



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

EMARANHAMENTO EM SISTEMAS DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS: MÉTODO DA DESSIMETRIZAÇÃO DA BASE E ESTADOS MAXIMAMENTE EMARANHADOS

HELEN BARRETO LARA

Orientador: Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
CEFET-MG

BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2019

HELEN BARRETO LARA

**EMARANHAMENTO EM SISTEMAS DE PARTÍCULAS
IDÊNTICAS: MÉTODO DA DESSIMETRIZAÇÃO DA BASE E
ESTADOS MAXIMAMENTE EMARANHADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração: Modelagem Matemática e Computacional

Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos Aplicados

Orientador: Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
CEFET-MG

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
BELO HORIZONTE
FEVEREIRO DE 2019

L318e Lara, Helen Barreto
Emaranhamento em sistemas de partículas idênticas: método da
dessimetrização da base e estados maximamente emaranhados / Helen
Barreto Lara. – 2019.
39 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Modelagem Matemática e Computacional.
Orientador: Giancarlo Queiroz Pelegrino.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de
Minas Gerais.

1. Emaranhamento quântico – Teses. 2. Teoria quântica – Teses.
3. Simetria (Física) – Teses. 4. Entropia – Matemática – Teses. I. Pelegrino,
Giancarlo Queiroz. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas
Gerais. III. Título.

CDD 530.1201



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

**“EMARANHAMENTO EM SISTEMAS DE PARTÍCULAS IDÊNTICAS:
MÉTODO DA DESSIMETRIZAÇÃO E ESTADOS MAXIMAMENTE
EMARANHADOS”**

Dissertação de Mestrado apresentada por **Helen Barreto Lara**, em 25 de fevereiro de 2019, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, e aprovada pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Giancarlo Queiroz Pellegrino
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Renato Moreira Angelo
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Visto e permitida a impressão,

Prof. Dr. Thiago de Souza Rodrigues
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional

Agradecimentos

A gratidão é o primeiro dos sentimentos que me tomam ao finalizar este trabalho, cujas poucas palavras que aqui me cabem não lhe fazem jus. De modo que expresso um agradecimento singelo a todos que me fizeram ser. A gratidão verdadeiramente profunda vai nos olhares, nos abraços e na saudade que compõem o tempo.

Agradeço, assim, a meus pais, Enrique e Sarah, por nunca deixarem de incentivar nem mesmo as mais inocentes brincadeiras de uma criança que sonhava ser cientista. Agradeço a minha irmã, Karen, pelo companheirismo em cada momento, desde nossa nostálgica infância até a recente vida adulta.

Agradeço a meu parceiro da vida toda, Deyvid. Meu grande amor, sou grata pela presença inefável, pelo carinho e pelo cuidado de cada dia.

Agradeço a meus amigos, Laissa, Carla, Wesley, Leonardo e a tantos mais que contribuíram com ideias iluminadas nos desafios matemáticos e conceituais que por vezes eram assombrosos.

Agradeço ao meu orientador e grande amigo, gian, pela paciência, pela gentileza e pela elegância tão tempestivas, próprias de quem encontrou a beleza da existência. Obrigada por me ensinar a prestar atenção nas pessoas.

Agradeço, em especial, a meu querido Jesus, pelo presente da vida.

*“Mas a existência ainda nos fascina, tantos
são os lugares onde nasce. Um jogo de puras
forças que se toca de joelhos, com espanto.*

*Palavras roçam ainda o inefável, asas...
E, de pedra palpitante, a sempre nova música
ergue no espaço inapto a sua divina casa.”*

(Rilke, II:10, Sonetos a Orfeu)

Resumo

O fenômeno quântico do emaranhamento em sistemas de partículas idênticas ainda é motivo de discussões e divergências na comunidade acadêmica, tanto no que diz respeito à sua interpretação física e experimental, quanto em relação à maneira correta de se quantificá-lo. Por outro lado, sua correta compreensão é fundamental para o desenvolvimento de tecnologias baseadas em criptografia, computação e informação quânticas, medições de alta precisão, entre outras. Aqui, propõe-se um método simples, que lança mão da descrição baseada em partículas (primeira quantização), intuitivamente chamado de *dessimetrização* da base do espaço de Hilbert, que mostrou-se eficaz no cálculo do emaranhamento por meio do traço parcial do operador densidade, de maneira semelhante ao caso de partículas distinguíveis. Além disso, o trabalho também desenvolve um método para gerar estados maximamente emaranhados, que funciona para sistemas bipartidos idênticos e distinguíveis de dimensão finita, com igual importância para o desenvolvimento de tecnologias associadas ao fenômeno do emaranhamento quântico.

Palavras-chave: Emaranhamento, Partículas Idênticas, Estados maximamente emaranhados.

Abstract

Entanglement phenomenon in identical particle systems still is a subject of discussions and divergences among the academic community, both with respect to its physical and experimental interpretations, as well as to the correct manner of quantifying it. On the other hand, its correct comprehension is fundamental for the development of technologies based on quantum cryptography, computation and information, high precision measurements, and more. Here, a simple method is proposed, which resorts to the particle-based description (first quantization), intuitively called *desymmetrization* of the Hilbert space basis, and which showed itself to be successful in calculating entanglement by means of the partial trace of the density operator, just as for distinguishable particles. Furthermore, this work additionally develops a method for generating maximally entangled states, which functions for either identical or distinguishable bipartite systems with finite dimension, being also important for the development of technologies associated with quantum entanglement phenomenon.

Keywords: Entanglement. Identical Particles. Maximally entangled states.

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Fundamentação Teórica	5
2.1 Emaranhamento	5
2.1.1 Medida de emaranhamento	6
2.1.2 Estados maximamente emaranhados em dimensão d	10
2.2 Identidade de partículas	11
3 – Metodologia	14
3.1 Dessimetrização da base do espaço de Hilbert	14
3.2 Geração de base de estados maximamente emaranhados	17
4 – Resultados	21
4.1 Dessimetrização em sistemas distinguíveis	21
4.2 Dessimetrização em sistemas idênticos	26
4.3 Discussão dos resultados	32
5 – Conclusão	35
Referências	37

Capítulo 1

Introdução

O emaranhamento quântico está entre os fenômenos mais importantes e intrigantes da mecânica quântica. Em 1935, Schrödinger apresentou-o como sendo “não um, mas o traço característico da mecânica quântica, que reforça sua completa separação das linhas de pensamento clássico”. Trata-se de uma consequência do princípio da superposição que rege o espaço de estados da teoria quântica (SCHRÖDINGER, 1935; COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973a).

Essa ideia foi o cerne do trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935), que criticaram a teoria quântica com base na suposta perda de localidade devido ao colapso instantâneo da função de onda de um sistema emaranhado quando submetido a uma medição. Eles defendiam que não era a medição que levava o sistema a um determinado estado quântico, mas que o sistema já estava naquele estado desde o princípio, mas a teoria quântica não poderia determiná-lo, por ser *incompleta*. A partir de então, várias teorias de *variáveis ocultas* surgiram com o objetivo de “completar” a teoria quântica. Nos anos 1960, John Bell resolveu o paradoxo EPR, como ficou conhecido o trabalho de 1935, mostrando que qualquer teoria de variável oculta local seria incompatível com a mecânica quântica. O Teorema de Bell (BELL, 1964) acabou levantando novas possibilidades em relação à não localidade na natureza e, alguns anos mais tarde, o experimento de Aspect, Grangier e Roger corroborou a não localidade quântica (ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1982). Recentemente, outros experimentos, mais precisos inclusive, comprovaram a incompatibilidade da mecânica quântica com a desigualdade de Bell, como por exemplo o de Weihs et al. (1998) (GRIFFITHS, 2011).

Desde o final do século XX, inúmeros trabalhos foram desenvolvidos no sentido de se compreender melhor o emaranhamento quântico (HORODECKI et al., 2009). Ademais, os estudos em torno do emaranhamento quântico são inerentemente interdisciplinares, uma vez que são fundamentais em toda a teoria da informação quântica (LO; SPILLER; POPESCU, 1998), sendo o fenômeno indispensável para a implementação de algoritmos quânticos

(LANYON et al., 2007) e para a criptografia quântica (EKERT, 1991; BALACHANDRAN et al., 2013). Entretanto, em muitos desses casos, os sistemas envolvidos são constituídos por partes indistinguíveis, como acontece com os próprios *qubits*, além de pontos quânticos (ARTUSO; BRYANT, 2013) e átomos ultrafrios (BENATTI; FLOREANINI; MARZOLINO, 2011), o que traz certa complexidade ao problema do emaranhamento.

De fato, quando os sistemas são compostos por partes idênticas, a teoria quântica exige que o postulado da simetrização seja aplicado, segundo o qual os vetores (*kets*) que descrevem um estado físico só podem ser, conforme a natureza das partes idênticas, ou completamente simétricos ou completamente antissimétricos em relação à permutação dos símbolos que descrevem essas partes. *Kets* simétricos descrevem sistemas formados por bósons e, antissimétricos, sistemas formados por férmions. Essa construção está em acordo com o princípio da exclusão de Pauli, para o qual a função de onda fermiônica é nula caso as partes encontrem-se no mesmo estado (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b).

A exigência da simetrização do estado físico que descreve um sistema de partes indistinguíveis traz implicações importantes para o cálculo e, até mesmo, para a interpretação do significado físico do emaranhamento. De imediato, a própria ideia do traço parcial do operador densidade é complexa, uma vez que esta operação atribui um operador densidade reduzido para cada parte do sistema, podendo, equivocadamente, dar-se a impressão de que a cada parte é atribuído um estado específico (GHIRARDI; MARINATTO; WEBER, 2002; GHIRARDI; MARINATTO, 2004; GHIRARDI; MARINATTO, 2005).

Ao longo das últimas décadas, pesquisadores vêm buscando melhor compreensão sobre o emaranhamento de partículas idênticas, desde sua investigação experimental (FURUSAWA et al., 1998; HORODECKI et al., 2003), passando por teorias para sua quantificação (BALACHANDRAN et al., 2013; LOFRANCO; COMPAGNO, 2016; SCIARA; LOFRANCO; COMPAGNO, 2017; BENATTI; FLOREANINI; TITIMBO, 2014; SHI, 2003; GHIRARDI; MARINATTO, 2005) e chegando a aplicações práticas do fenômeno, como em experimentos com condensados de Bose-Einstein (SØRENSEN et al., 2001), espectroscopia de alta precisão (BOLLINGER et al., 1996; BENATTI; FLOREANINI; MARZOLINO, 2010) e magnetismo quântico (BRITTON et al., 2012).

As soluções propostas até aqui vão desde a álgebra de operadores (observáveis) (BENATTI; FLOREANINI; MARZOLINO, 2010), bem como a construção Gelfand–Naimark–Segal (GNS), que substitui o traço parcial pela noção de “restrição de um estado a uma subálgebra” (BALACHANDRAN et al., 2013), chegando até à recente descrição de sistemas idênticos sem rotulação das partes, levando em conta a sobreposição espacial entre os subsistemas e propondo um aspecto de universalidade para a decomposição de Schmidt (LOFRANCO; COMPAGNO, 2016; SCIARA; LOFRANCO; COMPAGNO, 2017).

Além desses, alguns trabalhos lançaram mão da primeira abordagem, com álgebra de operadores, e incluíram a parte espacial como uma partição do espaço de Hilbert global, mostrando não haver emaranhamento para medidas locais de sistemas de spins espacialmente separados, mesmo se eles forem idênticos (CUNDEN et al., 2014). Finalmente, alguns critérios gerais para definir se um estado puro de um sistema composto por partes idênticas é emaranhado (ou não) são estabelecidos, na tentativa de se explicar algumas questões “embaraçosas” que surgem quando se trabalha com partes indistinguíveis, como a ideia de que estados não emaranhados são impossíveis para sistemas de partes idênticas devido ao postulado da simetrização (GHIRARDI; MARINATTO, 2005).

Essas abordagens mostram-se, de algum modo, bem sucedidas em fornecer medidas do emaranhamento de um sistema, ou em determinar se ele existe ou não. Entretanto, em alguns pontos, elas apresentam resultados contraditórios, mostrando que a discussão em torno do emaranhamento de partículas idênticas ainda é um objeto de pesquisa em aberto. Deste modo, este trabalho propõe uma abordagem alternativa, que acaba reproduzindo alguns dos resultados encontrados pelos autores supracitados, mas utilizando conceitos físicos e matemáticos mais simples.

Neste sentido, o método aqui proposto é intuitivamente chamado de *dessimetrização* da base do espaço de Hilbert, que será detalhado adiante. Em suma, o procedimento consiste em tomar-se o estado global (anti)simétrico e reescrevê-lo em uma base não simétrica, conservando a (anti)simetrização como uma restrição nos coeficientes associados a esses estados de base. Formalmente, esse vetor continua representando o mesmo estado físico de antes, mas em uma base não simetrizada. Matematicamente, esse novo vetor é como qualquer outro vetor que descreve um sistema de partes distinguíveis e a entropia de emaranhamento pode ser calculada como de costume.

Outrossim, este trabalho propõe um método para se gerar estados maximamente emaranhados, tanto para sistemas bipartidos idênticos como para distinguíveis, em qualquer dimensão finita. Essa é uma necessidade recorrente em algumas aplicações, como no caso de algoritmos, protocolos e códigos para correção de erros da computação quântica de dois níveis, generalizada para espaços de Hilbert com dimensão arbitrária. A grande vantagem dos sistemas com dimensões d maiores do que dois (*qudits*) é que menos subsistemas precisam ser acoplados para obter-se espaços de Hilbert com uma dada dimensão (KARIMIPOUR; BAHRAMINASAB; BAGHERINEZHAD, 2002). Um exemplo prático é a generalização da porta XOR atuando em um espaço de Hilbert de dimensão arbitrária, que torna possível a execução de tarefas como teletransporte quântico e purificação de estados quânticos (LANYON et al., 2009; ALBER et al., 2000; YOU-BANG, 2007).

Alguns métodos para a geração de bases de Bell generalizadas são propostos (SYCH; LEUCHS, 2009; BENNETT et al., 1993; ALBER et al., 2000). Sych e Leuchs (2009) propõem

uma simplificação, representando esses estados por meio de matrizes, as quais os autores reivindicam serem mais convenientes em relação às propriedades de emaranhamento. Por outro lado, eles limitam-se a espaços cujas dimensões são potências de 2, de modo a não perder a propriedade da (anti)simetria. Bennett et al. (1993) por sua vez constroem uma base generalizada semelhante à de Sych e Leuchs (2009), porém mais adequada aos trabalhos com teleporte quântico. Recentemente Alber et al. (2000) procuraram gerar uma base de Bell generalizada por meio da transformada de Fourier e da generalização da porta XOR quântica para espaços de Hilbert de dimensões maiores.

As propostas apresentam resultados relevantes, posto que parecem cumprir as propriedades dos estados de Bell. Contudo, as abordagens são relativamente limitadas no que diz respeito, por exemplo, à aplicabilidade para partículas idênticas ou mesmo para subsistemas com dimensão d qualquer, desde que finita. Assim, o método aqui proposto mostra-se eficaz em cumprir todas as propriedades para a criação de bases de Bell em qualquer dimensão finita, compreendendo também casos de partículas idênticas ou distinguíveis, além de utilizar-se de um aparato matemático simples e acessível.

Em síntese, a proposta parte de uma base para o espaço de Hilbert ordenada convenientemente e, em seguida, escrita de forma matricial. Um grupo de vetores é coletado seguindo-se as diagonais secundárias dessa matriz de base e cada grupo fornece uma sobreposição maximamente emaranhada dos vetores que o compõem. A permutação dos sinais positivo e negativo nas sobreposições e a normalização dos estados completam a construção de uma base ortonormal maximamente emaranhada para o espaço de Hilbert.

Finalmente, ambos os objetos deste estudo entremeiam-se, visto que a *dessimetrização* da base do espaço de Hilbert faz-se necessária para a geração de estados maximamente emaranhados para sistemas idênticos e também é utilizada para verificar que os estados gerados apresentam, de fato, emaranhamento máximo, tanto para o caso de partes idênticas quanto para distinguíveis.

Em vista disso, este trabalho organiza-se da seguinte maneira: o capítulo 2 traz uma revisão dos principais conceitos necessários ao desenvolvimento de ambos os métodos propostos; o capítulo 3 apresenta estes métodos de modo detalhado, sendo o pináculo desta dissertação; o capítulo 4 discorre sobre algumas aplicações dos métodos, em comparação com abordagens encontradas no atual estado da arte aqui referenciado; finalmente, o capítulo 5 encerra este trabalho com perspectivas para continuidade das pesquisas.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

A estrutura deste trabalho sustenta-se sobre dois pilares conceituais, a saber, o fenômeno do emaranhamento e o problema da identidade de partículas, para os quais segue-se uma breve explanação, seguida da apresentação das principais noções físicas e ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento desta pesquisa.

2.1 Emaranhamento

Se um sistema quântico é multipartido (composto por n partes), um estado global, isto é, um estado que descreva o sistema como um todo, pode ser descrito por um vetor $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$, em que $\mathcal{H}_i$ é o espaço de Hilbert de cada parte i . Assim, para o caso mais simples de um sistema bipartido ($n = 2$), é possível construir-se um estado global $|\psi\rangle = |\varphi, \chi\rangle$, em que o subsistema A encontra-se no estado $|\varphi\rangle$ e o subsistema B encontra-se no estado $|\chi\rangle$. Neste caso, $|\psi\rangle$ é dito um estado produto (ou separável).

Embora à primeira vista possa soar contraintuitivo, é possível construir-se um estado global $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ que não é um produto tensorial dos estados de cada subsistema, chamado emaranhado ou entrelaçado. Um exemplo, ainda para o caso do sistema bipartido de dois níveis, seria a superposição $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi, \chi\rangle - |\chi, \varphi\rangle)$, que em termos de polarização de spin é conhecido como estado singleto. O estado singleto é um dos estados chamados estados de Bell. Juntamente com os três estados simétricos que formam o sistema tripleto, esse conjunto de vetores constitui uma base para o espaço de Hilbert para um sistema bipartido de dois níveis chamada base de Bell,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi, \chi\rangle - |\chi, \varphi\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi, \chi\rangle + |\chi, \varphi\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi, \varphi\rangle - |\chi, \chi\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi, \varphi\rangle + |\chi, \chi\rangle) \right\}. \quad (1)$$

Nestes casos, não é possível atribuir-se um estado puro para cada subsistema individualmente, mesmo que os subsistemas estejam espacialmente distantes um do outro (AUDRETSCH, 2007).

Esse é o conceito chave do paradoxo EPR (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). De fato, ainda com o exemplo acima, caso uma medição fosse realizada no subsistema A e o resultado fosse $|\varphi\rangle$, seria possível afirmar, com certeza e instantaneamente, que o subsistema B encontrar-se-ia no estado $|\chi\rangle$, devido ao colapso da função de onda para o estado $|\psi\rangle = |\varphi, \chi\rangle$ da superposição, o que infringiria o suposto princípio da localidade de Einstein.

Contudo, a partir dos trabalhos de Bell (1964) e Aspect, Grangier e Roger (1982), o emaranhamento passou a ser investigado tanto à procura de uma melhor compreensão teórica do fenômeno, quanto em busca de sua utilização para o desenvolvimento de tecnologias antes inalcançáveis dentro dos limites clássicos. Este foi o berço da teoria quântica da informação, responsável por desenvolver o método hoje consolidado para a medição do emaranhamento em sistemas bipartidos com dimensão finita, preparados em estados puros, por meio da entropia de von Neumann (AUDRETSCH, 2007).

2.1.1 Medida de emaranhamento

A priori, os estados quânticos serão descritos por meio de operadores densidade, úteis para calcular quantidades de interesse sobre o sistema global ou parte dele. Assim, para um estado quântico puro¹ normalizado $|\psi(t)\rangle$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_M$ de dimensão M , define-se o operador densidade $\rho(t) \equiv |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$, com as seguintes propriedades:

1. $\rho(t)$ é semipositivo: $\langle \varphi | \rho(t) | \varphi \rangle \geq 0, \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_M$ (logo, hermiteano: $\rho(t)^\dagger = \rho(t)$);
2. $\text{tr} [\rho(t)] = 1$;
3. $\rho(t)^2 = \rho(t)$.

O operador densidade é suficiente para se descrever completamente um estado quântico. O valor médio de um observável A é calculado como:

$$\langle A \rangle(t) = \text{tr} \{ A \rho(t) \} = \text{tr} \{ \rho(t) A \}$$

e as probabilidades $\mathcal{P}(a_n)$ de se obter os diferentes resultados (autovalores) a_n em uma medição do observável A em um instante t são:

$$\mathcal{P}(a_n) = \text{tr} \{ P_n \rho(t) \},$$

onde P_n é o projetor sobre o subespaço associado a a_n (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b; AUDRETSCH, 2007).

¹Estados de mistura estatística não serão abordados neste trabalho.

No caso de sistemas bipartidos, em que o espaço de estados $\mathcal{H}$ do sistema global é construído a partir do produto tensorial dos espaços de cada subsistema, o operador densidade ρ age sobre o espaço global. Assim, faz-se necessário construir, a partir de ρ , operadores densidade reduzidos que agem sobre os espaços de estado de cada subsistema e permitem fazer previsões sobre medições realizadas apenas em um dos subsistemas individualmente. A construção dos operadores densidade reduzidos sobre o subsistema A ou B dá-se por meio da operação de traço parcial em relação a B ou A , respectivamente. Isso quer dizer que, dado o subsistema A , cujo espaço de estados é denotado por $\mathcal{H}^A$ de base $\{|u_n^A\rangle\}$, o operador ρ_A é obtido pela operação de traço parcial sobre B :

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho,$$

definindo ρ_A pelos elementos de matriz:

$$\langle u_n^A | \rho_A | u_{n'}^A \rangle = \sum_p \left(\langle u_n^A | \langle v_p^B | \right) \rho \left(| u_{n'}^A \rangle | v_p^B \rangle \right), \quad (2)$$

onde $\{|v_p^B\rangle\}$ denota uma base para o espaço $\mathcal{H}^B$, referente ao subsistema B .

Idem para o subsistema B , cujo operador densidade reduzido é:

$$\rho_B = \text{tr}_A \rho,$$

com elementos de matriz

$$\langle v_p^B | \rho_B | v_{p'}^B \rangle = \sum_n \left(\langle u_n^A | \langle v_p^B | \right) \rho \left(| u_n^A \rangle | v_{p'}^B \rangle \right).$$

Tem-se que:

$$\text{tr} \rho = \text{tr}_A (\text{tr}_B \rho) = \text{tr}_B (\text{tr}_A \rho),$$

de modo que ρ_A e ρ_B também têm traço igual a 1. A positividade de ρ_A e de ρ_B decorre da positividade de ρ . Já a idempotência do operador densidade reduzido nem sempre se verifica e, em geral, $\rho_A^2 \neq \rho_A$. Este fato ilustra a impossibilidade de se atribuir estados puros específicos aos subsistemas, caso o estado global seja emaranhado.

Tomando-se o observável $\mathcal{O}$ que age no espaço $\mathcal{H}^A$ e sendo $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \mathbb{1}^B$ seu prolongamento em $\mathcal{H}$, pode-se mostrar que

$$\langle \bar{\mathcal{O}} \rangle = \text{tr} \{ \rho_A \mathcal{O} \},$$

de modo que o operador densidade reduzido ρ_A é usado para calcular todos os valores médios $\langle \bar{\mathcal{O}} \rangle$ como se o sistema A estivesse isolado e tivesse ρ_A como operador densidade (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b; AUDRETSCH, 2007).

Aqui vale ressaltar a vantagem em se usar operadores densidade para descrever o estado de um sistema, em substituição aos vetores de estado. Mesmo para o caso de estados

emaranhados, em que o estado global não pode ser escrito como um produto de estados de cada subsistema, é possível calcular-se qualquer previsão física sobre os subsistemas por meio da operação de traço parcial, que permite escrever operadores densidade para cada subsistema, ainda que não seja possível escrever seus estados como vetores (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b).

O operador densidade reduzido será a principal ferramenta para o cálculo da entropia de von Neumann, conceito fundamental para a teoria da informação quântica e para medir-se emaranhamento. Mas antes de introduzir a entropia de von Neumann propriamente, cabe aqui uma elucidação sobre a entropia de Shannon, utilizada na teoria da informação clássica (AUDRETSCH, 2007).

A entropia é um conceito termodinâmico que diz respeito ao nível de desordem de um sistema e a mecânica estatística (clássica ou quântica) lança mão deste conceito para descrever misturas estatísticas. Em 1948, Claude Shannon utilizou a entropia para propor uma medida de informação, ou de incerteza na transmissão de informações, em seu trabalho sobre a teoria matemática da comunicação (SHANNON, 1948). Grosso modo, tomando-se um conjunto de N diferentes caracteres, é possível escrever Z_n diferentes sequências de n caracteres com n_i repetições de cada caracter x_i , sendo que

$$Z_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_N!},$$

com $\sum_{i=1}^N n_i = n$. No caso de textos ou mesmo mensagens, em que n e n_i são grandes, a fórmula de Stirling $\log(n!) \sim n \log n - n$ pode ser usada para obter-se o logaritmo do número Z_n :

$$\log Z_n = n \log n - n - \sum_{i=1}^N (n_i \log n_i - n_i).$$

Sendo p_i a probabilidade de ocorrência de um caracter x_i , então a frequência de ocorrência de cada caracter é $n_i = np_i$. Assim, fazendo-se $p_i = \frac{n_i}{n}$, tem-se

$$\log Z_n = -n \sum_{i=1}^N p_i \log p_i.$$

Por fim, para calcular uma média por caracter do número $\log Z_n$, divide-se $\log Z_n$ por n e obtém-se a entropia de Shannon

$$E(\tilde{p}) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \geq 0$$

da distribuição de probabilidades $\tilde{p} \leftrightarrow \{p_i, i = 1, \dots, N\}$.

A entropia de Shannon tem grande importância para a teoria da informação clássica, em que cada símbolo ou caracter é unicamente distinto dos outros e não se altera no processo de leitura ou de transmissão da informação. Na teoria da informação quântica, essas premissas

eventualmente falham. Para o caso de sistemas quânticos, John von Neumann desenvolveu uma teoria de medida em que a assim chamada entropia de von Neumann tem um papel semelhante ao da entropia de Shannon para sistemas clássicos (AUDRETSCH, 2007).

von Neumann utilizava a descrição dos estados quânticos por meio do operador densidade. Dessa forma, se a cada caracter x_i fosse associado um estado quântico $|\psi_i\rangle$, com probabilidade p_i de acontecer em uma sequência de caracteres transmitidos, a mistura estatística desses estados teria como operador densidade

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (3)$$

A leitura das informações é feita por meio de um observável detector de caracteres D , cujos autoestados $\{|d_m\rangle, m = 1, \dots, d\}$ formam uma base ortonormal para $\mathcal{H}_d$. Em uma medição de D , a probabilidade de obter-se o autovalor d_m é representada por $p(d_m)$ (AUDRETSCH, 2007).

Como a sequência de caracteres introduzida é clássica, sua entropia de Shannon é denotada por $E(\tilde{p})$. Da mesma forma, a sequência de resultados medidos, isto é, o recebimento da mensagem, também é clássica e sua entropia de Shannon é denotada por $E(\tilde{p}(D))$. Se o sistema quântico é escolhido de modo que a dimensão d seja igual a N (o número total de caracteres disponíveis), então é possível que cada autoestado $|d_i\rangle$ corresponda a um caracter x_i , isto é, $|\psi_i\rangle$, da equação 3, é identificado como $|\psi_i\rangle = |d_i\rangle$ (AUDRETSCH, 2007).

Ora, a decomposição espectral do operador densidade é dada por:

$$\rho = \sum_{m=1}^d \lambda_m |m\rangle \langle m|, \quad \langle m | m' \rangle = \delta_{mm'},$$

sendo $|m\rangle$ seus autovetores e λ_m seus autovalores. Assim, pode-se reescrever ρ em termos de $|d_i\rangle$:

$$\rho = \sum_i^N p_i |d_i\rangle \langle d_i| = \sum_i^N \lambda_i |i\rangle \langle i|,$$

ou seja, neste caso, $p_i = \lambda_i$ e $|d_i\rangle = |i\rangle$. Como, para as medidas, o valor d_i está associado a cada x_i univocamente, todas as probabilidades do problema têm distribuições iguais: os autovalores de ρ ($p(d_i) = p_i = \lambda_i$) e então $E(\tilde{p}) = E(\tilde{p}(D))$. Com isso, pode-se associar ao operador densidade da mistura estatística — portanto, ao estado quântico — uma entropia quântica $S(\tilde{\lambda}) = E(\tilde{p})$, sendo

$$S(\tilde{\lambda}) = - \sum_{i=1}^d \lambda_i \log \lambda_i \geq 0. \quad (4)$$

Por meio da decomposição espectral de ρ pode-se reescrever a Equação (4) como:

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}[\rho \log \rho].$$

$S(\rho)$ é a entropia de von Neumann para o operador densidade ρ . De maneira geral, pode-se calcular a entropia de von Neumann para qualquer operador densidade, inclusive para os operadores reduzidos (AUDRETSCH, 2007).

Dado que a entropia de von Neumann, calculada para um operador densidade reduzido, fornece uma medida da falta de informação sobre o subsistema, ela é tomada com uma medida do emaranhamento do sistema global preparado em um estado puro. Quando o estado global pode ser escrito como um produto tensorial de estados oriundos de cada subsistema separadamente, a entropia vale zero, isto é, todas as informações sobre cada subsistema individual são conhecidas. Por outro lado, se o estado global não pode ser escrito como um produto tensorial de estados oriundos de cada subsistema separadamente, existe uma falta de informação sobre os vetores de estado dos subsistemas individuais e a entropia é diferente de zero. Para os estados de Bell (Equação (1)) especificamente, a entropia do estado reduzido tem seu valor máximo, a saber $\log N$, e por isso são chamados estados maximamente emaranhados (AUDRETSCH, 2007).

Aqui cabe uma breve explicação a respeito do valor máximo da entropia. No contexto da teoria da informação quântica, os sistemas utilizados são, *a priori*, de dois níveis (os *qubits*). Desta forma, normalmente utiliza-se o logaritmo na base 2 para o cálculo da entropia e, nesse caso, seu valor máximo é 1, isto é, $\log_2(2) = 1$. No caso de sistemas de mais níveis, poder-se-ia utilizar para cada caso a base do logaritmo igual à dimensão do subsistema. Entretanto, essa abordagem é desnecessária, já que as mudanças na base do logaritmo apenas alteram seu valor por um fator de escala. Assim, como opção de linguagem, sempre que o logaritmo for utilizado neste texto, considera-se por padrão que $\log$ refere-se ao logaritmo de base 2.

2.1.2 Estados maximamente emaranhados em dimensão d

Alguns métodos para a geração de bases generalizadas de estados de Bell (estados maximamente emaranhados) foram propostos nas últimas décadas (SYCH; LEUCHS, 2009; BENNETT et al., 1993; ALBER et al., 2000). Sych e Leuchs (2009) apresentam duas maneiras óbvias para a construção das bases de Bell. A primeira parte do princípio de que um estado do tipo $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} |k, k\rangle$ já é uma generalização natural, para dimensão d , do estado de Bell simétrico usual, *i.e.* $d = 2$: $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 1\rangle)$. A partir deste estado, toda a base maximamente emaranhada é formada aplicando-se transformações unitárias locais a ele. A segunda maneira parte da necessidade, em alguns casos, de gerar-se estados de Bell antissimétricos. Neste cenário, segue-se para uma generalização do estado singleto $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$, dada pelo estado $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} |m, -m\rangle$, de um sistema bipartido de spins individuais $j = N/2$ e spin total nulo, em que $N = d - 1$ para um sistema d -dimensional. Vale citar que, na segunda abordagem, é possível gerar-se tanto

estados simétricos, com valor de N par, quanto antissimétricos, com valor de N ímpar.

Neste ponto, é importante salientar as propriedades dos estados de Bell (Equação (1)), a saber (SYCH; LEUCHS, 2009):

1. Estados de Bell possuem entropia máxima $\log(d)$;
2. Estados de Bell formam uma base ortonormal para o espaço de Hilbert do sistema que descrevem;
3. Estados de Bell são, necessariamente, ou simétricos ou antissimétricos em relação à permutação dos índices que descrevem os subsistemas;
4. Estados de Bell antissimétricos necessariamente fornecem correlações exclusivas rotacionalmente invariantes perfeitas.

A quarta propriedade diz que a probabilidade de se obter um mesmo valor v em medições idênticas de ambos os subsistemas é nula, qualquer que seja o estado $|v\rangle$: $\mathcal{P}(v) = \text{tr}(P_v \rho) = \text{tr}(|v\rangle \langle v| \otimes |\psi^-\rangle \langle \psi^-|) = 0$.²

Baseando-se nessa segunda proposta, Sych e Leuchs (2009) aventam uma simplificação, representando esses estados por meio de matrizes. Entretanto, eles limitam-se a espaços cujas dimensões são potências de 2, de modo a não perder a propriedade da (anti)simetria. Bennett et al. (1993) por sua vez constroem uma base generalizada semelhante à de Sych e Leuchs (2009), porém mais adequada aos trabalhos com teleporte quântico, a saber, dada pelos estados $|\psi^{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} e^{i\frac{2\pi}{d}mk} |k, k-n\rangle$. A abordagem de Alber et al. (2000) é um pouco mais complicada, construída por meio da transformada de Fourier e da generalização da porta XOR quântica para espaços de Hilbert de dimensões maiores. Não cabe aqui esmiuçá-la, posto que é muito específica para os trabalhos com portas lógicas quânticas. À vista disso, ainda há espaço para a proposição de métodos que gerem estados maximamente emaranhados para qualquer dimensão finita e, se possível, que incorporem os casos de sistemas compostos por partes idênticas ou não.

2.2 Identidade de partículas

Duas ou mais partículas são chamadas idênticas quando todas as suas propriedades intrínsecas são as mesmas. Partículas idênticas são ditas indistinguíveis quando nenhuma medida é capaz de distinguir uma partícula da outra. Considerando, como exemplo, a

²Observe-se que a antissimetria ocorre apenas para subsistemas de dimensão d par, quando a parte espacial não é considerada.

situação em que duas partículas idênticas inicialmente afastadas uma da outra aproximam-se e voltam a se afastar, as funções de onda que definem o estado de cada partícula podem se sobrepor durante a aproximação e, ao realizar-se uma medição sobre o sistema após o novo afastamento, é impossível saber-se a qual das partículas referem-se os dados medidos. Esta é uma instância na qual se manifesta a chamada degenerescência de troca, em que diferentes vetores do espaço de Hilbert do sistema podem ser escolhidos para descrever uma mesma situação física e em que o cálculo de probabilidades, feitos segundo os postulados da teoria, depende do vetor escolhido, gerando ambiguidades nas previsões.

Uma maneira de se resolver este problema consiste na adoção de um novo postulado, de simetrização, para a teoria: *os estados físicos de um sistema de partículas idênticas estão restritos a um dentre dois subespaços do espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_{AS}$ global; ou são vetores simétricos ou são vetores antissimétricos sob a troca dos índices que descrevem as partículas*. Partículas descritas por vetores simétricos de $\mathcal{H}_S$ são denominadas bósons e partículas descritas por vetores antissimétricos de $\mathcal{H}_{AS}$ são denominadas férmions. Assim, nos sistemas de partículas idênticas, apenas determinados estados físicos são possíveis, de acordo com o tipo de partículas envolvidas. No caso de bósons, apenas estados completamente simétricos são permitidos, enquanto para férmions, os estados precisam ser completamente antissimétricos. Além disso, todos os observáveis devem ser invariantes sob a permutação dos índices das partículas. (HEISENBERG, 1927; DIRAC, 1926; LEWIS, 1930; WIGNER, 1997; MESSIAH; GREENBERG, 1964; COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b).

Deste modo, quando um sistema bipartido é constituído por partes indistinguíveis, um estado do tipo $|\psi\rangle = |\varphi, \chi\rangle$ é ambíguo, pois não é possível dizer se o subsistema A encontra-se no estado $|\varphi\rangle$ e o subsistema B encontra-se no estado $|\chi\rangle$ ou o contrário, uma vez que nenhuma medição é capaz de distinguir o subsistema A do subsistema B . Assim, a descrição correta, nesse caso, seria a superposição de ambas as possibilidades: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi, \chi\rangle \pm |\chi, \varphi\rangle)$, isto é, a possibilidade de o subsistema A estar no estado $|\varphi\rangle$ ou $|\chi\rangle$ e vice-versa para o subsistema B (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b; GRIFFITHS, 2011).

Com a adoção do postulado da simetrização, quando o sistema global é composto por subsistemas idênticos, algumas dificuldades manifestam-se no que se refere a emaranhamento. Primeiramente em relação ao próprio postulado da simetrização: os estados do sistema global devem ser (anti)simétricos com relação à troca dos estados individuais dos subsistemas. Por conseguinte, eles tomam a forma de estados de Bell.

Como ilustração, o sistema de dois férmions idênticos, por antissimetização, estaria sempre emaranhado, o que não corresponde a alguns resultados observados, por exemplo no caso em que a separação espacial é muito grande. Por outro lado, sistemas de bósons idênticos

admitiriam estados simetrizados e fatorados, como o estado $|\varphi, \varphi\rangle$. Isso quer dizer que qualquer sistema bipartido de férmions idênticos estará sempre emaranhado? Neste caso, por que não se constroem mecanismos de teleporte com base nesse emaranhamento “natural” dos férmions? Este questionamento associa-se às diferentes medidas de emaranhamento propostas e constitui um dos pontos de investigação deste projeto.

De outra perspectiva, como a dimensão do espaço de Hilbert dos vetores de estado foi reduzida e não é mais ³ $d \times d$, como medir emaranhamento, pela entropia de von Neumann, por exemplo, uma vez que está comprometida a noção de um operador densidade reduzido agindo sobre o espaço de Hilbert de uma partícula de dimensão d e obtido via operação traço parcial realizada sobre os vetores do espaço da outra, também de dimensão d ?

Estas e outras questões relacionadas ao emaranhamento de partículas idênticas ainda levantam controvérsias na comunidade acadêmica e são assunto de trabalhos de pesquisa recentemente publicados (BENATTI; FLOREANINI; MARZOLINO, 2010; BALACHANDRAN et al., 2013; BENATTI; FLOREANINI; TITIMBO, 2014; LOFRANCO; COMPAGNO, 2016). Os esforços do presente trabalho direcionam-se no mesmo sentido, propondo um método para o cálculo do emaranhamento em sistemas bipartidos de partes idênticas que seja adequado às exigências da teoria quântica.

³No caso de dois spins idênticos S , a dimensão do espaço de Hilbert não é $(2S + 1)(2S + 1)$; de fato, tem-se dimensões $(2S + 1)(S + 1)$ no caso bosônico e $(2S + 1)S$ no caso fermiônico.

Capítulo 3

Metodologia

Neste trabalho, um sistema bipartido de dimensão finita será modelado como um sistema de dois pseudospins S_1 e S_2 , referentes às primeira e segunda partes (subsistemas) do sistema global, respectivamente. A partir dessa escolha, é possível descrever qualquer subsistema de d níveis tomando-se valores (semi)inteiros de spin adequados. Se $S_1 \neq S_2$, os subsistemas são considerados distinguíveis. Se $S_1 = S_2$, os subsistemas podem ser tratados como idênticos ou distinguíveis, de acordo com a necessidade de simulação (este seria o caso, por exemplo, da simulação de um sistema global com dois subsistemas de dois níveis, *i.e.* $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$, composto por partículas que diferem em massa ou em qualquer outra característica intrínseca, como sistema próton-elétron, elétron-pósitron, entre outros). Em primeiro lugar, apresenta-se o método da *dessimetrização* da base do espaço de Hilbert para medir-se o emaranhamento de sistemas compostos por partes idênticas. Em seguida, o método para se gerar estados maximamente emaranhados é desenvolvido.

3.1 Dessimetrização da base do espaço de Hilbert

Uma das principais críticas relacionadas à definição correta de estados quânticos globais para duas partículas (ou subsistemas) idênticas é a falta de sentido em atribuir-se rótulos para especificar qual partícula (subsistema) está em cada estado individual. Uma descrição alternativa é definir um estado quântico global “holístico” $|\widetilde{\varphi, \zeta}\rangle$ (LOFRANCO; COMPAGNO, 2016; SCIARA; LOFRANCO; COMPAGNO, 2017), no qual os rótulos φ e ζ significam apenas que existe uma partícula no estado individual $|\varphi\rangle$ e outra no estado individual $|\zeta\rangle$, sem especificar qual partícula está em cada estado.

Neste trabalho, dá-se um passo atrás e toma-se como estado global genérico de duas partículas, satisfazendo-se o postulado da simetrização, o estado

$$||\varphi\zeta\rangle\rangle \equiv \frac{1}{N} (|\varphi\zeta\rangle + \varepsilon |\zeta\varphi\rangle), \quad (5)$$

em que $|\varphi\zeta\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\zeta\rangle$, exatamente como aparece na maioria dos livros de mecânica

quântica (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1973b), com $\varepsilon = +1$ para bósons e $\varepsilon = -1$ para férmions, sendo N a constante de normalização apropriada. O princípio da exclusão de Pauli para férmions é levado em conta automaticamente. Cabe reforçar que a rotulagem na Equação (5) é meramente operacional, já que nenhuma medição é capaz de distinguir as partículas. Em especial, tomam-se vetores de estado de uma partícula ortonormalizados $|\varphi\rangle$ e $|\zeta\rangle$, de modo que, no caso bosônico, $N = 2$ se $\varphi = \zeta$ e $N = \sqrt{2}$ se $\varphi \neq \zeta$ e, no caso fermiônico, $N = \sqrt{2}$, o que fornece $||\varphi\zeta\rangle\rangle$ na Equação (5) também normalizado.

Além disso, utiliza-se a base ortonormal para uma partícula, dada por $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1}^d$, para subsistemas d -dimensionais. Em um primeiro momento, considera-se que as duas partículas (subsistemas) têm a mesma parte espacial e, com essa suposição, $|\psi_k\rangle \equiv |k\rangle$ é dado pelo número quântico $k = 1, 2, \dots, d$. Sobreposições da parte espacial nulas ou parciais serão comentadas na discussão dos resultados (cap. 4).

Um estado quântico global $|\psi\rangle$ pode ser, então, escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{k_1=1}^d \sum_{k_2=\bar{d}}^d c(k_1, k_2) ||k_1 k_2\rangle\rangle$$

nesta base de estados (anti)simétricos $\{||k_1 k_2\rangle\rangle\}$, onde $\bar{d} = k_1$ no caso de bósons e $\bar{d} = k_1 + 1$ no caso de férmions.

O principal objetivo é reescrever o estado global $|\psi\rangle$ em uma base de estados não simétricos $\{|k_1 k_2\rangle; k_1, k_2 = 1, 2, \dots, d\}$ como sendo

$$|\psi\rangle = \sum_{k_1=1}^d \sum_{k_2=1}^d g(k_1, k_2) (|k_1 k_2\rangle),$$

em que os coeficientes g são todos definidos usando-se os coeficientes c dados para $k_1 \leq k_2$, com $g(k_2, k_1) = \varepsilon g(k_1, k_2) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} c(k_1, k_2)$ caso $k_1 \neq k_2$, e $g(k, k) = c(k, k)$ (com $c(k, k)$ sempre zero para férmions). Vale notar que $|\psi\rangle$ se mantém (anti)simétrico — a (anti)simetrização aparece como uma restrição nos coeficientes dos vetores não simétricos da base — e todas as consequências da indistinguibilidade são mantidas nesta proposta. Este processo é chamado aqui *dessimetrização* dos estados da base global. Como um simples exemplo, o estado

$$|\psi\rangle = a ||1\ 2\rangle\rangle + b ||2\ 2\rangle\rangle$$

é reescrito como

$$|\psi\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} |1\ 2\rangle + b |2\ 2\rangle + \varepsilon \frac{a}{\sqrt{2}} |2\ 1\rangle.$$

Em suma, o método consiste em quatro etapas:

- i* Ordenar uma base $\{|m_1 m_2\rangle\}$ para o espaço de Hilbert global. Para cada autovalor crescente m_1 de S_{1z} , m_2 passa analogamente por todos os seus valores permitidos,

dependendo de S_1 e S_2 serem distinguíveis ou idênticos. Por exemplo, se $S_1 = S_2 = 1$ e os subsistemas são tratados como distinguíveis, a base tem $(2S_1 + 1)(2S_2 + 1) = 9$ elementos ordenados:

$$\{|-1 \ -1\rangle, |-1 \ 0\rangle, |-1 \ 1\rangle, |0 \ -1\rangle, |0 \ 0\rangle, |0 \ 1\rangle, |1 \ -1\rangle, |1 \ 0\rangle, |1 \ 1\rangle\}.$$

Mas se os subsistemas são tratados como idênticos bosônicos, a base passa a ter $(2S_1 + 1)(S_2 + 1) = 6$ elementos ordenados:

$$\left\{ |-1 \ -1\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1 \ 0\rangle + |0 \ -1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1 \ 1\rangle + |1 \ -1\rangle), \right. \\ \left. |0 \ 0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \ 1\rangle + |1 \ 0\rangle), |1 \ 1\rangle \right\};$$

- ii Escrever o estado global (anti)simétrico como combinação linear dos elementos da base construída no passo anterior. Seguindo o exemplo anterior, para o caso de subsistemas idênticos, um estado $|\psi\rangle$ seria representado pela sêxtupla $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, em que c_i é o coeficiente associado ao i -ésimo estado da base;
- iii Escrever o estado $|\psi\rangle$ (anti)simétrico em uma nova forma $|\bar{\psi}\rangle$, utilizando-se a base de estados não simétricos, preservando os coeficientes e sinais associados a cada estado (anti)simétrico da base original. Ainda em continuação ao exemplo anterior, $|\bar{\psi}\rangle$ seria representado pela nêupla

$$|\bar{\psi}\rangle : \left(c_1, \frac{c_2}{\sqrt{2}}, \frac{c_3}{\sqrt{2}}, \frac{c_2}{\sqrt{2}}, c_4, \frac{c_5}{\sqrt{2}}, \frac{c_3}{\sqrt{2}}, \frac{c_5}{\sqrt{2}}, c_6 \right);$$

- iv Construir a matriz do operador densidade global como $\rho = |\bar{\psi}\rangle\langle\bar{\psi}|$, obtendo o operador densidade reduzido, e calcular a entropia de von Neumann para todos os casos — não idênticos, idênticos, bosônicos ou fermiônicos — da mesma maneira como é normalmente realizada para subsistemas distinguíveis.

O postulado da simetrização, que normalmente é utilizado como uma forma de se evitar que estados globais não físicos e consequentes inconsistências, como a degenerescência de troca, apareçam, implica a redução da dimensão do espaço de Hilbert global de $\dim \mathcal{H} = d^2$ para $\dim \mathcal{H}_{(A)S} = \frac{1}{2}d(d + \varepsilon)$. O processo de *dessimetrização* não altera essa situação, uma vez que qualquer observável é também simétrico em relação aos rótulos utilizados aqui e o operador paridade comuta com qualquer Hamiltoniano simétrico. O espaço de Hilbert pode, então, ser decomposto em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{AS} \oplus \mathcal{H}_S$, uma soma direta dos subespaços (anti)simetrizados. Ao lidar com sistemas bosônicos, apenas $\mathcal{H}_S$ é populado; por outro lado, se o caso for fermiônico, todos os processos físicos acontecem em $\mathcal{H}_{AS}$. Neste sentido, o espaço de Hilbert é tomado como se fosse d^2 -dimensional, mas tendo em mente que os

chamados estados não físicos nunca são acessados e tudo acontece no subespaço de Hilbert $\frac{1}{2}d(d + \varepsilon)$ -dimensional apropriado.

Este simples procedimento permite trabalhar as definições usuais de operadores densidade e densidade reduzido, bem como a da entropia de von Neumann e a da decomposição de Schmidt, justamente da mesma forma em que essas noções são estabelecidas para partículas (subsistemas) distinguíveis, sendo que as matrizes densidade e densidade reduzida resultantes aparecem como de ordem $d^2 \times d^2$ e $d \times d$, respectivamente. Observe-se que, com isso, o operador densidade reduzido mostra-se como operador que atua corretamente sobre o espaço d -dimensional de um dos subsistemas. Um último, mas também notável, ponto a se mencionar é que esta proposta acaba sendo aplicável a qualquer sistema bipartido, com subsistemas de qualquer dimensão d finita (*qudits*), sejam os subsistemas idênticos ou não.

3.2 Geração de base de estados maximamente emaranhados

Dado um sistema bipartido de dimensão finita, modelado como um sistema de dois pseudospins S_1 e S_2 , à geração de base de estados maximamente emaranhados para esse sistema são postuladas as seguintes restrições:

- Os estados devem formar uma base ortonormal para o espaço de Hilbert global do sistema;
- Cada vetor da base original deve aparecer em uma única combinação linear, a menos de troca de sinais, dentre aquelas que geram os vetores da nova base;
- Os estados da nova base devem apresentar todos os autovalores do menor operador S_z , sem repetição.

Estas restrições não são impostas pela natureza física do problema, mas são úteis na busca pela base de estados maximamente emaranhados mais simples.

Antes de ir além, algumas observações devem ser destacadas. Primeiramente, devido à decomposição de Schmidt, o menor spin deve determinar o máximo do emaranhamento, isto é, a entropia máxima será $\log$ da menor dimensão entre os subsistemas (AUDRETSCH, 2007). Por causa disso, S_1 é axiomáticamente definido como o menor spin, de modo que os algoritmos de simulação sempre gerem os estados corretos. Em segundo lugar, se os subsistemas são idênticos, os estados resultantes devem ser (anti)simétricos. E finalmente, a normalização é feita do mesmo modo em todos os casos, simplesmente multiplicando por

$\frac{1}{\sqrt{N}}$ os vetores coletados, em que N é o número de parcelas que compõem os vetores da nova base.

Dois exemplos serão propostos para melhor esclarecer o método.

Exemplo 1: $S_1 = S_2 = 1$

Base (com 3 valores, ou símbolos: -1, 0 1):

$$\{|-1 \ -1\rangle, |-1 \ 0\rangle, |-1 \ 1\rangle, |0 \ -1\rangle, |0 \ 0\rangle, |0 \ 1\rangle, |1 \ -1\rangle, |1 \ 0\rangle, |1 \ 1\rangle\}$$

Forma matricial 3×3 e coleta dos grupos de vetores (cada cor indica um grupo):

$$\begin{bmatrix} |-1 \ -1\rangle & |-1 \ 0\rangle & |-1 \ 1\rangle \\ |0 \ -1\rangle & |0 \ 0\rangle & |0 \ 1\rangle \\ |1 \ -1\rangle & |1 \ 0\rangle & |1 \ 1\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |-1 \ -1\rangle & |-1 \ 0\rangle \\ |0 \ -1\rangle & |0 \ 0\rangle \\ |1 \ -1\rangle & |1 \ 0\rangle \end{bmatrix}$$

Exemplo 1a: distinguíveis ($\dim \mathcal{H} = 9$)

Base ortonormal maximamente emaranhada:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \{ [|-1 \ -1\rangle \pm (|0 \ 1\rangle + |1 \ 0\rangle)], \\ & [|-1 \ -1\rangle - |0 \ 1\rangle + |1 \ 0\rangle], \\ & [|0 \ 0\rangle \pm (|-1 \ 1\rangle + |1 \ -1\rangle)], \\ & [|0 \ 0\rangle - |-1 \ 1\rangle + |1 \ -1\rangle], \\ & [|1 \ 1\rangle \pm (|-1 \ 0\rangle + |0 \ -1\rangle)], \\ & [|1 \ 1\rangle - |-1 \ 0\rangle + |0 \ -1\rangle] \}. \end{aligned}$$

Exemplo 1b: bósons idênticos ($\dim \mathcal{H}_S = 6$)

Base ortonormal maximamente emaranhada:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \{ [|-1 \ -1\rangle \pm (|0 \ 1\rangle + |1 \ 0\rangle)], \\ & [|0 \ 0\rangle \pm (|-1 \ 1\rangle + |1 \ -1\rangle)], \\ & [|1 \ 1\rangle \pm (|-1 \ 0\rangle + |0 \ -1\rangle)] \}. \end{aligned}$$

Exemplo 1c: férmions idênticos ($\dim \mathcal{H}_{AS} = 3$)

Base ortonormal maximamente emaranhada:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{ (|0 \ 1\rangle - |1 \ 0\rangle), \\ (|-1 \ 1\rangle - |1 \ -1\rangle), \\ (|-1 \ 0\rangle - |0 \ -1\rangle) \}.$$

Exemplo 2: $S_1 = 1$ e $S_2 = \frac{3}{2}$ (distinguíveis, $\dim \mathcal{H} = 12$)

Base (com 3 valores de S_1 e 4 valores de S_2):

$$\{ |-1 \ -3/2\rangle, |-1 \ -1/2\rangle, |-1 \ 1/2\rangle, |-1 \ 3/2\rangle, \\ |0 \ -3/2\rangle, |0 \ -1/2\rangle, |0 \ 1/2\rangle, |0 \ 3/2\rangle, \\ |1 \ -3/2\rangle, |1 \ -1/2\rangle, |1 \ 1/2\rangle, |1 \ 3/2\rangle \}.$$

Forma matricial 3×4 e coleta dos grupos de vetores:

$$\begin{bmatrix} |-1 \ -3/2\rangle & |-1 \ -1/2\rangle & |-1 \ 1/2\rangle & |-1 \ 3/2\rangle \\ |0 \ -3/2\rangle & |0 \ -1/2\rangle & |0 \ 1/2\rangle & |0 \ 3/2\rangle \\ |1 \ -3/2\rangle & |1 \ -1/2\rangle & |1 \ 1/2\rangle & |1 \ 3/2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |-1 \ -3/2\rangle & |-1 \ -1/2\rangle \\ |0 \ -3/2\rangle & |0 \ -1/2\rangle \\ |1 \ -3/2\rangle & |1 \ -1/2\rangle \end{bmatrix}$$

Base ortonormal maximamente emaranhada:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \{ |-1 \ 1/2\rangle + |0 \ -1/2\rangle + |1 \ -3/2\rangle, |-1 \ 1/2\rangle \pm [|0 \ -1/2\rangle - |1 \ -3/2\rangle], \\ |-1 \ 3/2\rangle + |0 \ 1/2\rangle + |1 \ -1/2\rangle, |-1 \ 3/2\rangle \pm [|0 \ 1/2\rangle - |1 \ -1/2\rangle], \\ |-1 \ -3/2\rangle + |0 \ 3/2\rangle + |1 \ 1/2\rangle, |-1 \ -3/2\rangle \pm [|0 \ 3/2\rangle - |1 \ 1/2\rangle], \\ |-1 \ -1/2\rangle + |0 \ -3/2\rangle + |1 \ 3/2\rangle, |-1 \ -1/2\rangle \pm [|0 \ -3/2\rangle - |1 \ 3/2\rangle] \}.$$

Sumariamente, o método proposto consta de cinco etapas:

- i* Ordenar a base inicial da mesma forma que a etapa *i* do método da *dessimetrização*, mas sempre em um formato não simétrico, mesmo quando os sistemas são idênticos (neste caso, deve-se *dessimetrizar* e, em seguida, ordená-la). É importante que quando $S_1 \neq S_2$, deve-se sempre atribuir a S_1 o menor valor de spin;
- ii* Reescrever a base em forma matricial, replicando as primeiras $n - 1$ colunas, com n sendo o número de linhas da matriz;
- iii* Coletar grupos de vetores seguindo as diagonais secundárias da matriz;
- iv* Compor uma sobreposição com os vetores de cada grupo e permutar sinais de mais e menos de modo a completar uma base ortogonal para o espaço de Hilbert;

v Normalizar a base.

Seguindo o método para um sistema bipartido de qualquer dimensão finita, seja idêntico ou não, a base gerada sempre será ortonormal e maximamente emaranhada. De fato, pela construção dos estados a partir das diagonais secundárias, cada estado $|\psi\rangle$ formado por uma dessas diagonais dá lugar a um operador densidade $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$. Na matriz de ρ , cada ket $|m_1 m_2\rangle$ que aparece no estado $|\psi\rangle$, por sua vez, dá lugar ao $(m_1 + S_1 + 1)$ -ésimo bloco, diagonal, de ordem $(2S_2 + 1) \times (2S_2 + 1)$, com todos os elementos nulos¹, exceto o elemento $b_{ii} = \frac{1}{2S_1 + 1}$ na posição $i = m_2 + S_2 + 1$.

Assim, o operador densidade reduzido, soma desses blocos, mostra-se, por construção, como

$$\rho(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2S_1 + 1} & & & \\ & \frac{1}{2S_1 + 1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2S_1 + 1} \end{bmatrix}_{(2S_2 + 1) \times (2S_2 + 1)}$$

evidenciando que $|\psi\rangle$ é maximamente emaranhado.

¹A matriz de $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$ pode apresentar outros elementos não nulos, mas fora dos blocos que contribuem para o operador densidade reduzido $\rho(2)$.

Capítulo 4

Resultados

Abaixo, seguem-se dois exemplos que ilustram os resultados do capítulo anterior, evidenciando sua simplicidade e aplicabilidade. Primeiramente, apresentam-se os métodos para sistemas distinguíveis, para verificação de resultados já conhecidos e como teste do bom funcionamento dos modelos. Em seguida, exemplos para sistemas idênticos são detalhados, de modo que os procedimentos executados fiquem claros e reproduzíveis para o leitor interessado. Por fim, algumas aplicações são discutidas em comparação com outros resultados encontrados em trabalhos semelhantes.

4.1 *Dessimetrização* em sistemas distinguíveis

Como primeiros exemplos de aplicação do método de *dessimetrização* da base do espaço de Hilbert global, modela-se um sistema bipartido de dimensão finita como sendo constituído por dois pseudospins S_1 e S_2 . Qualquer subsistema de d níveis pode ser reescrito na forma spinorial com a escolha adequada do valor (semi-)inteiro para os spins e, então, dois spins são suficientes para tratar o caso em que dois *qudits* estão no mesmo sítio. Subsequentemente seguem algumas situações. Em cada caso, tomam-se os seguintes passos. Escolhe-se um estado quântico $|\psi\rangle$ que é reescrito em uma base *dessimetrizada* como explicado anteriormente, obtendo-se $|\bar{\psi}\rangle$; calcula-se o operador densidade global $\rho = |\bar{\psi}\rangle\langle\bar{\psi}|$ e toma-se seu traço parcial $\rho_2 = \sum_{m_1=-S_1}^{S_1} \langle m_1 | \rho | m_1 \rangle$ para uma base de estados não simétricos $\{|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle\}$; em seguida, a entropia de von Neumann é obtida como $S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$, onde λ_i são os autovalores do operador densidade reduzido ρ_2 .

A título de simplificação, considera-se aqui um caso de spin pequeno, valendo 1 por exemplo. Pode-se considerar ambos os spins S_1 e S_2 com o mesmo valor e ainda assim tratar o problema como de partículas distinguíveis; para spin de valor 1, poder-se-ia dizer que trata-se um bóson de 3 níveis interagindo com um férmion de 3 níveis, ou outras partículas

de mesmo spin, mas com demais características intrínsecas diferentes.

Para spin igual a 1, ordena-se a base de estados $|m_1 m_2\rangle$ não simétricos (NS) da seguinte maneira:

$$\{|-1 -1\rangle, |-1 0\rangle, |-1 1\rangle, |0 -1\rangle, |0 0\rangle, |0 1\rangle, |1 -1\rangle, |1 0\rangle, |1 1\rangle\}. \quad (6)$$

Tomando-se um estado $|\psi\rangle$ qualquer, normalizado, escrito como combinação linear dos vetores dessa base $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{(2S_1+1)(2S_2+1)} c_i |m_1 m_2\rangle$, constrói-se o operador densidade global $\rho = |\bar{\psi}\rangle\langle\psi|$. Neste caso, $|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle$, já que o estado global para sistema de partes distinguíveis já é não simétrico. Assim, a matriz do operador densidade global toma a seguinte forma:

$$\rho_{global_{NS}} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 & c_1 c_4 & c_1 c_5 & c_1 c_6 & c_1 c_7 & c_1 c_8 & c_1 c_9 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 & c_2 c_4 & c_2 c_5 & c_2 c_6 & c_2 c_7 & c_2 c_8 & c_2 c_9 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 & c_3 c_4 & c_3 c_5 & c_3 c_6 & c_3 c_7 & c_3 c_8 & c_3 c_9 \\ c_4 c_1 & c_4 c_2 & c_4 c_3 & c_4^2 & c_4 c_5 & c_4 c_6 & c_4 c_7 & c_4 c_8 & c_4 c_9 \\ c_5 c_1 & c_5 c_2 & c_5 c_3 & c_5 c_4 & c_5^2 & c_5 c_6 & c_5 c_7 & c_5 c_8 & c_5 c_9 \\ c_6 c_1 & c_6 c_2 & c_6 c_3 & c_6 c_4 & c_6 c_5 & c_6^2 & c_6 c_7 & c_6 c_8 & c_6 c_9 \\ c_7 c_1 & c_7 c_2 & c_7 c_3 & c_7 c_4 & c_7 c_5 & c_7 c_6 & c_7^2 & c_7 c_8 & c_7 c_9 \\ c_8 c_1 & c_8 c_2 & c_8 c_3 & c_8 c_4 & c_8 c_5 & c_8 c_6 & c_8 c_7 & c_8^2 & c_8 c_9 \\ c_9 c_1 & c_9 c_2 & c_9 c_3 & c_9 c_4 & c_9 c_5 & c_9 c_6 & c_9 c_7 & c_9 c_8 & c_9^2 \end{bmatrix}.$$

A operação do traço parcial sobre o subsistema (1) resultará em um operador densidade reduzido ρ_2 , cujos elementos de matriz serão, neste caso, somatórios com três elementos, conforme a Equação (2) do capítulo 2. Assim, o operador reduzido é, na verdade, uma soma de três matrizes quadradas de ordem 3 (a dimensão do subsistema (2)) que aparecem ordenadas dentro do próprio operador densidade global, se a ordenação da base for mantida a mesma desde o início. Essa operação fica mais simples observando-a diretamente na matriz do operador densidade global:

$$\rho_{global_{NS}} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 & c_1 c_4 & c_1 c_5 & c_1 c_6 & c_1 c_7 & c_1 c_8 & c_1 c_9 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 & c_2 c_4 & c_2 c_5 & c_2 c_6 & c_2 c_7 & c_2 c_8 & c_2 c_9 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 & c_3 c_4 & c_3 c_5 & c_3 c_6 & c_3 c_7 & c_3 c_8 & c_3 c_9 \\ c_4 c_1 & c_4 c_2 & c_4 c_3 & c_4^2 & c_4 c_5 & c_4 c_6 & c_4 c_7 & c_4 c_8 & c_4 c_9 \\ c_5 c_1 & c_5 c_2 & c_5 c_3 & c_5 c_4 & c_5^2 & c_5 c_6 & c_5 c_7 & c_5 c_8 & c_5 c_9 \\ c_6 c_1 & c_6 c_2 & c_6 c_3 & c_6 c_4 & c_6 c_5 & c_6^2 & c_6 c_7 & c_6 c_8 & c_6 c_9 \\ c_7 c_1 & c_7 c_2 & c_7 c_3 & c_7 c_4 & c_7 c_5 & c_7 c_6 & c_7^2 & c_7 c_8 & c_7 c_9 \\ c_8 c_1 & c_8 c_2 & c_8 c_3 & c_8 c_4 & c_8 c_5 & c_8 c_6 & c_8 c_7 & c_8^2 & c_8 c_9 \\ c_9 c_1 & c_9 c_2 & c_9 c_3 & c_9 c_4 & c_9 c_5 & c_9 c_6 & c_9 c_7 & c_9 c_8 & c_9^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, o operador densidade reduzido ρ_2 é construído da seguinte forma:

$$\rho_{NS}(2) = \begin{bmatrix} c_1^2 + c_4^2 + c_7^2 & c_1 c_2 + c_4 c_5 + c_7 c_8 & c_1 c_3 + c_4 c_6 + c_7 c_9 \\ c_2 c_1 + c_5 c_4 + c_8 c_7 & c_2^2 + c_5^2 + c_8^2 & c_2 c_3 + c_5 c_6 + c_8 c_9 \\ c_3 c_1 + c_6 c_4 + c_9 c_7 & c_3 c_2 + c_6 c_5 + c_9 c_8 & c_3^2 + c_6^2 + c_9^2 \end{bmatrix}.$$

A partir de então, diagonaliza-se o operador densidade reduzido e calcula-se a entropia de von Neumann como medida do emaranhamento entre as duas partes do sistema global.

São apresentados os resultados para dois estados do tipo produto $|\psi_{Prod.1 \ e \ 2}\rangle$ (não emaranhado) e dois estados do tipo emaranhados $|\psi_{Emar.1 \ e \ 2}\rangle$. Estes estados são definidos, a partir da base (6), como

$$\begin{aligned} |\psi_{Prod.1}\rangle &= |-1 - 1\rangle, \\ |\psi_{Prod.2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1 \ 0\rangle + |-1 \ 1\rangle), \\ |\psi_{Emar.1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|-1 - 1\rangle + |0 \ 0\rangle + |1 \ 1\rangle), \\ |\psi_{Emar.2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1 \ 0\rangle + |0 \ 1\rangle), \end{aligned}$$

cujas matrizes de $\rho_{2_{NS}}$ diagonalizadas ficam, respectivamente,

$$\rho_{2_{NS}diag_{Prod.1}} = \rho_{2_{NS}diag_{Prod.2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{2NSdiagEmar.1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\rho_{2NSdiagEmar.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

No caso dos estados do tipo produto, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor igual a 1 e um autovalor duplamente degenerado igual a zero, de modo que a entropia calculada foi nula. No caso do estado emaranhado 1, o operador densidade reduzido mostrou apenas um autovalor triplamente degenerado igual a 1/3, de modo que a entropia calculada foi máxima, isto é, $\log(3)$. No caso do estado emaranhado 2, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor nulo e um autovalor duplamente degenerado igual a 1/2, de modo que a entropia calculada foi intermediária, isto é, $\log(2)$. Os resultados são condizentes com os previstos para cada situação.

Antes de apresentar o caso de partes idênticas, é relevante exemplificar também o caso de partes distinguíveis com spins distintos, de modo que as dimensões dos subsistemas não são as mesmas. Para tanto, tome-se, por exemplo, $S_1 = 1$ e $S_2 = 3/2$. Ordena-se a base não simetrizada (NS) da seguinte maneira:

$$\{|-1 \ -3/2\rangle, |-1 \ -1/2\rangle, |-1 \ 1/2\rangle, |-1 \ 3/2\rangle, |0 \ -3/2\rangle, |0 \ -1/2\rangle, \\ |0 \ 1/2\rangle, |0 \ 3/2\rangle, |1 \ -3/2\rangle, |1 \ -1/2\rangle, |1 \ 1/2\rangle, |1 \ 3/2\rangle\}. \quad (7)$$

Semelhantemente ao caso anterior, a matriz do operador densidade global toma a seguinte forma:

$$\rho_{globalNS} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & c_1c_4 & c_1c_5 & c_1c_6 & c_1c_7 & c_1c_8 & c_1c_9 & c_1c_{10} & c_1c_{11} & c_1c_{12} \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 & c_2c_4 & c_2c_5 & c_2c_6 & c_2c_7 & c_2c_8 & c_2c_9 & c_2c_{10} & c_2c_{11} & c_2c_{12} \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 & c_3c_4 & c_3c_5 & c_3c_6 & c_3c_7 & c_3c_8 & c_3c_9 & c_3c_{10} & c_3c_{11} & c_3c_{12} \\ c_4c_1 & c_4c_2 & c_4c_3 & c_4^2 & c_4c_5 & c_4c_6 & c_4c_7 & c_4c_8 & c_4c_9 & c_4c_{10} & c_4c_{11} & c_4c_{12} \\ c_5c_1 & c_5c_2 & c_5c_3 & c_5c_4 & c_5^2 & c_5c_6 & c_5c_7 & c_5c_8 & c_5c_9 & c_5c_{10} & c_5c_{11} & c_5c_{12} \\ c_6c_1 & c_6c_2 & c_6c_3 & c_6c_4 & c_6c_5 & c_6^2 & c_6c_7 & c_6c_8 & c_6c_9 & c_6c_{10} & c_6c_{11} & c_6c_{12} \\ c_7c_1 & c_7c_2 & c_7c_3 & c_7c_4 & c_7c_5 & c_7c_6 & c_7^2 & c_7c_8 & c_7c_9 & c_7c_{10} & c_7c_{11} & c_7c_{12} \\ c_8c_1 & c_8c_2 & c_8c_3 & c_8c_4 & c_8c_5 & c_8c_6 & c_8c_7 & c_8^2 & c_8c_9 & c_8c_{10} & c_8c_{11} & c_8c_{12} \\ c_9c_1 & c_9c_2 & c_9c_3 & c_9c_4 & c_9c_5 & c_9c_6 & c_9c_7 & c_9c_8 & c_9^2 & c_9c_{10} & c_9c_{11} & c_9c_{12} \\ c_{10}c_1 & c_{10}c_2 & c_{10}c_3 & c_{10}c_4 & c_{10}c_5 & c_{10}c_6 & c_{10}c_7 & c_{10}c_8 & c_{10}c_9 & c_{10}^2 & c_{10}c_{11} & c_{10}c_{12} \\ c_{11}c_1 & c_{11}c_2 & c_{11}c_3 & c_{11}c_4 & c_{11}c_5 & c_{11}c_6 & c_{11}c_7 & c_{11}c_8 & c_{11}c_9 & c_{11}c_{10} & c_{11}^2 & c_{11}c_{12} \\ c_{12}c_1 & c_{12}c_2 & c_{12}c_3 & c_{12}c_4 & c_{12}c_5 & c_{12}c_6 & c_{12}c_7 & c_{12}c_8 & c_{12}c_9 & c_{12}c_{10} & c_{12}c_{11} & c_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, a operação do traço parcial sobre o subsistema (1) resultará em um operador densidade reduzido ρ_2 , cujos elementos de matriz serão, neste caso, somatórios

com três elementos, conforme a Equação (2) do capítulo 2. Assim, o operador reduzido é, na verdade, uma soma de três matrizes quadradas de ordem 4 (a dimensão do subsistema (2)) que aparecem ordenadas dentro do próprio operador densidade global, se a ordenação da base for mantida a mesma desde o início. Essa operação fica mais simples observando-a diretamente na matriz do operador densidade global:

$$\rho_{global_{NS}} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & c_1c_4 & c_1c_5 & c_1c_6 & c_1c_7 & c_1c_8 & c_1c_9 & c_1c_{10} & c_1c_{11} & c_1c_{12} \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 & c_2c_4 & c_2c_5 & c_2c_6 & c_2c_7 & c_2c_8 & c_2c_9 & c_2c_{10} & c_2c_{11} & c_2c_{12} \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 & c_3c_4 & c_3c_5 & c_3c_6 & c_3c_7 & c_3c_8 & c_3c_9 & c_3c_{10} & c_3c_{11} & c_3c_{12} \\ c_4c_1 & c_4c_2 & c_4c_3 & c_4^2 & c_4c_5 & c_4c_6 & c_4c_7 & c_4c_8 & c_4c_9 & c_4c_{10} & c_4c_{11} & c_4c_{12} \\ c_5c_1 & c_5c_2 & c_5c_3 & c_5c_4 & c_5^2 & c_5c_6 & c_5c_7 & c_5c_8 & c_5c_9 & c_5c_{10} & c_5c_{11} & c_5c_{12} \\ c_6c_1 & c_6c_2 & c_6c_3 & c_6c_4 & c_6c_5 & c_6^2 & c_6c_7 & c_6c_8 & c_6c_9 & c_6c_{10} & c_6c_{11} & c_6c_{12} \\ c_7c_1 & c_7c_2 & c_7c_3 & c_7c_4 & c_7c_5 & c_7c_6 & c_7^2 & c_7c_8 & c_7c_9 & c_7c_{10} & c_7c_{11} & c_7c_{12} \\ c_8c_1 & c_8c_2 & c_8c_3 & c_8c_4 & c_8c_5 & c_8c_6 & c_8c_7 & c_8^2 & c_8c_9 & c_8c_{10} & c_8c_{11} & c_8c_{12} \\ c_9c_1 & c_9c_2 & c_9c_3 & c_9c_4 & c_9c_5 & c_9c_6 & c_9c_7 & c_9c_8 & c_9^2 & c_9c_{10} & c_9c_{11} & c_9c_{12} \\ c_{10}c_1 & c_{10}c_2 & c_{10}c_3 & c_{10}c_4 & c_{10}c_5 & c_{10}c_6 & c_{10}c_7 & c_{10}c_8 & c_{10}c_9 & c_{10}^2 & c_{10}c_{11} & c_{10}c_{12} \\ c_{11}c_1 & c_{11}c_2 & c_{11}c_3 & c_{11}c_4 & c_{11}c_5 & c_{11}c_6 & c_{11}c_7 & c_{11}c_8 & c_{11}c_9 & c_{11}c_{10} & c_{11}^2 & c_{11}c_{12} \\ c_{12}c_1 & c_{12}c_2 & c_{12}c_3 & c_{12}c_4 & c_{12}c_5 & c_{12}c_6 & c_{12}c_7 & c_{12}c_8 & c_{12}c_9 & c_{12}c_{10} & c_{12}c_{11} & c_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, o operador densidade reduzido ρ_2 é construído da seguinte forma:

$$\rho_{NS}(2) = \begin{bmatrix} c_1^2 + c_5^2 + c_9^2 & c_1c_2 + c_5c_6 + c_9c_{10} & c_1c_3 + c_5c_7 + c_9c_{11} & c_1c_4 + c_5c_8 + c_9c_{12} \\ c_2c_1 + c_6c_5 + c_{10}c_9 & c_2^2 + c_6^2 + c_{10}^2 & c_2c_3 + c_6c_7 + c_{10}c_{11} & c_2c_4 + c_6c_8 + c_{10}c_{12} \\ c_3c_1 + c_7c_5 + c_{11}c_9 & c_3c_2 + c_7c_6 + c_{11}c_{10} & c_3^2 + c_7^2 + c_{11}^2 & c_3c_4 + c_7c_8 + c_{11}c_{12} \\ c_4c_1 + c_8c_5 + c_{12}c_9 & c_4c_2 + c_8c_6 + c_{12}c_{10} & c_4c_3 + c_8c_7 + c_{12}c_{11} & c_4^2 + c_8^2 + c_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

A partir de então, diagonaliza-se o operador densidade reduzido e calcula-se a entropia de von Neumann como medida do emaranhamento entre as duas partes do sistema global.

São apresentados os resultados para um estado do tipo produto $|\psi_{Prod.}\rangle$ (não emaranhado) e um estado maximamente emaranhado $|\psi_{Max}\rangle$. Estes estados são definidos, a partir da base (7), como

$$|\psi_{Prod.}\rangle = |-1 - 3/2\rangle; \quad |\psi_{Max}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|-1 \ 3/2\rangle + |0 \ 1/2\rangle + |1 \ -1/2\rangle),$$

cujas matrizes de $\rho_{2_{NS}}$ diagonalizadas ficam, respectivamente,

$$\rho_{2_{NS}diag_{Prod.}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{2_{NS}diag_{Max.}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

No caso do estado do tipo produto, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor igual a 1 e um autovalor triplamente degenerado igual a zero, de modo que a entropia calculada foi nula. No caso do estado maximamente emaranhado, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor igual a zero e um autovalor triplamente degenerado igual a $1/3$, de modo que a entropia calculada foi máxima, isto é, $\log(3)$. Neste caso, o autovalor nulo não implica em perda para o emaranhamento máximo, devido à diferença na dimensão dos subsistemas. De acordo com a decomposição de Schmidt, a entropia máxima é dada conforme a menor entre as dimensões dos subsistemas. Ambos os resultados são condizentes com os previstos para cada situação.

Nesse último exemplo, não é possível gerar o estado de Bell mais trivial do tipo $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} |k, k\rangle$, devido à própria estrutura dimensional do problema. O estado maximamente emaranhado foi gerado, então, por meio do método proposto no capítulo anterior que, além de realmente fornecer estados não separáveis em forma de produto vetorial, ainda são, conforme resultado, de fato estados cujos estados reduzidos possuem entropia máxima. Para o mesmo exemplo, os demais estados maximamente emaranhados são gerados conforme Exemplo 2, da seção 3.2, formando uma base maximamente emaranhada para o sistema em questão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \{ & | -1 \quad 1/2 \rangle + | 0 \quad -1/2 \rangle + | 1 \quad -3/2 \rangle, \quad | -1 \quad 1/2 \rangle - | 0 \quad -1/2 \rangle + | 1 \quad -3/2 \rangle, \\ & | -1 \quad 1/2 \rangle + | 0 \quad -1/2 \rangle - | 1 \quad -3/2 \rangle, \quad | -1 \quad 3/2 \rangle + | 0 \quad 1/2 \rangle + | 1 \quad -1/2 \rangle, \\ & | -1 \quad 3/2 \rangle - | 0 \quad 1/2 \rangle + | 1 \quad -1/2 \rangle, \quad | -1 \quad 3/2 \rangle + | 0 \quad 1/2 \rangle - | 1 \quad -1/2 \rangle, \\ & | -1 \quad -3/2 \rangle + | 0 \quad 3/2 \rangle + | 1 \quad 1/2 \rangle, \quad | -1 \quad -3/2 \rangle - | 0 \quad 3/2 \rangle + | 1 \quad 1/2 \rangle, \\ & | -1 \quad -3/2 \rangle + | 0 \quad 3/2 \rangle - | 1 \quad 1/2 \rangle, \quad | -1 \quad -1/2 \rangle + | 0 \quad -3/2 \rangle + | 1 \quad 3/2 \rangle, \\ & | -1 \quad -1/2 \rangle - | 0 \quad -3/2 \rangle + | 1 \quad 3/2 \rangle, \quad | -1 \quad -1/2 \rangle + | 0 \quad -3/2 \rangle - | 1 \quad 3/2 \rangle \}. \end{aligned}$$

4.2 Dessimetrização em sistemas idênticos

Para o caso de sistemas idênticos, os valores de S_1 e S_2 são sempre iguais. A seguir, o método da *dessimetrização* é aplicado primeiramente para um sistema bosônico e, em seguida, para um sistema fermiônico. Assim, para a aplicação bosônica, toma-se o caso de dois bósons idênticos de 3 níveis, isto é, $S_1 = S_2 = 1$.

A base de estados simétricos (S) é ordenada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \{ & | -1 \quad -1 \rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (| -1 \quad 0 \rangle + | 0 \quad -1 \rangle), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (| -1 \quad 1 \rangle + | 1 \quad -1 \rangle), \\ & | 0 \quad 0 \rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0 \quad 1 \rangle + | 1 \quad 0 \rangle), \quad | 1 \quad 1 \rangle \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Tomando-se um estado $|\psi\rangle$ qualquer, normalizado, escrito como combinação linear dos vetores dessa base, antes de construir-se o operador densidade global, reescreve-se

este estado como combinação linear dos vetores da base de estados *dessimetrizada* correspondente, isto é, se

$$|\psi\rangle = c_1 |-1 - 1\rangle + c_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|-1 \ 0\rangle + |0 - 1\rangle) \right] + \\ + c_3 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|-1 \ 1\rangle + |1 - 1\rangle) \right] + c_4 |0 \ 0\rangle + \\ + c_5 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|0 \ 1\rangle + |1 \ 0\rangle) \right] + c_6 |1 \ 1\rangle ,$$

reescreve-se este estado como sendo:

$$|\bar{\psi}\rangle = c_1 |-1 - 1\rangle + c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} |-1 \ 0\rangle + c_3 \frac{1}{\sqrt{2}} |-1 \ 1\rangle + \\ + c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} |0 - 1\rangle + c_4 |0 \ 0\rangle + c_5 \frac{1}{\sqrt{2}} |0 \ 1\rangle + \\ + c_3 \frac{1}{\sqrt{2}} |1 - 1\rangle + c_5 \frac{1}{\sqrt{2}} |1 \ 0\rangle + c_6 |1 \ 1\rangle .$$

A matriz do operador densidade global toma a seguinte forma:

$$\rho_{global_S} = \begin{bmatrix} c_1^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 c_2 & c_1 c_4 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 c_5 & c_1 c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 c_1 & \frac{1}{2} c_2^2 & \frac{1}{2} c_2 c_3 & \frac{1}{2} c_2^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 c_4 & \frac{1}{2} c_2 c_5 & \frac{1}{2} c_2 c_3 & \frac{1}{2} c_2 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 c_1 & \frac{1}{2} c_3 c_2 & \frac{1}{2} c_3^2 & \frac{1}{2} c_3 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 c_4 & \frac{1}{2} c_3 c_5 & \frac{1}{2} c_3^2 & \frac{1}{2} c_3 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 c_1 & \frac{1}{2} c_2^2 & \frac{1}{2} c_2 c_3 & \frac{1}{2} c_2^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 c_4 & \frac{1}{2} c_2 c_5 & \frac{1}{2} c_2 c_3 & \frac{1}{2} c_2 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 c_6 \\ c_4 c_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 c_2 & c_4^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_4 c_5 & c_4 c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_5 c_1 & \frac{1}{2} c_5 c_2 & \frac{1}{2} c_5 c_3 & \frac{1}{2} c_5 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_5 c_4 & \frac{1}{2} c_5^2 & \frac{1}{2} c_5 c_3 & \frac{1}{2} c_5^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_5 c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 c_1 & \frac{1}{2} c_3 c_2 & \frac{1}{2} c_3^2 & \frac{1}{2} c_3 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 c_4 & \frac{1}{2} c_3 c_5 & \frac{1}{2} c_3^2 & \frac{1}{2} c_3 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_5 c_1 & \frac{1}{2} c_5 c_2 & \frac{1}{2} c_5 c_3 & \frac{1}{2} c_5 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_5 c_4 & \frac{1}{2} c_5^2 & \frac{1}{2} c_5 c_3 & \frac{1}{2} c_5^2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_5 c_6 \\ c_6 c_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_6 c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_6 c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_6 c_2 & c_6 c_4 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_6 c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_6 c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} c_6 c_5 & c_6^2 \end{bmatrix}.$$

A operação do traço parcial sobre o subsistema (1) resultará em um operador densidade reduzido ρ_2 , cujos elementos de matriz serão, neste caso, somatórios com três elementos, conforme a Equação (2) do capítulo 2. Assim, o operador reduzido é, na verdade, uma soma de três matrizes quadradas de ordem 3 (a dimensão do subsistema (2)) que aparecem ordenadas dentro do próprio operador densidade global, se a ordenação da base for mantida

a mesma desde o início. Essa operação fica mais simples observando-a diretamente na matriz do operador densidade global:

$$\rho_{global_S} = \begin{bmatrix} c_1^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_2 & c_1c_4 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_5 & c_1c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_1 & \frac{1}{2}c_2^2 & \frac{1}{2}c_2c_3 & \frac{1}{2}c_2^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_4 & \frac{1}{2}c_2c_5 & \frac{1}{2}c_2c_3 & \frac{1}{2}c_2c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_1 & \frac{1}{2}c_3c_2 & \frac{1}{2}c_3^2 & \frac{1}{2}c_3c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_4 & \frac{1}{2}c_3c_5 & \frac{1}{2}c_3^2 & \frac{1}{2}c_3c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_1 & \frac{1}{2}c_2^2 & \frac{1}{2}c_2c_3 & \frac{1}{2}c_2^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_4 & \frac{1}{2}c_2c_5 & \frac{1}{2}c_2c_3 & \frac{1}{2}c_2c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_6 \\ c_4c_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_2 & c_4^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_5 & c_4c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_1 & \frac{1}{2}c_5c_2 & \frac{1}{2}c_5c_3 & \frac{1}{2}c_5c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_4 & \frac{1}{2}c_5^2 & \frac{1}{2}c_5c_3 & \frac{1}{2}c_5^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_1 & \frac{1}{2}c_3c_2 & \frac{1}{2}c_3^2 & \frac{1}{2}c_3c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_4 & \frac{1}{2}c_3c_5 & \frac{1}{2}c_3^2 & \frac{1}{2}c_3c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_1 & \frac{1}{2}c_5c_2 & \frac{1}{2}c_5c_3 & \frac{1}{2}c_5c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_4 & \frac{1}{2}c_5^2 & \frac{1}{2}c_5c_3 & \frac{1}{2}c_5^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_6 \\ c_6c_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_2 & c_6c_4 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_5 & c_6^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, o operador densidade reduzido ρ_2 é construído da seguinte forma:

$$\rho_S(2) = \begin{bmatrix} c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_4 + \frac{1}{2}c_3c_5 & \frac{1}{\sqrt{2}}c_1c_3 + \frac{1}{2}c_2c_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_2c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_2 + \frac{1}{2}c_5c_3 & \frac{1}{2}c_2^2 + c_4^2 + \frac{1}{2}c_5^2 & \frac{1}{2}c_2c_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_4c_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_6 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c_3c_1 + \frac{1}{2}c_5c_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_3 & \frac{1}{2}c_3c_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_5c_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_6c_5 & \frac{1}{2}c_3^2 + \frac{1}{2}c_5^2 + c_6^2 \end{bmatrix}.$$

A partir de então, diagonaliza-se o operador densidade reduzido e calcula-se a entropia de von Neumann como medida do emaranhamento entre as duas partes do sistema global.

Para este caso bosônico, foram simulados um estado do tipo produto $|\psi_{Prod.}\rangle$ (não emaranhado) e um estado maximamente emaranhado $|\psi_{Max.}\rangle$. Estes estados são definidos, a partir da base (8), como

$$|\psi_{Prod.}\rangle = |-1 - 1\rangle, \quad |\psi_{Max.}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|-1 - 1\rangle + |0 \ 0\rangle + |1 \ 1\rangle),$$

cujas matrizes de ρ_{2NS} diagonalizadas ficam, respectivamente,

$$\rho_{2NS_{diagProd.}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{2NS_{diagMax.}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

No caso do estado do tipo produto, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor igual a 1 e um autovalor duplamente degenerado igual a zero, de modo que a entropia calculada foi nula. No caso do estado maximamente emaranhado, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor triplamente degenerado igual a 1/3, de modo que a entropia calculada foi máxima, isto é, $\log(3)$. Nota-se que, a princípio, os resultados condizem com o que se espera no caso tradicional de partículas distinguíveis, mas levando-se em conta a exigência da simetrização do estado global. Estes resultados apontam para a eficácia do método proposto para o caso bosônico.

Os demais estados maximamente emaranhados são gerados conforme o Exemplo 1b, da seção 3.2, formando uma base de estados maximamente emaranhados para o sistema em questão:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \{ [| -1 \ -1 \rangle \pm (| 0 \ 1 \rangle + | 1 \ 0 \rangle)], \\ & [| 0 \ 0 \rangle \pm (| -1 \ 1 \rangle + | 1 \ -1 \rangle)], \\ & [| 1 \ 1 \rangle \pm (| -1 \ 0 \rangle + | 0 \ -1 \rangle)] \}. \end{aligned}$$

Agora, na situação fermiônica, aparecem algumas sutilezas que devem ser observadas cuidadosamente. Tome-se, por exemplo, um sistema fermiônico idêntico de 4 níveis, *i. e.*, $S_1 = S_2 = 3/2$. A base de estados antissimétricos (AS) é ordenada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (| -3/2 \ -1/2 \rangle - | -1/2 \ -3/2 \rangle), (| -3/2 \ 1/2 \rangle - | 1/2 \ -3/2 \rangle), \\ & (| -3/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ -3/2 \rangle), (| -1/2 \ 1/2 \rangle - | 1/2 \ -1/2 \rangle), \\ & (| -1/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ -1/2 \rangle), (| 1/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ 1/2 \rangle) \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Tomando-se um estado $|\psi\rangle$ qualquer, normalizado, escrito como combinação linear dos vetores dessa base, antes de construir-se o operador densidade global, reescreve-se este estado como combinação linear dos vetores da base de estados *dessimetrizada* correspondente, isto é, se

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & \frac{c_1}{\sqrt{2}} (| -3/2 \ -1/2 \rangle - | -1/2 \ -3/2 \rangle) + \frac{c_2}{\sqrt{2}} (| -3/2 \ 1/2 \rangle - | 1/2 \ -3/2 \rangle) + \\ & \frac{c_3}{\sqrt{2}} (| -3/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ -3/2 \rangle) + \frac{c_4}{\sqrt{2}} (| -1/2 \ 1/2 \rangle - | 1/2 \ -1/2 \rangle) + \\ & \frac{c_5}{\sqrt{2}} (| -1/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ -1/2 \rangle) + \frac{c_6}{\sqrt{2}} (| 1/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ 1/2 \rangle), \end{aligned}$$

reescreve-se este estado como sendo

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}\rangle = & 0|-3/2 \ -3/2\rangle + \frac{c_1}{\sqrt{2}}|-3/2 \ -1/2\rangle + \frac{c_2}{\sqrt{2}}|-3/2 \ 1/2\rangle + \frac{c_3}{\sqrt{2}}|-3/2 \ 3/2\rangle \\ & - \frac{c_1}{\sqrt{2}}|-1/2 \ -3/2\rangle + 0|-1/2 \ -1/2\rangle + \frac{c_4}{\sqrt{2}}|-1/2 \ 1/2\rangle + \frac{c_5}{\sqrt{2}}|-1/2 \ 3/2\rangle \\ & - \frac{c_2}{\sqrt{2}}|1/2 \ -3/2\rangle - \frac{c_4}{\sqrt{2}}|1/2 \ -1/2\rangle + 0|1/2 \ 1/2\rangle + \frac{c_6}{\sqrt{2}}|1/2 \ 3/2\rangle \\ & - \frac{c_3}{\sqrt{2}}|3/2 \ -3/2\rangle - \frac{c_5}{\sqrt{2}}|3/2 \ -1/2\rangle - \frac{c_6}{\sqrt{2}}|3/2 \ 1/2\rangle + 0|3/2 \ 3/2\rangle. \end{aligned}$$

A matriz do operador densidade global toma a seguinte forma:

$$\rho_{global_{AS}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 & -c_1^2 & 0 & c_1 c_4 & c_1 c_5 & -c_1 c_2 & -c_1 c_4 & 0 & c_1 c_6 & -c_1 c_3 & -c_1 c_5 & -c_1 c_6 & 0 \\ 0 & c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 & -c_2 c_1 & 0 & c_2 c_4 & c_2 c_5 & -c_2^2 & -c_2 c_4 & 0 & c_2 c_6 & -c_2 c_3 & -c_2 c_5 & -c_2 c_6 & 0 \\ 0 & c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 & -c_3 c_1 & 0 & c_3 c_4 & c_3 c_5 & -c_3 c_2 & -c_3 c_4 & 0 & c_3 c_6 & -c_3^2 & -c_3 c_5 & -c_3 c_6 & 0 \\ 0 & -c_1 c_1 & -c_1 c_2 & -c_1 c_3 & c_1^2 & 0 & -c_1 c_4 & -c_1 c_5 & c_1 c_2 & c_1 c_4 & 0 & -c_1 c_6 & c_1 c_3 & c_1 c_5 & c_1 c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 c_1 & c_4 c_2 & c_4 c_3 & -c_4 c_1 & 0 & c_4^2 & c_4 c_5 & -c_4 c_2 & c_4^2 & 0 & c_4 c_6 & -c_4 c_3 & -c_4 c_5 & -c_4 c_6 & 0 \\ 0 & c_5 c_1 & c_5 c_2 & c_5 c_3 & -c_5 c_1 & 0 & c_5 c_4 & c_5^2 & -c_5 c_2 & -c_5 c_4 & 0 & c_5 c_6 & -c_5 c_3 & -c_5^2 & -c_5 c_6 & 0 \\ 0 & -c_2 c_1 & -c_2^2 & -c_2 c_3 & c_2 c_1 & 0 & -c_2 c_4 & -c_2 c_5 & c_2^2 & c_2 c_4 & 0 & -c_2 c_6 & c_2 c_3 & c_2 c_5 & c_2 c_6 & 0 \\ 0 & -c_4 c_1 & -c_4 c_2 & -c_4 c_3 & c_4 c_1 & 0 & -c_4^2 & -c_4 c_5 & c_4 c_2 & c_4^2 & 0 & -c_4 c_6 & c_4 c_3 & c_4 c_5 & c_4 c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 c_1 & c_6 c_2 & c_6 c_3 & -c_6 c_1 & 0 & c_6 c_4 & c_6 c_5 & -c_6 c_2 & -c_6 c_4 & 0 & c_6^2 & -c_6 c_3 & -c_6 c_5 & -c_6^2 & 0 \\ 0 & -c_3 c_1 & -c_3 c_2 & -c_3^2 & c_3 c_1 & 0 & -c_3 c_4 & -c_3 c_5 & c_3 c_2 & c_3 c_4 & 0 & -c_3 c_6 & c_3^2 & c_3 c_5 & c_3 c_6 & 0 \\ 0 & -c_5 c_1 & -c_5 c_2 & -c_5 c_3 & c_5 c_1 & 0 & -c_5 c_4 & -c_5^2 & c_5 c_2 & c_5 c_4 & 0 & -c_5 c_6 & c_5 c_3 & c_5^2 & c_5 c_6 & 0 \\ 0 & -c_6 c_1 & -c_6 c_2 & -c_6 c_3 & c_6 c_1 & 0 & -c_6 c_4 & -c_6 c_5 & c_6 c_2 & c_6 c_4 & 0 & -c_6^2 & c_6 c_3 & c_6 c_5 & c_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A operação do traço parcial sobre o subsistema (1) resultará em um operador densidade reduzido ρ_2 , cujos elementos de matriz serão, neste caso, somatórios com quatro elementos, conforme a Equação 2. Assim, o operador reduzido é, na verdade, uma soma de quatro matrizes quadradas de ordem 4 (a dimensão do subsistema (2)) que aparecem ordenadas dentro do próprio operador densidade global, se a ordenação da base for mantida a mesma desde o início. Essa operação fica mais simples observando-a diretamente na matriz do operador densidade global:

$$\rho_{global_{AS}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 & -c_1^2 & 0 & c_1 c_4 & c_1 c_5 & -c_1 c_2 & -c_1 c_4 & 0 & c_1 c_6 & -c_1 c_3 & -c_1 c_5 & -c_1 c_6 & 0 \\ 0 & c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 & -c_2 c_1 & 0 & c_2 c_4 & c_2 c_5 & -c_2^2 & -c_2 c_4 & 0 & c_2 c_6 & -c_2 c_3 & -c_2 c_5 & -c_2 c_6 & 0 \\ 0 & c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 & -c_3 c_1 & 0 & c_3 c_4 & c_3 c_5 & -c_3 c_2 & -c_3 c_4 & 0 & c_3 c_6 & -c_3^2 & -c_3 c_5 & -c_3 c_6 & 0 \\ 0 & -c_1 c_1 & -c_1 c_2 & -c_1 c_3 & c_1^2 & 0 & -c_1 c_4 & -c_1 c_5 & c_1 c_2 & c_1 c_4 & 0 & -c_1 c_6 & c_1 c_3 & c_1 c_5 & c_1 c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 c_1 & c_4 c_2 & c_4 c_3 & -c_4 c_1 & 0 & c_4^2 & c_4 c_5 & -c_4 c_2 & c_4^2 & 0 & c_4 c_6 & -c_4 c_3 & -c_4 c_5 & -c_4 c_6 & 0 \\ 0 & c_5 c_1 & c_5 c_2 & c_5 c_3 & -c_5 c_1 & 0 & c_5 c_4 & c_5^2 & -c_5 c_2 & -c_5 c_4 & 0 & c_5 c_6 & -c_5 c_3 & -c_5^2 & -c_5 c_6 & 0 \\ 0 & -c_2 c_1 & -c_2^2 & -c_2 c_3 & c_2 c_1 & 0 & -c_2 c_4 & -c_2 c_5 & c_2^2 & c_2 c_4 & 0 & -c_2 c_6 & c_2 c_3 & c_2 c_5 & c_2 c_6 & 0 \\ 0 & -c_4 c_1 & -c_4 c_2 & -c_4 c_3 & c_4 c_1 & 0 & -c_4^2 & -c_4 c_5 & c_4 c_2 & c_4^2 & 0 & -c_4 c_6 & c_4 c_3 & c_4 c_5 & c_4 c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 c_1 & c_6 c_2 & c_6 c_3 & -c_6 c_1 & 0 & c_6 c_4 & c_6 c_5 & -c_6 c_2 & -c_6 c_4 & 0 & c_6^2 & -c_6 c_3 & -c_6 c_5 & -c_6^2 & 0 \\ 0 & -c_3 c_1 & -c_3 c_2 & -c_3^2 & c_3 c_1 & 0 & -c_3 c_4 & -c_3 c_5 & c_3 c_2 & c_3 c_4 & 0 & -c_3 c_6 & c_3^2 & c_3 c_5 & c_3 c_6 & 0 \\ 0 & -c_5 c_1 & -c_5 c_2 & -c_5 c_3 & c_5 c_1 & 0 & -c_5 c_4 & -c_5^2 & c_5 c_2 & c_5 c_4 & 0 & -c_5 c_6 & c_5 c_3 & c_5^2 & c_5 c_6 & 0 \\ 0 & -c_6 c_1 & -c_6 c_2 & -c_6 c_3 & c_6 c_1 & 0 & -c_6 c_4 & -c_6 c_5 & c_6 c_2 & c_6 c_4 & 0 & -c_6^2 & c_6 c_3 & c_6 c_5 & c_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o operador densidade reduzido ρ_2 é construído da seguinte forma:

$$\rho_{AS}(2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & c_2c_4 + c_3c_5 & -c_1c_4 + c_3c_6 & -c_1c_5 - c_2c_6 \\ c_4c_2 + c_5c_3 & c_1^2 + c_4^2 + c_5^2 & c_1c_2 + c_5c_6 & c_1c_3 - c_4c_6 \\ -c_4c_1 + c_6c_3 & c_2c_1 + c_6c_5 & c_2^2 + c_4^2 + c_6^2 & c_2c_3 + c_4c_5 \\ -c_5c_1 - c_6c_2 & c_3c_1 - c_6c_4 & c_3c_2 + c_5c_4 & c_3^2 + c_5^2 + c_6^2 \end{bmatrix}.$$

A partir de então diagonaliza-se o operador densidade reduzido e calcula-se a entropia de von Neumann como medida do emaranhamento entre as duas partes do sistema global.

Para este caso fermiônico, foram simulados um estado minimamente emaranhado $|\psi_{Min.}\rangle$ e um estado maximamente emaranhado $|\psi_{Max.}\rangle$. Estes estados são definidos, a partir da base (9), como

$$|\psi_{Min.}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-3/2 \ -1/2\rangle - |-1/2 \ -3/2\rangle),$$

$$|\psi_{Max.}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} (|-3/2 \ 3/2\rangle - |3/2 \ -3/2\rangle + |-1/2 \ 1/2\rangle - |1/2 \ -1/2\rangle),$$

cujas matrizes de ρ_{2NS} diagonalizadas ficam, respectivamente,

$$\rho_{2NSdiagMin.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{2NSdiagMax.} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

No caso fermiônico, considerando que ambas as partes do sistema global encontram-se no mesmo sítio, portanto com parte espacial simétrica, não é possível acessar estados com parte spinorial do tipo $|i, i\rangle$, devido ao princípio da exclusão de Pauli. Assim, todos os estados possíveis possuem parte spinorial do tipo $\frac{1}{\sqrt{2}} (|i, j\rangle - |j, i\rangle)$ ou combinações lineares destes. Desta forma, não é possível obter-se estados globais do tipo produto para sistemas fermiônicos no mesmo sítio. Por outro lado, ao tomar-se apenas um estado da base em sua forma antissimétrica, obtém-se estados de entropia mínima, mas positiva, decorrente apenas da identidade das partículas.

No caso do estado minimamente emaranhado, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor duplamente degenerado igual a 0 e um autovalor duplamente degenerado

igual a $1/2$, de modo que a entropia calculada foi $\log(2)$. No caso do estado maximamente emaranhado, o operador densidade reduzido mostrou um autovalor quadruplamente degenerado igual a $1/4$, de modo que a entropia calculada foi máxima, isto é, $\log(4)$. Nota-se que, embora o caso fermiônico apresente algumas sutilezas que serão discutidas posteriormente, é possível entender que os resultados condizem com o que se espera no caso tradicional de partículas distinguíveis, mas levando-se em conta a exigência da simetrização do estado global. Estes resultados também apontam para a eficácia do método proposto para o caso fermiônico.

Os demais estados maximamente emaranhados são gerados conforme o Exemplo 1c, da seção 3.2, formando uma base de estados maximamente emaranhados para o sistema em questão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4}} \{ & [(| -3/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ -3/2 \rangle) \pm (| -1/2 \ 1/2 \rangle - | 1/2 \ -1/2 \rangle)], \\ & [(| -1/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ -1/2 \rangle) \pm (| -3/2 \ 1/2 \rangle - | 1/2 \ -3/2 \rangle)], \\ & [(| -3/2 \ -1/2 \rangle - | -1/2 \ -3/2 \rangle) \pm (| 1/2 \ 3/2 \rangle - | 3/2 \ 1/2 \rangle)] \}. \end{aligned}$$

4.3 Discussão dos resultados

É importante destacar a sutileza envolvida no trabalho com sistemas fermiônicos, conforme discutido pela comunidade acadêmica (LOFRANCO; COMPAGNO, 2016; GHIRARDI; MARINATTO, 2005; SCIARA; LOFRANCO; COMPAGNO, 2017), a saber, o fato de que, em princípio, sistemas fermiônicos estariam sempre emaranhados. Ora, é preciso atentar-se ao fato de que, desde o início, este trabalho adotou a premissa de que ambas as partes encontram-se no mesmo sítio, ou em outras palavras, a sobreposição espacial das funções de onda de cada parte é completa. Neste caso, a parte espacial do problema é simétrica. Combinando-a com a uma parte spinorial antissimétrica, de fato, resulta em estado global antissimétrico emaranhado.

Por outro lado, no caso de as partes serem preparadas desde o início sem sobreposição espacial, é natural considerar que o estado minimamente emaranhado é, na verdade, um estado não emaranhado, embora não possa ser separado na forma de produto levando-se em conta apenas a representação spinorial, conforme indicado por Ghirardi e Marinatto (2005).

Para o caso bosônico, que admite partículas no mesmo estado, a parte espacial simétrica (sobreposição espacial total das funções de onda) combinada à parte spinorial simétrica dos estados gerados por combinações lineares dos estados da base do tipo $|k, k\rangle$ resultam em estados globais não emaranhados.

Recentemente, Sciara, LoFranco e Compagno (2017) propuseram um método para medir-

se o emaranhamento em sistemas compostos por partes idênticas e, em uma de suas aplicações, chegaram à decomposição de Schmidt para um estado $|\Psi_\phi\rangle$ de dois *qutrits* bosônicos idênticos no mesmo sítio dado por

$$|\Psi_\phi\rangle = \cos \phi \widetilde{|e_1, e_2\rangle} + \sin \phi \widetilde{|e_1, e_3\rangle},$$

em que $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ é a base para cada *qutrit* e a parte espacial foi omitida para simplificação. Eles obtiveram a seguinte matriz para o operador densidade reduzido:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ 0 & \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix},$$

com um autovalor igual a zero e um autovalor duplamente degenerado igual a 1/2. Utilizando a definição e a notação adotadas aqui, $|\Psi_\phi\rangle$ pode ser reescrito como $|\psi\rangle = \cos \phi |-1\ 0\rangle + \sin \phi |-1\ 1\rangle$, que seria reescrito em uma base *dessimetrizada* como

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}\rangle = & 0 |-1\ -1\rangle + \cos \phi \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\ 0\rangle + \sin \phi \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\ 1\rangle + \cos \phi \frac{1}{\sqrt{2}} |0\ -1\rangle + \\ & 0 |0\ 0\rangle + 0 \frac{1}{\sqrt{2}} |0\ 1\rangle + \sin \phi \frac{1}{\sqrt{2}} |1\ -1\rangle + 0 \frac{1}{\sqrt{2}} |1\ 0\rangle + 0 |1\ 1\rangle, \end{aligned}$$

cujas matriz densidade reduzida é

$$\rho_S(2) = \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi + \frac{1}{2} \sin^2 \phi & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & \frac{1}{2} \cos^2 \phi + 0 + 0 & \frac{1}{2} \cos \phi \sin \phi + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & \frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi + 0 + 0 & \frac{1}{2} \sin^2 \phi + 0 + 0 \end{pmatrix};$$

a mesma encontrada pelos autores. Da mesma forma, a diagonalização do operador densidade reduzido resulta em um autovalor nulo e um autovalor duplamente degenerado igual a 1/2, correspondente a um estado emaranhado. Assim, o método aqui proposto mostra concordância com outras propostas, com a vantagem de ser aplicável a qualquer dimensão finita e para qualquer caso de identidade ou não das partes.

Outra vantagem desse método é que, assim como no caso de sistemas distinguíveis, o estado global do sistema de partes idênticas mostra-se emaranhado ou não, independentemente da base utilizada para gerar-se o espaço de Hilbert. Este não é o caso dos trabalhos de Balachandran et al. (2013) e Benatti, Floreanini e Titimbo (2014), em que o emaranhamento pode ou não manifestar-se, a depender da configuração do espaço de Hilbert escolhida para restringir os estados às subálgebras.

Um ponto interessante do trabalho de LoFranco e Compagno (2016) é a possibilidade de trabalhar-se com sobreposição espacial parcial ou nula, em que a localidade torna-se importante para a realização de medições em cada subsistema. Embora o método

da *dessimetrização* aqui proposto tenha sido aplicado apenas ao caso de sobreposição espacial total (toma-se como premissa que os subsistemas encontram-se sempre no mesmo sítio), espera-se que seja também possível simular casos de sobreposição parcial (ou nula), sendo necessária apenas uma representação dos estados globais que inclua o parâmetro espacial. Essa expansão é uma das recomendações para trabalhos futuros, além de outras possibilidades a serem apresentadas no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Conclusão

O principal resultado deste trabalho talvez tenha sido a revelação de um método não apenas eficaz, mas também matematicamente simples, de fácil implementação computacional, para o cálculo do emaranhamento em sistemas bipartidos constituídos por partes idênticas de dimensão finita.

A própria maneira como a base é ordenada acaba levando a uma estrutura matricial diagonal por blocos para o operador densidade global que, quando somados, resultam no operador densidade reduzido utilizado para o cálculo do emaranhamento. Essa estrutura mantém-se, mesmo para o caso de partículas distinguíveis e de subsistemas de dimensões diferentes entre si. Também nestes casos, a disposição dos blocos diagonais se manifesta, tornando o procedimento do traço parcial simples e rápido, e permitindo a simulação de dimensões da ordem de algumas dezenas em apenas alguns segundos.

Da mesma forma, a proposta para a geração de estados maximamente emaranhados resultou em um método matricial simples e de ampla aplicabilidade no que diz respeito às dimensões e à natureza das partes do sistema.

Os métodos foram confrontados com outras soluções encontradas na literatura e em publicações científicas recentes, tendo mostrado resultados coerentes e em acordo com aquelas soluções. Em especial, o método da *dessimetrização* da base do espaço de Hilbert global para a construção de operadores densidade reduzidos, mesmo no caso de partes idênticas, mostrou-se, de certa forma, intuitivo, não sendo necessário recorrer a abordagens mais complicadas como segunda quantização ou subálgebra de operadores, opções tomadas em trabalhos citados anteriormente.

A simplicidade dos métodos é seu ponto de maior interesse, uma vez que se utilizam apenas das ideias básicas da mecânica quântica, além de viabilizar aplicações diversificadas conforme o interesse de cada situação e de exigir menos recursos computacionais.

Ademais, este trabalho desvela perspectivas para pesquisas futuras, dado que muitos dos desafios na utilização do fenômeno do emaranhamento como ferramenta tecnológica ainda dependem da correta interpretação do significado físico dos estados emaranhados, bem como da sua produção experimental.

Uma recomendação importante para futuros trabalhos é a inclusão da parte espacial na descrição dos estados, conforme discutido no capítulo anterior, em vistas de se englobar casos em que a sobreposição espacial dos subsistemas é parcial ou nula. Nesses casos, a localidade passa a ter um papel importante nas medições realizadas sobre cada subsistema. Além disso, a ampliação do método para tratar estados globais não puros (misturas estatísticas) é desejável para simular sistemas mais elaborados.

Especificamente em relação às partículas idênticas, muitos apostam na capacidade real de se aproveitar o emaranhamento gerado simplesmente pela (anti)simetrização, embora ainda se encontrem trabalhos mais céticos a esse respeito, entendendo tal emaranhamento como tão somente um artifício matemático, sem implicações físicas. De uma forma ou de outra, pesquisas ousadas, inclusive experimentais, vêm sendo propostas a cada dia e trabalhos em linhas mais operacionais, como este aqui proposto, são importantes para fornecer bases conceituais e metodológicas para essas pesquisas.

Referências

- ALBER, G. et al. Generalized quantum XOR-gate for quantum teleportation and state purification in arbitrary dimensional Hilbert spaces. **arXiv preprint quant-ph/0008022**, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 10 e 11.
- ARTUSO, R. D.; BRYANT, G. W. Quantum dot–quantum dot interactions mediated by a metal nanoparticle: Towards a fully quantum model. **Physical Review B**, APS, v. 87, n. 12, p. 125423, 2013. Citado na página 2.
- ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities. **Physical Review Letters**, APS, v. 49, n. 2, p. 91, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.
- AUDRETSCH, J. **Entangled systems: new directions in quantum physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 17.
- BALACHANDRAN, A. et al. Entanglement and particle identity: a unifying approach. **Physical Review Letters**, APS, v. 110, n. 8, p. 080503, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 2, 13 e 33.
- BELL, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. **Physics**, APS, v. 1, n. 3, p. 195, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.
- BENATTI, F.; FLOREANINI, R.; MARZOLINO, U. Sub-shot-noise quantum metrology with entangled identical particles. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 325, n. 4, p. 924–935, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 13.
- BENATTI, F.; FLOREANINI, R.; MARZOLINO, U. Entanglement and squeezing with identical particles: ultracold atom quantum metrology. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, IOP Publishing, v. 44, n. 9, p. 091001, 2011. Citado na página 2.
- BENATTI, F.; FLOREANINI, R.; TITIMBO, K. Entanglement of identical particles. **Open Systems & Information Dynamics**, World Scientific, v. 21, n. 01, p. 1440003, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 2, 13 e 33.
- BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **Physical Review Letters**, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 10 e 11.
- BOLLINGER, J. J. et al. Optimal frequency measurements with maximally correlated states. **Physical Review A**, APS, v. 54, n. 6, p. R4649, 1996. Citado na página 2.
- BRITTON, J. W. et al. Engineered two-dimensional Ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 484, n. 7395, p. 489, 2012. Citado na página 2.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Mécanique Quantique I**. Paris: Hermann, 1973. v. 1. Citado na página 1.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Mécanique Quantique II**. Paris: Hermann, 1973. v. 2. Citado 6 vezes nas páginas 2, 6, 7, 8, 12 e 15.

CUNDEN, F. D. et al. Spatial separation and entanglement of identical particles. **International Journal of Quantum Information**, World Scientific, v. 12, n. 02, p. 1461001, 2014. Citado na página 3.

DIRAC, P. A. M. On the theory of quantum mechanics. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, The Royal Society London, v. 112, n. 762, p. 661–677, 1926. Citado na página 12.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

EKERT, A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. **Physical Review Letters**, APS, v. 67, n. 6, p. 661, 1991. Citado na página 2.

FURUSAWA, A. et al. Unconditional quantum teleportation. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 282, n. 5389, p. 706–709, 1998. Citado na página 2.

GHIRARDI, G.; MARINATTO, L. General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles. **Physical Review A**, APS, v. 70, n. 1, p. 012109, 2004. Citado na página 2.

GHIRARDI, G.; MARINATTO, L. Identical particles and entanglement. **Optics and Spectroscopy**, Springer, v. 99, n. 3, p. 386–390, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 32.

GHIRARDI, G.; MARINATTO, L.; WEBER, T. Entanglement and properties of composite quantum systems: a conceptual and mathematical analysis. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 108, n. 1-2, p. 49–122, 2002. Citado na página 2.

GRIFFITHS, D. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 12.

HEISENBERG, W. Multi body problem and resonance in quantum mechanics ii. **Z Phys**, v. 41, p. 239, 1927. Citado na página 12.

HORODECKI, P. et al. Direct detection of quantum entanglement. In: **The Physics Of Communication**. [S.l.]: World Scientific, 2003. p. 621–630. Citado na página 2.

HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 81, n. 2, p. 865, 2009. Citado na página 1.

KARIMIPOUR, V.; BAHRAMINASAB, A.; BAGHERINEZHAD, S. Quantum key distribution for d-level systems with generalized Bell states. **Physical Review A**, APS, v. 65, n. 5, p. 052331, 2002. Citado na página 3.

LANYON, B. P. et al. Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 5, n. 2, p. 134, 2009. Citado na página 3.

LANYON, B. P. et al. Experimental demonstration of a compiled version of Shor's algorithm with quantum entanglement. **Physical Review Letters**, APS, v. 99, n. 25, p. 250505, 2007. Citado na página 2.

- LEWIS, G. N. The principle of identity and the exclusion of quantum states. **Physical Review**, APS, v. 36, n. 7, p. 1144, 1930. Citado na página 12.
- LO, H.-K.; SPILLER, T.; POPESCU, S. **Introduction to quantum computation and information**. [S.l.]: World Scientific, 1998. Citado na página 1.
- LOFRANCO, R.; COMPAGNO, G. Quantum entanglement of identical particles by standard information-theoretic notions. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 6, p. 20603, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 2, 13, 14, 32 e 33.
- MESSIAH, A.; GREENBERG, O. Symmetrization postulate and its experimental foundation. **Physical Review**, APS, v. 136, n. 1B, p. B248, 1964. Citado na página 12.
- SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.], 1935. v. 31, n. 4, p. 555–563. Citado na página 1.
- SCIARA, S.; LOFRANCO, R.; COMPAGNO, G. Universality of Schmidt decomposition and particle identity. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 7, p. 44675, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 2, 14 e 32.
- SHANNON, C. A mathematical theory of communication. **Bell System Tech. J.**, v. 27, p. 379–423, 623–656, 1948. Citado na página 8.
- SHI, Y. Quantum entanglement of identical particles. **Physical Review A**, APS, v. 67, n. 2, p. 024301, 2003. Citado na página 2.
- SØRENSEN, A. et al. Many-particle entanglement with Bose–Einstein condensates. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 409, n. 6816, p. 63, 2001. Citado na página 2.
- SYCH, D.; LEUCHS, G. A complete basis of generalized Bell states. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 11, n. 1, p. 013006, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 10 e 11.
- WEIHS, G. et al. Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions. **Physical Review Letters**, APS, v. 81, n. 23, p. 5039, 1998. Citado na página 1.
- WIGNER, E. The Statistics of Composite Systems According to the New Quantum Mechanics/Statistik zusammengesetzter Systeme nach der neueren Quanten-Mechanik. In: **Part I: Physical Chemistry. Part II: Solid State Physics**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 63–68. Citado na página 12.
- YOU-BANG, Z. Controlled teleportation of high-dimension quantum-states with generalized Bell-state measurement. **Chinese Physics**, IOP Publishing, v. 16, n. 9, p. 2557, 2007. Citado na página 3.