5/2/1	**8/0/0**	5/2/1	2/1/5
IshibuchiInstances 6	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	5/1/2	**6/2/0**	**6/2/0**	5/3/0	2/0/6
IshibuchiInstances 8	4/0/4	3/0/5	0/0/8	1/0/7	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	**5/3/0**	2/0/6
IshibuchiInstances 10	4/0/4	2/1/5	0/0/8	1/0/7	**6/2/0**	**6/2/0**	5/1/2	5/3/0	2/1/5
UncorrelatedConflictingInstances 4	4/2/2	2/0/6	4/2/2	3/0/5	1/0/7	7/0/1	0/0/8	**8/0/0**	4/2/2
UncorrelatedConflictingInstances 6	4/2/2	0/1/7	4/2/2	0/1/7	2/1/5	7/0/1	2/1/5	**8/0/0**	4/2/2
UncorrelatedConflictingInstances 8	4/0/4	1/0/7	5/1/2	0/0/8	2/1/5	**7/1/0**	2/1/5	**7/1/0**	5/1/2
UncorrelatedConflictingInstances 10	4/2/2	0/0/8	4/2/2	3/0/5	1/1/6	**7/1/0**	1/1/6	**7/1/0**	4/2/2

9 Conclusões

Neste trabalho, iniciamos por apresentar duas análises aplicadas a uma nova formulação com muitos objetivos do problema combinatório *Dial-a-Ride Problem*. Através destas análises, buscamos aprofundar nossa compreensão sobre os desafios inerentes a problemas combinatórios quando mais de três objetivos são otimizados. Por meio do estudo do *fitness landscape*, a primeira análise teve como objetivo expandir a compreensão sobre a geometria (forma) da aproximação da fronteira Pareto obtida para o problema, utilizando problemas de teste com diferentes características, além de auxiliar na identificação de possíveis associações entre os objetivos otimizados. A segunda análise foi realizada para comparar o desempenho de oito MOEAs frequentemente empregados na literatura cientifica para a resolução de MaOPs, quando aplicados à formulação do MaOP abordado.

Os resultados obtidos reforçaram as observações já destacadas na literatura. Geralmente, abordagens que dependem exclusivamente da relação de dominância Pareto para condução do processo de busca enfrentam dificuldades ao lidar com problemas que apresentam um alto número de objetivos, o que sugere problemas de escalabilidade. Além disso, as conclusões extraídas das duas análises indicam que, mesmo ao utilizar uma única formulação do MaOP abordado, é possível realizar observações distintas sobre suas características e o comportamento dos algoritmos avaliados, dependendo das propriedades específicas dos conjuntos de problemas de teste utilizados. Isso fica evidente, por exemplo, na detecção das associações entre os objetivos por meio da análise de correlação aplicada às fronteiras Pareto obtidas. Dependendo do grau de correlação capturado entre os objetivos, a melhoria de um objetivo naturalmente leva a melhorias em outros objetivos. Portanto, fica evidente que, além da quantidade de objetivos otimizados, outras particularidades dos problemas de teste também exercem influência nos resultados das análises.

No que diz respeito à análise comparativa de desempenho, é relevante destacar que, embora tenha sido originalmente proposto para abordar MOPs com até três objetivos, os algoritmos Two_ARCH2 e IBEA apresentaram desempenho superior em comparação com MOEAs recentemente desenvolvidos para lidar com MaOPs, como por exemplo os algoritmos NSGA-III e SPEA-R. Apesar de orientar sua busca com base exclusivamente no indicador de qualidade I_{ϵ^+}, que foi utilizado como critério de comparação na análise realizada, o algoritmo IBEA obteve bons resultados tanto em termos do indicador de qualidade I_{ϵ^+} quanto do I_{HV}. Cabe ressaltar que a eficácia do algoritmo IBEA ao tratar MaOPs também foi reportada em outros recentes estudos presentes na literatura cientifica (Tanabe; Ishibuchi; Oyama, 2017; BEZERRA; LÓPEZ-IBÁÑEZ; STÜTZLE, 2018; TANABE; ISHIBUCHI, 2020).

Em um segundo momento deste trabalho, apresentamos e avaliamos uma abordagem multiobjetivo destinada a melhorar o desempenho de MOEAs já existentes. Essa abordagem visa otimizar tanto a formulação original do problema de otimização abordado quanto formulações com objetivos correlacionados (formulações alternativas), derivadas dela. Essa abordagem foi projetado para ser facilmente integrada a qualquer MOEA com a mínima necessidade de esforço e adaptação. Dado um MOP/MaOP, a abordagem proposta constrói formulações alternativas substituindo algumas das funções objetivo do problema por combinações lineares e aloca processos evolutivos independentes do MOEA escolhido para cada uma dessas formulações. Ao final de todos os processos evolutivos, todos os conjuntos aproximados são reavaliados de acordo com a formulação original do problema, e o conjunto de soluções não-dominadas é retornado como resultado do algoritmo. Os resultados obtidos por meio de diversos experimentos computacionais confirmam que tanto o uso de diferentes formulações alternativas para orientar o processo evolutivo quanto a variação da intensidade das correlações artificialmente induzidas permitem que os MOEAs direcionem a busca para diferentes direções no espaço de objetivos, explorando regiões que seriam difíceis de alcançar apenas otimizando a formulação original do problema utilizando algum dos algoritmos de otimização multiobjetivo do estado da arte.

Devido à melhoria na capacidade de busca de diversos MOEAs através da abordagem proposta, introduzimos dois novos MOEAs baseados na otimização de formulações com objetivos correlacionados, nomeados AIC-MOEA e AIC-MOEAII. Ambos os MOEAs mantêm e evolui várias populações, permitindo conduzir diferentes processos evolutivos em apenas uma única execução. Além da população que evolui de acordo com a formulação original do problema, os MOEAs propostos também mantêm uma população independente para cada formulação com objetivos correlacionados criada. Também é mantido um arquivo, no qual são armazenados todos os indivíduos não-dominados com base na formulação original encontrados durante todo o processo evolutivo. Uma vez que cada população evolui conforme uma das formulações, é esperado que cada uma explore de forma efetiva regiões específicas do espaço de objetivos original. No entanto, devido à natureza estocástica de alguns operadores presentes nos MOEAs, não há impedimento para que cada população explore também outras regiões. Neste estudo, avaliamos duas estratégias para a construção de formulações com objetivos correlacionados. É importante ressaltar que a quantidade de formulações com objetivos correlacionados criada, assim como o número de populações mantidas pelos MOEAs propostos, é dependente da estratégia adotada. Os resultados apresentados demonstraram a superioridade dos MOEAs propostos em comparação com renomados MOEAs da literatura, quando aplicados ao problema da mochila multiobjetivo contendo de 4 a 10 objetivos.

Ao longo do desenvolvimento desta tese, surgiram diversos questionamentos e foram identificadas algumas oportunidades. Com base nas questões levantadas, é possível delinear algumas perspectivas e iniciativas de pesquisa que podem ser exploradas. A seguir,

apresentamos alguns dos pontos que podem ser considerados como perspectivas para trabalhos futuros:

- Validar os MOEAs propostos por meio da utilização de problemas combinatórios e contínuos reais.
- Desenvolver estratégias adaptativas que, ao longo do processo evolutivo, possam identificar as formulações com objetivos correlacionados que tiveram maior influência na evolução das populações, visando proporcionar uma melhor alocação de recursos.
- De maneira análoga ao tópico anterior, conceber estratégias adaptativas que, ao longo do processo evolutivo, removam ou reduzam o número de indivíduos das populações que apresentaram menor contribuição durante as gerações que antecedem a geração corrente.
- Investigar novas abordagens para construção de formulações alternativas derivadas da formulação original, tais como abordagens que utilizam combinações não-lineares entre objetivos ou até mesmo considerar objetivos dependentes.

9.1 Produção Bibliográfica

Renan J. S. Viana, André G. Santos, Flávio V. C. Martins, and Elizabeth F. Wanner. 2019. Optimization of a demand responsive transport service using multi-objective evolutionary algorithms. In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion (GECCO '19). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2064–2067.

Renan J. S. Viana, Flávio V. C. Martins, and Elizabeth F. Wanner. "An Investigation into Many-objective Optimization Problems: A Case Study of the Dial-a-Ride Problem,"In IEEE Latin America Transactions, vol. 20, no. 1, pp. 73-81, Jan. 2022.

Referências

ABRAHAM, A.; JAIN, L. **Evolutionary multiobjective optimization**. [S.l.]: Springer, 2005. Citado na página 12.

AGUIRRE, H.; TANAKA, K. Many-objective optimization by space partitioning and adaptive ε-ranking on mnk-landscapes. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2009. p. 407–422. Citado na página 77.

AGUIRRE, H.; TANAKA, K. Space partitioning with adaptive ε-ranking and substitute distance assignments: a comparative study on many-objective mnk-landscapes. In: **Proceedings of the 11th Annual conference on Genetic and evolutionary computation**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 547–554. Citado na página 77.

AKOGLU, H. User's guide to correlation coefficients. **Turkish journal of emergency medicine**, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 91–93, 2018. Citado na página 33.

AMBROSINO, G.; NELSON, J.; ROMANAZZO, M. **Demand responsive transport services: Towards the flexible mobility agency**. [S.l.]: ENEA, Italian National Agency for New Technologies, Energy and the Environment, 2004. Citado na página 44.

BADER, J.; ZITZLER, E. Hype: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. **Evolutionary computation**, MIT Press, v. 19, n. 1, p. 45–76, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 3, 32 e 68.

BASSEUR, M.; BURKE, E. K. Indicator-based multi-objective local search. In: IEEE. **2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. [S.l.], 2007. p. 3100–3107. Citado na página 80.

BAZGAN, C.; HUGOT, H.; VANDERPOOTEN, D. Solving efficiently the 0–1 multi-objective knapsack problem. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 260–279, 2009. Citado na página 83.

BECHIKH, S.; ELARBI, M.; SAID, L. B. Many-objective optimization using evolutionary algorithms: A survey. In: **Recent advances in evolutionary multi-objective optimization**. [S.l.]: Springer, 2017. p. 105–137. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 29.

BEUME, N. et al. On the complexity of computing the hypervolume indicator. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, IEEE, v. 13, n. 5, p. 1075–1082, 2009. Citado na página 4.

BEUME, N.; NAUJOKS, B.; EMMERICH, M. Sms-emoa: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 181, n. 3, p. 1653–1669, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 32.

BEZERRA, L. C.; LÓPEZ-IBÁÑEZ, M.; STÜTZLE, T. A large-scale experimental evaluation of high-performing multi- and many-objective evolutionary algorithms. **Evolutionary Computation**, v. 26, n. 4, p. 621–656, 2018. PMID: 29155605. Disponível em: <https://doi.org/10.1162/evco_a_00217>. Citado na página 133.

BLANK, J.; DEB, K.; ROY, P. C. Investigating the normalization procedure of nsga-iii. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2019. p. 229–240. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 24.

BRANKE, J.; KAUSSLER, T.; SCHMECK, H. Guidance in evolutionary multi-objective optimization. **Advances in engineering software**, Elsevier, v. 32, n. 6, p. 499–507, 2001. Citado na página 79.

BRANKE, J. et al. Parallelizing multi-objective evolutionary algorithms: Cone separation. In: IEEE. **Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No. 04TH8753)**. [S.l.], 2004. v. 2, p. 1952–1957. Citado na página 79.

BROCKHOFF, D.; ZITZLER, E. Are all objectives necessary? on dimensionality reduction in evolutionary multiobjective optimization. In: SPRINGER. **Parallel Problem Solving from Nature-PPSN IX: 9th International Conference, Reykjavik, Iceland, September 9-13, 2006, Proceedings**. [S.l.], 2006. p. 533–542. Citado na página 77.

BROCKHOFF, D.; ZITZLER, E. Dimensionality reduction in multiobjective optimization: The minimum objective subset problem. In: **Operations Research Proceedings 2006**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 423–429. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 77.

CASTRO-GUTIERREZ, J.; LANDA-SILVA, D.; PÉREZ, J. M. Nature of real-world multi-objective vehicle routing with evolutionary algorithms. In: IEEE. **2011 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics**. [S.l.], 2011. p. 257–264. Citado na página 35.

CHAND, S.; WAGNER, M. Evolutionary many-objective optimization: A quick-start guide. **Surveys in Operations Research and Management Science**, Elsevier, v. 20, n. 2, p. 35–42, 2015. Citado na página 4.

CHESHMEHGAZ, H. R.; HARON, H.; SHARIFI, A. The review of multiple evolutionary searches and multi-objective evolutionary algorithms. **Artificial Intelligence Review**, Springer, v. 43, p. 311–343, 2015. Citado na página 79.

CHEVRIER, R. et al. On optimizing a demand responsive transport with an evolutionary multi-objective approach. In: IEEE. **Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2010 13th International IEEE Conference on**. [S.l.], 2010. p. 575–580. Citado 7 vezes nas páginas 6, 8, 44, 49, 50, 54 e 55.

CHEVRIER, R. et al. Solving a dial-a-ride problem with a hybrid evolutionary multi-objective approach: Application to demand responsive transport. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 1247–1258, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 6, 8, 44, 49, 50, 54, 55 e 72.

COELLO, C. A. C. **An empirical study of evolutionary techniques for multiobjective optimization in engineering design**. Tese (Doutorado) — Tulane University, Graduate Program in Biomedical Sciences, 1996. Citado na página 3.

COELLO, C. A. C. A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques. **Knowledge and Information systems**, Springer, v. 1, n. 3, p. 269–308, 1999. Citado na página 12.

COELLO, C. A. C. et al. Evolutionary multiobjective optimization: open research areas and some challenges lying ahead. **Complex & Intelligent Systems**, Springer, p. 1–16, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 1, 4, 5 e 29.

COELLO, C. A. C. et al. Evolutionary multiobjective optimization: open research areas and some challenges lying ahead. **Complex & Intelligent Systems**, Springer, v. 6, p. 221–236, 2020. Citado na página 2.

COELLO, C. C. Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field. **IEEE computational intelligence magazine**, IEEE, v. 1, n. 1, p. 28–36, 2006. Citado na página 2.

COELLO, C. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. **Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems**. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 10.

CORDEAU, J.-F. A branch-and-cut algorithm for the dial-a-ride problem. **Operations Research**, INFORMS, v. 54, n. 3, p. 573–586, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 46, 47, 49, 50 e 51.

CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. A tabu search heuristic for the static multi-vehicle dial-a-ride problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 579–594, 2003. Citado na página 49.

CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. The dial-a-ride problem: models and algorithms. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 153, n. 1, p. 29–46, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 49.

CORDEAU, J.-F. et al. Transportation on demand. **Transportation, handbooks in operations research and management science**, v. 14, p. 429–466, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

CORMEN, T. H. et al. **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2009. Citado na página 1.

CORNE, D. W.; KNOWLES, J. D. Techniques for highly multiobjective optimisation: some nondominated points are better than others. In: **Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 773–780. Citado na página 5.

CUBILLOS, C.; RODRIGUEZ, N.; CRAWFORD, B. A study on genetic algorithms for the darp problem. In: SPRINGER. **International Work-Conference on the Interplay Between Natural and Artificial Computation**. [S.l.], 2007. p. 498–507. Citado na página 50.

DAS, I.; DENNIS, J. E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. **SIAM journal on optimization**, SIAM, v. 8, n. 3, p. 631–657, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 71.

DEB, K. **Multi-objective optimization using evolutionary algorithms**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. v. 16. Citado 7 vezes nas páginas ix, 10, 11, 12, 13, 15 e 35.

DEB, K.; JAIN, H. Handling many-objective problems using an improved nsga-ii procedure. In: IEEE. **2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. [S.l.], 2012. p. 1–8. Citado na página 120.

DEB, K.; JAIN, H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. **IEEE transactions on evolutionary computation**, v. 18, n. 4, p. 577–601, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 3, 22, 29, 31, 71, 88 e 120.

DEB, K. et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. **Evolutionary Computation, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 3, 12 e 88.

DEB, K.; SAXENA, D. Searching for pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems. In: **Proceedings of the World Congress on Computational Intelligence (WCCI-2006)**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 3352–3360. Citado na página 3.

DEB, K.; SAXENA, D. K. On finding pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems. **Kangal report**, v. 2005011, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

DEB, K.; SUNDAR, J. Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms. In: **Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 635–642. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

DEB, K.; ZOPE, P.; JAIN, A. Distributed computing of pareto-optimal solutions with evolutionary algorithms. In: SPRINGER. **Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Second International Conference, EMO 2003, Faro, Portugal, April 8–11, 2003. Proceedings 2**. [S.l.], 2003. p. 534–549. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 79.

DHAENENS, C.; LEMESRE, J.; TALBI, E.-G. K-ppm: A new exact method to solve multi-objective combinatorial optimization problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 200, n. 1, p. 45–53, 2010. Citado na página 10.

DRECHSLER, N.; DRECHSLER, R.; BECKER, B. Multi-objective optimisation based on relation favour. In: SPRINGER. **International conference on evolutionary multi-criterion optimization**. [S.l.], 2001. p. 154–166. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 31.

DUDZIŃSKI, K.; WALUKIEWICZ, S. Exact methods for the knapsack problem and its generalizations. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 28, n. 1, p. 3–21, 1987. Citado na página 83.

EDGEWORTH, F. Y. **Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences**. [S.l.]: CK Paul, 1881. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 10.

EHRGOTT, M. **Multicriteria optimization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 491. Citado na página 2.

EIBEN, A. E.; SMITH, J. E. **Introduction to evolutionary computing**. [S.l.]: Springer, 2003. v. 53. Citado na página 11.

ELARBI, M. et al. Multi-objective optimization: classical and evolutionary approaches. **Recent advances in evolutionary multi-objective optimization**, Springer, p. 1–30, 2017. Citado na página 2.

FAN, Z. et al. Moea/d with angle-based constrained dominance principle for constrained multi-objective optimization problems. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 74, p. 621–633, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 31.

Farina, M.; Amato, P. On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems. In: **2002 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society Proceedings. NAFIPS-FLINT 2002 (Cat. No. 02TH8622)**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 233–238. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 31.

FIGUEIRA, J. R. et al. A parallel multiple reference point approach for multi-objective optimization. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 205, n. 2, p. 390–400, 2010. Citado na página 78.

FISHBURN, P. C. Exceptional paper—lexicographic orders, utilities and decision rules: A survey. **Management Science**, v. 20, n. 11, p. 1442–1471, 1974. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/mnsc.20.11.1442>. Citado na página 3.

FONSECA, C. M. et al. A tutorial on the performance assessment of stochastic multiobjective optimizers. In: **Third International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2005)**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 216, p. 240. Citado na página 67.

FONSECA, C. M.; PAQUETE, L.; LÓPEZ-IBÁNEZ, M. An improved dimension-sweep algorithm for the hypervolume indicator. In: IEEE. **2006 IEEE international conference on evolutionary computation**. [S.l.], 2006. p. 1157–1163. Citado na página 67.

GARAIX, T. et al. Optimization of occupancy rate in dial-a-ride problems via linear fractional column generation. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 38, n. 10, p. 1435–1442, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

GARCÍA-NÁJERA, A.; LÓPEZ-JAIMES, A. The pickup and delivery problem: a many-objective analysis. Research in Computing Science 104 (2015), 2015. Citado na página 38.

GARCÍA-NÁJERA, A.; LÓPEZ-JAIMES, A. An investigation into many-objective optimization on combinatorial problems: Analyzing the pickup and delivery problem. **Swarm and Evolutionary Computation**, Elsevier, v. 38, p. 218–230, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 4, 5 e 39.

GIAGKIOZIS, I.; FLEMING, P. J. Methods for multi-objective optimization: An analysis. **Information Sciences**, Elsevier, v. 293, p. 338–350, 2015. Citado na página 37.

GOLBERG, D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. **Addion wesley**, v. 1989, n. 102, p. 36, 1989. Citado na página 2.

GONG, Y.-J. et al. Distributed evolutionary algorithms and their models: A survey of the state-of-the-art. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 34, p. 286–300, 2015. Citado na página 79.

GOULART, F.; CAMPELO, F. Preference-guided evolutionary algorithms for many-objective optimization. **Information Sciences**, Elsevier, v. 329, p. 236–255, 2016. Citado na página 32.

GUERREIRO, P. M.; CARDOSO, P. J.; FERNANDES, H. C. Applying nsga-ii to a multiple objective dial a ride problem. In: SPRINGER. **International Conference on Computational Science**. [S.l.], 2019. p. 55–69. Citado na página 50.

GUERREIRO, P. M.; CARDOSO, P. J.; FERNANDES, H. C. A comparison of multiple objective algorithms in the context of a dial a ride problem. In: SPRINGER. **International Conference on Computational Science**. [S.l.], 2020. p. 382–396. Citado na página 50.

HADKA, D. Moea framework-a free and open source java framework for multiobjective optimization. **Version**, v. 2, p. 74, 2015. Citado na página 88.

HANSEN, M. P.; JASZKIEWICZ, A. **Evaluating the quality of approximations to the non-dominated set**. [S.l.]: IMM, Department of Mathematical Modelling, Technical Universityof Denmark, 1998. Citado na página 65.

HO, S. C. et al. A survey of dial-a-ride problems: Literature review and recent developments. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, 2018. Citado na página 49.

Hughes, E. J. Evolutionary many-objective optimisation: many once or one many? In: **2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 1, p. 222–227 Vol.1. Citado na página 3.

ISHIBUCHI, H.; AKEDO, N.; NOJIMA, Y. Recombination of similar parents in sms-emoa on many-objective 0/1 knapsack problems. In: SPRINGER. **Parallel Problem Solving from Nature-PPSN XII: 12th International Conference, Taormina, Italy, September 1-5, 2012, Proceedings, Part II 12**. [S.l.], 2012. p. 132–142. Citado na página 120.

ISHIBUCHI, H.; AKEDO, N.; NOJIMA, Y. Behavior of multiobjective evolutionary algorithms on many-objective knapsack problems. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 19, n. 2, p. 264–283, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 81, 83, 84, 85, 88, 89 e 122.

ISHIBUCHI, H. et al. Behavior of emo algorithms on many-objective optimization problems with correlated objectives. In: IEEE. **2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.], 2011. p. 1465–1472. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 81.

ISHIBUCHI, H. et al. Effects of the existence of highly correlated objectives on the behavior of moea/d. In: SPRINGER. **Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 6th International Conference, EMO 2011, Ouro Preto, Brazil, April 5-8, 2011. Proceedings 6**. [S.l.], 2011. p. 166–181. Citado na página 82.

ISHIBUCHI, H. et al. Performance comparison of nsga-ii and nsga-iii on various many-objective test problems. In: IEEE. **2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.], 2016. p. 3045–3052. Citado 3 vezes nas páginas 4, 5 e 39.

ISHIBUCHI, H. et al. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance. In: SPRINGER. **Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 8th International Conference, EMO 2015, Guimarães, Portugal, March 29–April 1, 2015. Proceedings, Part II 8**. [S.l.], 2015. p. 110–125. Citado na página 89.

ISHIBUCHI, H. et al. Distance-based analysis of crossover operators for many-objective knapsack problems. In: SPRINGER. **Parallel Problem Solving from Nature–PPSN XIII: 13th International Conference, Ljubljana, Slovenia, September 13-17, 2014. Proceedings 13**. [S.l.], 2014. p. 600–610. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 120.

ISHIBUCHI, H.; TSUKAMOTO, N.; NOJIMA, Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review. In: IEEE. **2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence)**. [S.l.], 2008. p. 2419–2426. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 29.

ISHIBUCHI, H.; YAMANE, M.; NOJIMA, Y. Effects of discrete objective functions with different granularities on the search behavior of emo algorithms. In: **Proceedings of the 14th annual conference on Genetic and evolutionary computation**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 481–488. Citado na página 36.

ISHIBUCHI, H.; YAMANE, M.; NOJIMA, Y. Difficulty in evolutionary multiobjective optimization of discrete objective functions with different granularities. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2013. p. 230–245. Citado na página 36.

JAIMES, A. L. Techniques to deal with many-objective optimization problems using evolutionary algorithms. **Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute**, 2011. Citado na página 1.

JAIMES, A. L. et al. Objective space partitioning using conflict information for many-objective optimization. In: SPRINGER. **Parallel Problem Solving from Nature, PPSN XI: 11th International Conference, Kraków, Poland, September 11-15, 2010, Proceedings, Part I 11**. [S.l.], 2010. p. 657–666. Citado na página 78.

JAIMES, A. L.; COELLO, C. A. C. Many-objective problems: challenges and methods. In: **Springer handbook of computational intelligence**. [S.l.]: Springer, 2015. p. 1033–1046. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 30.

JAIMES, A. L. et al. Adaptive objective space partitioning using conflict information for many-objective optimization. In: SPRINGER. **Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 6th International Conference, EMO 2011, Ouro Preto, Brazil, April 5-8, 2011. Proceedings 6**. [S.l.], 2011. p. 151–165. Citado na página 78.

JAIMES, A. L. et al. Objective space partitioning using conflict information for solving many-objective problems. **Information Sciences**, Elsevier, v. 268, p. 305–327, 2014. Citado na página 78.

JAIMES, A. L.; COELLO, C. A. C.; CHAKRABORTY, D. Objective reduction using a feature selection technique. In: **Proceedings of the 10th annual conference on Genetic and evolutionary computation**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 673–680. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

JAKOB, W.; GORGES-SCHLEUTER, M.; BLUME, C. Application of genetic algorithms to task planning and learning. In: **PPSN**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 293–302. Citado na página 3.

JIANG, S.; YANG, S. A strength pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, IEEE, v. 21, n. 3, p. 329–346, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 3, 26, 31 e 120.

JORGENSEN, R. M.; LARSEN, J.; BERGVINSDOTTIR, K. B. Solving the dial-a-ride problem using genetic algorithms. **Journal of the operational research society**, Taylor & Francis, v. 58, n. 10, p. 1321–1331, 2007. Citado na página 50.

JUNKER, U. Preference-based search and multi-criteria optimization. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 130, n. 1-4, p. 75–115, 2004. Citado na página 1.

KANTOUR, N.; BOUROUBI, S.; CHAABANE, D. A parallel moea with criterion-based selection applied to the knapsack problem. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 80, p. 358–373, 2019. Citado na página 81.

Karnaugh, M. The map method for synthesis of combinational logic circuits. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics**, v. 72, n. 5, p. 593–599, 1953. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 41.

KENDALL, M. G. A new measure of rank correlation. **Biometrika**, JSTOR, v. 30, n. 1/2, p. 81–93, 1938. Citado na página 33.

KHARE, V.; YAO, X.; DEB, K. Performance scaling of multi-objective evolutionary algorithms. In: SPRINGER. **International conference on evolutionary multi-criterion optimization**. [S.l.], 2003. p. 376–390. Citado na página 3.

KIRCHLER, D.; CALVO, R. W. A granular tabu search algorithm for the dial-a-ride problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 56, p. 120–135, 2013. Citado na página 50.

KNOWLES, J.; CORNE, D. Quantifying the effects of objective space dimension in evolutionary multiobjective optimization. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2007. p. 757–771. Citado na página 5.

KNOWLES, J. D.; THIELE, L.; ZITZLER, E. A tutorial on the performance assessment of stochastic multiobjective optimizers. **TIK-Report**, ETH Zurich, v. 214, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 89.

LAFETA, T. et al. Meands: A many-objective evolutionary algorithm based on non-dominated decomposed sets applied to multicast routing. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 62, p. 851–866, 2018. Citado na página 77.

LAFETA, T. F. de Q.; OLIVEIRA, G. M. B. An improved version of a many-objective evolutionary algorithm based on non-dominated decomposed sets (meands-ii). In: IEEE. **2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)**. [S.l.], 2019. p. 3673–3678. Citado na página 77.

LANKAITES PINHEIRO, R.; LANDA-SILVA, D.; ATKIN, J. A technique based on trade-off maps to visualise and analyse relationships between objectives in optimisation problems. **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis**, v. 24, n. 1-2, p. 37–56, 2017. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mcda.1604>. Citado 6 vezes nas páginas 4, 38, 39, 54, 122 e 123.

LI, B. et al. Many-objective evolutionary algorithms: A survey. **ACM Computing Surveys (CSUR)**, ACM New York, NY, USA, v. 48, n. 1, p. 1–35, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 29.

LI, H. et al. Comparison between moea/d and nsga-iii on a set of novel many and multi-objective benchmark problems with challenging difficulties. **Swarm and Evolutionary Computation**, Elsevier, v. 46, p. 104–117, 2019. Citado na página 5.

Li, K. et al. Evolutionary many-objective optimization: A comparative study of the state-of-the-art. **IEEE Access**, v. 6, p. 26194–26214, 2018. Citado na página 4.

LIEFOOGHE, A. et al. A fitness landscape analysis of pareto local search on bi-objective permutation flowshop scheduling problems. In: SPRINGER. **International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.], 2017. p. 422–437. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 38.

LIEFOOGHE, A.; LOPEZ-IBANEZ, M. Many-objective (combinatorial) optimization is easy. In: **Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference**. [S.l.: s.n.], 2023. p. 704–712. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 82.

LIM, A.; ZHANG, Z.; QIN, H. Pickup and delivery service with manpower planning in hong kong public hospitals. **Transportation Science**, INFORMS, v. 51, n. 2, p. 688–705, 2016. Citado na página 49.

LIU, H.; DU, W.; GUO, Z. A multi-population evolutionary algorithm with single-objective guide for many-objective optimization. **Information Sciences**, Elsevier, v. 503, p. 39–60, 2019. Citado na página 80.

LIU, Y. et al. Many-objective evolutionary optimization based on reference points. **Applied Soft Computing**, v. 50, p. 344 – 355, 2017. ISSN 1568-4946. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494616305786>. Citado na página 12.

LÜCKEN, C. V.; BARÁN, B.; BRIZUELA, C. A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems. **Computational optimization and applications**, Springer, v. 58, n. 3, p. 707–756, 2014. Citado na página 4.

LUNA, F.; ALBA, E. Parallel multiobjective evolutionary algorithms. **Springer handbook of computational intelligence**, Springer, p. 1017–1031, 2015. Citado na página 78.

LUNA, F.; NEBRO, A. J.; ALBA, E. Parallel evolutionary multiobjective optimization. **Parallel Evolutionary Computations**, Springer, p. 33–56, 2006. Citado na página 78.

LUO, N.; LI, X.; LIN, Q. Objective reduction for many-objective optimization problems using objective subspace extraction. **Soft Computing**, Springer, v. 22, n. 4, p. 1159–1173, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

LUST, T.; TEGHEM, J. The multiobjective multidimensional knapsack problem: a survey and a new approach. **International Transactions in Operational Research**, v. 19, n. 4, p. 495–520, 2012. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1475-3995.2011.00840.x>. Citado na página 38.

MAGEEAN, J.; NELSON, J. D. The evaluation of demand responsive transport services in europe. **Journal of Transport Geography**, Elsevier, v. 11, n. 4, p. 255–270, 2003. Citado na página 44.

MANE, S.; RAO, M. N. Many-objective optimization: Problems and evolutionary algorithms–a short review. **International Journal of Applied Engineering Research**, v. 12, n. 20, p. 9774–9793, 2017. Citado na página 4.

MANSOUR, I. B.; BASSEUR, M.; SAUBION, F. A multi-population algorithm for multi-objective knapsack problem. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 70, p. 814–825, 2018. Citado na página 80.

MARLER, R. T.; ARORA, J. S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. **Structural and multidisciplinary optimization**, Springer, v. 26, n. 6, p. 369–395, 2004. Citado na página 10.

MARTELLO, S.; TOTH, P. Algorithms for knapsack problems. **North-Holland Mathematics Studies**, Elsevier, v. 132, p. 213–257, 1987. Citado na página 83.

MARTELLO, S.; TOTH, P. **Knapsack problems: algorithms and computer implementations**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1990. Citado na página 83.

MAURI, G. R.; ANTONIO, L.; LORENA, N. Customers' satisfaction in a dial-a-ride problem. **IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine**, IEEE, v. 1, n. 3, p. 6–14, 2009. Citado na página 50.

MELACHRINOUDIS, E.; ILHAN, A. B.; MIN, H. A dial-a-ride problem for client transportation in a health-care organization. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 742–759, 2007. Citado na página 50.

MIETTINEN, K. **Nonlinear multiobjective optimization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 12. Citado na página 2.

MOLENBRUCH, Y.; BRAEKERS, K.; CARIS, A. Typology and literature review for dial-a-ride problems. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 259, n. 1-2, p. 295–325, 2017. Citado na página 49.

MOLENBRUCH, Y. et al. Multi-directional local search for a bi-objective dial-a-ride problem in patient transportation. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 77, p. 58–71, 2017. Citado na página 50.

MURATA, T.; TAKI, A. Many-objective optimization for knapsack problems using correlation-based weighted sum approach. In: SPRINGER. **Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 5th International Conference, EMO 2009, Nantes, France, April 7-10, 2009. Proceedings 5**. [S.l.], 2009. p. 468–480. Citado na página 77.

MURATA, T.; TAKI, A. Examination of the performance of objective reduction using correlation-based weighted-sum for many objective knapsack problems. In: IEEE. **2010 10th International Conference on Hybrid Intelligent Systems**. [S.l.], 2010. p. 175–180. Citado na página 77.

PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. **Combinatorial optimization: algorithms and complexity**. [S.l.]: Courier Corporation, 1998. Citado na página 4.

PAQUETTE, J.; CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G. Quality of service in dial-a-ride operations. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 56, n. 4, p. 1721–1734, 2009. Citado na página 47.

PAQUETTE, J. et al. Combining multicriteria analysis and tabu search for dial-a-ride problems. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 52, p. 1–16, 2013. Citado na página 50.

PARETO, V. Cours deconomie, vol. I and II, f. **Rouge, Lausanne**, 1896. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 10.

PARRAGH, S. N.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F. A survey on pickup and delivery problems. part II: transportation between pickup and delivery locations. **Journal für Betriebswirtschaft**, Springer, v. 58, n. 1, p. 81–117, 2008. Citado na página 45.

PARRAGH, S. N.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F. Demand responsive transportation. **Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science**, Wiley Online Library, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 49.

PARRAGH, S. N. et al. A heuristic two-phase solution approach for the multi-objective dial-a-ride problem. **Networks**, Wiley Online Library, v. 54, n. 4, p. 227–242, 2009. Citado na página 50.

PARRAGH, S. N.; SOUSA, J. Pinho de; ALMADA-LOBO, B. The dial-a-ride problem with split requests and profits. **Transportation Science**, INFORMS, v. 49, n. 2, p. 311–334, 2014. Citado na página 49.

PEARSON, K. On the laws of inheritance in man: Ii. on the inheritance of the mental and moral characters in man, and its comparison with the inheritance of the physical characters. **Biometrika**, JSTOR, v. 3, n. 2/3, p. 131–190, 1904. Citado na página 33.

PEARSON, K.; LEE, A. On the laws of inheritance in man: I. inheritance of physical characters. **Biometrika**, JSTOR, v. 2, n. 4, p. 357–462, 1903. Citado na página 33.

PINHEIRO, R. L.; LANDA-SILVA, D.; ATKIN, J. Analysis of objectives relationships in multiobjective problems using trade-off region maps. In: **Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2015. (GECCO '15), p. 735–742. ISBN 9781450334723. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/2739480.2754721>. Citado 5 vezes nas páginas 4, 35, 38, 39 e 54.

PISINGER, D. Where are the hard knapsack problems? **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 32, n. 9, p. 2271–2284, 2005. Citado na página 83.

PRADITWONG, K.; YAO, X. How well do multi-objective evolutionary algorithms scale to large problems. In: IEEE. **2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. [S.l.], 2007. p. 3959–3966. Citado na página 5.

Purshouse, R. C.; Fleming, P. J. Evolutionary many-objective optimisation: an exploratory analysis. In: **The 2003 Congress on Evolutionary Computation, 2003. CEC '03.** [S.l.: s.n.], 2003. v. 3, p. 2066–2073 Vol.3. Citado 5 vezes nas páginas 3, 33, 34, 35 e 39.

PURSHOUSE, R. C.; FLEMING, P. J. On the evolutionary optimization of many conflicting objectives. **IEEE transactions on evolutionary computation**, IEEE, v. 11, n. 6, p. 770–784, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 3, 5 e 30.

REKIEK, B.; DELCHAMBRE, A.; SALEH, H. A. Handicapped person transportation: An application of the grouping genetic algorithm. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier, v. 19, n. 5, p. 511–520, 2006. Citado na página 49.

RITZINGER, U.; PUCHINGER, J.; HARTL, R. F. Dynamic programming based metaheuristics for the dial-a-ride problem. **Annals of Operations Research**, Springer, v. 236, n. 2, p. 341–358, 2016. Citado na página 49.

SAHINKOC, H. M.; BILGE, Ü. A reference set based many-objective co-evolutionary algorithm with an application to the knapsack problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 300, n. 2, p. 405–417, 2022. Citado na página 7.

SANTOS, T.; TAKAHASHI, R. H. C. On the performance degradation of dominance-based evolutionary algorithms in many-objective optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 22, n. 1, p. 19–31, 2018. Citado na página 3.

SATO, H.; AGUIRRE, H. E.; TANAKA, K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of moeas. In: SPRINGER. **International conference on evolutionary multi-criterion optimization**. [S.l.], 2007. p. 5–20. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 31.

SATO, H.; ISHIBUCHI, H. Evolutionary many-objective optimization: Difficulties, approaches, and discussions. **IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering**, Wiley Online Library, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.

Saxena, D. K. et al. Objective reduction in many-objective optimization: Linear and nonlinear algorithms. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 17, n. 1, p. 77–99, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

SCHAFFER, J. D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In: **Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms**. USA: L. Erlbaum Associates Inc., 1985. p. 93–100. ISBN 0805804269. Citado na página 2.

SCHILDE, M.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F. Metaheuristics for the dynamic stochastic dial-a-ride problem with expected return transports. **Computers & operations research**, Elsevier, v. 38, n. 12, p. 1719–1730, 2011. Citado na página 50.

SCHILDE, M.; DOERNER, K. F.; HARTL, R. F. Integrating stochastic time-dependent travel speed in solution methods for the dynamic dial-a-ride problem. **European journal of operational research**, Elsevier, v. 238, n. 1, p. 18–30, 2014. Citado na página 50.

SCHUTZE, O.; LARA, A.; COELLO, C. A. C. On the influence of the number of objectives on the hardness of a multiobjective optimization problem. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, IEEE, v. 15, n. 4, p. 444–455, 2011. Citado na página 5.

SEADA, H.; DEB, K. Non-dominated sorting based multi/many-objective optimization: Two decades of research and application. In: **Multi-Objective Optimization**. [S.l.]: Springer, 2018. p. 1–24. Citado na página 23.

SMITH-MILES, K.; CHRISTIANSEN, J.; MUÑOZ, M. A. Revisiting where are the hard knapsack problems? via instance space analysis. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 128, p. 105184, 2021. Citado na página 83.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. **Operations research**, Informs, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987. Citado na página 35.

SPEARMAN, C. The proof and measurement of association between two things. Appleton-Century-Crofts, 1961. Citado na página 33.

SRINIVAS, N.; DEB, K. Muiltiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. **Evolutionary computation**, MIT Press, v. 2, n. 3, p. 221–248, 1994. Citado na página 12.

Sun, Y.; Yen, G. G.; Yi, Z. Igd indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 23, n. 2, p. 173–187, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

TALBI, E.-G. **Metaheuristics: from design to implementation**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 74. Citado na página 12.

TAN, K. C.; KHOR, E. F.; LEE, T. H. **Multiobjective evolutionary algorithms and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 34.

TANABE, R.; ISHIBUCHI, H. An easy-to-use real-world multi-objective optimization problem suite. **Applied Soft Computing**, v. 89, p. 106078, 2020. ISSN 1568-4946. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494620300181>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 133.

Tanabe, R.; Ishibuchi, H.; Oyama, A. Benchmarking multi- and many-objective evolutionary algorithms under two optimization scenarios. **IEEE Access**, v. 5, p. 19597–19619, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 133.

TEYTAUD, O. On the hardness of offline multi-objective optimization. **Evolutionary Computation**, MIT Press, v. 15, n. 4, p. 475–491, 2007. Citado na página 5.

THIELE, L. et al. A preference-based evolutionary algorithm for multi-objective optimization. **Evolutionary computation**, MIT Press, v. 17, n. 3, p. 411–436, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

Tian, Y. et al. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 22, n. 4, p. 609–622, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

TIAN, Y. et al. Diversity assessment of multi-objective evolutionary algorithms: Performance metric and benchmark problems [research frontier]. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, IEEE, v. 14, n. 3, p. 61–74, 2019. Citado na página 66.

Tian, Y. et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 23, n. 2, p. 331–345, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 31.

Tian, Y. et al. A multi-objective evolutionary algorithm based on an enhanced inverted generational distance metric. In: **2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 5222–5229. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

TOTH, P.; VIGO, D. **The Vehicle Routing Problem**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. (Monographs on Discrete Mathematics and Applications). ISBN 9780898715798. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TeMgA5S74skC>. Citado na página 45.

TOTH, P.; VIGO, D. **Vehicle routing: problems, methods, and applications**. [S.l.]: Siam, 2014. v. 18. Citado na página 46.

VEREL, S.; LIEFOOGHE, A.; DHAENENS, C. Set-based multiobjective fitness landscapes: a preliminary study. In: **Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 769–776. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 36.

VEREL, S. et al. On the structure of multiobjective combinatorial search space: Mnk-landscapes with correlated objectives. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 227, n. 2, p. 331–342, 2013. Citado na página 37.

VESIKAR, Y.; DEB, K.; BLANK, J. Reference point based nsga-iii for preferred solutions. In: IEEE. **2018 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)**. [S.l.], 2018. p. 1587–1594. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

VIANA, R. J. D. S. Abordagens heurísticas para otimização de um serviço de transporte reativo a demanda. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 68.

VIANA, R. J. S. et al. Optimization of a demand responsive transport service using multi-objective evolutionary algorithms. In: **Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2019. (GECCO '19), p. 2064–2067. ISBN 9781450367486. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3319619.3328528>. Citado na página 68.

WAGNER, T.; BEUME, N.; NAUJOKS, B. Pareto-, aggregation-, and indicator-based methods in many-objective optimization. In: SPRINGER. **International conference on evolutionary multi-criterion optimization**. [S.l.], 2007. p. 742–756. Citado na página 5.

Wang, H.; Jiao, L.; Yao, X. Two_arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 19, n. 4, p. 524–541, 2015. Citado na página 28.

WANG, H.; YAO, X. Objective reduction based on nonlinear correlation information entropy. **Soft Computing**, Springer, v. 20, n. 6, p. 2393–2407, 2016. Citado na página 32.

Wang, R.; Purshouse, R. C.; Fleming, P. J. Preference-inspired coevolutionary algorithms for many-objective optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 17, n. 4, p. 474–494, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 32.

WANG, Z. et al. A replacement strategy for balancing convergence and diversity in moea/d. In: IEEE. **2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.], 2014. p. 2132–2139. Citado 3 vezes nas páginas 3, 26 e 31.

WILSON, N. et al. Scheduling algorithms for dial-a-ride systems. **Urban Systems Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA**, 1971. Citado na página 49.

WILSON, N. H.; COLVIN, N. J. **Computer control of the Rochester dial-a-ride system**. [S.l.], 1977. Citado na página 49.

WILSON, N. H.; WAYNE, W. R. **Advanced dial-a-ride algorithms research project**. [S.l.], 1976. Citado na página 49.

ZHANG, Q.; LI, H. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. **IEEE Transactions on evolutionary computation**, IEEE, v. 11, n. 6, p. 712–731, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 3, 24, 25, 31 e 88.

ZHANG, Q.; LIU, W.; LI, H. The performance of a new version of moea/d on cec09 unconstrained mop test instances. In: IEEE. **2009 IEEE congress on evolutionary computation**. [S.l.], 2009. p. 203–208. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 31.

ZHAO, H. et al. A comparative study of the evolutionary many-objective algorithms. **Progress in Artificial Intelligence**, Springer, v. 8, n. 1, p. 15–43, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 29.

ZITZLER, E.; KÜNZLI, S. Indicator-based selection in multiobjective search. In: SPRINGER. **Parallel Problem Solving from Nature-PPSN VIII**. [S.l.], 2004. p. 832–842. Citado 8 vezes nas páginas 3, 4, 19, 20, 22, 32, 88 e 120.

ZITZLER, E.; LAUMANNS, M.; BLEULER, S. A tutorial on evolutionary multiobjective optimization. **Metaheuristics for multiobjective optimisation**, Berlin, v. 535, n. 535, p. 21–40, 2004. Citado na página 2.

ZITZLER, E. et al. **SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm**. [S.l.], 2001. Citado 3 vezes nas páginas 3, 17 e 26.

ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - a comparative case study. In: SPRINGER. **Parallel problem solving from nature - PPSN V**. [S.l.], 1998. p. 292–301. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 89.

ZITZLER, E.; THIELE, L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. **evolutionary computation, IEEE transactions on**, IEEE, v. 3, n. 4, p. 257–271, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 17, 67, 83 e 89.

ZITZLER, E. et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. **Evolutionary Computation, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 7, n. 2, p. 117–132, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 20, 66, 67 e 89.