

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



FLORENCE CRISTINA SILVA QUEIROGA

EXPLORANDO AS GEOMETRIAS DA BICICLETA
NAS AULAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DE UMA
PERSPECTIVA LÚDICA

BELO HORIZONTE
2025

FLORENCE CRISTINA SILVA QUEIROGA

EXPLORANDO AS GEOMETRIAS DA BICICLETA NAS AULAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA LÚDICA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador

Luiz Gustavo Perona Araújo

Banca Examinadora

Alexandre Alvarenga Rocha

Fernanda Aparecida Ferreira

Frederico Augusto Menezes Ribeiro

Luciano Coutinho dos Santos

BELO HORIZONTE
2025

Q3e Queiroga, Florence Cristina Silva.
Explorando as geometrias da bicicleta nas aulas de matemática a partir de uma perspectiva lúdica / Florence Cristina Silva Queiroga. – 2025.
122 f. : il.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Geometria. 2. Matemática - Estudo e Ensino. 3. Bicicletas. I. Araújo, Luiz Gustavo Perona. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

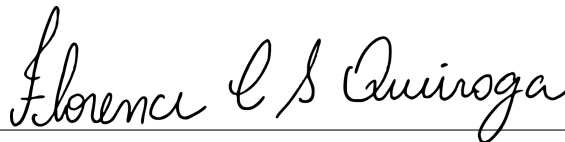
CDD: 516

FLORENCE CRISTINA SILVA QUEIROGA

EXPLORANDO AS GEOMETRIAS DA BICICLETA NAS AULAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DE UMA PERSPECTIVA LÚDICA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2025.



Florence Cristina Silva Queiroga
(Autora)



Luiz Gustavo Perona Araújo
(Orientador)

BELO HORIZONTE
2025

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, o autor e consumidor da minha fé. Sem Ele, nada seria possível - *Soli Deo Gloria*.

Aos meus pais, Leila e Xisto, pelo apoio incondicional, por estarem sempre ao meu lado e por oferecerem força e amor em todos os momentos desta jornada e ao meu namorado, pelo carinho, atenção e pelas valiosas contribuições ao longo de todo o processo.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Luiz Gustavo Perona, pela paciência, dedicação e confiança no meu trabalho. Suas sugestões, críticas construtivas e incentivo foram essenciais para superar os desafios e alcançar os objetivos propostos.

Aos professores e colegas do PROFMAT do CEFET-MG, em especial à professora Dra. Fernanda Aparecida Ferreira, pelas discussões enriquecedoras, pelas trocas de experiências e pela colaboração, que foram fundamentais para o crescimento desta pesquisa e para minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para o sucesso desta pesquisa, seja com palavras, gestos ou apoio direto. Sem o auxílio e a colaboração de todos, este trabalho não teria sido possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

A presente dissertação tem como foco integrar o “universo” das bicicletas ao ensino da geometria, por meio de um jogo. A partir de um mapeamento realizado, identificamos que a modelagem matemática é a metodologia de ensino mais utilizada quando se trata do estudo da geometria aplicada às bicicletas. No entanto, apesar do caráter lúdico intrínseco a esse meio de transporte, não foram encontrados trabalhos que utilizassem jogos ou gamificação como estratégia de ensino nesse contexto específico. Diante desse cenário, o objetivo deste trabalho é desenvolver um jogo pedagógico que promova o ensino da geometria de maneira lúdica e interativa, explorando as múltiplas relações geométricas presentes nas bicicletas. Para alcançar tal objetivo, realizamos uma pesquisa sobre a história e a evolução desse veículo, bem como um estudo da geometria do quadro, das características geométricas envolvidas nos rastros dos pneus e das particularidades das estradas “ideais” para bicicletas com rodas poligonais. Além disso, fundamentamos a criação do jogo na teoria do *flow*, nas diretrizes de *game design* e nas potencialidades dos jogos como metodologia de ensino. Como resultado, desenvolvemos o *Geometry Bike*, um jogo que integra diferentes aplicações da geometria associadas às bicicletas, proporcionando aos estudantes uma experiência pedagógica diferenciada. O Recurso Educacional busca favorecer a compreensão e a aplicação dos conceitos geométricos e despertar o interesse dos estudantes para tópicos mais avançados da matemática.

Palavras-chave: Geometria da Bicicleta; Ensino de Matemática; Jogos no Ensino, Geometria dos Rastros; Rodas Poligonais.

Abstract

This dissertation focuses on integrating the “universe” of bicycles into geometry teaching through the use of a game. A mapping conducted revealed that mathematical modeling is the most widely used teaching methodology in the study of geometry applied to bicycles. However, despite the inherent playful nature of this means of transportation, no studies were found that utilized games or gamification as teaching strategies in this specific context. In light of this, the objective of this work is to develop an educational game that promotes the teaching of geometry in a playful and interactive way, exploring the multiple geometric relationships present in bicycles. To achieve this, research was conducted on the history and evolution of the bicycle, as well as a study of the geometry of the frame, the geometric features involved in the tire tracks, and the characteristics of “ideal” roads for bicycles with polygonal wheels. Furthermore, the game development was grounded in the theory of flow, game design guidelines, and the potential of games as a teaching methodology. As a result, the *Geometry Bike* game was developed, integrating various geometric applications associated with bicycles, providing students with a differentiated pedagogical experience. This educational resource aims to enhance the understanding and application of geometric concepts while sparking students’ interest in more advanced topics in mathematics.

Keywords: Bicycle Geometry; Mathematics Education; Games in Education; Tire Track Geometry; Polygonal Wheels.

Lista de Figuras

2.1	Suposto projeto de bicicleta de Leonardo da Vinci	13
2.2	Karl von Drais e a Draisine	14
2.3	Diferentes modelos da Draisine	15
2.4	Pierre Lallement e o desenho da patente	16
2.5	Ilutrações dos irmãos Olivier	17
2.6	Bicicletas de Eugène Meyer e um cartão publicitário de 1872	17
2.7	Desenho do sistema de raios tangentes de James Starley	18
2.8	Três tipos de correntes do séc. XIX e Hans Renold	19
2.9	Bicicleta Humber Satefy de 1884 e Thomas Humber	19
2.10	Registro em jornal sobre o quadro da bicicleta Referee 1891	20
2.11	A primeira bicicleta Starley Rover de 1885 e John Kemp Starley	21
2.12	Anúncio da bicicleta Rover segunda geração	21
2.13	John Boyd Dunlop e duas versões do pneu	22
2.14	Anúncio de corrida em velocípedes	23
2.15	Capa do semanário <i>A Bycicleta</i>	23
3.1	Ciclista da modalidade contrarrelógio individual	26
3.2	Ciclista da modalidade <i>Cross-country</i> Olímpico 2015	26
3.3	Ciclismo urbano	28
4.1	Elementos da geometria da bicicleta	30
4.2	3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum	34
4.3	Modelo da bicicleta 3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum	34
4.4	Volcano Darkside GX AXS SID	34
4.5	Modelo da bicicleta Volcano Darkside GX AXS SID	35
4.6	Spry City Urban Microshift	35
4.7	Modelo da bicicleta Spry City Urban Microshift	35
4.8	Imagem comparativa das bicicletas de <i>speed</i> e <i>mountain bike</i>	36
4.9	Imagem comparativa das bicicletas de <i>speed</i> e ciclismo urbano	36
4.10	Imagem comparativa das bicicletas de ciclismo urbano e <i>mountain bike</i>	37
4.11	Par de rastros produzidos pela bicicleta	38
4.12	Vetores tangentes a curva da roda traseira	38
4.13	Posição da bicicleta no instante t	39
4.14	Bicicleta de rodas quadradas no desenho Pica-pau	41
4.15	Estrada para bicicletas de rodas quadradas	42
4.16	Roda em contato com a estrada	42
4.17	Funções roda-estrada	43
4.18	Funções roda-estrada no instante $x = 0$	43
4.19	Movimento da roda	44

4.20	Roda pentagonal	45
4.21	Gráfico de uma família de funções cosseno hiperbólico	49
4.22	Encaixe da roda poligonal na junção dos arcos de catenária	49
4.23	Retas tangentes à catenária em t_1 e t_2	50
4.24	Colisão da roda triangular com o arco de catenária	51
4.25	Representação gráfica de uma família de funções $F_k(t)$ com $-3 \leq k \leq 3$. .	52
5.1	Gráfico do <i>flow</i> segundo Csíkszentmihályi	57
6.1	Tétrade elementar	63
6.2	Pentágono elementar	64
6.3	Tabuleiro do jogo <i>Geometry Bike</i>	66
6.4	Casas “Sorte ou Azar”, “Fato ou <i>Fake</i> ” e “Desafio implacável”	67
6.5	Atalhos no tabuleiro	67
6.6	Carta 1. Geometria <i>Bike</i> (Frente e verso)	68
6.7	Carta 1. <i>Bike Math</i> (Frente e verso)	69
6.8	Carta 1. Fato ou <i>Fake</i>	70
6.9	Cartas “Sorte ou Azar” (Frente e verso)	70
6.10	Cartas 4 e 13 da categoria “Desafio implacável” (Frente e verso)	71
6.11	Cartão de resposta das cartas Geometria <i>Bike</i>	73
6.12	Mini bicicletas e dado	74
6.13	Capa do guia	74
6.14	Grupos de cartas	75

Lista de Tabelas

4.1	Medidas de bicicletas indicadas para <i>speed</i> , <i>mountain bike</i> e uso urbano	
	tamanho M	33

Lista de Quadros

1	Descrição dos conteúdos das cartas <i>Bike Math</i>	69
2	Descrição dos conteúdos das cartas “Desafio implacável”	72

Sumário

1	Introdução	11
2	Breve panorama histórico da bicicleta	13
2.1	Criação e desenvolvimento	13
2.2	A bicicleta no Brasil	22
3	Modalidades de ciclismo e as bicicletas	25
3.1	<i>Speed</i>	25
3.2	<i>Mountain bike</i>	26
3.3	Ciclismo urbano	28
4	“Geometrias” associadas a bicicleta	29
4.1	Geometria do quadro	30
4.1.1	Análise comparativa das bicicletas	33
4.2	Geometria dos rastros	37
4.2.1	Determinando o rastro da roda dianteira	38
4.3	Geometria das rodas	41
5	Jogos no ensino de Matemática	53
5.1	A dimensão lúdica na aprendizagem	54
5.2	“Ruídos” de aprendizagem	58
5.3	Planejando o uso de jogos	59
5.4	Avaliação no contexto de jogos	61
6	Projetando e construindo o <i>Geometry Bike</i>	63
6.1	<i>Game design</i>	63
6.2	<i>Geometry Bike</i>	65
6.2.1	Componentes do jogo	66
6.2.2	Como jogar	75
7	Considerações finais	77
	Referências	80
	Anexos	
I	O jogo <i>Geometry Bike</i>	84
II	Guia completo <i>Geometry Bike</i>	122

1 Introdução

A Geometria é uma antiga área da Matemática presente tanto em fenômenos da natureza quanto em invenções humanas que moldaram o mundo moderno. Desde a organização espacial das formas até a análise de ângulos e proporções, a Geometria nos permite compreender e aplicar princípios essenciais na construção de objetos, no *design* de estruturas, na análise de trajetórias, entre outras aplicações. No âmbito educacional, o Ensino de Geometria desempenha um papel crucial no desenvolvimento de habilidades e competências indispensáveis para a resolução de problemas do cotidiano, promovendo a aplicação prática da Matemática no contexto real. Um exemplo notável dessa aplicação pode ser encontrado em uma das grandes invenções humanas: a bicicleta, que revela um potencial para a exploração de conceitos geométricos.

A bicicleta, além de ser um meio de transporte popular e sustentável, ocupa um espaço importante no esporte e no lazer. Contudo, seu valor transcende os aspectos culturais e ambientais, revelando-se também um recurso valioso para o ensino de geometria. Ao estudar a geometria de elementos do quadro, as trajetórias dos rastros dos pneus e as características das estradas mais adequadas para diferentes tipos de rodas, a bicicleta transforma-se em uma ferramenta didática versátil.

A análise da geometria do quadro da bicicleta, incluindo seus ângulos e comprimentos, revela aplicações concretas de conceitos geométricos. Esses elementos desempenham papéis fundamentais na funcionalidade da bicicleta, influenciando diretamente aspectos como dirigibilidade, estabilidade, conforto e segurança.

Por outro lado, a partir do estudo dos rastros dos pneus, podemos explorar outros campos da Geometria, nos quais a análise das curvas ganha uma abordagem mais aprofundada. Por meio da investigação sobre a relação entre os rastros deixados pelos pneus, é possível introduzir o estudo de funções e derivadas, ainda que de maneira intuitiva, proporcionando uma forma acessível de compreender conceitos mais avançados.

Além disso, podemos nos aventurar em um cenário ainda mais lúdico e criativo ao explorar estradas “ideais” para que bicicletas com rodas poligonais realizem um deslocamento suave. Essa perspectiva estimula a imaginação, ultrapassando as formas tradicionais

de estudo das bicicletas e incentivando soluções criativas no campo da Geometria.

Devido aos aspectos culturais que associam a bicicleta ao lazer, ela possui intrinsecamente um caráter lúdico. Contudo, por meio de um fichamento realizado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) no PROFMAT, no CEFET-MG, identificou-se que a modelagem matemática é a metodologia mais empregada no Ensino de Geometria utilizando bicicletas e, apesar do evidente potencial lúdico desse meio de transporte, não foram encontrados estudos que explorassem jogos ou estratégias de gamificação como abordagem pedagógica nesse contexto. Os resultados detalhados desse mapeamento estão apresentados no artigo “A Geometria da Bicicleta no Ensino de Matemática: uma Análise de Trabalhos Acadêmicos” [48], que fornece uma visão abrangente do processo de pesquisa.

Esse panorama evidenciou uma lacuna significativa no tema abordado por nossa pesquisa, reforçando a relevância da proposta deste trabalho: o desenvolvimento do jogo pedagógico *Geometry Bike*, que integra conceitos geométricos ao universo das bicicletas.

Dentre os objetivos específicos desta pesquisa, destacam-se:

- investigar a história da bicicleta e os principais marcos no desenvolvimento desse meio de transporte;
- estudar as diferentes geometrias associadas às bicicletas;
- avaliar as potencialidades e os desafios do uso de jogos como ferramentas pedagógicas no ensino de matemática;
- examinar como conceitos não triviais da geometria da bicicleta, como a análise dos rastros dos pneus e o estudo de estradas projetadas para rodas poligonais, podem ser adaptados para aplicação no ensino de matemática nos níveis básicos de educação.

A dissertação está organizada em sete capítulos, cada um abordando aspectos essenciais da pesquisa. O Capítulo 1, intitulado “Introdução”, apresenta o tema, os objetivos e a estrutura do trabalho. No Capítulo 2, é traçado um panorama histórico da bicicleta, abrangendo sua criação, evolução e inserção no contexto brasileiro. O Capítulo 3 explora três modalidades de ciclismo - *speed*, *mountain bike* e ciclismo urbano — destacando as particularidades de cada uma. O Capítulo 4 aprofunda-se no estudo das geometrias presentes em diversos elementos da bicicleta, oferecendo a base teórica necessária para a construção do jogo. No Capítulo 5, discute-se o uso de jogos como metodologia de ensino. O Capítulo 6 apresenta o referencial teórico que orientou a criação do jogo, descrevendo em detalhes o recurso educacional desenvolvido. Por fim, o Capítulo 7 expõe as conclusões da pesquisa e sugere possíveis desdobramentos para investigações futuras.

2 Breve panorama histórico da bicicleta

Ao explorar a história da bicicleta, podemos ver como as necessidades sociais, econômicas e tecnológicas moldaram sua criação, desenvolvimento e *design*. O contexto histórico não apenas enriquece o entendimento dos elementos constituintes da bicicleta, mas também destaca a importância da inovação contínua e da adaptação às necessidades dos usuários.

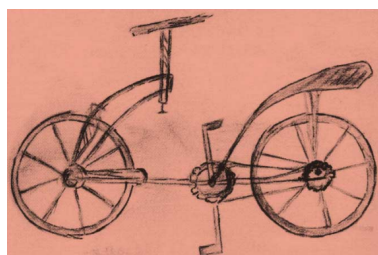
Para os alunos, a abordagem histórica pode tornar o estudo mais envolvente e relevante. Compreender que as bicicletas de hoje são o resultado de séculos de aprimoramentos pode aumentar a valorização do processo de aprendizagem. A história da bicicleta exemplifica como a aplicação prática do conhecimento e a criatividade podem levar a inovações que transformam a vida cotidiana.

2.1 Criação e desenvolvimento

Nesta seção, abordaremos alguns eventos significativos que marcaram a criação e o desenvolvimento da bicicleta. Esses acontecimentos são essenciais para compreendermos o processo evolutivo do *design* do quadro e suas implicações ao longo do tempo.

A história da bicicleta, assim como a de muitas outras grandes invenções, é repleta de mitos. Um desses mitos atribui ao gênio renascentista Leonardo da Vinci (1452 - 1519) o primeiro projeto de bicicleta, baseado em um desenho datado de aproximadamente 1490, descoberto em 1966. No entanto, atualmente, acredita-se que esse desenho seja obra de um monge, e não de Da Vinci.

Figura 2.1: Suposto projeto de bicicleta de Leonardo da Vinci



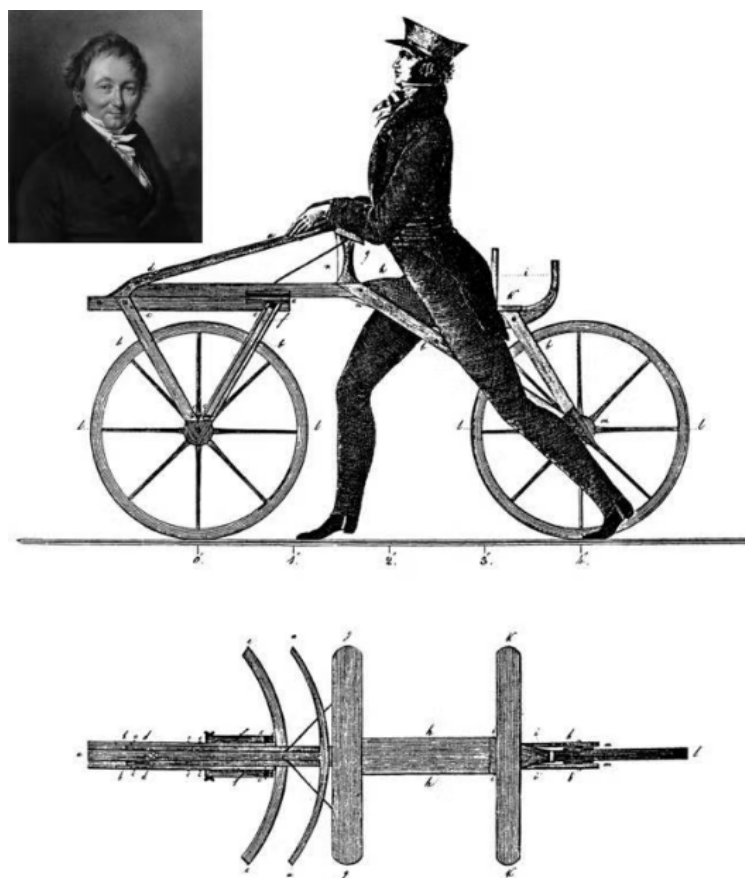
Fonte: Imagem adaptada do site Biciclettami (2017) [8]

Para minimizar os mitos em torno da criação da bicicleta, após participarem de diversas conferências internacionais sobre a História do Ciclismo, os autores Tony Hadland e Hans-Erhard Lessing publicaram o livro *Bicycle Design: An Illustrated History* [29]. Nesta obra, Hadland e Lessing apresentam uma pesquisa abrangente sobre o tema e apontam Karl von Drais como o inventor da precursora da bicicleta moderna.

O alemão Karl von Drais, nascido em 29 de abril de 1785 em Karlsruhe e falecido em 10 de dezembro de 1851, foi de guarda-florestal do governo a célebre inventor. Conjectura-se que os efeitos das Guerras Napoleônicas e das catástrofes naturais que atingiram a Europa após 1812 tenham impulsionado Drais a desenvolver um meio de transporte não motorizado que não dependesse de cavalos.

Em 12 de junho de 1817, Karl von Drais apresentou ao mundo sua “Laufmaschine” (“máquina de correr”), também conhecida como “Draisine” ou “cavalo de pau”. Neste dia, utilizando a melhor estrada do Grão-Ducado de Baden, Drais percorreu 8 milhas (aproximadamente 13 quilômetros) em menos de uma hora em sua invenção.

Figura 2.2: Karl von Drais e a Draisine

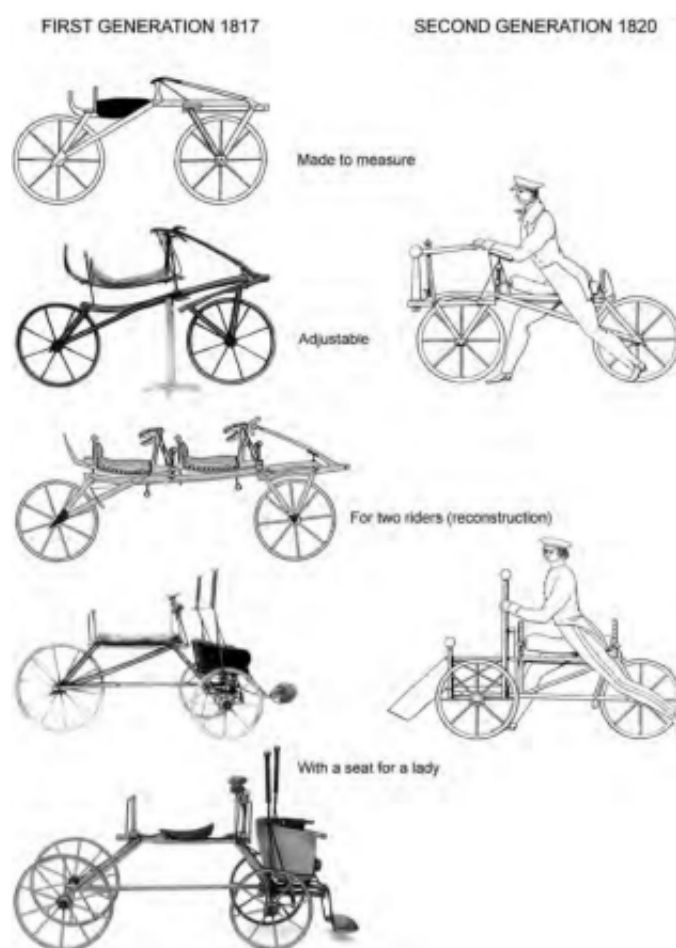


Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

A Draisine era uma espécie de bicicleta de madeira, sem pedais, impulsionada pelo próprio corpo do ciclista. Suas rodas tinham o mesmo tamanho, com cerca de 27 polegadas. Além disso, suas características ergonômicas diferiam das das bicicletas atuais: para facilitar que o ciclista apoiasse os pés no chão, o assento era mais baixo do que o de uma bicicleta moderna.

Ainda em 1817, Karl ofereceu diferentes modelos da Draisine. Entre eles, havia exemplares com três e quatro rodas, além de versões voltadas ao público feminino, que possuíam assentos mais confortáveis.

Figura 2.3: Diferentes modelos da Draisine



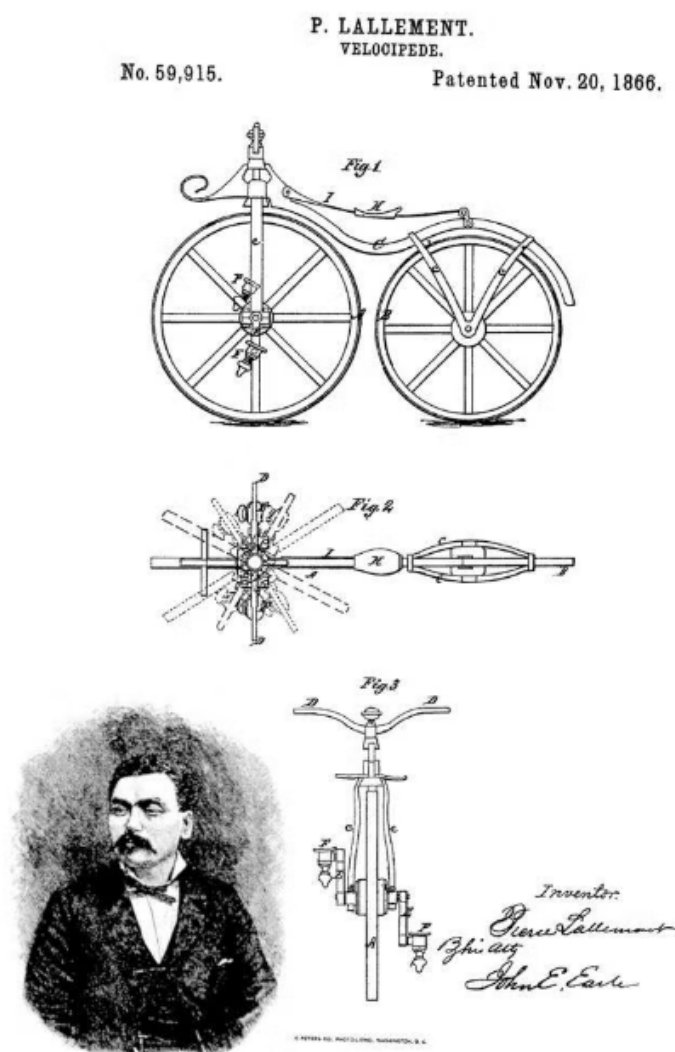
Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

No período de 1820 a 1860, as bicicletas tiveram maior expressão entre os britânicos, havendo poucos relatos de seu uso nos Estados Unidos.

Em 1866, surgiram as bicicletas com manivelas conectadas à roda dianteira. Porém, não há consenso sobre quem teve a ideia. Nos Estados Unidos, um carpinteiro imigrante francês chamado Pierre Lallement, junto com seu sócio James Carroll, obteve uma patente

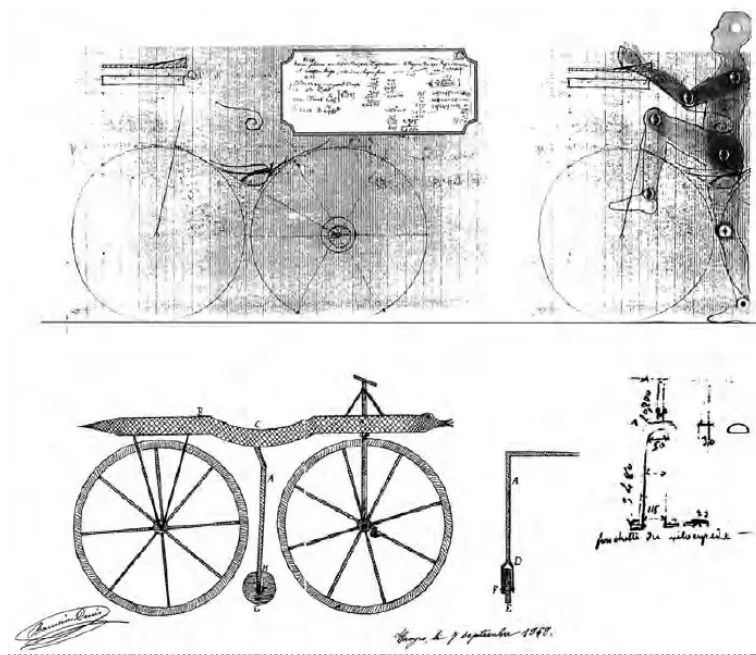
intitulada “Melhoria em Velocípedes” (patente norte-americana 59.915 de 1866). No entanto, os desenhos da patente se assemelhavam aos velocípedes (bicicletas) produzidos na França pelos irmãos Olivier em parceria com Pierre Michaux, que se popularizaram nos Estados Unidos e no Reino Unido.

Figura 2.4: Pierre Lallement e o desenho da patente



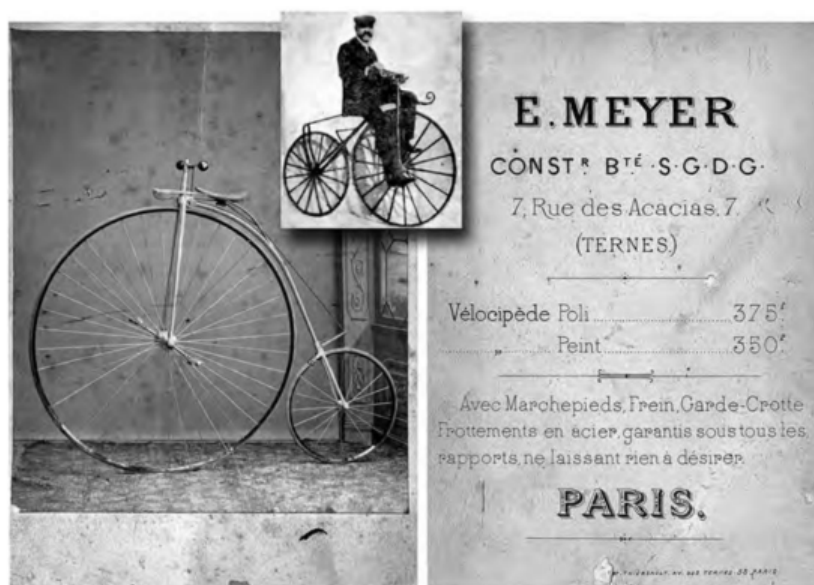
Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

Na Figura 2.5, observa-se um desenho realizado por Aimé Olivier por volta de 1863, acompanhado de anotações e da representação de um manequim. Na parte inferior esquerda, há um esboço patenteado de um velocípede do tipo draisine, datado de 1868. Já à direita, encontra-se uma ilustração de 1864, extraída do caderno de Jules Olivier, na qual são representados um garfo e um apoio para o pé - e não uma manivela. De acordo com Lessing [29], a posição do manequim inviabiliza a extensão completa dos cotovelos, enquanto a localização do apoio para o pé indica que seu uso exigiria uma elevação desconfortável da coxa.

Figura 2.5: Ilutrações dos irmãos Olivier

Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

A partir do ano de 1869, ocorreram diversas modificações nos velocípedes que são utilizadas até hoje. Dentre elas podemos citar a substituição dos raios de madeira por fios de tensão de aço, patenteada pelo mecânico parisiense Eugène Meyer. Os raios de tensão proporcionaram maior estabilidade estrutural e leveza às bicicletas.

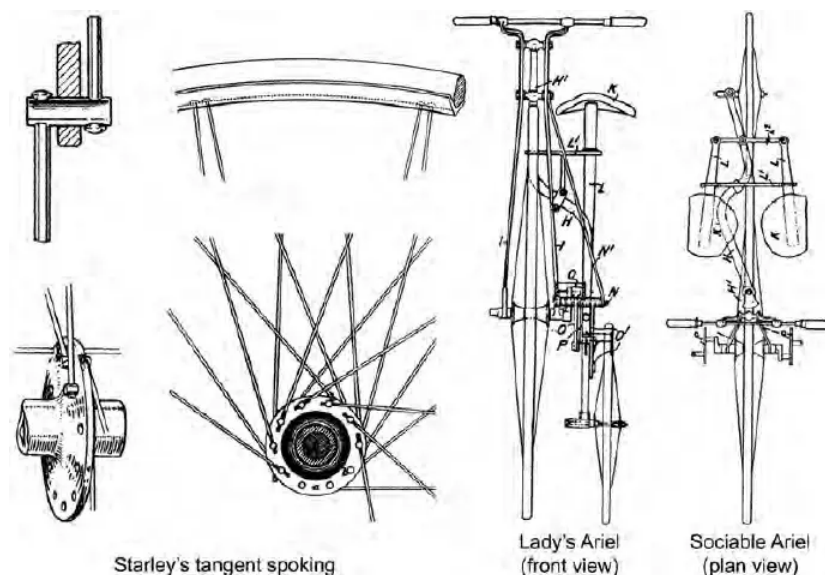
Figura 2.6: Bicicletas de Eugène Meyer e um cartão publicitário de 1872

Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

O habilidoso mecânico Meyer também fabricava velocípedes de rodas altas, conhecidos por sua capacidade de alcançar altas velocidades. Essa característica se devia ao grande diâmetro da roda dianteira, que permitia percorrer uma maior distância a cada pedalada, uma vez que os pedais estavam fixos diretamente em seu eixo. No entanto, o tamanho desproporcional das rodas tornava essas bicicletas instáveis e difíceis de controlar, aumentando o risco de quedas.

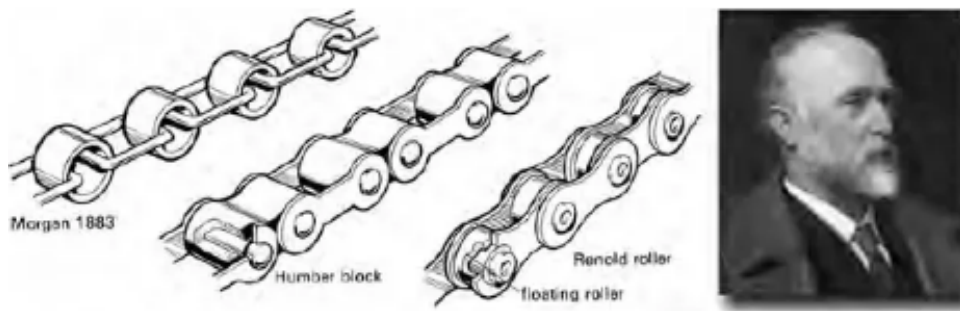
No ano de 1874, o pai da indústria britânica de bicicletas, James Starley, patenteou as rodas de raios tangentes (patente britânica 3.959 de 1874). O ajuste tangencial dos raios evitava que eles se quebrassem com facilidade, apresentando vantagens em relação ao ajuste radial.

Figura 2.7: Desenho do sistema de raios tangentes de James Starley



Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

A ideia de utilizar correntes para a transmissão de força já era debatida entre os britânicos em meados da década de 1860. Na França, pelo menos três inventores registraram patentes para bicicletas acionadas por corrente: Dubos (patente francesa nº 80.106, de 1868), Desnos-Gardissal (nº 82.082, também de 1868) e Mougeol (nº 86.676, de 1869). No entanto, foi apenas em março de 1880 que o suíço Hans Renold obteve a patente da corrente de rolo, um mecanismo projetado para transmitir força motriz às rodas dianteiras. Essa corrente é composta por elos interligados por pinos, nos quais cada elo possui um rolo que gira em torno do pino, proporcionando um movimento mais suave e eficiente. Esse avanço foi essencial para a transmissão otimizada de força motriz, tornando-se posteriormente o padrão na tração das bicicletas.

Figura 2.8: Três tipos de correntes do séc. XIX e Hans Renold

Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

No ano de 1884, o fabricante de velocípedes Thomas Humber apresentou um modelo inicial do que seria uma bicicleta com estrutura em forma de “diamante”, a Humber Satefy.

Figura 2.9: Bicicleta Humber Satefy de 1884 e Thomas Humber

Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

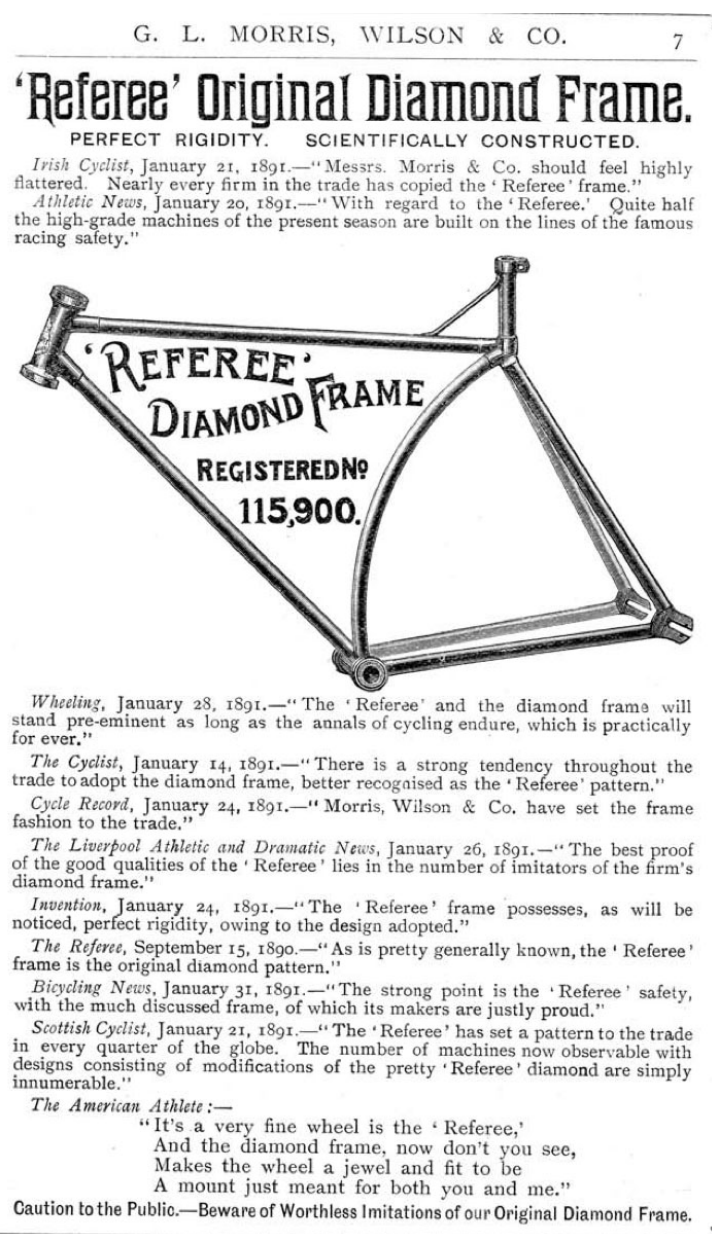
Um quadro com “moldura em diamante” apresenta as seguintes características:

- um tubo superior ligando a caixa de direção ao suporte do assento (selim);
- um tubo inferior ligando a caixa de direção a caixa do eixo da manivela;
- a corrente ligando o suporte da manivela às roda traseira;
- apoios do assento ligados às gancheiras da roda traseira.

A Humber 1884 não apresentava um tubo conectando o suporte do assento à caixa do eixo da manivela (tubo do selim), o que a caracterizava como um “diamante aberto”.

Não há consenso sobre quem introduziu a moldura em diamante. No entanto, Hadland e Lessing [29], ao analisarem as bicicletas que possuíam todos os itens citados anteriormente, concluíram que o primeiro protótipo com essa estrutura foi a Referee Satefy de G.L. Morris.

Figura 2.10: Registro em jornal sobre o quadro da bicicleta Referee 1891



Fonte: The Online Bicycle Museum [40]

O quadro com estrutura em diamante oferece diversas vantagens, permitindo uma acomodação eficiente do assento, das rodas, pneus e corrente. Sua geometria triangular proporciona maior rigidez e resistência com o uso de menos material, o que resulta em um design mais leve sem comprometer a durabilidade e a robustez da bicicleta.

No ano de 1885, John Kemp Starley, sobrinho de James Starley (inventor das rodas de raios tangentes), criou a primeira bicicleta com tração traseira que alcançou o sucesso. A Starley Rover possuía rodas com menor diferença entre os diâmetros e ficou conhecida como “bicicleta de segurança”.

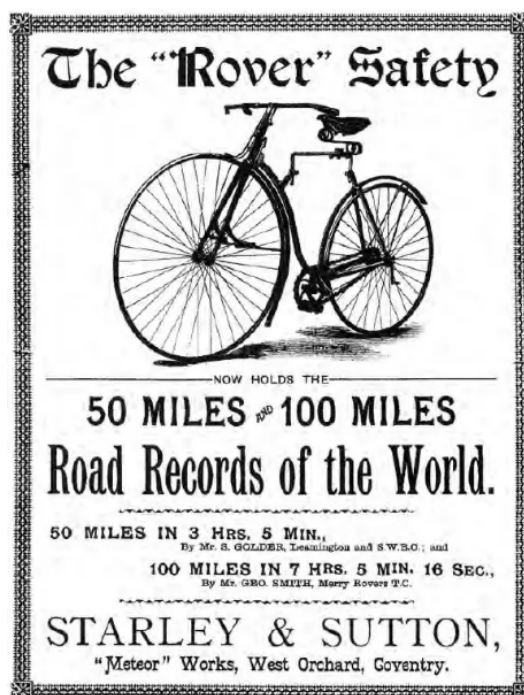
Figura 2.11: A primeira bicicleta Starley Rover de 1885 e John Kemp Starley



Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

Ainda em 1885, uma segunda versão da bicicleta Rover foi lançada, apresentando um *design* muito semelhante às bicicletas atuais.

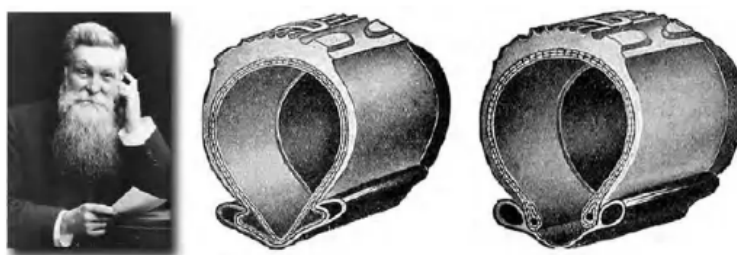
Figura 2.12: Anúncio da bicicleta Rover segunda geração



Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

Em 1845, o escocês Robert William Thomson patenteou no Reino Unido o pneu pneumático, especialmente para uso ferroviário. No entanto, o pneu criado por Thomson não obteve tanto sucesso e não foi utilizado em bicicletas. Em 1887, o veterinário escocês John Boyd Dunlop reinventou o pneu pneumático e o patenteou em 1888. Porém, a patente de Dunlop foi anulada em 1890, quando o Instituto Britânico de Patentes reconheceu que Thomson já havia patenteado o conceito. Todavia, devido à sua eficiência em corridas, essa invenção foi rapidamente adotada e se tornou um equipamento padrão.

Figura 2.13: John Boyd Dunlop e duas versões do pneu



Fonte: Hadland e Lessing (2014) [29]

Nos anos seguintes, muitas inovações foram realizadas, como o desenvolvimento de tubos mais leves, engrenagens e sistemas de suspensão. Com o crescimento do ciclismo, diferentes modalidades foram criadas e, conseqüentemente, bicicletas adaptadas para atender a essas demandas. Ainda hoje, engenheiros, físicos e amantes das bicicletas trabalham em busca de ajustes finos em seu *design* a fim de conferirem melhor desempenho para cada função.

2.2 A bicicleta no Brasil

Não existem dados precisos sobre a história da bicicleta no Brasil. No entanto, considerando os registros em jornais da época, presume-se que as primeiras bicicletas foram trazidas por imigrantes europeus no final do século XIX.

Em 1885, já era possível notar a presença do ciclismo no Rio de Janeiro. O jornal *O Paiz* publicou um anúncio do Sport Club Villa Izabel sobre corridas a pé e em velocípedes.

Em 13 de julho de 1885, foi inaugurado o Club Athletico Fluminense, com a presença do príncipe Dom Pedro II, que passou a realizar corridas em velocípedes. No entanto, haviam poucos inscritos para essas corridas, possivelmente devido aos altos preços do produto importado. [52]

Atualmente, o Brasil dispõe de diversos fabricantes de bicicletas como: Audax, Caloi, Monark, Oggi, Sense Bike, Soul Cycles, entre outros. Segundo um estudo realizado pelo Instituto de Pesquisa Multiplicidade Mobilidade Urbana [45], a frota de bicicletas no Brasil em 2021 era estimada em 33.230.198 unidades.

Após abordarmos a história da bicicleta e seu percurso até chegar ao Brasil, no próximo capítulo exploraremos algumas modalidades de ciclismo, apresentando suas principais características. Serão discutidos aspectos como os tipos de terreno, objetivos e as habilidades exigidas dos ciclistas.

3 Modalidades de ciclismo e as bicicletas

Podemos entender o ciclismo como o simples exercício de andar de bicicleta. Porém, no contexto esportivo, o ciclismo engloba diversas modalidades que se distinguem, sobretudo, pelo tipo de terreno onde são praticadas e pelos objetivos de cada competição. Para atender com eficiência às demandas de cada categoria, existem bicicletas com características específicas.

Neste capítulo, abordaremos três modalidades: *speed*, *mountain bike* e ciclismo urbano. Essas três categorias cobrem uma ampla gama de características do ciclismo, desde as competições de alto desempenho (*speed*), passando pelo ciclismo em terrenos desafiadores (*mountain bike*), até a prática mais cotidiana e acessível nas cidades (ciclismo urbano). Além dessas, existem diversas outras modalidades, como ciclismo de pista, BMX e ciclismo *indoor*, cada uma com suas particularidades e exigências.

3.1 *Speed*

A categoria *speed*, também conhecida como ciclismo de estrada, é uma das modalidades mais tradicionais e famosas do ciclismo. As competições ocorrem em percursos asfaltados e abrangem dois formatos: contrarrelógio e estrada. As provas contrarrelógio têm entre 5 e 60 km e o ciclista que completar o percurso no menor tempo é o vencedor. Enquanto as corridas de estrada possuem extensões variadas, são classificadas conforme a dificuldade do trajeto e podem apresentar diferentes configurações, como: corrida de um ponto a outro, circuito ou corrida por etapas. [21]

Segundo a União Ciclista Internacional (UCI) [33], a primeira corrida registrada ocorreu em 31 de maio de 1868, no Parc de Saint-Cloud, em Paris. E foi vencida pelo piloto inglês James Moore. Além disso, o ciclismo de estrada faz parte dos Jogos Olímpicos desde a primeira edição, em 1896.

As bicicletas de *speed* possuem material mais leve, pneus mais finos e estrutura com maior aerodinâmica, favorecendo maior velocidade.

Figura 3.1: Ciclista da modalidade contrarrelógio individual



Fonte: Extraído do site da União Ciclista Internacional (UCI). [33]

3.2 *Mountain bike*

O *mountain bike* (MTB) é uma categoria de ciclismo praticada em terrenos irregulares e acidentados, como montanhas, trilhas e estradas de terra, e o objetivo é transpor o percurso superando os diversos obstáculos. Essa modalidade proporciona grande contato com a natureza, onde o ciclista se depara com desafios físicos e técnicos, permitindo vivenciar aventuras e sensações intensas de adrenalina.

Figura 3.2: Ciclista da modalidade *Cross-country* Olímpico 2015



Fonte: Thiago Lemos/Confederação Brasileira de Ciclismo. [17]

O MTB surgiu na década de 1970, nas trilhas do Monte Tamalpais, no condado de Marin, na Califórnia. Nesse período, os ciclistas encontraram, a partir da experimentação, componentes mais adequados aos seus propósitos. Segundo Hadland e Lessing [29], acredita-

se que o primeiro quadro desenvolvido especificamente para MTB foi elaborado por Joe Breeze em 1976. No entanto, foi a partir de 1982, que as *mountain bike* passaram a ser fabricadas em larga escala para distribuição no varejo.

As bicicletas de MTB possuem material mais resistente, pneus mais largos para proporcionar maior aderência e tração nos terrenos instáveis, freios com maior poder de frenagem e, em geral, são equipadas com suspensão dianteira e/ou traseira para auxiliar na absorção de impactos.

O MTB é subdividido em diferentes modalidades, e entre elas estão: *Cross-Country*, *Downhill*, *4X (Four Cross)* e *Dual Slalom*. Veja a seguir, as características de cada submodalidade segundo as regras gerais de *mountain bike* da Confederação Brasileira de Ciclismo [18].

- *Cross-Country*: é uma das modalidades mais populares. As provas são divididas em várias categorias (*Cross-country* Olímpico, *Cross-country* Maratona, *Cross-country* em linha, *Cross-country* sobre circuito ou critério, *Cross-country* contrarrelógio, *Cross-country* revezamento por equipes), o percurso pode ter até 60 km e normalmente as disputas ocorrem em grupos.
- *Downhill*: é uma modalidade que consiste numa descida em alta velocidade. O percurso deve conter variações de terreno (pistas estreitas e pistas largas, caminhos entre florestas, campos, bosques e estradas com cascalhos), exigindo variedade de técnicas e velocidades.
- *4X (Four Cross)*: nessa modalidade quatro ciclistas disputam lado a lado o mesmo percurso. Espera-se que o percurso seja traçado em declive moderado e de inclinação progressiva, contendo saltos, curvas em relevos e concavidades. A prova deve ser cumprida, em aproximadamente, 38 segundos.
- *Dual Slalom*: é uma modalidade onde dois ciclistas disputam lado a lado, em pistas paralelas, um percurso em declive com curvas abertas, saltos e depressões. A duração do percurso é de, aproximadamente, 30 segundos.

De acordo com os dados da Associação Brasileira dos Fabricantes de Motocicletas, Ciclomotores, Motonetas, Bicicletas e Similares (ABRACICLO) [1], das 599.044 bicicletas produzidas no Polo Industrial de Manaus em 2022, mais de 62% representavam bicicletas de MTB.

3.3 Ciclismo urbano

O ciclismo urbano refere-se ao uso da bicicleta como meio locomoção nas cidades. Nessa modalidade, os ciclistas percorrem curtas distâncias em ambientes urbanos, como avenidas, ruas ou parques.

Essa categoria de ciclismo é uma opção sustentável, ágil e de menor custo em comparação aos outros meios de transporte. Além disso, favorece a melhoria da qualidade de vida dos praticantes, promovendo hábitos mais saudáveis.

As bicicletas urbanas costumam apresentar uma posição de pilotagem mais confortável e podem vir equipadas com acessórios como bagageiros, para-lamas, luzes de segurança e até retrovisores, visando aumentar a funcionalidade e a segurança do ciclista.

Figura 3.3: Ciclismo urbano



Fonte: Extraído do artigo “La cultura del ciclismo urbano en América Latina: ¿un modelo para otras regiones?” [34]

No próximo capítulo, faremos uma breve exposição sobre as geometrias associadas às bicicletas. Começaremos destacando a importância do ensino da geometria. Em seguida, analisaremos a geometria do quadro, comparando os modelos de bicicletas de *speed*, *mountain bike* e urbano. Abordaremos também a geometria dos rastros das rodas, destacando suas propriedades. Por fim, discutiremos o formato de estrada “ideal” para bicicletas com rodas não convencionais, como as de formato poligonal.

4 “Geometrias” associadas a bicicleta

A Geometria é um ramo da Matemática fundamental para o desenvolvimento dos indivíduos devido à sua presença no cotidiano e sua aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento. Nesse sentido, Lorenzato [35] destaca a necessidade de ensinar e aprender Geometria argumentando que

sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (Lorenzato, 1995, p. 5)

Esse argumento evidencia a relevância do ensino da Geometria para o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais, como o raciocínio espacial, que transcende os limites da própria Matemática e se conecta com outras áreas do saber. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [12] destaca a Geometria como uma de suas cinco unidades temáticas, orientando a formulação de habilidades que promovem a investigação de propriedades, a formulação de conjecturas e a produção de argumentos geométricos convincentes. Ademais, o raciocínio estruturado desenvolvido nesse processo é transferível para a análise e resolução de problemas complexos em diversas áreas do conhecimento.

Rodrigues e Bernardo [50] corroboram essa perspectiva, destacando que:

os vários documentos curriculares actuais, internacionais e nacionais, são convergentes no que respeita à forma de encarar a Geometria como um campo de excelência para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, centrado nas relações entre os objectos geométricos e na articulação de argumentos acerca das suas propriedades, os quais poderão vir a constituir-se como demonstrações. (Rodrigues e Bernardo, 2011)

Com base nessa concepção, abordaremos elementos da geometria aplicados às bicicletas para subsidiar a construção do jogo *Geometry Bike*. Primeiramente, exploraremos

a geometria do quadro, analisando os ângulos e as medidas dos tubos. Em seguida, realizamos um breve estudo sobre a geometria associada aos rastros dos pneus da bicicleta. Por fim, nos aventuraremos em um cenário mais imaginativo, investigando estradas projetadas para bicicletas com rodas poligonais. Vale ressaltar que o termo “geometria da bicicleta” é específico do ciclismo e, portanto, não se refere a uma geometria particular aplicada às bicicletas.

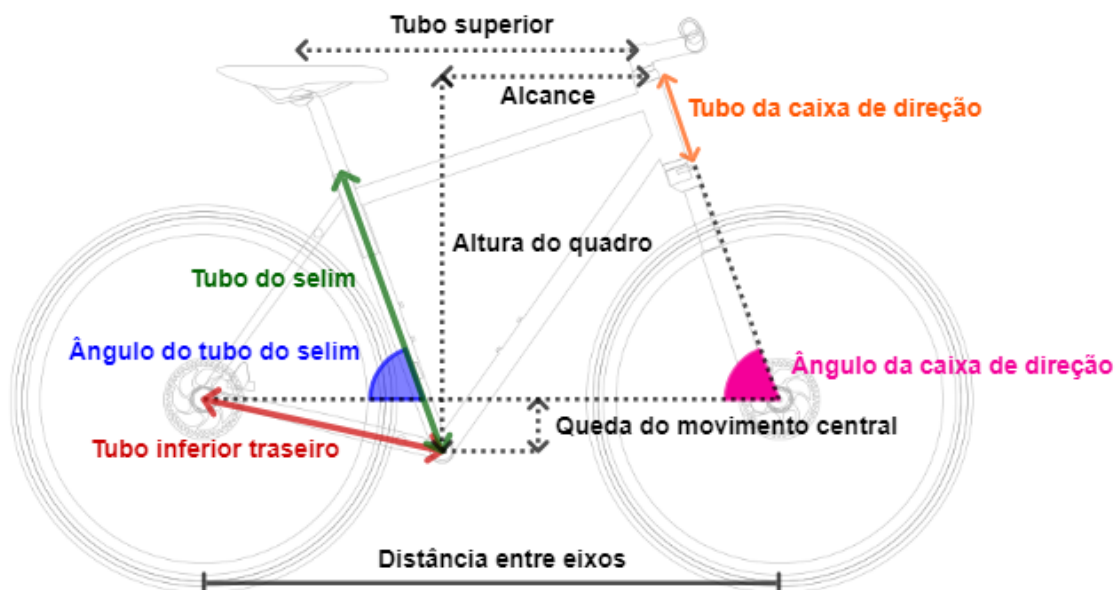
4.1 Geometria do quadro

O estudo desenvolvido nesta seção baseou-se nos trabalhos de Baratto [7], Di Alencar e Souza Matias [26], e Ballantine e Grant [6], além de uma série de artigos de sites especializados em ciclismo, como Escola de Bicicleta [9], Revista Bicicleta [49], Ativo [3], Pedal [43], MTB Brasília [39], TSW Bikes [10], Revista Ciclo Sul [58], Bike Magazine [37] e Canyon [15].

O termo “geometria da bicicleta” é utilizado para designar um conjunto de distâncias e ângulos presentes no quadro da bicicleta. Essa geometria está associada à finalidade da bicicleta e determina aspectos como conforto, agilidade, dirigibilidade, estabilidade e desempenho.

Na Figura 4.1, apresentamos alguns elementos da geometria do quadro da bicicleta.

Figura 4.1: Elementos da geometria da bicicleta



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Analisando o significado de cada termo da Figura 4.1, obtemos:

- **Tubo superior:** é a medida de comprimento efetivo do tubo superior do quadro e corresponde à distância horizontal do canote do selim ao centro da caixa de direção e influencia diretamente na posição do ciclista sobre a bicicleta. Um tubo superior mais longo proporciona uma posição mais esticada, favorecendo a aerodinâmica, enquanto um tubo superior mais curto resulta em uma posição mais ereta, que pode ser mais confortável.
- **Alcance:** é a distância horizontal do centro do movimento central ao centro da caixa de direção. Quanto maior o alcance, mais estável a bicicleta se torna, exigindo maior flexibilidade do ciclista. Por outro lado, um alcance menor torna a bicicleta mais ágil, mas dificulta o controle.
- **Altura do quadro:** é a distância vertical do centro do movimento central à linha do centro da caixa de direção. A altura do quadro é uma importante medida para o ajuste ergonômico do ciclista.
- **Tubo da caixa de direção:** é o tubo frontal da caixa de direção, onde se conecta o garfo da bicicleta. O comprimento desse tubo indica a altura do guidão e, portanto, interfere na postura do ciclista.
- **Tubo do selim:** é o tubo que conecta o canote do selim ao eixo do movimento central. O ajuste adequado do comprimento desse tubo é fundamental para garantir uma posição confortável e eficiente ao pedalar.
- **Tubo inferior traseiro:** é o tubo que conecta o eixo do movimento central ao eixo da roda traseira. Quanto maior esse tubo, maior será o conforto ao pedalar, porém, a bicicleta ficará mais lenta. Por outro lado, um tubo mais curto proporciona melhor desempenho em subidas e uma bicicleta mais ágil e agressiva.
- **Distância entre eixos:** é a distância entre os eixos das rodas dianteira e traseira. Quanto maior essa distância, mais estável a bicicleta se torna, proporcionando uma experiência confortável, porém, resulta em uma maior lentidão e previsibilidade. Por outro lado, quanto menor for essa distância, mais ágil a bicicleta se torna, facilitando manobras rápidas, mas comprometendo a estabilidade em altas velocidades.
- **Queda do movimento central:** é a distância vertical entre o eixo das rodas e o eixo do movimento central. Quanto menor for essa medida, mais instável será a bicicleta, pois o centro de gravidade estará mais alto. Por outro lado, quanto maior for essa medida, mais próximo do solo estará o pedivela, aumentando o risco de tocar o solo em curvas fechadas ou em terrenos irregulares.

- **Ângulo do tubo do selim:** ângulo formado entre tubo do selim e uma linha horizontal. Esse ângulo afeta a posição do ciclista em relação ao eixo do movimento central da bicicleta. Quanto menor for o ângulo do tubo do selim, ou seja, quanto mais inclinado para trás estiver, maior será a tração.
- **Ângulo da caixa de direção:** ângulo formado entre o tubo da caixa de direção e uma linha horizontal. Quanto menor for o ângulo da caixa de direção, mais “inclinada” ficará a suspensão da bicicleta, proporcionando melhores características de pilotagem em descidas íngremes, pois o centro de gravidade é deslocado para trás, aumentando a estabilidade. Por outro lado, quanto maior for este ângulo, a suspensão ficará mais “reta” em relação ao solo, favorecendo maior velocidade e agilidade em terrenos planos ou subidas.

A geometria do quadro é essencial no *design* das bicicletas, influenciando diretamente em aspectos como desempenho, conforto e estabilidade. Elementos como o comprimento do tubo superior, o alcance, os ângulos da caixa de direção e do tubo do selim desempenham papéis fundamentais na experiência do ciclista e na adequação da bicicleta a diferentes contextos. Compreender essas medidas e proporções é crucial para escolher ou projetar bicicletas que atendam às necessidades específicas de cada modalidade ou uso. Na sequência, será apresentada uma análise comparativa entre diferentes tipos de bicicletas, destacando como as variações na geometria do quadro impactam sua funcionalidade e desempenho.

4.1.1 Análise comparativa das bicicletas

Nesta subseção, realizamos uma análise comparativa entre bicicletas indicadas para *speed*, *mountain bike* e uso urbano, todas da marca brasileira *Soul Cycles*. Os modelos analisados são: 3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum (2023), Volcano Darkside GX AXS SID (2023) e Spry City Urban Microshift (2024). Para assegurar que as diferenças identificadas estivessem relacionadas exclusivamente às características de cada modalidade, optou-se por comparar bicicletas de mesmo tamanho.

A Tabela 4.1 apresenta as medidas de cada elemento analisado em cada uma das bicicletas.

Tabela 4.1: Medidas de bicicletas indicadas para *speed*, *mountain bike* e uso urbano tamanho M

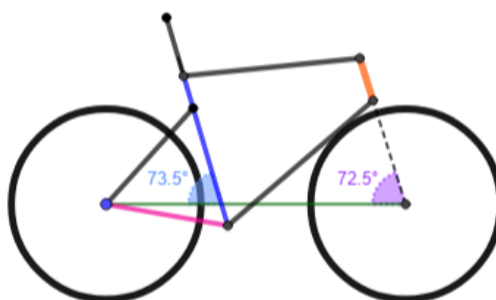
Elementos	<i>Speed</i> 3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum	<i>Mountain bike</i> Volcano Darkside GX AXS SID	Urbana Spry City Urban Microshift
Tubo superior	545 mm	593 mm	560 mm
Alcance	385 mm	431 mm	393 mm
Altura do quadro	547 mm	591 mm	585 mm
Tubo da caixa de direção	145 mm	95 mm	130 mm
Tubo do selim	510 mm	450 mm	500 mm
Tubo inferior traseiro	405 mm	430 mm	420 mm
Distância entre eixos	982 mm	1119 mm	1027 mm
Queda do movimento central	70 mm	47,3 mm	70 mm
Ângulo do tubo do selim	73,5°	74,3°	74°
Ângulo da caixa de direção	72,5°	68,5°	71,5°

Fonte: Informações extraídas do site do fabricante.

- **3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum** [22]: é uma bicicleta de estrada de alta performance, projetada para oferecer velocidade, conforto e aerodinâmica. O quadro em carbono sem emendas proporciona uma combinação de leveza e rigidez. Seus ângulos são projetados para manter a rigidez enquanto absorvem impactos.

Figura 4.2: 3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum

Fonte: Extraída do site do fabricante. [22]

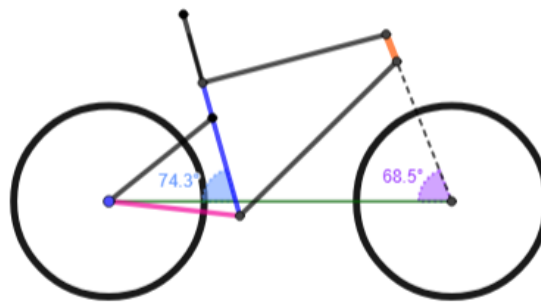
Figura 4.3: Modelo da bicicleta 3R5 Kairos Rival AXS Fulcrum

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

- **Volcano Darkside GX AXS SID** [24]: possui suspensão tanto na traseira quanto na dianteira, proporcionando maior conforto em terrenos irregulares. O ângulo da caixa de direção, de $68,5^\circ$, oferece mais estabilidade em decidas de altas velocidades, garantindo uma sensação de controle e segurança ao ciclista. Além disso, o tubo inferior traseiro é mais curto, o que torna a bicicleta ainda mais agressiva, facilitando manobras rápidas e precisas em terrenos desafiadores.

Figura 4.4: Volcano Darkside GX AXS SID

Fonte: Extraída do site do fabricante. [24]

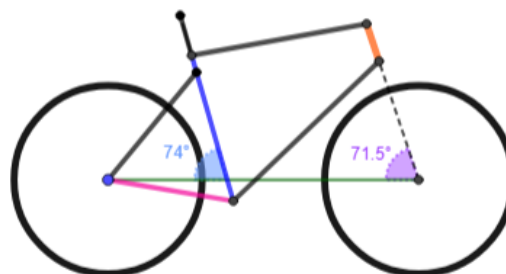
Figura 4.5: Modelo da bicicleta Volcano Darkside GX AXS SID

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

- **Spry City Urban Microshift** [23]: é uma bicicleta projetada para uso urbano, combinando funcionalidade e conforto. Ela possui quadro em alumínio proporcionando leveza e durabilidade. A geometria foi projetada para gerar uma posição de pilotagem confortável e ereta, favorecendo maior visibilidade e controle no trânsito urbano.

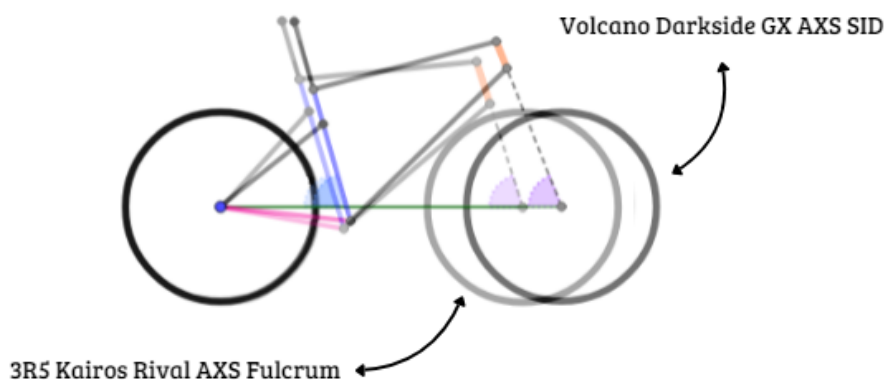
Figura 4.6: Spry City Urban Microshift

Fonte: Extraída do site do fabricante. [23]

Figura 4.7: Modelo da bicicleta Spry City Urban Microshift

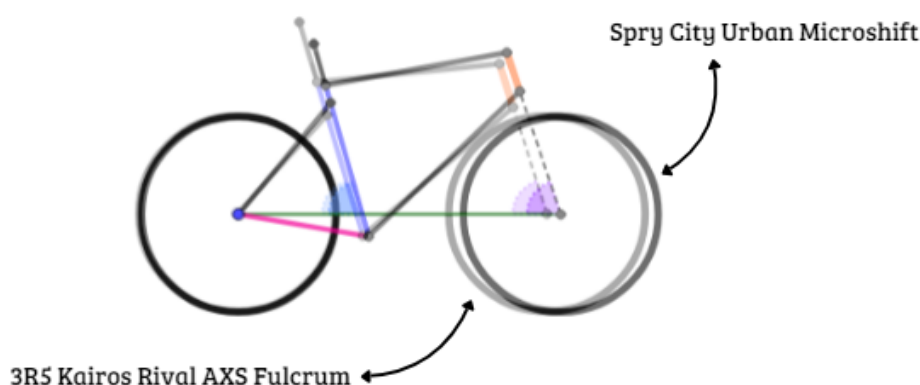
Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A seguir, apresentamos imagens sobrepostas dos modelos das bicicletas, facilitando a visualização das diferenças na geometria de cada quadro.

Figura 4.8: Imagem comparativa das bicicletas de *speed* e *mountain bike*

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

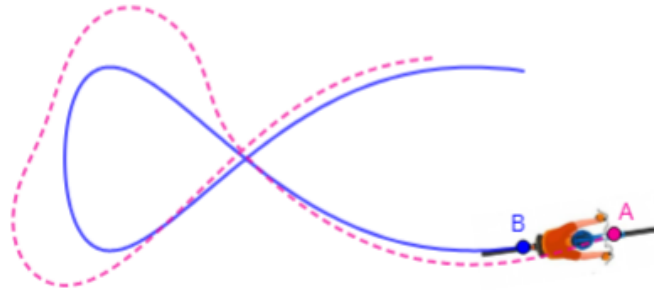
A diferença mais significativa identificada na Figura 4.8 é a distância entre eixos. A bicicleta de *mountain bike* possui uma maior distância entre eixos, o que aumenta sua estabilidade e proporciona maior conforto em terrenos acidentados. Além disso, essa configuração facilita a acomodação de suspensões e pneus mais robustos e possibilita um ângulo da caixa de direção mais agressivo, cerca de 5,5% menor que o ângulo da bicicleta de *speed*. A queda do movimento central, também apresenta grande variação. Com o centro de gravidade mais baixo, a bicicleta de *speed* ganha maior estabilidade.

Figura 4.9: Imagem comparativa das bicicletas de *speed* e ciclismo urbano

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

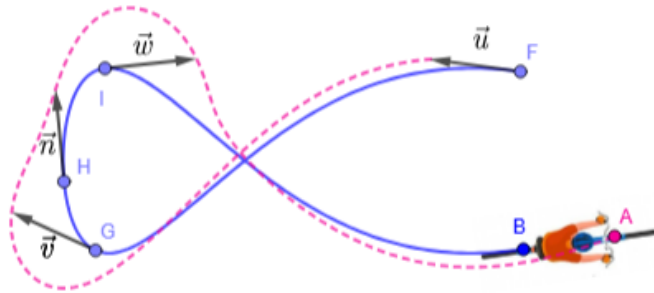
As bicicletas indicadas para *speed* e ciclismo urbano apresentam características semelhantes. Contudo, a distância entre eixos é, novamente, o elemento de maior variação. No caso da bicicleta de *speed*, a menor distância entre eixos aumenta a agilidade, favorecendo a aceleração e a manutenção da velocidade.

Na Figura 4.11, são representados os rastros produzidos pela roda dianteira (rastro rosa tracejado) e traseira (rastro azul contínuo) de uma bicicleta. Os pontos de contato das rodas dianteira e traseira com o solo são representados por A e B, respectivamente. Portanto, o comprimento c do segmento $\overline{AB}$ corresponde à distância entre eixos da bicicleta.

Figura 4.11: Par de rastros produzidos pela bicicleta

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

O segmento $\overline{AB}$ é sempre tangente à curva formada pela roda traseira, uma vez que a roda traseira é fixada ao quadro da bicicleta. Na Figura 4.12, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ e $\vec{w}$ são tangentes a curva da roda traseira nos pontos F , G , H e I , respectivamente, e têm norma igual a c , a distância entre eixos.

Figura 4.12: Vetores tangentes a curva da roda traseira

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Portanto, em geral, conhecendo o rastro gerado pela roda traseira e a distância entre os eixos, é possível determinar o rastro produzido pela roda dianteira. No entanto, o processo inverso — determinar a trajetória da roda traseira a partir do rastro deixado pela roda dianteira — é consideravelmente mais complexo, pois exige a solução de uma equação diferencial ordinária não linear. Para uma compreensão mais aprofundada desse problema, sugerimos a leitura do artigo “Geometria do Rastro de Bicicletas” [27]. Assim, nosso foco será no problema mais simples: determinar o rastro descrito pela roda dianteira com base no rastro da roda traseira, conforme mostraremos a seguir.

4.2.1 Determinando o rastro da roda dianteira

Para facilitar a compreensão desta subseção, começaremos com conceito de parametrização de curvas.

Parametrizar uma curva consiste em determinar as coordenadas (x, y) de cada um de seus pontos em função de uma outra variável chamada de parâmetro. Portanto, se $I \in \mathbb{R}$ é um intervalo e $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas em I , então a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(t) = (x(t), y(t))$, é a parametrização e $x(t)$ e $y(t)$ são ditas equações paramétricas.

Além disso, se as funções $x(t)$ e $y(t)$ são deriváveis em $t_0 \in I$, dizemos que o vetor de coordenadas $\vec{v}_{t_0} = (x'(t_0), y'(t_0))$, com origem em $(x(t_0), y(t_0))$, é o vetor velocidade. Ele tem direção tangente à curva em t_0 e indica o sentido do movimento.

Sejam $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e $\Gamma(t) = (X(t), Y(t))$ as parametrizações das curvas planas que representam os rastros das rodas traseira e dianteira, respectivamente. Note que, o vetor $\Gamma(t) - \gamma(t)$ é paralelo a $\gamma'(t)$ e tem comprimento igual a distância entre eixos.

Suponha que a bicicleta esteja se deslocando no sentido positivo do eixo x e que os pontos $A(X(t), Y(t))$ e $B(x(t), y(t))$ estejam dispostos conforme a Figura 4.13, com $X(t) > x(t)$ e $x'(t) > 0$. Nessas condições, a análise dos sinais se torna mais simples, permitindo determinar a curva do movimento sem ambiguidades decorrentes de mudanças de direção.

No entanto, se $x'(t) < 0$, a análise é análoga, mas agora o deslocamento ocorre no sentido negativo do eixo x . Como tanto o sinal de $x'(t)$ quanto o de $X(t) - x(t)$ mudam simultaneamente, a equação permanece válida.

Por outro lado, quando $x'(t) = 0$, estamos diante de um ponto de parada ou de possível mudança de direção. Essa situação gera indeterminações que não serão tratadas nesta análise.

Figura 4.13: Posição da bicicleta no instante t



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Considerando a inclinação da reta tangente a $\gamma(t)$ no ponto B, temos:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{Y(t) - y(t)}{X(t) - x(t)} \implies Y(t) - y(t) = [X(t) - x(t)] \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (4.1)$$

Calculando a distância c entre os pontos A e B, temos:

$$c^2 = [X(t) - x(t)]^2 + [Y(t) - y(t)]^2. \quad (4.2)$$

Substituindo $Y(t) - y(t)$ da equação 4.1 em 4.2, obtemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= [X(t) - x(t)]^2 + \left[[X(t) - x(t)] \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)} \right]^2 \\ &= [X(t) - x(t)]^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2 \right] \\ &= [X(t) - x(t)]^2 \cdot \left[\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{(x'(t))^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como $X(t) - x(t) > 0$ e $x'(t) > 0$, segue que:

$$X(t) = x(t) + c \cdot \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \quad (4.4)$$

Substituindo a expressão para $X(t)$, encontrada em 4.4, na equação 4.1, obtemos:

$$Y(t) = y(t) + c \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \quad (4.5)$$

Desta forma, concluímos que a curva da roda dianteira $\Gamma(t)$ é dada por:

$$\Gamma(t) = \left(x(t) + c \cdot \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, y(t) + c \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right). \quad (4.6)$$

Com o propósito de exemplificar, considere que a função $\gamma : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (t^2, 5 \sin(t))$, represente a curva descrita pela roda traseira de uma bicicleta, cuja distância entre eixos é igual a 5 unidades. Então, pela equação 4.6, a função que representa trajetória da roda dianteira será:

$$\Gamma(t) = \left(t^2 + \frac{10t}{\sqrt{4t^2 + 25 \cos^2(t)}}, 5 \sin(t) + \frac{5 \cos(t)}{\sqrt{4t^2 + 25 \cos^2(t)}} \right).$$

Ao reproduzir essas curvas no plano cartesiano, com auxílio do GeoGebra¹, obtemos o par de rastros mostrado no início dessa subseção, a Figura 4.11.

O conteúdo aqui apresentado, em geral, é de complexidade avançada para a maioria dos alunos da educação básica. Por outro lado, é importante considerar os estudos que

¹GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica utilizado para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma.[32]

defendem a inclusão de noções de cálculo e derivadas no Ensino Médio, integradas ao estudo de funções. Autores como Ávila [5, 4], Araújo [2] e Silva [53] apoiam essa perspectiva e sugerem que esses conteúdos sejam introduzidos de maneira simplificada e com menor rigor. Eles argumentam que essa abordagem pode contribuir para a melhoria do desempenho dos estudantes em Cálculo no nível superior, além de facilitar a transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior.

Assim, o professor pode aproveitar o forte apelo estético e dinâmico dos rastros das bicicletas, utilizando simulações no GeoGebra para despertar a curiosidade dos alunos sobre tópicos mais específicos. Uma abordagem interessante é usar funções polinomiais para representar o rastro da roda traseira, uma vez que a derivada dessas funções é relativamente simples.

4.3 Geometria das rodas

Esta seção foi inspirada nos trabalhos de Carvalho e Oliveira [16], Costa [20], Hilário [31], e Hall e Wagon [30].

As bicicletas possuem, tradicionalmente, rodas em formato circular devido ao raio constante do círculo, o que proporciona um deslocamento suave em superfícies planas. Em contraste, esse mesmo movimento suave não seria possível com rodas de formatos poligonais.

Um exemplo curioso é apresentado no episódio “Super Vendedor Pré-histórico” [19] do clássico desenho Pica-Pau, o irreverente pássaro se depara com um homem andando em uma bicicleta de rodas quadradas. A animação destaca os movimentos desajeitados e engraçados produzidos pela roda não convencional ao se deslocar em uma superfície plana.

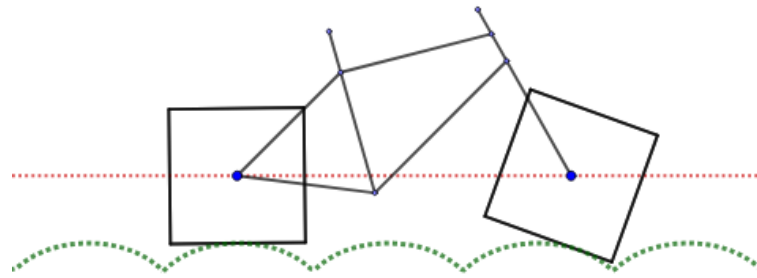
Figura 4.14: Bicicleta de rodas quadradas no desenho Pica-pau



Fonte: *Frame* (2:46) do episódio “Super Vendedor Pré-histórico” [19].

Diante disso, podemos questionar: qual o formato mais adequado da estrada para que uma bicicleta com rodas poligonais realize um deslocamento suave? Na Figura 4.15, é apresentado o formato ideal da pista para uma bicicleta com rodas quadradas. Essa forma compensa a diferença entre a distância do centro da roda ao solo, garantindo que o centro se mova ao longo de uma reta horizontal, sem oscilações. Isso permite que a bicicleta com rodas poligonais realize um deslocamento suave, sem abalos bruscos, proporcionando uma experiência de pedalada mais confortável e estável.

Figura 4.15: Estrada para bicicletas de rodas quadradas

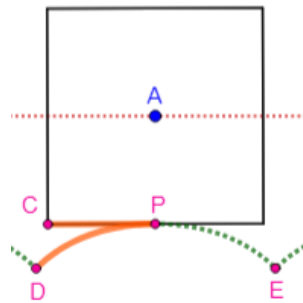


Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Conforme mostra a Figura 4.16,

- i)* a cada instante de tempo t , há um único ponto P de contato entre a roda e a estrada;
- ii)* considerando que a roda não desliza na estrada, o comprimento do arco percorrido no bordo da roda é igual ao descrito sobre a pista. Isto é, o comprimento de $\overline{CP}$ é igual com comprimento do arco $\widehat{DP}$;
- iii)* o centro A da roda se desloca horizontalmente em uma reta.

Figura 4.16: Roda em contato com a estrada



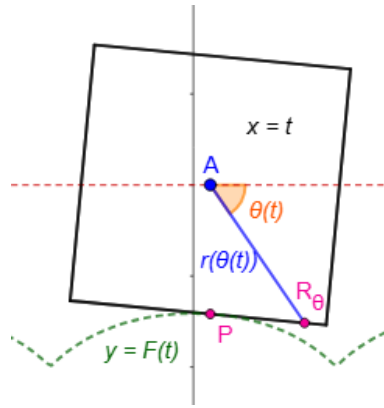
Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A partir disso, nosso objetivo é determinar a função que descreve o trecho da estrada entre os pontos D e E , uma vez que essa função é periódica.

Considere que o centro da roda está inicialmente posicionado em $(0,0)$, que a função $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e seu gráfico representa a estrada. Portanto, $F(x) < 0$ para todo $x \in I$. Além disso, se t é o tempo decorrido entre $x = 0$ e $x = T$, podemos parametrizar a curva que descreve a estrada como $\gamma(t) = (t, F(t))$, com $t \in [0, T]$.

Considere a função $r : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, que descreve o “raio” da roda em relação ao centro A . Neste caso, é conveniente representá-la em coordenadas polares. Portanto, denotemos por θ o ângulo de posição, medido no sentido horário a partir do eixo positivo das abscissas, conforme ilustrado na Figura 4.17. A função $r(\theta)$ representa a distância entre o ponto R_θ , localizado no bordo da roda, e o centro A . Além disso, dado que a roda da bicicleta executa um movimento combinado de rotação e translação, a variação angular pode ser descrita por meio da função paramétrica $\Theta(t) = (t, \theta(t))$.

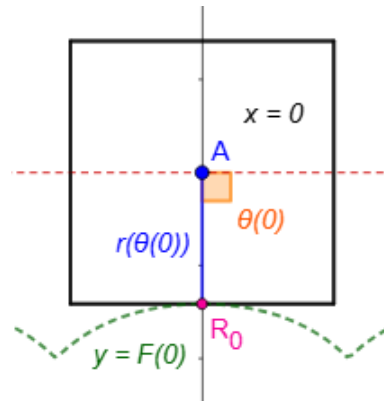
Figura 4.17: Funções roda-estrada



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Quando $t = 0$, o ponto de contato da roda com a estrada encontra-se no eixo das ordenadas.

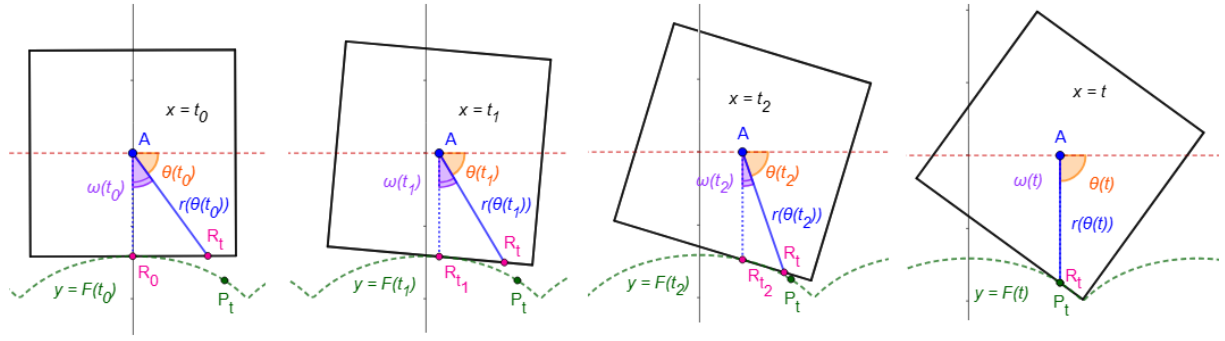
Figura 4.18: Funções roda-estrada no instante $x = 0$



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Na Figura 4.19, é possível observar a variação dos ângulos presentes no movimento da roda nos instantes $t_0 < t_1 < t_2 < t$ até que o ponto R_t no bordo da roda toque a estrada no ponto P_t .

Figura 4.19: Movimento da roda



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

O ângulo utilizado para descrever a posição do ponto $R_t = P_t = (t, F(t))$, localizado no bordo da roda e em contato com a estrada no instante t , é o complementar do ângulo θ , denominado ω , conforme ilustrado na Figura 4.19. Assim, em coordenadas polares, o ponto R_t é expresso como $R_t = (\theta(t), r(\theta(t)))$, onde a relação entre os ângulos é dada por $\theta(t) = -\omega(t) - \frac{\pi}{2}$.

Desta forma, as funções devem satisfazer as condições a seguir:

1. O ponto de contato inicial ocorre em $\gamma(0)$, onde $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$;
2. Em cada instante t , o comprimento do arco delimitado por $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$ é igual ao comprimento da curva do bordo da roda entre $\Theta(0)$ e $\Theta(t)$;
3. Em cada ponto P de contato entre a roda e a estrada, tem-se $r(\theta(t)) = -F(t)$.

Dessa forma, com base no item 2, podemos concluir que o comprimento do arco da curva γ , entre os pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$, é equivalente ao comprimento do arco no bordo da roda calculado em coordenadas polares no intervalo de $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$ a $\theta(t)$. Assim, temos:

$$L(\gamma(t)) = \int_0^t \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (4.7)$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, derivando ambos os lados em relação a t e elevando ao quadrado, obtemos:

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = \left[(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right] \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= (r(\theta))^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \quad (4.8)$$

Derivando a igualdade da condição 3, também em relação a t , concluímos que:

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Deste modo, substituindo essa expressão na equação 4.8, obtemos:

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = (r(\theta))^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 \implies \frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{r(\theta)}. \quad (4.9)$$

Como θ é uma função crescente e $r(\theta) > 0$, então: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r(\theta)}$.

Novamente pela condição 3, temos que:

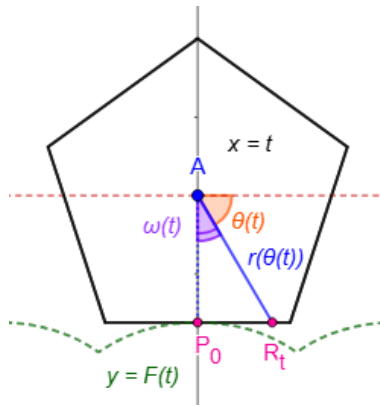
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{-F(t)} \implies F(t) = -\frac{1}{\theta'(t)}. \quad (4.10)$$

Portanto, a equação diferencial 4.10 fornece a relação entre a roda e a estrada ideal para um movimento suave.

Agora, suponha que a roda seja um polígono regular de n lados de comprimento L .

Note que é suficiente considerar $\omega \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$, intervalo correspondente ao ângulo necessário para que a roda percorra um lado do polígono, resultando, consequentemente, no traçado de um arco sobre a pista. Logo, $\theta \in \left[-\frac{\pi(n+2)}{2n}, \frac{\pi(2-n)}{2n}\right]$.

Figura 4.20: Roda pentagonal



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Seja a o apótema do polígono regular de n lados de medida L . Então, $a = \frac{L}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

Portanto, o cosseno de ω é dado por:

$$\cos(\omega) = \frac{a}{r(\theta)}. \quad (4.11)$$

Como $\theta(t) = -\omega(t) - \frac{\pi}{2}$, então:

$$\cos(\omega) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta). \quad (4.12)$$

Logo,

$$-\sin(\theta) = \frac{a}{r(\theta)} \implies r(\theta) = -\frac{a}{\sin(\theta)}. \quad (4.13)$$

Pela equação 4.10 e pela condição 3, podemos concluir que:

$$\frac{1}{\theta'(t)} = -\frac{a}{\sin(\theta(t))} \implies \theta'(t) = -\frac{\sin(\theta(t))}{a}. \quad (4.14)$$

Resolveremos a equação diferencial 4.14, por partes.

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sin(\theta(t))}{a} \implies \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = -\frac{dt}{a}. \quad (4.15)$$

De onde temos:

$$\int \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = -\int \frac{dt}{a}. \quad (4.16)$$

Primeiramente resolveremos a integral:

$$\int \frac{d\theta}{\sin(\theta)}. \quad (4.17)$$

Tomando $\theta = 2u$, temos $d\theta = 2du$. Além disso, como $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$.

Substituindo em 4.17, obtemos:

$$\int \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = \int \frac{2}{\sin(2u)} du = \int \frac{2}{2\sin(u)\cos(u)} du = \int \frac{1}{\sin(u)\cos(u)} du. \quad (4.18)$$

Sabendo que $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$ e substituindo em 4.18, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(u)\cos(u)} du &= \int \frac{\sin^2(u) + \cos^2(u)}{\sin(u)\cos(u)} du \\ &= \int \frac{\sin^2(u)}{\sin(u)\cos(u)} du + \int \frac{\cos^2(u)}{\sin(u)\cos(u)} du \\ &= \int \frac{\sin(u)}{\cos(u)} du + \int \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Considerando a expressão acima, tome $v = \cos(u)$ na primeira parcela e $w = \sin(u)$ na segunda parcela. De onde, temos $dv = -\sin(u)du$ e $dw = \cos(u)du$. Substituindo, encontramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)} du + \int \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)} du &= - \int \frac{1}{v} dv + \int \frac{1}{w} dw \\
&= -\ln |v| + \ln |w| + K_1 \\
&= \ln \left| \frac{w}{v} \right| + K_1 \\
&= \ln \left| \frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)} \right| + K_1 \\
&= \ln |tg(u)| + K_1.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Como $\theta = 2u$, concluímos que:

$$\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| + K_1, \text{ onde } K_1 \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

Por outro lado, temos:

$$- \int \frac{dt}{a} = -\frac{t}{a} + K_2, \text{ onde } K_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

Dos resultados 4.21 e 4.22, obtemos:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| = -\frac{t}{a} + K_3, \text{ onde } K_3 \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

Como $-\pi < \theta < 0$, temos que $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0$. Nesse intervalo, a tangente assume valores negativos. Assim, a solução geral da equação diferencial 4.14 é dada por:

$$\theta(t) = -2 \cdot \operatorname{arctg} \left(K \cdot e^{-\frac{t}{a}} \right), \text{ sendo } K \text{ uma constante}. \tag{4.24}$$

Pelas condições iniciais, $t = 0$ e $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$, concluímos que:

$$\theta(t) = -2 \cdot \operatorname{arctg} \left(e^{-\frac{t}{a}} \right). \tag{4.25}$$

Retomando a equação 4.13, temos:

$$r(\theta(t)) = -\frac{a}{\operatorname{sen} \left(-2 \cdot \operatorname{arctg} \left(e^{-\frac{t}{a}} \right) \right)}. \tag{4.26}$$

Pela condição 3, obtemos:

$$F(t) = -\frac{a}{\sin\left(2 \cdot \arctg\left(e^{-\frac{t}{a}}\right)\right)}. \quad (4.27)$$

Como $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, temos:

$$F(t) = -\frac{a}{2 \sin\left(\arctg\left(e^{-\frac{t}{a}}\right)\right) \cos\left(\arctg\left(e^{-\frac{t}{a}}\right)\right)}. \quad (4.28)$$

Sabendo que $\sin(\arctg(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $\cos(\arctg(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, obtemos:

$$F(t) = -a \cdot \frac{1 + e^{-\frac{2t}{a}}}{2e^{-\frac{t}{a}}} \implies F(t) = -a \cdot \frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2}. \quad (4.29)$$

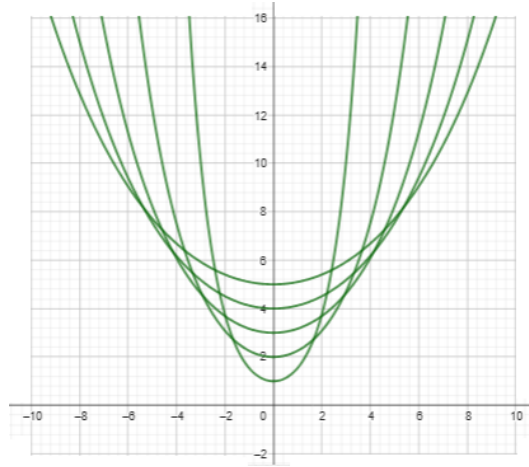
No entanto, $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ indica a função cosseno hiperbólico. Desta forma,

$$F(t) = -a \cdot \cosh\left(\frac{t}{a}\right). \quad (4.30)$$

Reescrevendo a função $F(t)$ com relação ao número de lados n e o comprimento L do lado do polígono, concluímos que:

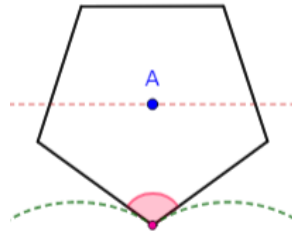
$$F(t) = \frac{-L}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \cosh\left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{L} \cdot t\right). \quad (4.31)$$

A função hiperbólica 4.30 define uma família de curvas conhecidas como catenárias, reconhecidas por suas diversas aplicações. Um exemplo clássico é a análise de cabos uniformes suspensos sob a ação da gravidade, como ocorre em linhas de transmissão. Embora o gráfico dessa função se assemelhe à forma de uma parábola, as catenárias apresentam características matemáticas e físicas distintas, principalmente no que diz respeito ao comportamento da curvatura e à distribuição das tensões. Um estudo interessante sobre esse tema pode ser encontrado no artigo “Aspectos da Parábola e da Catenária: Um Estudo à Luz da Geometria Dinâmica” [56].

Figura 4.21: Gráfico de uma família de funções cosseno hiperbólico

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Resta, portanto, mostrar que o ângulo interno do polígono regular se ajusta de maneira precisa na junção dos ramos da catenária. Esse ajuste resulta da simetria e da regularidade intrínsecas ao polígono regular, que permitem uma compatibilidade geométrica com os ramos da catenária no ponto de junção, assegurando um encaixe preciso.

Figura 4.22: Encaixe da roda poligonal na junção dos arcos de catenária

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A inclinação da reta tangente à catenária é descrita pela função derivada:

$$F'(t) = -\sinh\left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{L} \cdot t\right).$$

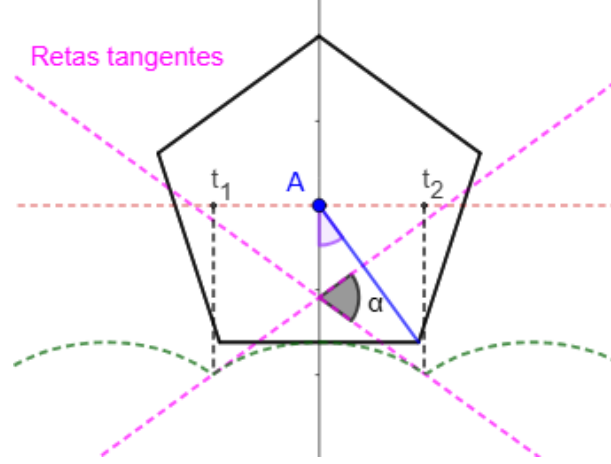
Considere t_1 e t_2 como os extremos de um arco de catenária, definidos de forma a garantir que as inclinações das tangentes sejam simétricas em relação ao vértice da catenária. Em particular, buscamos que: $F'(t_1) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ e $F'(t_2) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Resolvendo essas condições, os valores de t_1 e t_2 obtidos são:

$$t_1 = \frac{-L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \text{ e } t_2 = \frac{L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Esses valores de t_1 e t_2 delimitam um arco da catenária, com tangentes inclinadas de forma precisa para corresponder à geometria de um polígono regular.

Figura 4.23: Retas tangentes à catenária em t_1 e t_2



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Seja α o menor ângulo formado pelas retas tangentes à catenária em t_1 e t_2 . O ângulo entre essas retas pode ser calculado usando

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|,$$

onde m_1 e m_2 são as inclinações das tangentes em t_2 e t_1 , respectivamente.

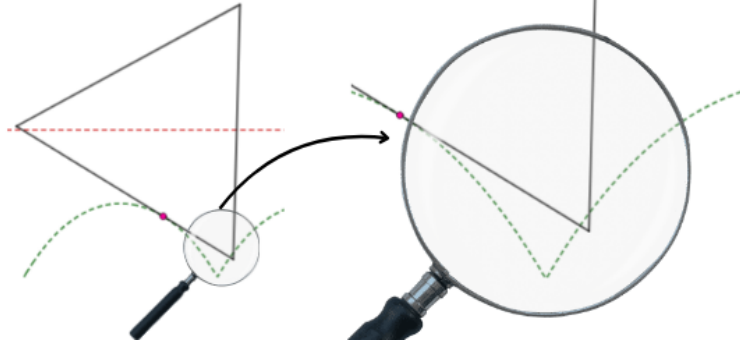
Para a catenária, temos $m_1 = F'(t_2) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ e $m_2 = F'(t_1) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Substituindo os valores de m_1 e m_2 e simplificando a expressão, obtemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Como $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x)}$, temos que $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

O ângulo suplementar a α nos permite concluir que o ângulo formado na junção dos arcos mede $\pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi(n-2)}{n}$, ou seja, é igual a medida de cada ângulo interno do polígono regular. Entretanto, quando $n = 3$, esse ângulo é menor que $\frac{\pi}{2}$, fazendo com que o vértice do polígono colida com a catenária. Isso ocorre, porque a catenária é uma curva que possui uma curvatura relativamente acentuada perto do vértice. Quando o ângulo interno α do polígono é pequeno, os arcos formados por duas catenárias se inclinam abruptamente ao redor do vértice e a junção entre os dois arcos acabam formando um ângulo muito fechado, colocando o vértice dentro da região ocupada pela curva. Esse comportamento leva à formação de dois pontos de contato da roda com a pista, inviabilizando o encaixe geométrico esperado.

Figura 4.24: Colisão da roda triangular com o arco de catenária

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Além disso, utilizando os valores de t_1 e t_2 , determinamos o intervalo da função $F(t)$ correspondente a um arco de catenária. Assim, a expressão para $F(t)$ é dada por:

$$F(t) = \frac{-L}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \cosh\left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{L} \cdot t\right), \quad (4.32)$$

$$\text{onde } t \in \left[\frac{-L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}, \frac{L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right].$$

Por outro lado, considerando $P = \frac{L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, que representa a metade da distância entre duas junções consecutivas, podemos definir a família de funções $F_k(t)$, com $k \in \mathbb{Z}$, da seguinte forma:

$$F(t) = \frac{-L}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \cosh\left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{L} \cdot (t - 2k \cdot P)\right). \quad (4.33)$$

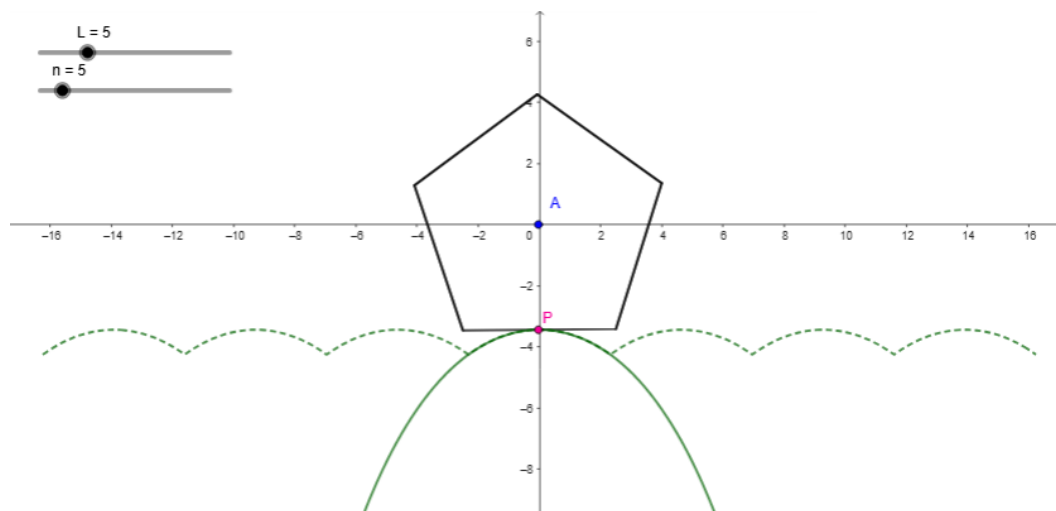
Substituindo a expressão de P e realizando simplificações, obtemos a forma final da família de funções $F_k(t)$:

$$F_k(t) = \frac{-L}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \cosh\left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{L} \cdot t - 2k \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right), \quad (4.34)$$

$$\text{onde } k \in \mathbb{Z} \text{ e } t \in I_k = \left[(2k-1) \cdot \frac{L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}, (2k+1) \cdot \frac{L \cdot \sinh^{-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right].$$

A representação gráfica da família de funções $F_k(t)$ nos permite visualizar a forma geral da estrada gerada por essa construção. Na Figura 4.25, cada arco da estrada, correspondente a um valor de k , é exibida de forma contínua, evidenciando a periodicidade e a suavidade das conexões. Essa ilustração ajuda a compreender como os diferentes valores de k moldam a estrada completa e destacam a simetria e as propriedades geométricas associadas ao modelo.

Figura 4.25: Representação gráfica de uma família de funções $F_k(t)$ com $-3 \leq k \leq 3$



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

O estudo das estradas projetadas para bicicletas de rodas poligonais abrange diversos conteúdos da educação básica, os quais podem ser trabalhados por meio de uma abordagem lúdica. Entre esses conteúdos, destacam-se os ângulos internos dos polígonos que se ajustam aos arcos de catenária, a relação entre o ângulo central de um polígono regular e a distância percorrida, bem como o comprimento do arco de catenária que coincide com a medida do lado da roda. Esses conceitos são fundamentais para o desenvolvimento do jogo pedagógico proposto, que visa integrar as geometrias discutidas neste capítulo de forma interativa e divertida.

No próximo capítulo, discutiremos a dimensão lúdica da aprendizagem, com ênfase no uso de jogos como metodologia de ensino, analisando como a sua utilização pode facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, além de explorar os desafios inerentes a essa abordagem.

5 Jogos no ensino de Matemática

O grande desafio de ensinar matemática é acentuado pela percepção negativa que muitos estudantes têm da disciplina, considerando-a difícil, entediante ou excessivamente abstrata. Isso leva a um desinteresse crescente por parte dos alunos, resultando em baixo engajamento nas atividades tradicionais de ensino. Em resposta a essa situação, muitos professores buscam abordagens alternativas para tornar o processo de aprendizagem mais interessante e dinâmico. Nesse cenário, Silva [25] aponta que

Ensinar por meio de jogos é um caminho para o educador desenvolver aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir em igualdade de condições com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola, despertando ou estimulando sua vontade de freqüentar com assiduidade a sala de aula e incentivando seu envolvimento nas atividades, sendo agente no processo de ensino e aprendizagem, já que aprende e se diverte, simultaneamente. (Silva, 2005, p. 26).

Assim, os jogos como recurso didático configuram-se como uma ferramenta poderosa no Ensino de Matemática, proporcionando um ambiente de aprendizagem divertido e envolvente devido ao seu caráter lúdico. Além disso, contribuem no desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais. Nesse sentido, Smole, Diniz e Milani [55] afirmam que

O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado *raciocínio lógico*. As habilidades desenvolvem-se porque, ao jogar, os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada; refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. Podemos dizer que o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática. (Smole, Diniz e Milani, 2007, p. 9)

Baseados nessa concepção, neste capítulo abordaremos os benefícios e desafios do uso de jogos como metodologia de ensino, além de discutir o planejamento e a avaliação dentro do contexto dos jogos.

5.1 A dimensão lúdica na aprendizagem

Brincar é uma parte fundamental do desenvolvimento da criança, sendo uma atividade espontânea, agradável e prazerosa por si só, sem caráter obrigatório. Contudo, Grando [28] acrescenta que a necessidade de participar de atividades lúdicas não se restringe à infância, permanecendo uma demanda constante ao longo da vida. Essa necessidade se manifesta de diversas formas no cotidiano, como ao se equilibrar no meio-fio, por exemplo.

Por outro lado, Macedo, Petty e Passos [36] afirmam que jogar é o ato de brincar, mas com a adição de regras e uma meta bem definida. Nesse sentido, o jogo pode ser classificado como uma evolução da brincadeira, pois exige organização, objetivos e papéis demarcados.

Para identificar a presença da dimensão lúdica nos processos de aprendizagem, no livro *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar* [36], os autores destacam cinco qualidades essenciais que uma atividade escolar deve apresentar, são elas: prazer funcional, desafio e surpresa, possibilidades, dimensão simbólica e expressão construtiva. A seguir, detalharemos cada uma dessas qualidades.

1. *Prazer funcional*

O interesse gerado por jogos e brincadeiras está associado ao prazer que provocam. O prazer lúdico ou funcional é razão pela qual as crianças realizam qualquer tarefa. Para elas o foco está na diversão, e os ganhos associados à aprendizagem são secundários. Nesse sentido, Macedo, Petty e Passos [36] afirmam que, nessas atividades, o que vale é

[...] a alegria, que muitas vezes também é sofrimento, de exercitar um certo domínio, de testar uma certa habilidade, de transpor um obstáculo ou de vencer um desafio. Em jogos e brincadeiras, as tarefas ou atividades não são meios para outros fins, são fins em si mesmos. Na perspectiva das crianças, não se joga ou brinca para ficar mais inteligente, para ser bem-sucedido quando adulto ou para aprender uma matéria escolar. Joga-se e brinca-se porque isso é divertido, desafiador, promove disputas com os colegas, possibilita estar juntos em um contexto que faz sentido, mesmo que às vezes frustrante e sofrido, por exemplo, quando se perde uma partida ou não se consegue uma certa realização. (Macedo, Petty e Passos, 2005, p. 17)

2. *Desafio e surpresa*

As situações-problema são um meio eficaz de promover a aprendizagem, pois apresentam desafios que exigem a aplicação de diversos conhecimentos e habilidades

para serem superados. Os jogos, por sua vez, estão repletos de situações-problema, tornando-se uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento de competências cognitivas. Nesse contexto, o elemento lúdico está intrinsecamente associado ao aspecto desafiador e surpreendente.

Lúdico, nesse sentido, é equivalente a desafiador, a algo que nos pega por sua surpresa, pelo gosto de repetir em outro contexto. Surpreendente significa que não se controla todo o resultado, que algo tem sentido de investigação, de curiosidade, de permissão para a pessoa dizer o que pensa ou sente, de expressar suas hipóteses. (Macedo, Petty e Passos, 2005, p. 19)

Essa visão é corroborada pela percepção de Smole, Diniz e Milani [55]:

[...] a dimensão lúdica envolve desafio, surpresa, possibilidade de fazer de novo, de querer superar os obstáculos iniciais e o incômodo por não controlar todos os resultados. Esse aspecto lúdico faz do jogo um contexto natural para o surgimento de situações-problema cuja superação exige do jogador alguma aprendizagem e um certo esforço na busca por sua solução. (Smole, Diniz e Milani, 2007, p. 10)

3. Possibilidades

As atividades propostas devem ser, na visão do sujeito, necessárias e possíveis. A necessidade pode ser entendida a partir de duas perspectivas: afetiva e cognitiva. Sob o ponto de vista afetivo, a atividade é necessária porque não realizá-la gera desconforto ou insatisfação. Cognitivamente, uma atividade necessária deve ser pensável ou realizável, ou seja, o indivíduo deve dispor de requisitos mínimos para realizá-la, ainda que de modo incompleto. Tarefas impossíveis geram frustração e desinteresse. Nesse contexto, a mentalidade lúdica se manifesta na capacidade de navegar entre o impossível, o possível e o necessário. Segundo Piaget [47] ,

[...] o possível não é algo observável, mas o produto de uma construção do sujeito, em interação com as propriedades do objeto, inserindo-as em interpretações devidas às atividades que determinam, simultaneamente, a abertura dos possíveis cada vez mais numerosos, cujas interpretações são cada vez mais ricas. (Piaget, 1985, p. 7).

4. Dimensão simbólica

A perspectiva simbólica relaciona-se com a utilização de símbolos para representar objetos e situações que fazem sentido para o indivíduo. Durante as brincadeiras, as crianças criam cenários, constroem personagens e simulam acontecimentos. À medida que o jogo simbólico evolui, esses esquemas tornam-se cada vez mais elaborados e

ricos. Assim, o lúdico transforma-se em simbólico, ampliando a compreensão do mundo por meio da reflexão e do questionamento. Nesse contexto, o simbolismo lúdico se manifesta através das relações de correspondência, de maneira análoga às metáforas. Portanto, as atividades devem ser motivadas e históricas, isto é, apresentar uma correlação para o sujeito ou para o grupo. Nesse sentido, Macedo, Petty e Passos [36] afirmam que:

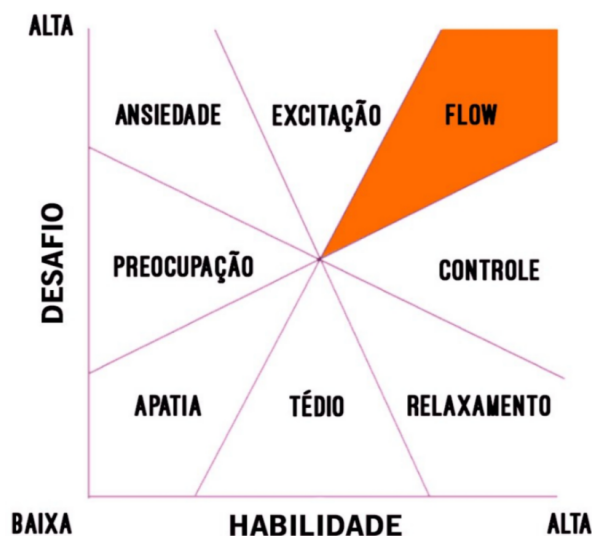
Propostas, por mais importantes que sejam, que não têm história, ou seja, que não têm um correspondente pessoal ou grupal, não fazem sentido para as crianças. Por isso, geram desatenção, desinteresse ou são motivos para chacotas e piadas. O simbolismo lúdico significa que aquilo que se faz tem um correspondente, qualquer que seja ele, para a criança. (Macedo, Petty e Passos, 2005, p. 20-21)

5. *Expressão construtiva*

Numa atividade, a dimensão construtiva caracteriza-se pela exploração de diferentes pontos de vista e pelas múltiplas formas de expressão. Nesse contexto, a perspectiva construtiva é marcada por dois aspectos. O primeiro é a exploração pouco estruturada do objeto de estudo, ou seja, um passeio sem roteiro predeterminado sob diversos olhares. O segundo aspecto é um exame mais focado no objetivo da tarefa. Assim, ela combina uma investigação livre e flexível, que permite o prazer funcional, com uma análise mais focada e direcionada nos objetivos. Portanto, o lúdico está associado à maneira como esses dois aspectos são relacionados e incorporados. Assim, é possível concluir que:

[...] a construção supõe prazer funcional, enfrentar e superar desafios, tornar possível e jogar com significações. Se a dimensão lúdica pode estar presente e animar nossas formas de fazer isso, então podemos ser criativos e fazer as coisas de modo melhor, mais saudável e com mais sentido. (Macedo, Petty e Passos, 2005, p. 22)

Em consonância com as qualidades apresentadas anteriormente, temos a Teoria do *Flow*, desenvolvida pelo psicólogo húngaro Mihaly Csíkszentmihályi. Como destaca Campos [14], Csíkszentmihályi investigava quais atividades proporcionavam um estado de prazer e alegria, envolvendo completamente o indivíduo e fazendo-o desconsiderar fatores como tempo e fadiga. Esse estado, conhecido como *flow*, é intrinsecamente motivador, independentemente das recompensas externas. Nele, ocorre profunda concentração e imersão em uma atividade, onde há uma harmonia entre as habilidades do indivíduo e o desafio proposto.

Figura 5.1: Gráfico do *flow* segundo Csíkszentmihályi

Fonte: Weiller (2023) [60]

Pereira *et al.* [44] apontam os oito elementos que caracterizam o estado de *flow*, segundo Csíkszentmihályi. São eles:

[...] noção e entendimento claros do que é necessário fazer a cada momento; *feedback* imediato de seu desempenho na tarefa; equilíbrio entre as capacidades e/ou habilidades do indivíduo e o nível de dificuldade da tarefa ou desafio; profunda concentração; desconsideração de conteúdo irrelevante para a tarefa; senso de controle sobre a atividade; perda da noção de tempo; e sensação de gratificação e prazer. (Pereira *et al.*, 2022, p.3)

Portanto, uma atividade escolar com caráter lúdico deve criar condições para que o aluno alcance um estado de *flow*. Esse estado inclui qualidades como prazer funcional, desafio e surpresa, possibilidades, dimensão simbólica e expressão construtiva, aspectos que, segundo Macedo, Petty e Passos [36], são essenciais para a identificação da dimensão lúdica.

Nesse contexto, os jogos podem criar um ambiente propício para o *flow*, favorecendo a aprendizagem. No entanto, é importante destacar que tanto fatores internos quanto externos influenciam o estado de *flow*. Assim, Weiller [60] afirma que, mesmo que o jogo ofereça desafios adequados às habilidades do indivíduo e apresente objetivos e regras claros, a experiência de *flow* dependerá da percepção pessoal do jogador em relação à atividade.

5.2 “Ruídos” de aprendizagem

Ao introduzir uma situação de jogo no contexto escolar, os alunos precisam entender o material, as regras e os objetivos propostos. No entanto, as estratégias e ações de cada jogador podem variar, refletindo diferentes habilidades e esquemas de aprendizado.

De acordo com Macedo, Petty e Passos [36], as competências adquiridas em ambientes de jogos podem ser transferidas para o contexto escolar, assim como as dificuldades enfrentadas nos jogos podem ajudar a identificar desafios na escola. No entanto, para que isso ocorra, é essencial que o professor acompanhe as partidas, realizando intervenções necessárias para estimular a reflexão, corrigir erros e propor desafios que despertem novas habilidades.

Ao observar atentamente a dinâmica dos jogos analisando os erros cometidos, o professor pode identificar os “ruídos” de aprendizagem, isto é, os fatores que interferem na aprendizagem dos alunos. Nesse contexto, os autores [36] sugerem três hipóteses para explicar esses erros: incompreensão das regras, desatenção durante o jogo e insucesso, mesmo com dedicação ao jogo.

No primeiro caso, o professor deve revisar as regras com o aluno, esclarecendo os erros e propondo soluções. Em relação à desatenção, é necessário incentivar o aluno a refletir sobre suas ações e planejar as próximas jogadas com antecedência. No último caso, é importante reconhecer o esforço do estudante e incentivar o uso de outras estratégias que possam gerar melhores resultados. O fundamental é compreender os esquemas utilizados pelos discentes para enfrentar os desafios, a fim de subsidiar intervenções mais precisas e eficazes. Um aspecto interessante a ser destacado é que, no ambiente de jogo, as consequências dos erros são minimizadas, o que permite aos estudantes desenvolverem autoconfiança e autonomia.

Além disso, é imprescindível que o professor ajude os estudantes a desenvolverem o autoconhecimento por meio da análise e da reflexão sobre suas condutas nos jogos. Isso ampliará a capacidade dos alunos de descreverem o que sabem, assim como suas potencialidades e dificuldades.

Outros “ruídos” de aprendizagem enfrentados no ambiente escolar incluem o desinteresse e a indisciplina dos alunos. O desinteresse por tarefas muitas vezes decorre da falta de compreensão do propósito da atividade. Frequentemente, os estudantes não percebem a necessidade de aprender algo que não tem uma aplicação imediata. Contudo, como professores, sabemos que muitas atividades são planejadas para desenvolver habilidades e conhecimentos que serão valiosos no futuro, mesmo que sua aplicação não seja iminente.

Nesse sentido, é possível afirmar que:

[...] do ponto de vista das crianças, a ação de jogar em si é significativa, o que justifica seu valor e envolvimento. Do ponto de vista profissional, a ação de jogar é meio para se trabalhar a construção, a conquista ou a consolidação de determinados conteúdos, atitudes e competências. Trabalhar conceitos abstratos por meio de situações ilustrativas é um recurso interessante e ajuda os alunos a encontrarem sentido nas exigências e demandas escolares. (Macedo, Petty e Passos, 2005, p. 30.)

No contexto dos jogos, a indisciplina é um aspecto importante a ser abordado, pois é essencial que os alunos desenvolvam autodisciplina, reconheçam autoridades e regras e adotem um comportamento “adequado”.

A autodisciplina refere-se a um sistema de controle interno desenvolvido pela criança, mas que requer o auxílio de um adulto para ser plenamente estabelecido. Ela permite que indivíduos se mantenham focados, organizados e persistentes. Em um ambiente de jogo, a autodisciplina se manifesta no respeito às regras e às autoridades, enriquecendo o desafio. Dessa forma, os jogos constituem um importante auxílio na construção do autocontrole.

Os jogos também facilitam a compreensão da necessidade de um ambiente regado e do reconhecimento de autoridades. Através deles, os alunos podem perceber a importância de seguir normas e entender as consequências de desrespeitá-las. Dessa forma, os jogos ajudam os estudantes a reconhecer limites e a estabelecer uma relação de respeito e cooperação com o professor, fundamentada em diálogos, combinados e acordos.

Além disso, os jogos facilitam a compreensão dos alunos sobre comportamentos adequados, estabelecendo um paralelo entre ser um bom aluno e ser um bom jogador. Por exemplo, a atenção dedicada a entender as dinâmicas do jogo e as ações dos jogadores pode ser comparada ao comportamento atento nas aulas e à percepção das ações dos professores e colegas. Por outro lado, aprender estratégias de jogo observando os acertos e erros dos adversários pode ser relacionado a aprender com as dúvidas e erros dos colegas.

É importante destacar que o comportamento “adequado” não está relacionado a uma postura passiva ou submissa, nem mesmo à necessidade de acertar sempre. Em vez disso, refere-se à observação atenta e à interpretação do contexto, valorizando a participação ativa, o diálogo e a argumentação construtiva.

5.3 Planejando o uso de jogos

Para que um jogo contribua positivamente para a aprendizagem, é essencial que ele integre harmoniosamente as dimensões lúdica e educativa. O jogo deve ter um objetivo claro, ser adequado ao nível de ensino e apresentar uma tarefa desafiadora para o aluno.

Portanto, a escolha do jogo é o primeiro ponto a ser considerado. No entanto, existem diversas razões para essa escolha. Nesse sentido, Smole, Diniz e Milani [55], afirmam que:

Um jogo pode ser escolhido porque permitirá que seus alunos comecem a pensar sobre um novo assunto, ou para que eles tenham um tempo maior para desenvolver a compreensão sobre um conceito, para que eles desenvolvam estratégias de resolução de problemas ou para que conquistem determinadas habilidades que naquele momento você vê como importantes para o processo de ensino e aprendizagem. (Smole, Diniz e Milani, 2007, p. 14)

Cabe ao professor avaliar se o jogo escolhido apresenta situações desafiadoras e viáveis para seus alunos, além de verificar se ele envolve os conceitos apropriados ao que se pretende explorar, promovendo, assim, o desenvolvimento dos estudantes.

Em seguida, o professor deve apresentar o jogo aos alunos. Eles podem aprender a dinâmica do jogo de várias maneiras: o professor pode simular algumas jogadas para demonstrar, ensinar o jogo a um grupo de alunos que, posteriormente, orientará os demais, ou permitir que os alunos aprendam lendo as regras e explorando o jogo individualmente ou em grupo. Smole, Diniz e Milani [55] ressaltam que, embora seja papel do professor decidir a melhor maneira de apresentar o jogo, é interessante envolver os alunos nesse processo. Elas afirmam que “cada meio de propor o jogo ao grupo traz aprendizagens diferentes, exige envolvimento diversos, e isso já pode ser a primeira situação-problema a ser enfrentada por eles.” (2007, p.16).

A próxima etapa consiste em organizar a sala para o jogo. Smole, Diniz e Milani [55] sugerem várias configurações. Uma abordagem é permitir inicialmente que os grupos se formem livremente e, em seguida, reorganizá-los com base nas observações e nas necessidades identificadas. Outra possibilidade é o professor escolher os grupos seguindo critérios específicos, como mesclar alunos com facilidade com aqueles que apresentam dificuldades, ou formar grupos com capacidades semelhantes em relação à compreensão do jogo e dos conceitos matemáticos. Dessa forma, os grupos mais autônomos podem se desenvolver sozinhos, enquanto o professor acompanha de perto os grupos que demandam maior intervenção.

Um aspecto importante a ser considerado no planejamento é o tempo destinado para jogar. Por mais envolvente que o jogo seja, é pouco provável que os alunos compreendam totalmente suas regras e dinâmicas em uma única experiência, e esse desafio desperta no jogador o desejo de repeti-lo. Portanto, Smole, Diniz e Milani [55] recomendam que “[...] nas aulas de matemática um jogo nunca seja planejado para apenas uma aula. O tempo de aprender exige que haja repetições, reflexões, discussões, aprofundamentos e mesmo

registros.” (2007, p.17).

Dessa forma, é interessante que o jogo seja jogado várias vezes, permitindo que os alunos compreendam as regras, aprimorem seu raciocínio e, eventualmente, desenvolvam suas estratégias. No entanto, o objetivo do jogo deve ser considerado, pois, em alguns casos, com poucas jogadas, os alunos podem já dominar as regras e descobrir rapidamente como vencer, sem a necessidade de estratégias complexas. Portanto, o professor deve avaliar constantemente o nível de engajamento dos alunos e ajustar o jogo para garantir que ele continue desafiador e estimulante, evitando que se torne monótono ou improdutivo.

5.4 Avaliação no contexto de jogos

A avaliação é uma parte importante do processo de aprendizagem, pois ajuda a compreender o que o aluno já sabe e o que ainda precisa aprender, permitindo que o professor realize intervenções mais eficientes e direcionadas.

No ambiente escolar, a avaliação formal é frequentemente realizada por meio de provas, testes, exercícios e atividades escritas, onde os estudantes recebem notas ou conceitos. Esse tipo de avaliação é amplamente conhecido e compreendido por todos, incluindo alunos, professores e pais.

Por outro lado, existe também a avaliação informal, que ocorre de maneira contínua e natural, através da interação entre professores e alunos, bem como entre os próprios alunos, em diversos momentos e ambientes. Esse tipo de avaliação permite uma observação mais abrangente e dinâmica do aprendizado e desenvolvimento dos estudantes.

Villas Boas [59] destaca a importância da ética na avaliação informal, pois, ao contrário da avaliação formal, que é planejada e conhecida, os alunos não estão cientes de que estão sendo avaliados. Isso permite que eles revelem mais facilmente suas fragilidades, sentimentos e capacidades. Nesse contexto, a autora afirma que:

Cabe à avaliação ajudar o aluno a se desenvolver, a avançar, não devendo expô-lo a situações embaraçosas ou humilhantes. A avaliação serve para encorajar e não para desencorajar o aluno. Por isso, rótulos e apelidos que o desvalorizem ou humilhem não são aceitáveis. Gestos e olhares encorajadores por parte do professor ou professora são bem-vindos. Afinal de contas, a interação do professor com os alunos é constante e muito natural. (Villas Boas, 2007, p. 11)

A avaliação informal beneficia a aprendizagem quando o aluno é encorajado, geralmente por meio de um atendimento paciente e respeitoso por parte do professor. Ao fornecer as orientações necessárias para o desenvolvimento das habilidades dos estudantes, demonstrando interesse genuíno em seu progresso, elogiando os avanços e sem penalizá-los

ou rotulá-los pelos erros cometidos. Esse aspecto também está relacionado, em certa medida, ao *feedback* caracterizado na Teoria do *Flow*.

No contexto dos jogos, a avaliação informal se destaca como uma abordagem viável e eficaz. No entanto, essa avaliação deve ter um caráter formativo. Segundo Perrenoud [46], “é formativa toda a avaliação que ajuda o aluno a aprender a se desenvolver, ou melhor, que participa da regulação das aprendizagens e do desenvolvimento no sentido de um projeto educativo.” (1998, p. 103). Dessa forma, essa abordagem é centrada no aluno, e as intervenções do professor devem, por meio da observação dos mecanismos e resultados obtidos, orientar e otimizar o processo de aprendizagem.

A avaliação formativa requer um planejamento cuidadoso para que o professor possa organizar os procedimentos mais adequados para a coleta de informações e a realização da avaliação. No contexto dos jogos, os processos de avaliação podem envolver, principalmente, observações e conversas informais. Esses métodos ajudam o professor a identificar características importantes do indivíduo ou do grupo. É crucial que o professor registre suas percepções, fatos interessantes e significativos, bem como as potencialidades e dificuldades, a fim de compreender profundamente o modo como os alunos aprendem e se relacionam, orientando assim suas ações pedagógicas.

Smole, Diniz e Milani [55] ressaltam a importância de integrar elementos de interação, reflexão e problematização no uso de jogos como recursos pedagógicos. A proposta é organizar momentos para que os alunos discutam coletivamente sobre suas experiências durante o jogo, promovendo um ambiente de troca e construção conjunta de conhecimentos. Essa abordagem não apenas enriquece o aprendizado, mas também permite ao professor avaliar de forma mais ampla o processo de desenvolvimento dos alunos, considerando dificuldades, estratégias e descobertas individuais e coletivas.

Além disso, os alunos podem ser encorajados a realizar registros escritos ou não sobre suas aprendizagens, dificuldades, descobertas e dúvidas. Pois, de acordo com Smole, Diniz e Milani [55], “os registros sobre matemática ajudam a aprendizagem dos alunos de muitas formas, encorajando a reflexão, clareando as ideias e agindo como um catalisador para as discussões em grupo. Os registros ajudam o aluno a aprender o que está estudando.” (2007, p.18).

Como mencionado anteriormente, as situações-problema são inerentes ao ambiente de jogo. No entanto, o professor pode potencializar as aprendizagens ao propor novos desafios, seja durante o jogo ou a partir dele. Contudo, é importante que se tenha cuidado para não sobrecarregar os alunos com perguntas, a fim de evitar comprometer o prazer de jogar e minar o estado de *flow*.

6 Projetando e construindo o *Geometry Bike*

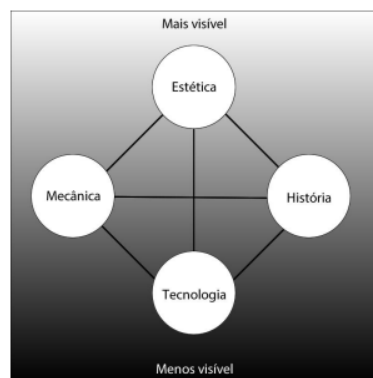
Com base nos argumentos apresentados no capítulo anterior, concluímos que jogos pedagógicos bem projetados devem equilibrar o nível de desafio com as habilidades do jogador e conteúdo alinhado aos objetivos de ensino. No entanto, para criar um jogo que seja atraente, divertido e contribua no contexto educacional, é necessário considerar outros aspectos relevantes. Dessa forma, recorreremos às diretrizes do *game design* para orientar o planejamento e apoiar a construção do jogo.

6.1 *Game design*

De acordo com Weiller [60], o termo *game design* refere-se à disciplina que se dedica ao projeto do jogo e envolve a definição da mecânica, a criação de personagens e histórias, a construção dos níveis e a elaboração de desafios, objetivos e regras do jogo.

Para facilitar a compreensão desse universo de elementos que constituem um jogo, utilizaremos a categorização proposta por Schell [51] denominada “tétrade elementar”, conforme ilustrado na Figura 6.1, e descreveremos cada um dos elementos de acordo com o autor [51].

Figura 6.1: Tétrade elementar



Fonte: Silva Leite e Mendonça (2013) [54]

1. **Mecânica:** refere-se ao conjunto de procedimentos e regras que definem o funcionamento do jogo. Ela estabelece o objetivo a ser alcançado e determina as ações permitidas e proibidas aos jogadores ao longo da partida.
2. **Narrativa:** representa a sequência de eventos que compõe a história do jogo, servindo para envolver e imergir o jogador no universo criado.
3. **Estética:** relaciona-se à aparência e às sensações proporcionadas pelo jogo, sendo um elemento crucial para enriquecer a experiência do jogador.
4. **Tecnologia:** compreende os recursos, digitais ou não, que tornam o jogo funcional e acessível aos jogadores.

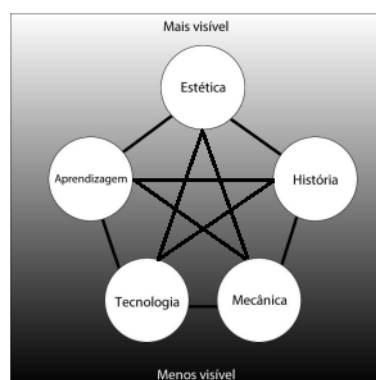
Schell [51] enfatiza que nenhum dos elementos é mais importante que os outros; todos os quatro são essenciais e correlacionados. Por exemplo, a escolha das mecânicas do jogo determina o tipo de tecnologia necessário para implementá-las, enquanto a estética e a narrativa precisam estar alinhadas para dar significado às mecânicas. Além disso, a estética e as mecânicas devem reforçar a narrativa, e a tecnologia, por sua vez, influencia diretamente a forma como a estética é apresentada.

O gradiente presente na Figura 6.1 ilustra que os elementos tecnológicos são menos visíveis para o jogador, enquanto a estética é a mais perceptível.

Um aspecto importante e integrador dos elementos é o tema do jogo. Segundo Schell [51] o tema “é a ideia que interliga todo o jogo - a ideia de que todos os elementos tem que suportar” (2008, p. 49). Assim, o tema permeia toda a “tétrade elementar”.

Por outro lado, Silva Leite e Mendonça [54] propõem uma adaptação da tétrade elementar para jogos educacionais, adicionando o elemento “aprendizagem” e formando, assim, um pentágono elementar. Dessa forma, a aprendizagem se relaciona com todos os outros elementos, conforme mostra a Figura 6.2.

Figura 6.2: Pentágono elementar



Fonte: Imagem adaptada de Silva Leite e Mendonça (2013) [54]

Para Silva Leite e Mendonça [54], o elemento “aprendizagem” se refere a “descrição dos conteúdos pedagógicos e definição dos objetos de aprendizagem que serão abordados e trabalhados no jogo.” (2013, p.140). Nesse contexto, os autores afirmam que o tema do jogo pode refletir diretamente o conteúdo da disciplina.

Assim, utilizamos como elementos fundamentais para orientar o projeto e a criação do jogo *Geometry Bike*: o tema, a mecânica, a narrativa, a estética, a tecnologia e a aprendizagem.

6.2 *Geometry Bike*

O *Geometry Bike* é um jogo pedagógico de trilha que combina perguntas e respostas, cuja **mecânica** envolve a progressão por um tabuleiro, no qual os jogadores enfrentam desafios e respondem perguntas para avançar, estimulando o raciocínio lógico e a aplicação do conhecimento geométrico. O **tema** central explora a geometria presente na bicicleta e seus diversos aspectos. A **narrativa** conduz os participantes em uma jornada ciclística, revelando a cada jogada descobertas sobre a bicicleta e suas relações com a matemática. A **estética** foi pensada para atrair a atenção dos estudantes, com ilustrações vibrantes e elementos visuais que remetem ao universo do ciclismo. A **tecnologia** se manifesta no tabuleiro, que funciona como uma interface física para a interação entre os jogadores e os desafios propostos, além de uma dimensão virtual presente em cartas específicas, nas quais o uso do GeoGebra possibilita simulações geométricas. Por fim, a **aprendizagem** é o fio condutor do projeto, com questões que incentivam a investigação, o pensamento crítico e a compreensão dos conceitos geométricos de forma lúdica. O objetivo final do jogo é alcançar a linha de chegada antes dos demais jogadores, consolidando o aprendizado por meio de uma experiência divertida e desafiadora.

Os objetivos educacionais do jogo são abrangentes e têm como finalidade promover um aprendizado ativo, estimulando o desenvolvimento de habilidades cognitivas por meio da aplicação prática de conceitos matemáticos. Destacam-se, entre eles, a consolidação e a aplicação de conceitos geométricos, o estímulo ao pensamento crítico, a promoção da participação ativa dos jogadores, a resolução de problemas, o desenvolvimento de habilidades estratégicas e o despertar do interesse por tópicos mais avançados de matemática. A partir destes objetivos, tudo foi planejado para criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e colaborativo, no qual os jogadores não apenas aplicam os conhecimentos adquiridos, mas também aprimoram sua capacidade de análise, tomada de decisões e interação social.

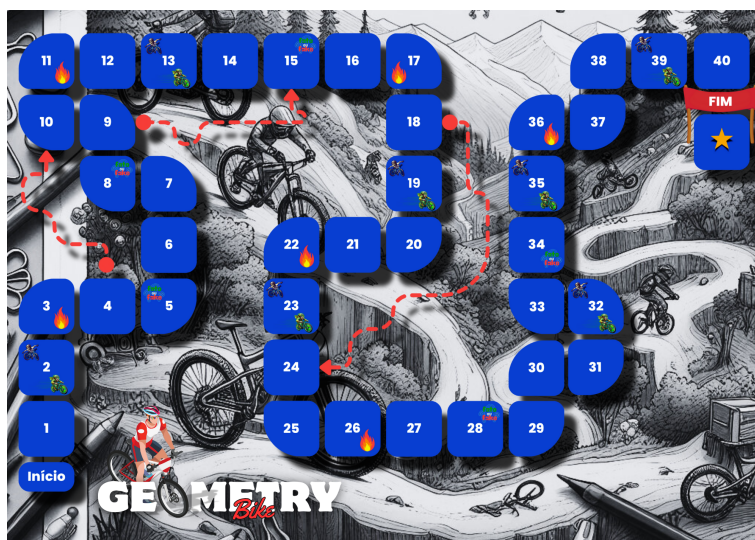
6.2.1 Componentes do jogo

A seguir, apresentaremos uma descrição detalhada dos componentes do jogo, que incluem o tabuleiro, as cartas, os cartões de resposta, as peças e o guia. Também descreveremos as regras que orientam o desenvolvimento da partida. É importante ressaltar que o tabuleiro, as cartas, os cartões de resposta e o guia encontram-se nos anexos I e II.

O tabuleiro

O tabuleiro do jogo é composto por 42 casas. A primeira casa, identificada com a palavra “Início”, marca o ponto de partida. As 40 casas seguintes são numeradas sequencialmente, e a última, destacada com uma estrela, simboliza a linha de chegada. Esse percurso reflete o objetivo do jogo: alcançar a última casa antes dos demais jogadores, evidenciando a progressão e a meta final.

Figura 6.3: Tabuleiro do jogo *Geometry Bike*



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

No tabuleiro, estão presentes diferentes tipos de casas que representam as mecânicas e os desafios do jogo:

- **Casas “Sorte ou Azar”:** Identificadas com as figuras de dois ciclistas - um ciclista caveira e outro da sorte, com rodas adornadas por trevos de quatro folhas -, essas casas estão localizadas nas posições 2, 13, 19, 23, 32, 35 e 39. Elas acionam as cartas da categoria “Sorte ou Azar”, introduzindo um elemento de surpresa e reforçando o aspecto de desafio.
- **Casas “Fato ou Fake”:** Localizadas nas posições 5, 8, 15, 28 e 34, essas casas correspondem às cartas da categoria “Fato ou Fake”, que apresentam afirmações

sobre a história da bicicleta. Ao desafiar os jogadores a discernirem entre informações verdadeiras e falsas, essas casas ampliam o conhecimento histórico, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico e da análise reflexiva. Além disso, promovem a interação entre os participantes, criando oportunidades para trocas de ideias e argumentação.

- **Casas “Desafio implacável”:** Marcadas com o símbolo de uma chama de fogo, estão situadas nas posições 3, 11, 17, 22, 26 e 36. Nessas casas, os jogadores enfrentam perguntas mais complexas, o que intensifica o nível de dificuldade e promove a superação de obstáculos.

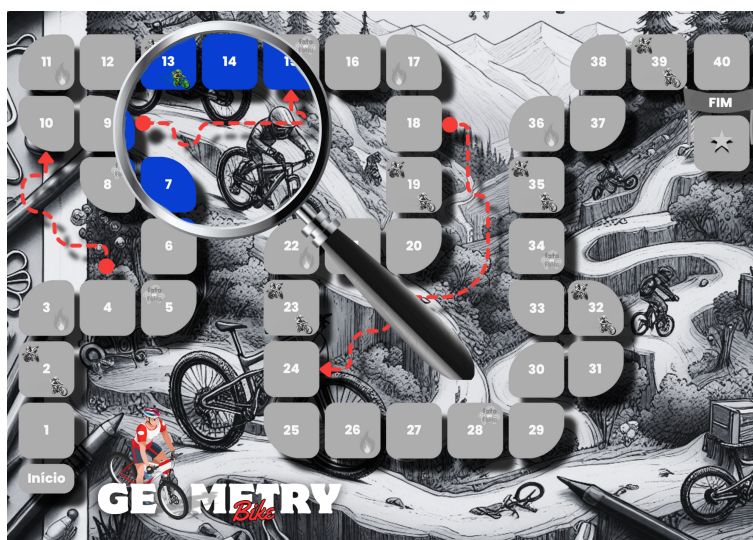
Figura 6.4: Casas “Sorte ou Azar”, “Fato ou *Fake*” e “Desafio implacável”



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Além disso, o tabuleiro possui três atalhos destacados em vermelho. O primeiro atalho permite ao jogador avançar da casa 4 para a casa 10; o segundo, da casa 9 para a 15; e o terceiro, da casa 18 para a 24. Esses atalhos funcionam como recompensas estratégicas, permitindo aos jogadores avançarem mais rapidamente, criando alternativas táticas no percurso.

Figura 6.5: Atalhos no tabuleiro



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

A estética do tabuleiro foi cuidadosamente planejada para proporcionar uma experiência visual agradável e funcional aos jogadores. Assim como as cartas e cartões de respostas, ele foi desenvolvido utilizando a plataforma Canva, uma ferramenta de *design* gráfico acessível e intuitiva, que possibilita a criação de elementos visuais de alta qualidade. Para garantir acesso a recursos adicionais e aprimorar a qualidade estética do tabuleiro, foi utilizado o Canva Pro, com acesso concedido por meio do e-mail institucional da Secretaria Estadual de Educação de Minas Gerais. Esse recurso permitiu a utilização de uma ampla gama de ilustrações, ícones e fontes, essenciais para a personalização do tabuleiro e demais elementos. A escolha de cores vibrantes, ícones relacionados ao tema da bicicleta e uma disposição clara das casas no tabuleiro visa atrair a atenção dos jogadores, além de facilitar a navegação e a interação durante o jogo.

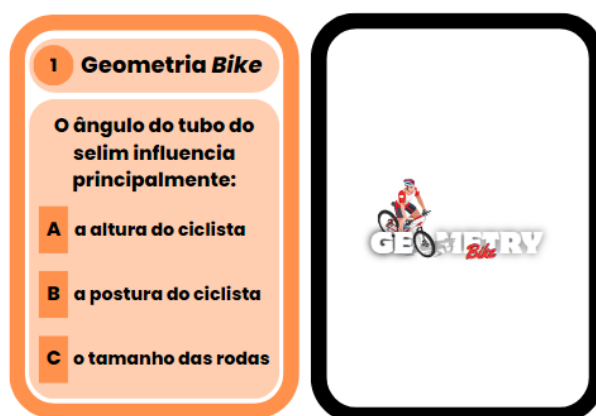
As cartas

O jogo dispõe de cinco tipos de cartas: *Geometria Bike*, *Bike Math*, Fato ou *Fake*, Sorte ou Azar e Desafio Implacável. A seguir, apresentaremos uma descrição detalhada de cada conjunto de cartas.

- *Geometria Bike*

Este conjunto é composto por 15 cartas, cada uma contendo uma pergunta de múltipla escolha com três alternativas, que abordam a geometria do quadro da bicicleta e diferentes modalidades de ciclismo. A primeira carta deste bloco é exibida na Figura 6.6.

Figura 6.6: Carta 1. *Geometria Bike* (Frente e verso)



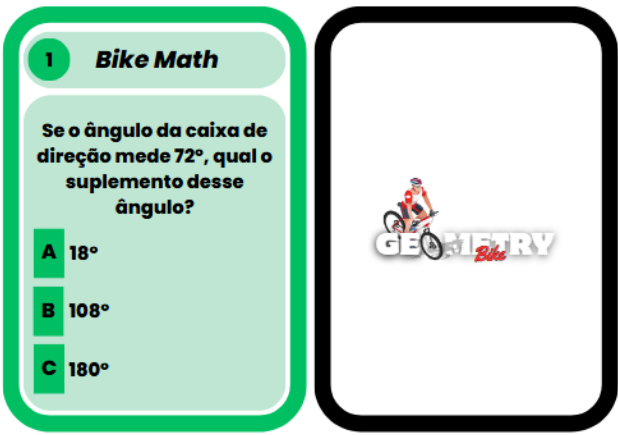
Fonte: Elaborado pela autora (2024)

- *Bike Math*

O conjunto *Bike Math* é formado por 50 cartas, cada uma contendo uma pergunta de múltipla escolha envolvendo conteúdos matemáticos relacionados ao tema bicicleta.

Os tópicos abrangem uma variedade de conceitos, desde ângulos até equações de circunferências.

Figura 6.7: Carta 1. *Bike Math* (Frente e verso)



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

No Quadro 1, apresentamos o conteúdo de cada subconjunto de cartas desta categoria, especificando as séries recomendadas e as habilidades de acordo com a BNCC [12].

Quadro 1: Descrição dos conteúdos das cartas *Bike Math*

Cartas	Conteúdos abordados	Séries	Habilidades
1 a 10	Classificação de ângulos, ângulos complementares e suplementares, ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, soma dos ângulos internos e externos de triângulos.	6º e 7º anos do Ensino Fundamental	EF06MA25, EF06MA26, EF07MA23, EF07MA24, EF07MA25.
11 a 20	Circunferências e seus elementos, área e perímetro de círculos.	7º e 8º anos do Ensino Fundamental	EF07MA22, EF07MA33, EF08MA19.
19 a 30	Proporcionalidade.	7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental	EF07MA17, EF08MA12, EF09MA08.
31 a 40	Teorema de Pitágoras e a trigonometria.	9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio	EF09MA14, EM13MAT308.
41 a 50	Distância entre pontos, ponto médio, funções polinomiais de 1º ou 2º graus, equação da circunferência.	8º e 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio	EF09MA16, EF09MA09, EM13MAT302, EM13MAT307, EM13MAT401, EM13MAT402.

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

- Fato ou *Fake*

Este conjunto contém 15 cartas com afirmações sobre a história da bicicleta, que devem ser classificadas como “Fato”, se verdadeiras, ou “*Fake*”, se falsas. Essas afirmações estão diretamente relacionadas ao conteúdo abordado no Capítulo 2 deste trabalho, que trata da evolução histórica e das inovações no *design* das bicicletas.

Figura 6.8: Carta 1. Fato ou *Fake*



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

- Sorte ou Azar

Este bloco é composto por 30 cartas, sendo 15 de bônus (sorte) e 15 de penalidades (azar). Na Figura 6.9, da esquerda para a direita, a primeira carta representa azar, enquanto a segunda indica sorte.

Figura 6.9: Cartas “Sorte ou Azar” (Frente e verso)

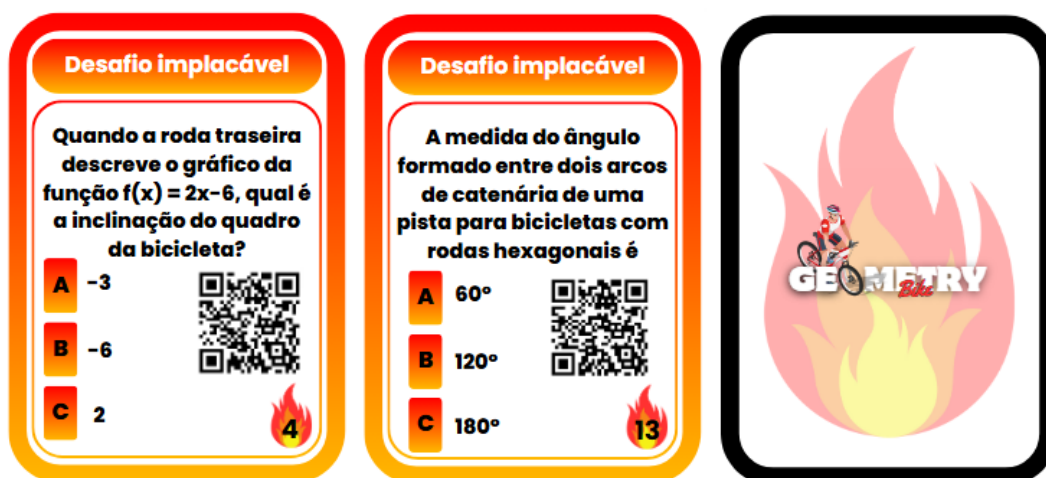


Fonte: Elaborado pela autora (2024)

- Desafio implacável

Essa categoria, composta por 18 cartas, é a parte especial do jogo. As cartas apresentam perguntas relacionadas à geometria dos rastros dos pneus, bicicletas com rodas poligonais e as estradas correspondentes. Cada carta contém um *QR Code* que direciona o jogador a um *applet* desenvolvido no GeoGebra, com dicas para a resolução do desafio.

Figura 6.10: Cartas 4 e 13 da categoria “Desafio implacável” (Frente e verso)



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

No Quadro 2, apresentamos o conteúdo de cada subconjunto de cartas da categoria “Desafio implacável”, juntamente com as séries e as habilidades contempladas, de acordo com a BNCC [12].

Quadro 2: Descrição dos conteúdos das cartas “Desafio implacável”

Cartas	Conteúdos abordados	Séries	Habilidades
1, 2, 3, 4 e 9	Gráfico de funções polinomiais de 1 ^o e 2 ^o graus.	Ensino Médio	EM13MAT302
2 e 3	Máximo e/ou mínimo de funções quadráticas.	Ensino Médio	EM13MAT503
5, 6 e 14	Análise de gráficos de funções	Ensino Médio	EM13MAT404
7 e 8	Teorema de Pitágoras, posição relativa de circunferências e posição relativa de retas e circunferências no plano.	9 ^o ano do Ensino Fundamental	EF09MA14
4, 9 e 10	Derivada de funções polinomiais	Não se aplica	Não se aplica
11, 12, 13, 15, 16, 17 e 18	Ângulo central e ângulos internos de polígonos regulares, elementos dos polígonos, comprimento de arco a partir da medida do lado do polígono.	7 ^o e 9 ^o anos do Ensino Fundamental	EF07MA27, EF09MA11

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Os diferentes conjuntos de cartas do jogo foram elaborados com o objetivo de integrar a dimensão lúdica, apresentada no Capítulo 5, de forma eficaz, incentivando a participação ativa dos jogadores e criando um ambiente de aprendizado envolvente. As cartas de múltipla escolha, presentes em blocos como “Geometria *Bike*” e “*Bike Math*” e “Desafio implacável”, promovem o prazer funcional, ao gerar satisfação à medida que os jogadores acertam as respostas e avançam no jogo. Cada carta apresenta um desafio que desperta momentos de tensão e expectativa, proporcionando um ambiente de desafio e surpresa, enquanto os jogadores lidam com questões inesperadas. Além disso, as três alternativas em cada pergunta oferecem diversas possibilidades de escolha, estimulando a análise crítica e o pensamento estratégico. O tema das cartas, que vincula conceitos geométricos ao universo das bicicletas, adiciona uma dimensão simbólica, enriquecendo o aprendizado com um contexto, no geral, próximo da prática cotidiana dos participantes. Finalmente, a proposta do jogo incentiva a expressão construtiva, promovendo a troca de ideias e a argumentação entre os jogadores, o que contribui para a construção coletiva do conhecimento.

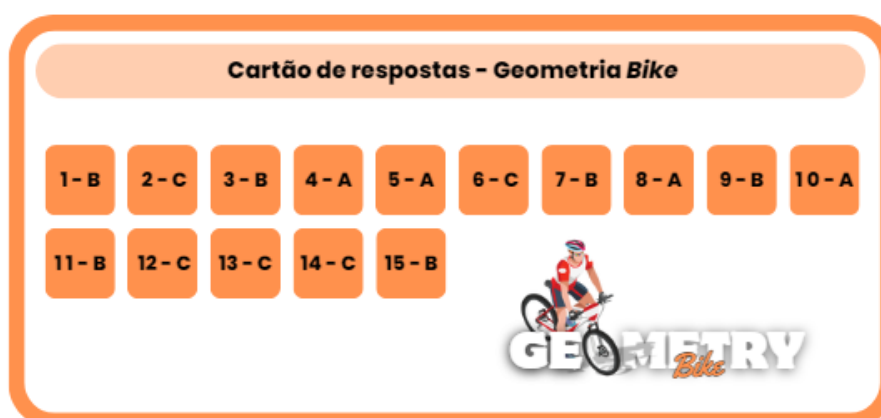
Vale ressaltar que, no desenvolvimento do jogo, as respostas foram apresentadas com aproximação para três casas decimais, afim de garantir a clareza e a consistência nos cálculos realizados pelos jogadores. As coordenadas utilizadas estão inseridas no contexto do sistema de coordenadas cartesianas, amplamente reconhecido e aplicado no ensino básico. Destaca-se que, devido às limitações de espaço físico nas cartas do jogo,

optou-se pela omissão dos nomes dos pontos representados. Essa decisão visou garantir um *design* mais limpo e funcional, sem comprometer a compreensão das informações apresentadas. A abordagem adotada foi cuidadosamente planejada para equilibrar a complexidade matemática com a acessibilidade e a estética do material didático.

Cartões de resposta

Com exceção do conjunto denominado “Sorte ou Azar”, cada conjunto de cartas é acompanhado por um cartão de respostas, cujo propósito é indicar a alternativa correta para cada questão. Esses cartões desempenham a função de permitir que os oponentes verifiquem se as respostas fornecidas pelos jogadores estão corretas, contribuindo para a dinâmica do jogo.. Na Figura 6.11, é apresentado o cartão de resposta correspondente ao conjunto de cartas “Geometria *Bike*”.

Figura 6.11: Cartão de resposta das cartas Geometria *Bike*



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Peças

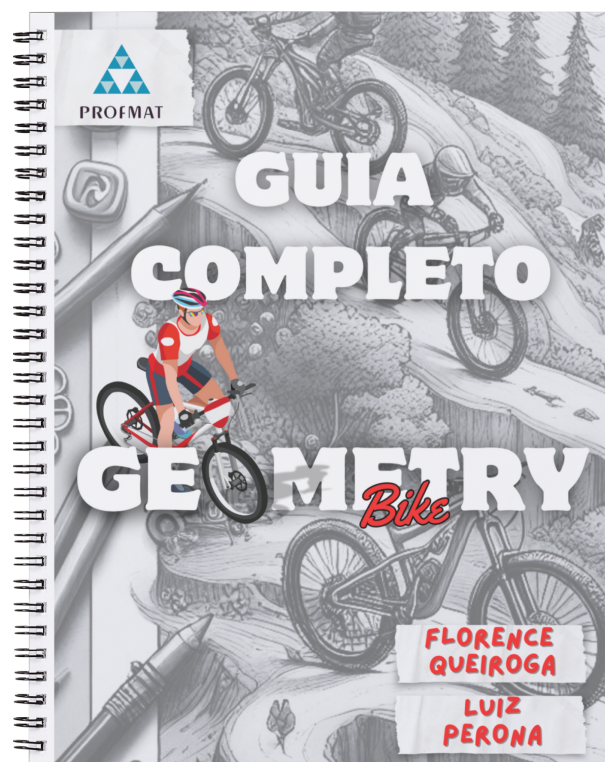
O jogo inclui três mini bicicletas, que funcionam como peões para indicar a posição dos jogadores no tabuleiro, além de um dado de seis faces para definir os movimentos. No entanto, o número de participantes não se limita a apenas três jogadores. Em turmas maiores, cada mini bicicleta pode representar um grupo (como uma dupla ou trio), permitindo a participação de mais jogadores e promovendo discussões colaborativas entre eles.

Figura 6.12: Mini bicicletas e dado

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Guia

O jogo é acompanhado por um guia que fornece explicações detalhadas sobre suas regras, os componentes envolvidos e as instruções para a sua execução. Além disso, o guia inclui a resolução completa de todas as questões apresentadas no jogo, bem como um glossário que esclarece os principais termos utilizados.

Figura 6.13: Capa do guia

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

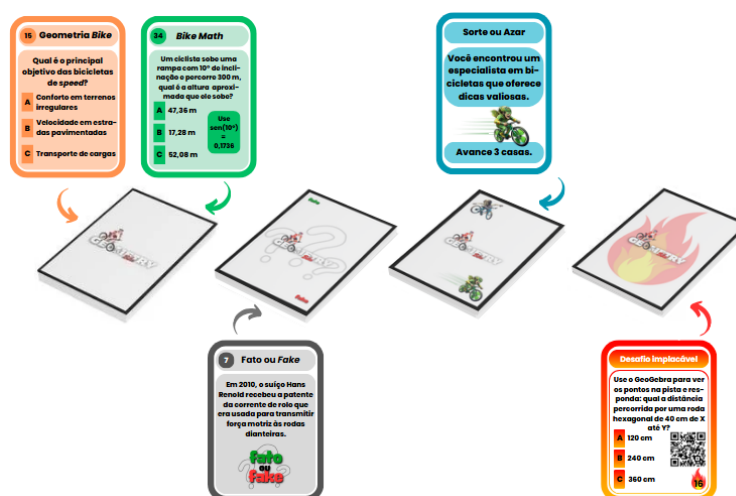
6.2.2 Como jogar

A seguir, apresentamos uma descrição detalhada de como jogar o *Geometry Bike*. Isso reflete a mecânica do jogo, incluindo os movimentos e as interações que compõem a experiência.

Preparação do jogo

1. O tabuleiro deve ser posicionado em uma superfície plana e estável;
2. Cada jogador (ou equipe) deve escolher um peão (bicicleta) para representá-lo e colocá-lo na casa “Início”;
3. As cartas do jogo devem ser organizadas em quatro grupos distintos. O primeiro grupo será composto por uma combinação de cartas “*Bike Math*” e “*Geometria Bike*”; o segundo, pelas cartas denominadas “Fato ou *Fake*”; o terceiro conterá as cartas “Sorte ou Azar”; e o último grupo será formado pelas cartas “Desafio implacável”;

Figura 6.14: Grupos de cartas



Fonte: Elaborado pela autora (2024)

4. A ordem dos jogadores (ou equipes) deve ser estabelecida mediante o lançamento do dado.

Durante o jogo

• Movimentação dos jogadores

Durante seu turno, cada jogador (ou equipe), deve lançar o dado e avançar o número de casas correspondente ao valor obtido.

• Casas sem símbolo

Quando o jogador (ou equipe) parar em uma casa sem símbolo, deverá retirar uma carta do monte que contém as cartas misturadas de “*Bike Math*” e “*Geometria Bike*”.

Se a resposta à questão apresentada estiver correta, o jogador (ou equipe) permanece na casa. Caso contrário, deverá retornar à posição anterior.

- **Casas com símbolo**

Quando o jogador (ou equipe) parar em uma casa com símbolo, deverá retirar uma carta do monte correspondente a esse símbolo e responder à questão vinculada à categoria. Se a resposta estiver correta, o jogador (ou equipe) permanecerá na casa. Caso contrário, retornará à posição anterior.

- **Efeitos especiais**

Cartas “Sorte ou Azar”

- **Carta de Sorte:** Concede ao jogador (ou equipe) o direito de avançar além do número indicado no dado, fornecendo-lhe uma vantagem estratégica.
- **Carta de Azar:** Exige que o jogador (ou equipe) retroceda um número de casas conforme estipulado na carta.

Trilhas vermelhas

As trilhas vermelhas permitem que o jogador (ou equipe) acelere sua progressão no tabuleiro. Por exemplo: se o jogador (ou equipe) parar na casa 4 e responder corretamente à pergunta, ele utilizará a trilha vermelha para avançar diretamente à casa 10.

A partir dessa descrição detalhada do jogo, esperamos que os professores se sintam preparados para incluir o *Geometry Bike* em suas práticas pedagógicas, reconhecendo-o como uma ferramenta valiosa para enriquecer o ensino de geometria. Cada elemento foi cuidadosamente planejado para estimular o raciocínio lógico, a criatividade e a colaboração, alinhando-se aos objetivos educacionais propostos. Dessa forma, o jogo não apenas reforça conceitos previamente trabalhados, mas também abre caminho para novas descobertas e formas de ensino, destacando seu potencial como uma ferramenta didática no ambiente escolar.

7 Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo principal o desenvolvimento de um jogo pedagógico que integrasse o universo das bicicletas ao estudo da geometria. A proposta visou unir conceitos matemáticos com elementos do cotidiano de maneira lúdica e interativa. A pesquisa foi estruturada a partir de objetivos específicos que orientaram as diferentes etapas do estudo.

Com base nos estudos sobre a história e as geometrias associadas às bicicletas, no uso de jogos como metodologia de ensino e nas diretrizes para a elaboração de materiais didáticos lúdicos, foi possível conceber o *Geometry Bike*, um jogo de tabuleiro que combina teoria e prática de forma criativa.

Inicialmente, realizou-se uma investigação sobre a história da bicicleta, abordando seus principais marcos e inovações tecnológicas. Esse levantamento histórico proporcionou a compreensão da evolução desse meio de transporte, fornecendo uma base sólida para a elaboração das cartas “Fato ou *Fake*”.

Em seguida, foram analisadas as geometrias associadas às bicicletas, explorando aspectos como os ângulos e comprimentos dos tubos, a geometria dos rastros dos pneus e a aplicação de conceitos matemáticos em estradas projetadas para rodas poligonais. Essa análise destacou as diversas possibilidades de utilização da geometria no contexto das bicicletas, evidenciando sua potencialidade como recurso pedagógico.

O estudo da geometria do quadro, juntamente com a investigação das modalidades de ciclismo, possibilitou a construção das cartas “Geometria *Bike*” e “*Bike Math*”. Desta forma, a geometria da bicicleta se configurou como uma ferramenta valiosa para contextualizar conceitos matemáticos, evidenciando sua aplicabilidade em situações cotidianas.

Por outro lado, a análise dos rastros dos pneus e o desenvolvimento de estradas para bicicletas com rodas poligonais favoreceu a elaboração das cartas “Desafio implacável”. Nestas cartas, os conceitos geométricos não triviais foram adaptados e integrados ao ensino de geometria na Educação Básica com o apoio do *software* GeoGebra. Ao incorporar essa abordagem ao jogo de tabuleiro, expandimos a experiência para um ambiente virtual. Essa ampliação permite que os estudantes explorem de maneira dinâmica e visual as

propriedades geométricas relacionadas a trajetórias e formas, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e tornando-os mais acessíveis.

Além disso, as atividades que envolvem as estradas para rodas poligonais e a análise de rastros desafiam os estudantes a pensar de forma criativa. Esse processo contribui, não apenas para o desenvolvimento das habilidades matemáticas, mas também para o fortalecimento do pensamento crítico e da capacidade de resolução de problemas, competências fundamentais para a formação integral dos alunos.

A análise das potencialidades e desafios do uso de jogos como ferramenta pedagógica no ensino de matemática, aliada à Teoria do *Flow*, foi essencial para a criação das cartas “Sorte ou Azar” e de outros elementos que incrementam o dinamismo e aprimoram a experiência do jogo. Essas abordagens permitiram equilibrar o desafio e a habilidade dos jogadores, para promover uma imersão profunda e uma aprendizagem mais ativa e envolvente.

O jogo configura-se como um recurso didático versátil, com potencial não apenas para a consolidação e aplicação de conceitos geométricos, mas também, a depender da dinâmica adotada pelo professor, para a introdução de novos conceitos. Para isso, é possível elaborar planos de ensino que dialoguem com outras metodologias, ampliando a abordagem tradicional e promovendo conexões interdisciplinares.

Além do campo da Matemática, o jogo também suscita reflexões e aprendizagens em outras áreas, desenvolvendo habilidades como a cooperação, a tomada de decisões e o pensamento crítico. Outro aspecto relevante está na diversidade de cenários que a aplicação do jogo pode gerar. Mesmo com orientações bem definidas, a dinâmica de cada turma e as intervenções pedagógicas permitem explorar diferentes questões e possibilidades, tornando a experiência de aprendizado rica e multifacetada.

Diante disso, os capítulos 2 a 6 forneceram uma fundamentação robusta para que professores da Educação Básica possam estruturar aulas bem embasadas, utilizando a geometria da bicicleta como recurso didático. Dessa forma, é possível explorar de maneira eficaz os potenciais do jogo *Geometry Bike*, permitindo que os objetivos educacionais sejam alcançados e que os estudantes se beneficiem de uma abordagem diferenciada no ensino da matemática.

Uma limitação deste estudo foi a restrição de tempo disponível para a aplicação e análise do jogo em sala de aula, o que pode ter impactado a profundidade da investigação. Contudo, essa limitação abre espaço para novos estudos, permitindo, através de sua aplicação, uma avaliação mais precisa dos benefícios do jogo no aprendizado dos estudantes.

Embora a aplicação do jogo tenha sido limitada pela disponibilidade de tempo, os

resultados indicam seu potencial para enriquecer a experiência educacional e promover a aprendizagem. Em trabalhos futuros, com mais tempo e recursos, busca-se possibilitar uma análise mais aprofundada e explorar diversas possibilidades para a implementação do jogo. Com o aprofundamento da pesquisa e por meio de sua aplicação, o *Geometry Bike* pode se tornar uma ferramenta ainda mais eficaz no ensino da geometria, oferecendo uma abordagem lúdica e inovadora para a Educação Básica.

Referências

- 1 ABRACICLO - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DOS FABRICANTES DE MOTOCICLETAS, CICLOMOTORES, MOTONETAS, BICICLETAS E SIMILARES. *Dados do setor de duas rodas. 2023*. Disponível em: <%7Bhttps://www.abraciclo.com.br/site/wp-content/uploads/2023/08/DADOS-DO-SETOR-DE-DUAS-RODAS-2023.vdef_.pdf%7D>. Acesso em: 17 abr. 2024.
- 2 ARAÚJO, S. X. S. **Uma introdução ao estudo de derivadas no ensino médio**. *Universidade Federal Rural do Semi-Árido*, 2016.
- 3 ATIVO. *Geometria da bike: entenda o desenho de um quadro*. **Ativo**. Disponível em: <%7B<https://www.ativo.com/sobre-o-ativo/s>%7D>. Acesso em: 9 mai. 2024.
- 4 ÁVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio. *Revista do Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, p. 30–38, 2006.
- 5 ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2.º grau. *Revista do Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, p. 1–9, 1991.
- 6 BALLANTINE, R.; GRANT, R. *Manual de manutenção de bicicletas*. Livros e Livros, 1994.
- 7 BARATTO, A. D. M. **Abordagem teórica e prática no desenvolvimento de uma bicicleta do tipo mountain bike full suspension**. *Universidade Federal de Santa Maria*, 2022.
- 8 BARTALI, L. *THE BIRTH OF THE BICYCLE : FROM LEONARDO DA VINCI DRAWINGS TO THE HEROIC CYCLING*. *Biciclettami*. Disponível em: <%7B<https://www.biciclettami.it/en/the-birth-of-the-bicycle/>%7D>. Acesso em: 27 jul. 2024.
- 9 BICICLETA, E. DE. *Geometria e medidas do quadro da bicicleta*. **Escola de Bicicleta**. Disponível em: <%7B<http://www.escoladebicicleta.com.br/geometria.html>%7D>. Acesso em: 8 mai. 2024.
- 10 BIKE, T. *O que é a geometria da bike?* **TSW Bike**. Disponível em: <%7B<https://revistabicicleta.com/dicas/geometria-da-bicicleta/>%7D>. Acesso em: 8 mai. 2024.
- 11 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2015. v. 10.
- 12 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- 13 BYCICLETA, A. *A BYCICLETA: semanário ciclístico ilustrado*. **A Bycicleta**. 12 de Julho de 1896. Disponível em: <%7B<https://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=818186&pagfis=1>%7D>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- 14 CAMPOS, A. M. A. DE. Teoria do *Flow*: construção de jogos para a aprendizagem da matemática. *Encontro de Ludicidade e Educação Matemática*, v. 3, n. 1, e202102–e202102, 2021.
- 15 CANYON. *Guia de geometria das bikes de estrada; aprenda a escolher*. **Canyon**. Disponível em: <%7B<https://www.canyon.com/pt-br/blog-content/noticia-da-mountain-bike/geometria-de-bicicleta-de-montanha/b11012023.html>%7D>. Acesso em: 8 mai. 2024.
- 16 CARVALHO, M.; OLIVEIRA, A. Estradas para rodas exóticas. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 2011.
- 17 CICLISMO, C. B. DE. *CAMPEONATO BRASILEIRO DE MOUNTAIN BIKE XCO 2015*. **Confederação Brasileira de Ciclismo**. Disponível em: <%7B<https://www.cbc.esp.br/fotos/album/id/25>%7D>. Acesso em: 15 mai. 2024.

- 18 CICLISMO, C. B. DE. *Provas em MTB. Confederação Brasileira de Ciclismo*. Disponível em: <%7Bhttps://www.cbc.esp.br/arquivos/provas%20em%20mtb.pdf%7D>. Acesso em: 15 mai. 2024.
- 19 CLUB, A. -. A. B. *173 - Pica Pau Super Vendedor Pré Histórico (1969)*. *YouTube*. Disponível em: <%7Bhttps://youtu.be/xQM3oo8weHo?si=qNaNso-jWryoC7si%7D>. Acesso em: 30 mai. 2024.
- 20 COSTA, M. D. L. D. F. R. *Rodas Poligonais Regulares e Catenárias*. 2012. Diss. (Mestrado) – Universidade de Coimbra.
- 21 COSTA, V. P.; OLIVEIRA, F. R. DE. ASPECTOS MORFOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS NO CICLISMO DE ESTRADA E MOUNTAIN BIKE CROSS-COUNTRY. *Revista de Educação Física/Journal of Physical Education*, v. 78, n. 145, 2009.
- 22 CYCLES, S. *3R5 KAIROS RIVAL AXS FULCRUM*. *Soul Cycles*. Disponível em: <%7Bhttps://www.soulcycles.com.br/3r5-kairos-rival-axs-fulcrum/p%7D>. Acesso em: 29 jun. 2024.
- 23 CYCLES, S. *SPRY CITY URBAN MICROSHIFT*. *Soul Cycles*. Disponível em: <%7Bhttps://www.soulcycles.com.br/spry-city-urban-microshift/p%7D>. Acesso em: 29 jun. 2024.
- 24 CYCLES, S. *VOLCANO DARKSIDE GX AXS SID*. *Soul Cycles*. Disponível em: <%7Bhttps://www.soulcycles.com.br/volcano-darkside-gx-axs-sid/p%7D>. Acesso em: 23 mai. 2024.
- 25 DA SILVA, M. S. *Clube de matemática: jogos educativos*. Papirus Editora, 2005.
- 26 DI ALENCAR, T. A. M.; SOUSA MATIAS, K. F. DE. *Bike fit e sua importância no ciclismo. Movimenta (ISSN 1984-4298)*, v. 2, n. 2, p. 59–64, 2009.
- 27 FONTOURA, L.; ISRAEL, F. *Geometria do Rastro de Bicicletas*.
- 28 GRANDO, R. C. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus, 2004.
- 29 HADLAND, T.; LESSING, H.-E. *Bicycle design: An illustrated history*. Mit Press, 2014.
- 30 HALL, L.; WAGON, S. Roads and wheels. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, v. 65, n. 5, p. 283–301, 1992.
- 31 HILARIO NETO, M. et al. *Estrada envolvendo rodas quadradas*. *Universidade Federal de Alagoas*, 2020.
- 32 HOHENWARTER, M. et al. *GeoGebra*. 2017. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 30 ago. 2022.
- 33 INTERNATIONALE, U. C. *Road Race. Union Cycliste Internationale*. Disponível em: <%7Bhttps://www.uci.org/discipline/road/6TBjsDD8902tud440iv1Cu?tab=discover%7D>. Acesso em: 15 mai. 2024.
- 34 LESZEK J. SIBILSKI, F. T. *La cultura del ciclismo urbano en América Latina: ¿un modelo para otras regiones?* 2019. Disponível em: <https://blogs.worldbank.org/es/transport/la-cultura-del-ciclismo-urbano-en-america-latina-un-modelo-para-otras-regiones>. Acesso em: 18 mai. 2024.
- 35 LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau*, n. 04, p. 03, 1995. Disponível em: <%7Bhttps://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1311/721%7D>.
- 36 MACEDO, L. D.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2005.
- 37 MAGAZINE, B. *Guia de geometria das bikes de estrada; aprenda a escolher*. *Bike Magazine*. Disponível em: <%7Bhttps://www.bikemagazine.com.br/2018/03/guia-de-geometria-das-bikes-de-estrada-aprenda-a-escolher/%7D>. Acesso em: 8 mai. 2024.
- 38 MEDEIROS, R. *Uma Análise Dos Rastros Das Rodas De Uma Bicicleta A Partir Do Estudo Das Parametrizações De Curvas Planas*. *Dissertação de Mestrado*, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2020.

- 39 MTB BRASÍLIA. *A importância da geometria na construção dos quadros de bicicleta*. **MTB Brasília**. Disponível em: <%7B<https://www.mtbbrasil.com.br/2015/07/26/a-importancia-da-geometria-na-construcao-dos-quadros-de-bicicleta/>%7D>. Acesso em: 10 mai. 2024.
- 40 MUSEUM, T. O. B. *1891 Referee Pattern Diamond Frame Safety*. **The Online Bicycle Museum**. Disponível em: <%7B<https://onlinebicyclemuseum.co.uk/1891-referee-pattern-diamond-frame-safety/>%7D>. Acesso em: 24 abr. 2024.
- 41 NETO, A. C. M. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
- 42 PAIZ, O. *Anúncio de corrida Club Sport Villa Isabel*. **O Paiz**. 17 de janeiro de 1885. Disponível em: <%7Bhttp://memoria.bn.br/pdf/178691/per178691_1885_00016.pdf%20%7D>. Acesso em: 1 abr. 2024.
- 43 PEDAL. *DESVENDANDO A GEOMETRIA DOS QUADROS*. **Pedal**. Disponível em: <%7Bhttps://www.pedal.com.br/desvendando-a-geometria-dos-quadros_texto2234.html%7D>. Acesso em: 9 mai. 2024.
- 44 PEREIRA, A. M. F. et al. Teoria do fluxo e aprendizagem no contexto brasileiro: uma revisão sistemática de literatura. **Educação e Pesquisa**, SciELO Brasil, v. 48, e237870, 2022.
- 45 PEREIRA, G. Estimativa de frota de bicicletas no Brasil. **Journal of Sustainable Urban Mobility**, v. 1, n. 1-2, 2021.
- 46 PERRENOUD, P. *Avaliação: da excelência à regularização das aprendizagens: entre duas lógicas*. Porto Alegre: Artmed Editora, 1998.
- 47 PIAGET, J. *O possível e o necessário: evolução dos possíveis na criança*. Porto Alegre: Editora Artes médicas, 1985. v. 1.
- 48 QUEIROGA, F. C. S.; FERREIRA, F. A.; PERES, G. J. A Geometria da Bicicleta no Ensino de Matemática: uma Análise de Trabalhos Acadêmicos. **Intermaths**, v. 5, n. 2, p. 141–162, 2024.
- 49 REVISTA BICICLETA. *Geometria da Bicicleta*. **Revista Bicicleta**. Disponível em: <%7B<https://revistabicicleta.com/dicas/geometria-da-bicicleta/>%7D>. Acesso em: 10 mai. 2024.
- 50 RODRIGUES, M.; BERNARDO, M. *Ensino e aprendizagem da geometria*. Associação de Professores de Matemática, 2011. Disponível em: <<https://repositorio.ipl.pt/entities/publication/d7a4c684-cc74-43a4-a79d-ae8eda3d9ff9>>. Acesso em: 12 mar. 2025.
- 51 SCHELL, J. *A Arte de Game Design: o livro original*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- 52 SCHETINO, A. M. Ciclismo e Modernidade: apontamentos sobre a invenção da bicicleta e os primórdios do ciclismo no Rio de Janeiro. **XXIV SIMPÓSIO NACIONAL DE HISTÓRIA - HISTÓRIA E MULTIDISCIPLINARIDADE: TERRITÓRIOS E DESLOCAMENTOS**, São Leopoldo: Unisinos, 2007.
- 53 SILVA, E. D. N. *Uma introdução ao estudo das derivadas no ensino médio*. *Universidade Federal Rural do Semi-Árido*, 2016.
- 54 SILVA LEITE, P. D.; MENDONÇA, V. G. D. Diretrizes para game design de jogos educacionais. **Proc. SBGames, Art Design Track**, p. 132–141, 2013.
- 55 SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. *Cadernos do Mathema: Ensino Fundamental: Jogos de Matemática de 6º a 9º ano*. Artmed Editora, 2007. v. 2.
- 56 SOUSA, R. T. DE; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A. Aspectos da parábola e da catenária: um estudo à luz da Geometria dinâmica. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 17, p. 1–22, 2022.
- 57 SOUZA, Y. V. et al. *Quando as rodas conquistam a cidade: cultura, tensões, conflitos e ações na prática do ciclismo em São Paulo*. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*, 2016.
- 58 SUL, R. C. *A ciência da geometria: o que importa ao escolher um quadro?* **Revista Ciclo Sul**. Disponível em: <%7B<https://revistaciclosul.com.br/2020/05/11/a-ciencia-da-geometria-o-que-importa-ao-escolher-um-quadro/>%7D>. Acesso em: 10 mai. 2024.
- 59 VILLAS BOAS, B. M. D. F. *A avaliação na escola*. *Módulo III*. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

- 60 WEILLER, T. *Como entender e fazer Game Design*. Curitiba: Game Start, 2022.

Anexo I

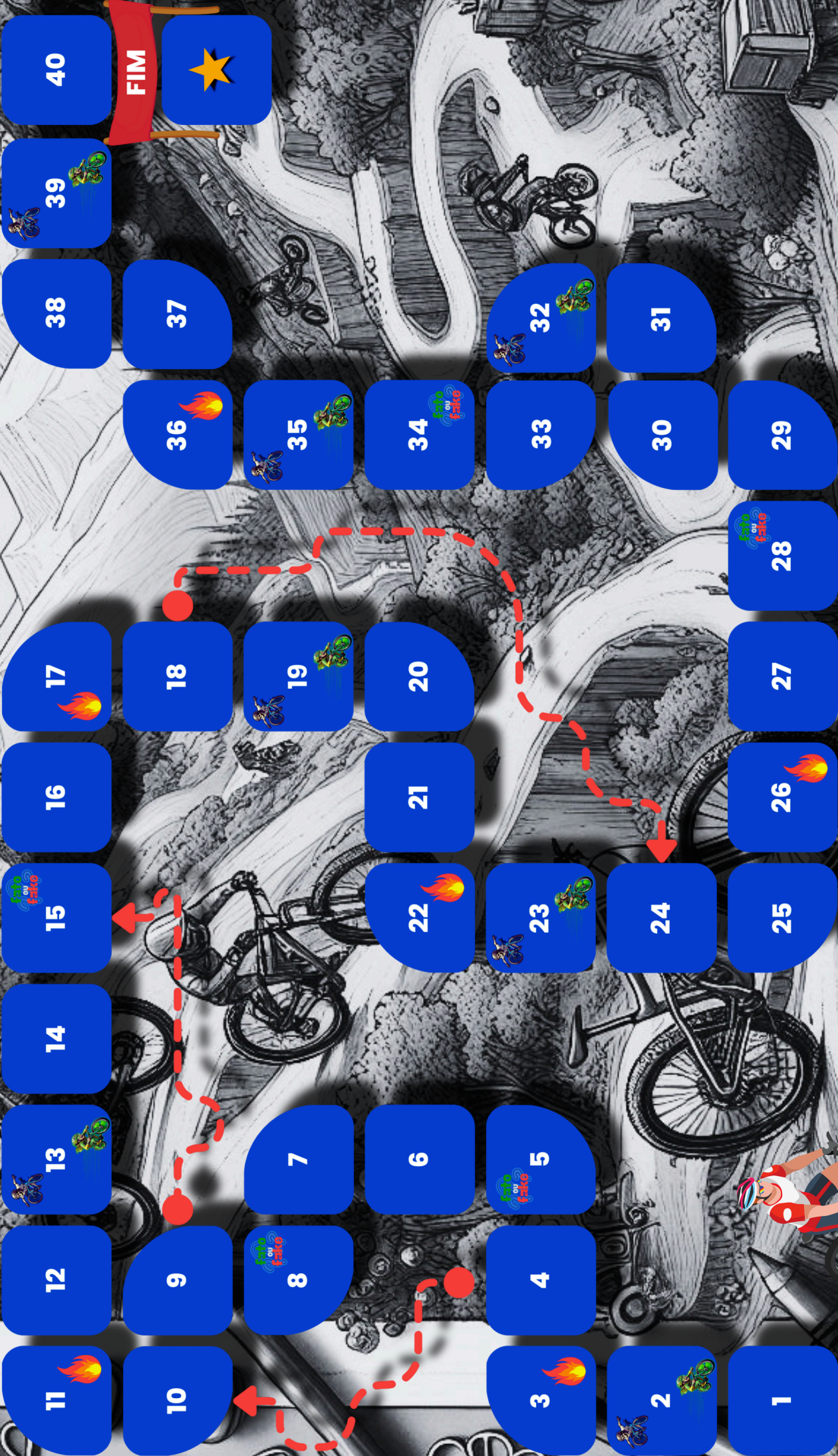
O jogo *Geometry Bike*

Sugerimos que o tabuleiro seja confeccionado no formato A3, garantindo um espaço amplo para o jogo. As páginas com as cartas e os cartões de resposta devem ser impressas em tamanho A4, ideal para facilitar o manuseio.

GEOMETRY

Bike

Início



1 Geometria *Bike*

O ângulo do tubo do selim influencia principalmente:

- A a altura do ciclista
- B a postura do ciclista
- C o tamanho das rodas

2 Geometria *Bike*

A distância entre os eixos das rodas é importante para:

- A a rigidez do quadro
- B a aerodinâmica da bicicleta
- C a estabilidade e agilidade

3 Geometria *Bike*

A queda do movimento central está relacionada ao

- A ângulo da caixa de direção
- B centro de gravidade da bicicleta
- C comprimento do tubo do selim

4 Geometria *Bike*

Um tubo superior mais longo proporciona ao ciclista uma posição:

- A mais esticada
- B mais ereta
- C mais confortável

5 Geometria *Bike*

Quanto maior o alcance da bicicleta maior será:

- A a estabilidade
- B a agilidade
- C o conforto

6 Geometria *Bike*

Tubo onde se conecta o garfo da bicicleta:

- A tubo superior
- B tubo do selim
- C tubo da caixa de direção

7 Geometria *Bike*

Quanto maior a distância entre eixos, maior será a:

- A agilidade
- B lentidão
- C velocidade

8 Geometria *Bike*

Quanto menor a distância entre eixos, maior será a:

- A agilidade
- B conforto
- C lentidão

9 Geometria *Bike*

Tubo que conecta o eixo do pedal ao eixo da roda traseira:

- A tubo superior
- B tubo inferior traseiro
- C tubo do selim



11 Geometria *Bike*

A bicicleta desenvolvida para terrenos irregulares é:

- A** *speed*
- B** *mountain bike*
- C** urbana

12 Geometria *Bike*

A bicicleta indicada para uso nas cidades é:

- A** *mountain bike*
- B** urbana
- C** *speed*

13 Geometria *Bike*

As bicicletas de *speed* são projetadas para:

- A** uso urbano
- B** trilhas de montanha
- C** estradas pavimentadas

10 Geometria *Bike*

Qual tipo de bicicleta geralmente tem pneus largos e com cravos?

- A** *mountain bike*
- B** *speed*
- C** urbana

14 Geometria *Bike*

Qual tipo de bicicleta geralmente possuem pneus finos e lisos?

- A** *mountain bike*
- B** urbana
- C** *speed*

15 Geometria *Bike*

Qual é o principal objetivo das bicicletas de *speed*?

- A** Conforto em terrenos irregulares
- B** Velocidade em estradas pavimentadas
- C** Transporte de cargas



1 Bike Math

Se o ângulo da caixa de direção mede 72° , qual o suplemento desse ângulo?

- A** 18°
- B** 108°
- C** 180°

2 Bike Math

Se o ângulo do tubo do selim mede 74° , qual o complemento desse ângulo?

- A** 16°
- B** 106°
- C** 90°

3 Bike Math

Se o ângulo do tubo do selim mede 71° e os tubos do selim e da caixa de direção são paralelos, então:

- A** o ângulo da caixa de direção mede 90°
- B** o ângulo da caixa de direção mede 109°
- C** o ângulo da caixa de direção mede 71°

4 Bike Math

Se o ângulo da caixa de direção mede 68° e os tubos do selim e da caixa de direção são paralelos, então:

- A** o ângulo do tubo do selim mede 90°
- B** o ângulo do tubo do selim mede 68°
- C** o ângulo do tubo do selim mede 22°

5 Bike Math

No geral, os ângulos do tubo do selim e da caixa de direção de uma bicicleta são:

- A** agudos
- B** obtusos
- C** retos

6 Bike Math

Se o ângulo do tubo do selim fosse obtuso, o ciclista ficaria:

- A** mais distante do guidão
- B** mais próximo do guidão
- C** alinhado verticalmente com o pedal

7 Bike Math

Se o ângulo do tubo do selim fosse reto, o ciclista ficaria:

- A** mais distante do guidão
- B** mais próximo da roda traseira
- C** alinhado verticalmente com o pedal

8 Bike Math

Se o ângulo da caixa de direção fosse obtuso, o ciclista ficaria:

- A** projetado para frente
- B** projetado para trás
- C** inclinado para o lado

9 Bike Math

Qual é a soma dos ângulos externos de um triângulo formado pelas partes do quadro da bicicleta?

- A** 180°
- B** 360°
- C** 90°



10 Bike Math

Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo formado pelas partes do quadro da bicicleta?

A 180°**B** 360°**C** 90°**11 Bike Math**

Se a roda dianteira de uma bicicleta tem um diâmetro de 74 cm, qual é o raio da roda?

A 30 cm**B** 148 cm**C** 37 cm**12 Bike Math**

Qual é o comprimento da circunferência de uma roda de bicicleta com um diâmetro de 74 cm?

A 232,36 cm**B** 464,72 cm**C** 116,18 cm

Use
 $\pi = 3,14$

13 Bike Math

Qual o diâmetro da roda de uma bicicleta cuja circunferência mede 175,84 cm?

A 112 cm**B** 28 cm**C** 56 cm

Use
 $\pi = 3,14$

14 Bike Math

Qual é a área de uma roda de bicicleta com raio de 37 cm?

A 4.298,66 cm²**B** 232,36 cm²**C** 364,81 cm²

Use
 $\pi = 3,14$

15 Bike Math

Qual a medida do raio da roda de bicicleta cuja área mede 2.461,76 cm²?

A 28 cm**B** 56 cm**C** 78,4 cm

Use
 $\pi = 3,14$

16 Bike Math

Quantas voltas completas uma roda de bicicleta com circunferência de 200 cm dá ao percorrer 10 m?

A 5 voltas**B** 10 voltas**C** 20 voltas**17 Bike Math**

Se uma roda de bicicleta gira 100 vezes e tem uma circunferência de 230 cm, qual é a distância total percorrida?

A 2,3 km**B** 23 km**C** 0,23 km**18 Bike Math**

Se uma roda de bicicleta dá 200 voltas e tem um diâmetro de 70 cm, qual é a distância percorrida?

A 219,8 m**B** 439,6 m**C** 769,3 m

Use
 $\pi = 3,14$



19 Bike Math

Se o raio de uma roda de bicicleta é duplicado, o que acontece com a circunferência?

- A** É duplicada
- B** É triplicada
- C** Permanece a mesma

20 Bike Math

Se o raio de uma roda de bicicleta é duplicado, o que acontece com a área?

- A** É duplicada
- B** É quadruplicada
- C** Permanece a mesma

21 Bike Math

Se uma bicicleta percorrer 5 km em 10 min, qual será a distância percorrida em 30 min à mesma velocidade?

- A** 10 km
- B** 15 km
- C** 20 km

22 Bike Math

Se uma bicicleta percorrer 8 km em 16 min, quanto tempo levará para percorrer 24 km à mesma velocidade?

- A** 32 min
- B** 48 min
- C** 60 min

23 Bike Math

Se pedalando a velocidade constante leva-se 20 min para percorrer 10 km, quanto tempo levará para percorrer 25 km?

- A** 30 min
- B** 40 min
- C** 50 min

24 Bike Math

Se um ciclista a 12 km/h leva 30 min para completar um percurso, quanto tempo ele levaria a 24 km/h?

- A** 60 min
- B** 30 min
- C** 15 min

25 Bike Math

Se pedalar por 1 h queima 550 calorias, no mesmo ritmo em 45 min são queimadas:

- A** 412,5 calorias
- B** 225 calorias
- C** 675 calorias

26 Bike Math

Se um ciclista pode percorrer 40 km em 2 h, quantos km ele percorrerá em 5 h à mesma velocidade?

- A** 80 km
- B** 100 km
- C** 120 km

27 Bike Math

Se um ciclista a 15 km/h leva 1h para completar um percurso, quanto tempo ele levaria a 12 km/h?

- A** 48 min
- B** 1 h
- C** 1 h 15 min



28 Bike Math

Se um ciclista percorre 60 km em 2 h, quanto tempo levará para percorrer 90 km à mesma velocidade?

A 2,5 h

B 2,3 h

C 3 h

29 Bike Math

Se um ciclista queima 400 calorias por km, quantos km ele deve pedalar para queimar 1.400 calorias?

A 3 km

B 3,5 km

C 4 km

30 Bike Math

Se um ciclista percorre 45 km em 90 min, quanto tempo levará para percorrer 90 km à mesma velocidade?

A 1 h 30 min

B 2 h 30min

C 3 h

31 Bike Math

Uma rampa de bicicleta forma um triângulo retângulo com catetos de 100 m e 30 m. Calcule o comprimento da rampa.

A 104,4 m

B 110 m

C 120 m

32 Bike Math

Uma rampa de bicicleta forma um triângulo retângulo com base de 50 m e altura de 12 m. Calcule o comprimento da rampa.

A 49,6 m

B 62,5 m

C 51,4 m

33 Bike Math

Um ciclista sobe uma ladeira com um ângulo de 5° e percorre 200 m, qual é a altura aproximada que ele sobe?

A 15,44 m

B 17,44 m

C 19,5 m

Use
 $\text{sen}(5^\circ)$
 $=$
0,0872

34 Bike Math

Um ciclista sobe uma rampa com 10° de inclinação e percorre 300 m, qual é a altura aproximada que ele sobe?

A 47,36 m

B 17,28 m

C 52,08 m

Use
 $\text{sen}(10^\circ)$
 $=$
0,1736

35 Bike Math

Se a distância horizontal percorrida por uma bicicleta é de 200 m e a inclinação da ladeira é de 6° , qual é a altura da ladeira?

A 21,02 m

B 19,03 m

C 10,51 m

Use
 $\text{tg}(6^\circ)$
 $=$
0,1051

36 Bike Math

Qual é a medida da base de uma rampa de ciclismo se seu comprimento é de 120 m e o ângulo de inclinação é de 9° ?

A 120,98 m

B 118,52 m

C 121,49 m

Use
 $\text{cos}(9^\circ)$
 $=$
0,9877



37 Bike Math

A base de uma rampa de ciclismo mede 150 m e sua inclinação é de 8° . Qual é a altura dessa rampa?

A 15,14 m

B 10,67 m

C 21,08 m

Use
 $\text{tg}(8^\circ)$
 $=$
0,1405

38 Bike Math

Um ciclista subiu uma rampa cuja base mede 100 m e sua inclinação é de 12° . Qual é o comprimento total da rampa?

A 102,24 m

B 97,81 m

C 109,78 m

Use
 $\cos(12^\circ)$
 $=$
0,9781

39 Bike Math

Uma rampa de ciclismo tem 125 m de comprimento e 14 m de altura. Qual o seno do ângulo da rampa com o solo?

A 0,175

B 0,892

C 0,112

40 Bike Math

Uma rampa de ciclismo tem 150 m de comprimento e 140 m de base. Qual o cosseno do ângulo da rampa com o solo?

A 0,933

B 0,359

C 0,385

41 Bike Math

As coordenadas dos centros das rodas de uma bicicleta, que está numa rampa, são $(1;2)$ e $(1,9;2,2)$. A distância entre eixos é:

A 0,922 unidade

B 0,770 unidade

C 0,877 unidade

42 Bike Math

O eixo da roda traseira de uma bicicleta está no ponto $(1;1)$ e o eixo do pedal em $(1,5;1,16)$. O comprimento do tubo inferior traseiro é:

A 0,276 unidade

B 0,473 unidade

C 0,525 unidade

43 Bike Math

Se o centro da roda de uma bicicleta está no ponto $(0,0)$ e o raio é 37 cm. A equação da circunferência da roda é:

A $x^2 + y^2 = 37$

B $x^2 + y^2 = 1.369$

C $x^2 + y^2 = 74$

44 Bike Math

Se o centro da roda de uma bicicleta está no ponto $(-8,3)$ e o raio é 28 cm. A equação da circunferência da roda é:

A $(x-8)^2 + (y-3)^2 = 784$

B $(x+8)^2 + (y+3)^2 = 784$

C $(x+8)^2 + (y-3)^2 = 784$

45 Bike Math

Qual a equação da reta que passa no centro da roda traseira em $(2,3)$ e tem coeficiente angular 0,15?

A $y = 0,15x + 2,7$

B $y = 2x + 0,15$

C $y = 2,3x + 0,7$



46 Bike Math

Se o quadro de uma bicicleta forma um triângulo com vértices nos pontos $(4; 1,5)$, $(1; 2)$ e $(3; 4)$, qual é a área do triângulo?

A 3,5 u.a.

B 4 u.a.

C 4,5 u.a.

"u.a."
indica
"unidades
de área"

47 Bike Math

Qual é a equação da reta que passa pelas rodas da bicicleta posicionadas nos pontos $(1, 2)$ e $(5, 6)$?

A $y = x - 1$

B $y = x + 1$

C $y = 5x - 3$

48 Bike Math

A trajetória de um ciclista é descrita pela parábola $y = x^2 - 4x + 3$. Em quais pontos a trajetória cruza o eixo x ?

A $(1, 0)$ e $(3, 0)$

B $(3, 0)$ e $(5, 0)$

C $(1, 0)$ e $(5, 0)$

49 Bike Math

Qual é o ponto médio entre as rodas de uma bicicleta posicionadas nos pontos $(2, 3)$ e $(6, 7)$?

A $(4, 4)$

B $(3, 5)$

C $(4, 5)$

50 Bike Math

Qual é a inclinação da reta que passa pelas rodas de uma bicicleta posicionadas em $(2, -1)$ e $(8, 5)$?

A 2

B 1

C 3



1 Fato ou Fake

A bicicleta foi criada em 1490 pelo gênio renascentista Leonardo da Vinci.



2 Fato ou Fake

O alemão Karl von Drais, em 12 de junho de 1817, criou a precursora da bicicleta moderna, conhecida como Draisine.



3 Fato ou Fake

A bicicleta criada por Karl von Drais era de madeira e não tinha pedais, sendo impulsionada pelo próprio corpo do ciclista.



4 Fato ou Fake

Em 1866, surgiram as bicicletas com pedais conectadas à roda dianteira.



5 Fato ou Fake

O mecânico Eugène Meyer fabricava bicicletas de rodas altas, conhecidas por alcançarem altas velocidades.



6 Fato ou Fake

Uma característica marcante na evolução das bicicletas é que os raios sempre foram de metal.



7 Fato ou Fake

Em 2010, o suíço Hans Renold recebeu a patente da corrente de rolo que era usada para transmitir força motriz às rodas dianteiras.



8 Fato ou Fake

No ano de 1885, John Kemp Starley criou a primeira bicicleta com tração traseira que alcançou o sucesso, a Starley Rover.



9 Fato ou Fake

Um veterinário escocês John Boyd Dunlop foi o primeiro inventor do pneu pneumático.



fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

fato



GEOMETRY

Bike

fake

10 Fato ou Fake

Em 1884, Thomas Humber apresentou um modelo inicial do que seria uma bicicleta com estrutura em forma de "diamante", a Humber Satefy.

fato
ou
fake

11 Fato ou Fake

As primeiras bicicletas chegaram ao Brasil no final do século XXI.

fato
ou
fake

12 Fato ou Fake

Em 1885, no Rio de Janeiro, o Sport Club Villa Izabel realizava corridas de bicicletas.

fato
ou
fake

13 Fato ou Fake

Em 1866, surgiram as bicicletas com pedais conectadas à roda dianteira.

fato
ou
fake

14 Fato ou Fake

No ano 1896, começa a circular em São Paulo, a revista "A Bicycleta", que se dedicava à divulgação de notícias sobre o ciclismo.

fato
ou
fake

15 Fato ou Fake

Em 1885, foi inaugurado o Club Athletico Fluminense que passou a realizar corridas de bicicletas com muitos inscritos.

fato
ou
fake



Cartão de respostas – Fato ou Fake

1 <i>Fake</i>	2 <i>Fato</i>	3 <i>Fato</i>	4 <i>Fato</i>	5 <i>Fato</i>	6 <i>Fake</i>	7 <i>Fake</i>	8 <i>Fato</i>	9 <i>Fake</i>	10 <i>Fato</i>
11 <i>Fake</i>	12 <i>Fato</i>	13 <i>Fato</i>	14 <i>Fato</i>	15 <i>Fake</i>					



Sorte ou Azar

Você derrapou na pista e caiu da bicicleta!



Fique uma rodada sem jogar.

Sorte ou Azar

Sua bicicleta ganhou pneus novos!



Avance 2 casas.

Sorte ou Azar

Seu pneu estourou!



Volte 2 casas.

Sorte ou Azar

Sua corrente arrebentou!



Volte 1 casa.

Sorte ou Azar

Você ajustou corretamente a altura do selim!



Avance 1 casa.

Sorte ou Azar

Você encontrou uma rota mais eficiente!



Avance 3 casas.

Sorte ou Azar

Você fez um upgrade na bicicleta!



Avance 2 casas.

Sorte ou Azar

Você encontrou um obstáculo na trilha. Perda de tempo!



Volte 2 casas.

Sorte ou Azar

Você cometeu um erro de cálculo ao ajustar a bicicleta!



Volte 3 casas.



Sorte ou Azar

Você fez uma pausa estratégica e ganhou mais velocidade!



Jogue outra vez.

Sorte ou Azar

Sua bicicleta precisa de reparos urgentes!



Volte 1 casa e perca sua próxima jogada

Sorte ou Azar

Sua manutenção foi rápida e eficiente.



Avance 3 casas.

Sorte ou Azar

Um amigo ajuda você a avançar.



Avance 2 casas e escolha um jogador para voltar 1 casa.

Sorte ou Azar

Você tomou um caminho errado.



Volte 3 casas.

Sorte ou Azar

Seu cálculo estava incorreto e causou um atraso.



Volte 3 casas.

Sorte ou Azar

Você descobriu que um dos pneus está murchando!



Volte 2 casas.

Sorte ou Azar

Sua bicicleta está mais leve e rápida.



Avance 2 casas.

Sorte ou Azar

Você encontrou um especialista em bicicletas que oferece dicas valiosas.



Avance 3 casas.



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



GEOMETRY *Bike*



Sorte ou Azar

Você calculou a curva perfeitamente e manteve a velocidade!



Avance 3 casas.

Sorte ou Azar

Você fez um conserto rápido e eficiente!



Avance 2 casas.

Sorte ou Azar

Seu treinamento preparou você para a trilha!



Avance 1 casa.

Sorte ou Azar

Você perdeu o controle devido a um pedal escorregadio!



Volte 2 casas.

Sorte ou Azar

Uma engrenagem quebrou!



Volte 3 casas.

Sorte ou Azar

Um barulho incômodo na bicicleta o atrasou!



Volte 1 casa.

Sorte ou Azar

Você tomou um rumo errado e se perdeu!



Volte 2 casas.

Sorte ou Azar

Os freios da sua bicicleta falharam temporariamente.



Volte 2 casas.

Sorte ou Azar

O tempo piorou, tornando a trilha mais difícil!



Volte 1 casa.



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



GEOMETRY
Bike



Sorte ou Azar

Os pneus foram calibrados corretamente, melhorando a aderência!



Avance 2 casas.

Sorte ou Azar

Você ajustou o selim para máximo conforto!



Avance 2 casas.

Sorte ou Azar

Sua bicicleta é ágil e responde rapidamente nas curvas!



Avance 3 casas.



Desafio implacável

Se os rastros das rodas de uma bicicleta são coincidentes, então a curva descrita por elas é uma

A parábola

B reta

C elipse



Desafio implacável

O rastro da roda traseira de uma bicicleta é dado pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 1$. O ponto de mínimo dessa trajetória

A $(2, -3)$

B $(-4, 1)$

C $(-2, 3)$



Desafio implacável

Qual é a coordenada da roda dianteira quando a traseira atinge o vértice da parábola $f(x) = -x^2 + 5$ e a distância entre eixos é 3?

A $(0, 5)$

B $(2, 5)$

C $(3, 5)$



Desafio implacável

Quando a roda traseira descreve o gráfico da função $f(x) = 2x - 6$, qual é a inclinação do quadro da bicicleta?

A -3

B -6

C 2



Desafio implacável

Qual a cor da curva que corresponde ao rastro da roda dianteira?

A Verde

B Vermelha

C Impossível descobrir



Desafio implacável

Qual a cor da curva que corresponde ao rastro da roda traseira?

A Lilás

B Laranja

C Impossível descobrir



Desafio implacável

Os rastros das rodas de uma bicicleta formam círculos concêntricos de raios 3 e 5. Então, a distância entre eixos é

A 3

B 4

C 5



Desafio implacável

O rastro da roda traseira de uma *bike* é dado por $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$. A distância entre eixos é 3, o rastro da roda dianteira

A $x^2 + y^2 = 9$

B $(x+2)^2 + y^2 = 5$

C $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$



Desafio implacável

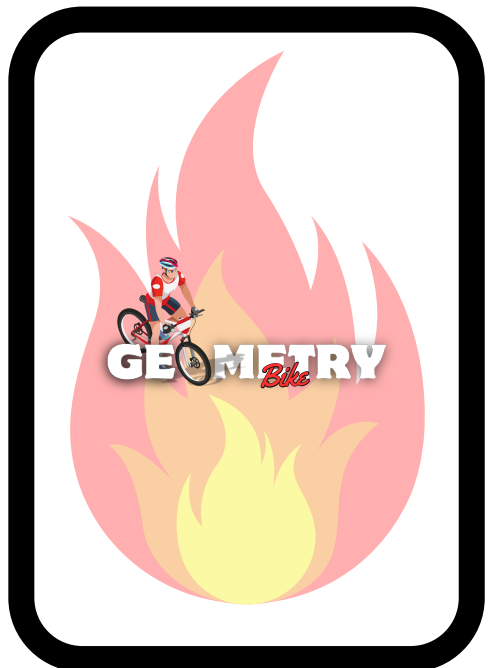
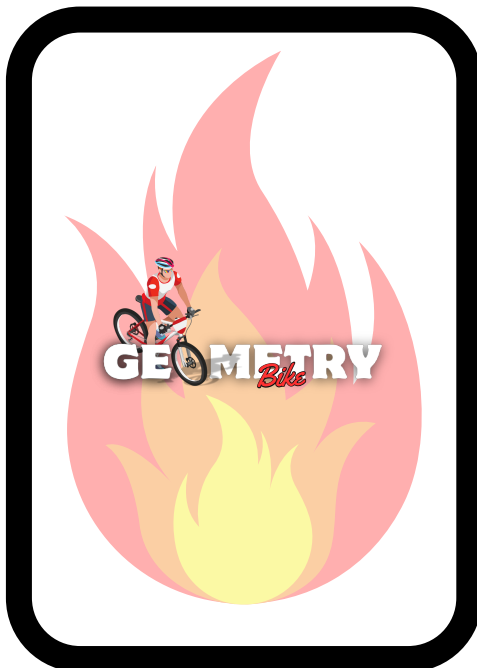
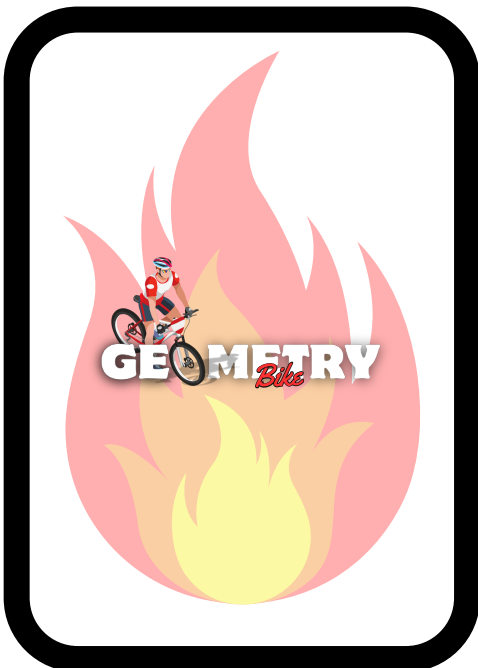
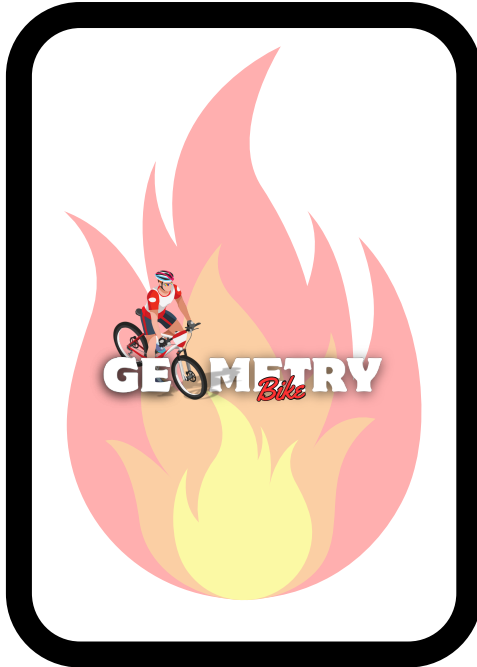
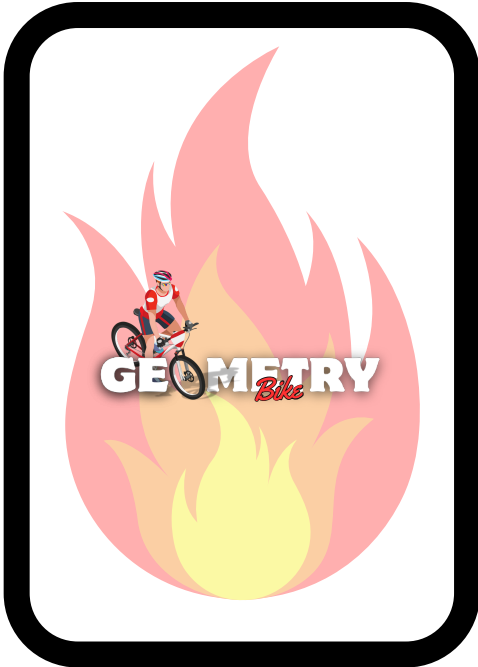
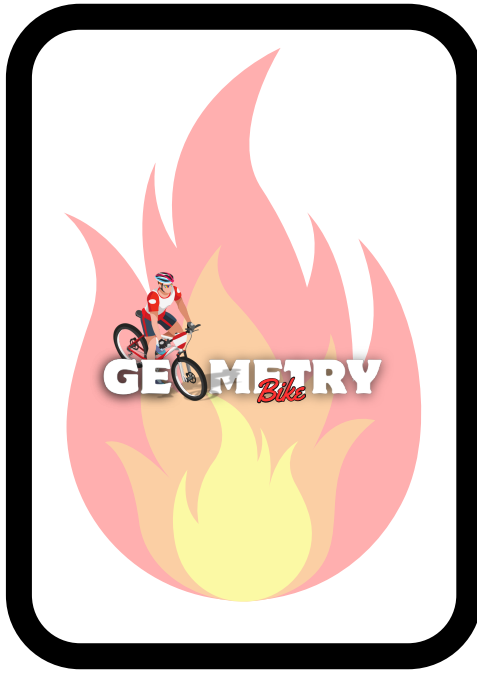
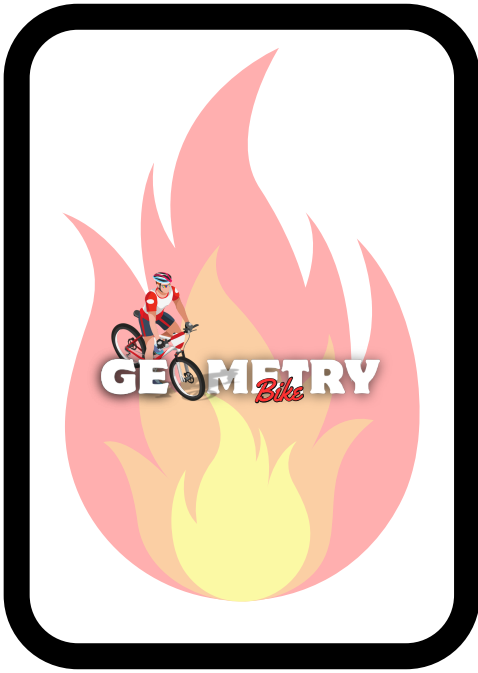
O rastro da roda traseira de uma *bike* é dado pelo gráfico da função $f(x) = 0.1x^2 - 5$. A inclinação do quadro quando $x = 10$

A 2

B 6

C -4





Desafio implacável

Quando a roda traseira descreve o gráfico da função $f(x) = 0.1x^3 + 2$, a inclinação do quadro da bicicleta no ponto $(-1, 1)$ é

A 1.9

B 0.3

C 2.7



Desafio implacável

Qual a medida do ângulo que uma roda quadrada deve girar para percorrer um arco de catenária?

A 45°

B 90°

C 180°



Desafio implacável

As rodas de uma *bike* têm formato de pentágono regular com lados de 43 cm. A distância percorrida pela roda ao girar 360° é

A 43 cm

B 172 cm

C 215 cm



Desafio implacável

A medida do ângulo formado entre dois arcos de catenária de uma pista para bicicletas com rodas hexagonais é

A 60°

B 120°

C 180°



Desafio implacável

Ao aumentar o número de lados de um polígono regular que representa a roda de uma *bike*, a pista aproxima-se de uma

A parábola

B reta

C circunferência



Desafio implacável

Use o GeoGebra para visualizar os pontos na pista e responda: partindo de X, quanto a roda octogonal deve girar até tocar o ponto Y?

A 90°

B 180°

C 270°



Desafio implacável

Use o GeoGebra para ver os pontos na pista e responda: qual a distância percorrida por uma roda hexagonal de 40 cm de X até Y?

A 120 cm

B 240 cm

C 360 cm



Desafio implacável

Em uma bike de rodas poligonais o segmento que une o ponto de contato mais alto da pista ao centro da roda corresponde ao

A lado

B apótema

C raio do círculo circunscrito



Desafio implacável

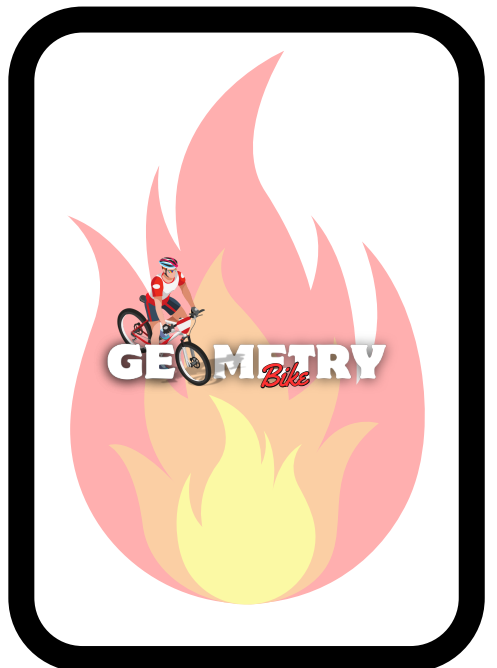
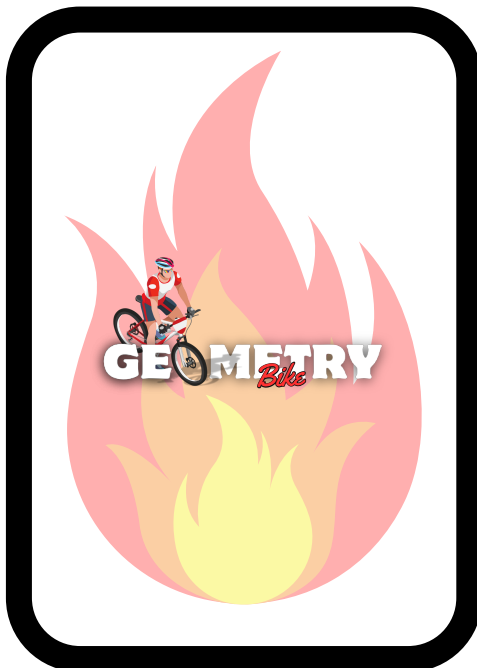
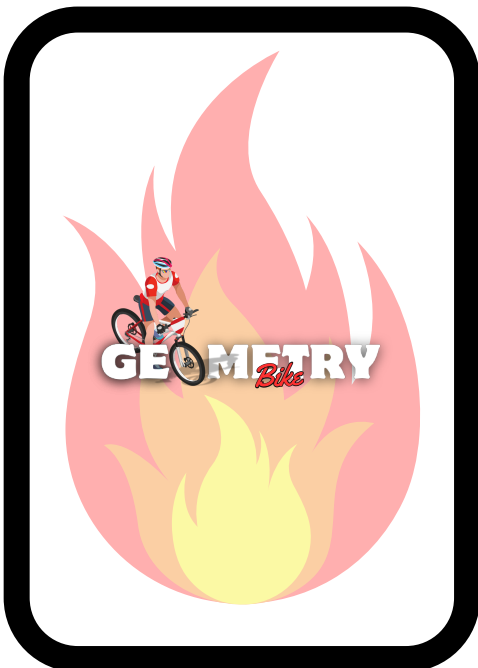
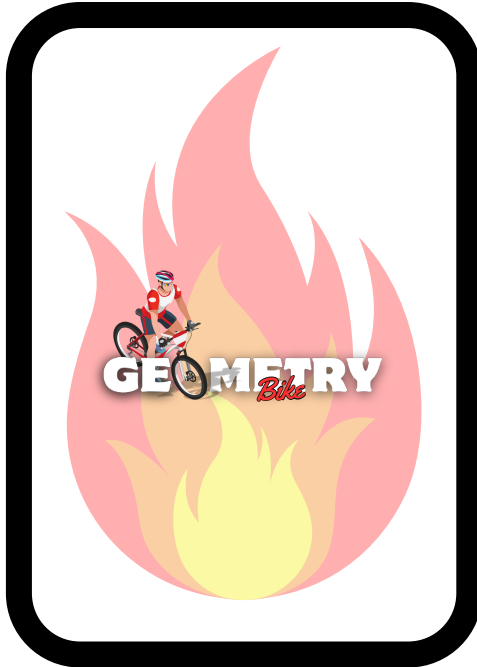
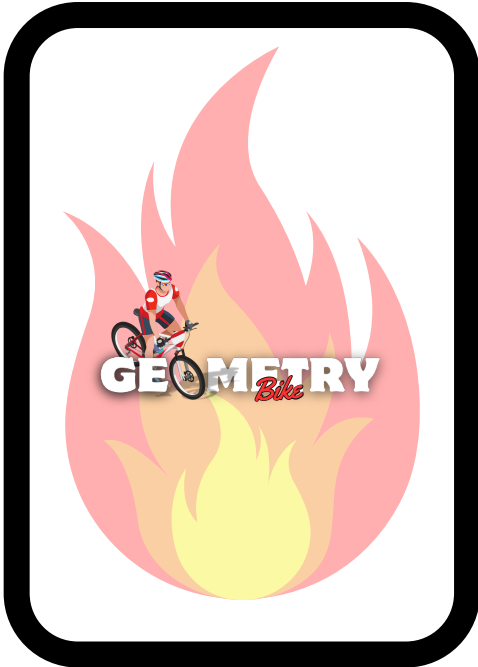
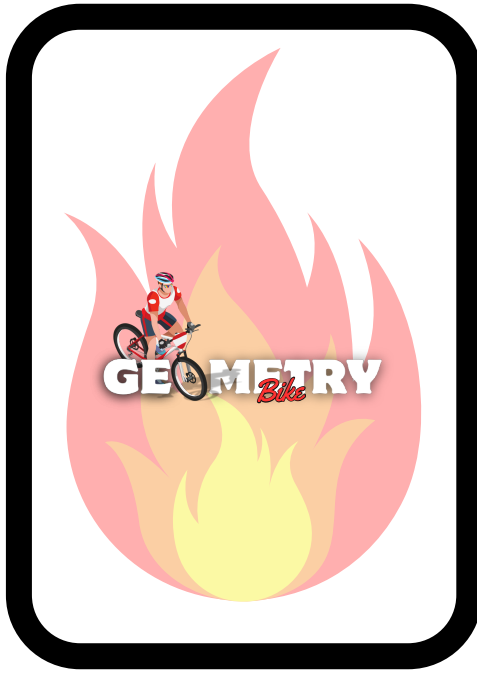
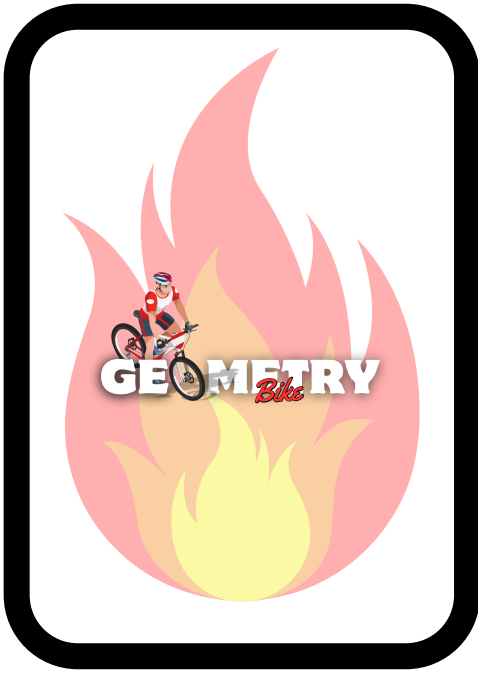
Qual a medida do ângulo que uma roda com formato de decágono regular deve girar para percorrer quatro arcos de catenária da pista?

A 36°

B 72°

C 144°





Cartão de respostas – Geometria *Bike*

1 - B

2 - C

3 - B

4 - A

5 - A

6 - C

7 - B

8 - A

9 - B

10 - A

11 - B

12 - C

13 - C

14 - C

15 - B



Cartão de respostas – *Bike Math*

1 - B

2 - A

3 - C

4 - B

5 - A

6 - B

7 - C

8 - A

9 - B

10 - A

11 - C

12 - A

13 - C

14 - A

15 - A

16 - A

17 - C

18 - B

19 - A

20 - B

21 - B

22 - B

23 - C

24 - C

25 - A

26 - B

27 - C

28 - C

29 - B

30 - C

31 - A

32 - C

33 - B

34 - B

35 - A

36 - B

37 - C

38 - A

39 - C

40 - A

41 - A

42 - C

43 - B

44 - C

45 - A

46 - A

47 - B

48 - A

49 - C

50 - B



Cartão de respostas - Fato ou Fake

1 <i>Fake</i>	2 <i>Fato</i>	3 <i>Fato</i>	4 <i>Fato</i>	5 <i>Fato</i>	6 <i>Fake</i>	7 <i>Fake</i>	8 <i>Fato</i>	9 <i>Fake</i>	10 <i>Fato</i>
11 <i>Fake</i>	12 <i>Fato</i>	13 <i>Fato</i>	14 <i>Fato</i>	15 <i>Fake</i>					



Cartão de respostas - Desafio implacável

1 - B	2 - A	3 - C	4 - C	5 - B	6 - A	7 - B	8 - C	9 - A	10 - B
11 - B	12 - C	13 - B	14 - B						
15 - C	16 - A	17 - B	18 - C						



Anexo II

Guia completo *Geometry Bike*

Recomendamos que o guia seja produzido no formato A5, de modo a garantir praticidade e facilitar sua consulta durante as partidas.



PROFMAT

GUIA COMPLETO

GEOMETRY

Bike

FLORENCE
QUEIROGA

LUIZ
PERONA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL, CEFET-MG

Este guia é um componente do jogo *Geometry Bike*, desenvolvido como parte de uma pesquisa de mestrado no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) em 2024.

Dezembro, 2024



Conteúdo

Prefácio	5
1 O jogo	7
2 Componentes	9
2.1 Tabuleiro	9
2.2 Cartas	10
2.2.1 Geometria <i>Bike</i>	11
2.2.2 <i>Bike Math</i>	11
2.2.3 Fato ou <i>Fake</i>	12
2.2.4 Sorte ou Azar	12
2.2.5 Desafio implacável	12
2.3 Cartão de respostas	13

2.4	Dado e peças	15
3	Como jogar	17
3.1	Preparação	17
3.2	Regras do jogo	18
3.2.1	Movimentação dos jogadores	18
3.2.2	Casas sem símbolo	18
3.2.3	Casas com símbolo	18
3.2.4	Efeitos especiais	19
3.2.5	Orientações	19
3.3	Estratégias e dicas	19
4	Resolução das cartas	21
4.1	Geometria <i>Bike</i>	21
4.2	<i>Bike Math</i>	25
4.3	Fato ou <i>Fake</i>	51
4.4	Desafio implacável	56
5	Glossário	69
5.1	Termos associados às bicicletas	69
5.2	Termos matemáticos	71



Prefácio

É com grande satisfação que apresentamos o *Geometry Bike*, um jogo criado com o objetivo de unir diversão e aprendizado, explorando a geometria presente no fascinante universo das bicicletas. Este guia foi pensado para oferecer suporte e dicas valiosas para jogadores que desejam mergulhar de forma interativa e desafiadora no mundo da matemática através de um cenário lúdico.

O *Geometry Bike* foi desenvolvido para estimular a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a criatividade dos estudantes, proporcionando uma experiência educacional diferenciada. Ao pedalar pela trilha imaginária e solucionar problemas geométricos, os jogadores irão explorar conceitos matemáticos como ângulos, polígonos, proporções e muito mais, tudo aplicado de maneira prática no contexto das bicicletas.

Neste guia, você encontrará não apenas orientações sobre

como jogar, mas também reflexões sobre a matemática envolvida em cada carta para maximizar o aproveitamento do jogo. Mais do que um simples passatempo, o *Geometry Bike* é uma ferramenta de aprendizado.

Esperamos que este guia seja um companheiro útil em sua jornada, ajudando a tirar o máximo proveito do jogo enquanto você se diverte e aprende. Aproveite a trilha, cada desafio e cada descoberta ao longo do percurso!

Boas pedaladas e ótimos cálculos!

Florence Queiroga



1. O jogo

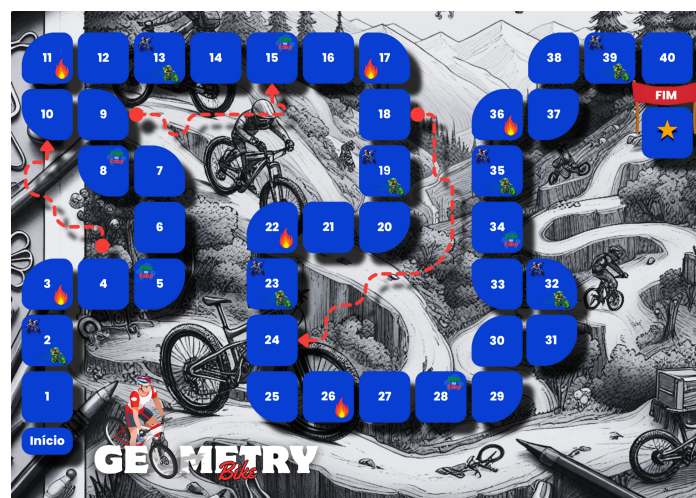
O *Geometry Bike* é um jogo pedagógico de trilha que combina perguntas e respostas em uma experiência interativa e envolvente. Ao longo do jogo, os participantes são desafiados a explorar conceitos de geometria aplicados ao mundo das bicicletas. O objetivo é simples: ser o primeiro a completar o percurso no tabuleiro, enfrentando uma série de desafios, conquistando bônus estratégicos e superando penalidades. Destinado a estudantes a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, o *Geometry Bike* proporciona uma forma divertida e dinâmica de aprender geometria, conectando-a ao contexto prático das bicicletas.



2. Componentes

2.1 Tabuleiro

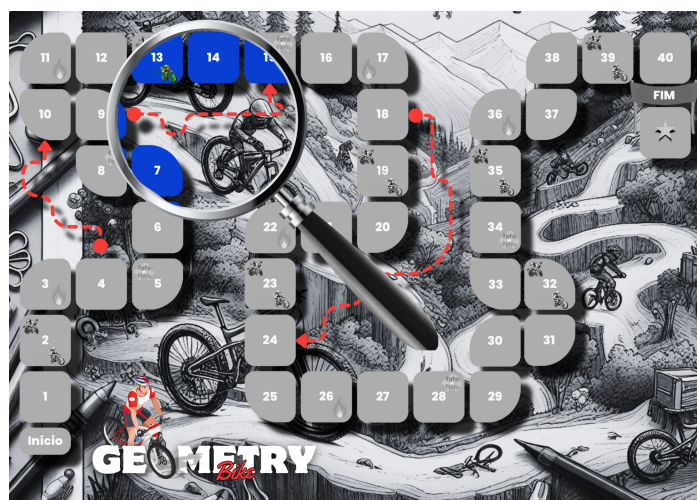
O tabuleiro do jogo possui 42 casas. A primeira é marcada com a palavra “Início”, indicando o ponto de partida. As 40 casas seguintes são numeradas sequencialmente, e a última, destacada com uma estrela, simboliza a linha de chegada.



Neste tabuleiro, há 7 casas destacadas com as figura de dois ciclistas: um com o símbolo da caveira e o outro da sorte, cujas rodas são adornadas por trevos de quatro folhas, indicando que estão vinculadas às cartas “Sorte ou Azar”. Existem 5 casas identificadas com o emblema “Fato ou *Fake*”, pois correspondem às cartas da categoria “Fato ou *Fake*”. Além disso, 6 casas estão marcadas com o símbolo de uma chama de fogo, indicando que estão associadas às cartas da categoria “Desafio implacável”.



O tabuleiro possui três atalhos destacados em vermelho. O primeiro atalho permite ao jogador avançar da casa 4 para a casa 10; o segundo, da 9 para a 15; e o terceiro, da 18 para a 24.



2.2 Cartas

O jogo dispõe de cinco categorias de cartas: Geometria *Bike*, *Bike Math*, Fato ou *Fake*, Sorte ou Azar, e Desafio implacável. A seguir, apresentaremos uma descrição detalhada de cada conjunto de cartas.

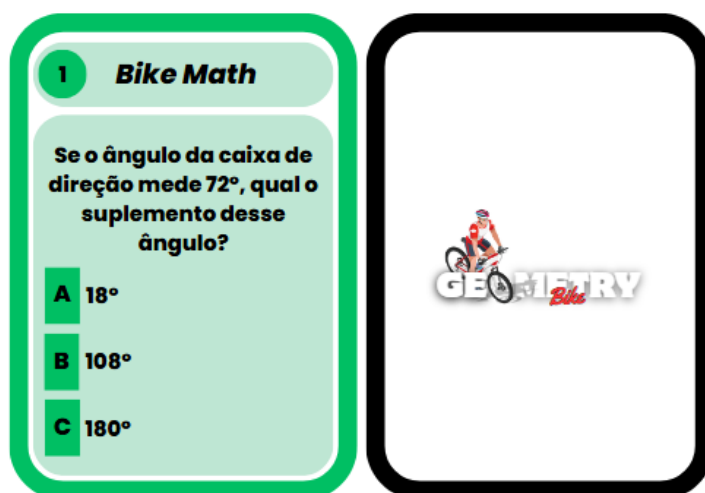
2.2.1 Geometria *Bike*

Este conjunto é composto por 15 cartas, cada uma contendo uma pergunta de múltipla escolha com três alternativas, que abordam a geometria do quadro da bicicleta e diferentes modalidades de ciclismo.



2.2.2 *Bike Math*

O conjunto *Bike Math* é formado por 50 cartas, cada uma contendo uma pergunta de múltipla escolha envolvendo conteúdos matemáticos relacionados ao tema bicicleta. Os tópicos abrangem uma variedade de conceitos, desde ângulos até equações de circunferências.



2.2.3 Fato ou Fake

Este conjunto contém 15 cartas com afirmações sobre a história da bicicleta, que devem ser classificadas como “Fato”, se forem verdadeiras, ou “Fake”, se forem falsas.



2.2.4 Sorte ou Azar

Este bloco é composto por 30 cartas, sendo 15 de bônus (sorte) e 15 de penalidades (azar).



2.2.5 Desafio implacável

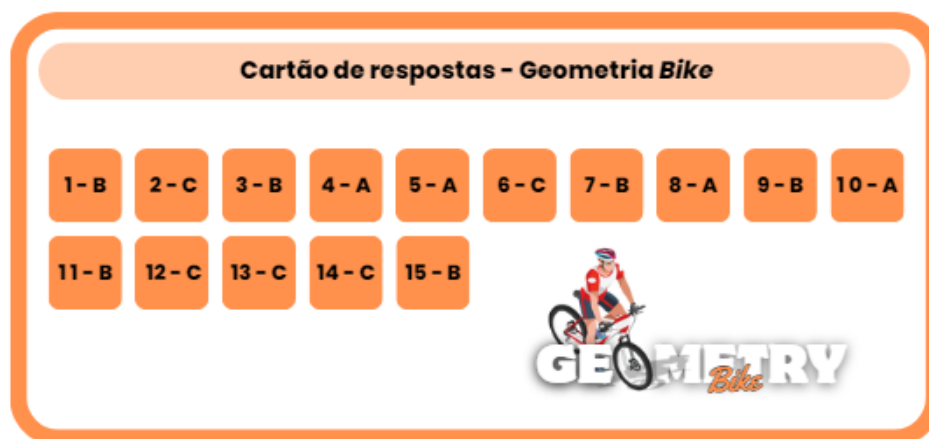
Essa categoria, composta por 18 cartas, é a parte especial do jogo. As cartas apresentam perguntas relacionadas à geometria dos

rastros dos pneus, bicicletas com rodas poligonais e as estradas correspondentes. Cada carta contém um *QR Code* que direciona o jogador a um *applet* desenvolvido no GeoGebra, com dicas para a resolução do desafio.



2.3 Cartão de respostas

Com a exceção do conjunto denominado "Sorte ou Azar", cada conjunto de cartas é acompanhado por um cartão de respostas, que indica a alternativa correta para cada questão. O objetivo desses cartões é garantir que o oponente possa verificar se o jogador respondeu corretamente à pergunta.



Cartão de respostas – *Bike Math*

1 - B	2 - A	3 - C	4 - B	5 - A	6 - B	7 - C	8 - A	9 - B	10 - A
11 - C	12 - A	13 - C	14 - A	15 - A	16 - A	17 - C	18 - B	19 - A	20 - B
21 - B	22 - B	23 - C	24 - C	25 - A	26 - B	27 - C	28 - C	29 - B	30 - C
31 - A	32 - C	33 - B	34 - B	35 - A	36 - B	37 - C	38 - A	39 - C	40 - A
41 - A	42 - C	43 - B	44 - C	45 - A	46 - A	47 - B	48 - A	49 - C	50 - B



Cartão de respostas – Fato ou Fake

1 Fake	2 Fato	3 Fato	4 Fato	5 Fato	6 Fake	7 Fake	8 Fato	9 Fake	10 Fato
11 Fake	12 Fato	13 Fato	14 Fato	15 Fake					



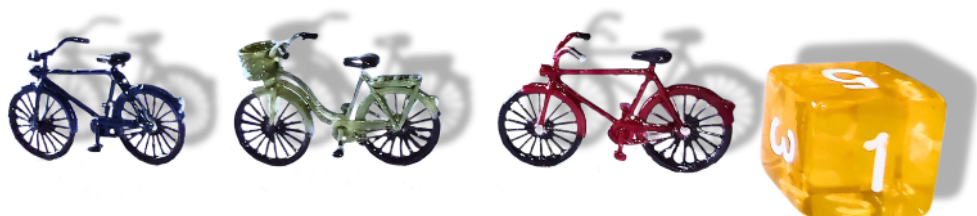
Cartão de respostas – Desafio implacável

1 - B	2 - A	3 - C	4 - C	5 - B	6 - A	7 - B	8 - C	9 - A	10 - B
11 - B	12 - C	13 - B	14 - B						
15 - C	16 - A	17 - B	18 - C						



2.4 Dado e peças

O jogo inclui três mini bicicletas que funcionam como peões para indicar a posição dos jogadores no tabuleiro, além de um dado de seis faces para definir os movimentos. No entanto, o número de participantes não se limita a apenas três jogadores. Em turmas maiores, cada mini bicicleta pode representar um grupo (como uma dupla ou trio), permitindo a participação de mais jogadores e promovendo discussões colaborativas entre eles.

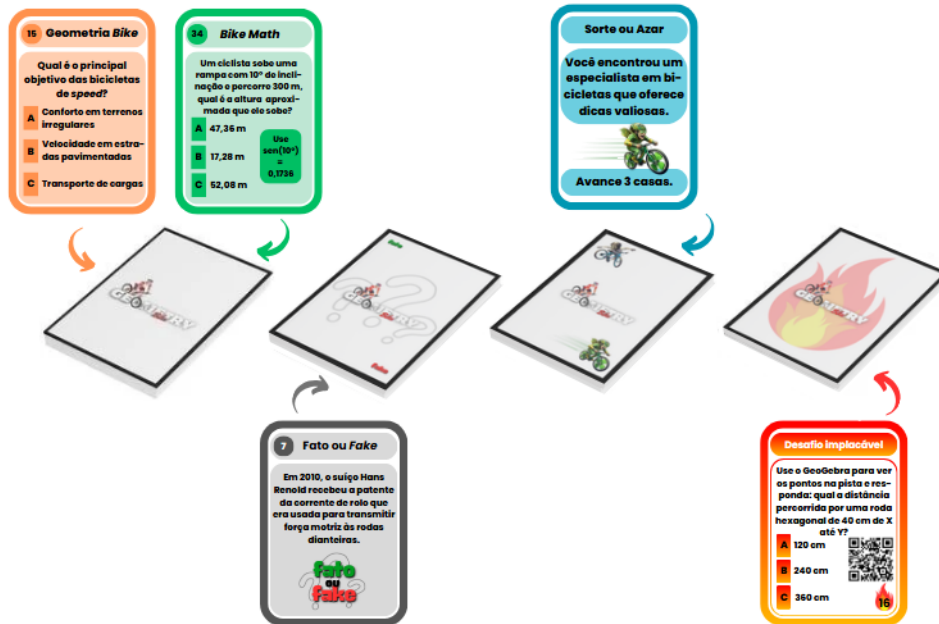




3. Como jogar

3.1 Preparação

- Posicione o tabuleiro em uma superfície plana;
- Cada jogador (ou equipe) escolhe seu peão (bicicleta) e coloca-o na casa de início;
- Divida as cartas em quatro grupos: o primeiro grupo deverá conter uma combinação de cartas “*Bike Math*” e “*Geometria Bike*”, o segundo será composto pelas cartas denominadas “Fato ou *Fake*”, o terceiro conterà as cartas “Sorte ou Azar” e último grupo será formado pelas cartas “Desafio implacável”;



- Decida a ordem dos jogadores por meio do lançamento do dado.

3.2 Regras do jogo

3.2.1 Movimentação dos jogadores

- Cada jogador, em sua vez, lança o dado e avança o número de casas indicado.

3.2.2 Casas sem símbolo

- Se o jogador parar em uma casa **sem símbolo**, ele deve retirar uma carta do monte que contém as cartas misturadas de “*Bike Math*” e “*Geometria Bike*”.
- Caso acerte a resposta, permanece na casa. Caso erre, retorna à posição anterior.

3.2.3 Casas com símbolo

- Se o jogador cair em uma casa **com símbolo**, ele deve retirar uma carta do monte correspondente ao símbolo e responder à pergunta associada.

- Caso acerte a resposta, permanece na casa. Caso erre, retorna à posição anterior.

3.2.4 Efeitos especiais

Cartas “Sorte ou Azar”

- **Carta de Sorte:** Permite que o jogador avance além do resultado do dado, ganhando uma vantagem.
- **Carta de Azar:** Obriga o jogador a retroceder um número de casas indicado pela carta.

Trilhas vermelhas

- Trilhas vermelhas permitem um avanço mais rápido no jogo.
- Exemplo: Se o jogador parar na casa 4 e acertar a pergunta, ele pode usar a trilha vermelha para avançar diretamente para a casa 10.

3.2.5 Orientações

As respostas do jogo foram arredondadas para três casas decimais. Além disso, foi adotado o sistema de coordenadas cartesianas, e, devido às limitações de espaço nas cartas, optou-se pela omissão dos nomes dos pontos representados.

3.3 Estratégias e dicas

1. As perguntas são sobre temas como:
 - geometria do quadro da bicicleta (ângulos, comprimentos de tubos, etc.);
 - geometria dos rastros dos pneus;
 - rodas poligonais e estradas associadas;
 - história da bicicleta.
2. As perguntas têm níveis de dificuldade variados.

3. Responder corretamente às perguntas é a chave para o sucesso. Portanto, estude os conceitos de geometria das bicicletas antes de jogar!
4. Aproveite os bônus para ganhar vantagens sobre seus adversários.
5. Se sofrer uma penalidade, mantenha a calma e tente recuperar na próxima rodada.



4. Resolução das cartas

Este capítulo apresenta as respostas e explicações detalhadas para as cartas do jogo, organizadas por categoria. Use este guia para verificar as respostas corretas e aprofundar a compreensão dos conceitos explorados em cada tipo de carta.

É importante ressaltar que existem diferentes métodos e caminhos para se chegar às soluções. Se o nosso método for diferente do que você utilizou, não hesite em consultar seu professor para obter esclarecimentos adicionais. A diversidade de abordagens pode ser valiosa para o aprendizado.

4.1 Geometria *Bike*

1. O ângulo do tubo do selim influencia principalmente:
b) a postura do ciclista.

Esse ângulo determina a posição do ciclista em relação ao

eixo do movimento central, afetando o conforto, a eficiência da pedalada e a biomecânica do movimento.

2. A distância entre os eixos das rodas é importante para:
c) a estabilidade e agilidade.

Essa distância afeta diretamente como a bicicleta se comporta em diferentes situações, equilibrando a necessidade de estabilidade em alta velocidade e a agilidade em manobras.

3. A queda do movimento central está relacionada ao:
b) centro de gravidade da bicicleta.

A altura e a posição do movimento central afetam diretamente o centro de gravidade, que é crucial para a estabilidade e a manobrabilidade da bicicleta. Um movimento central mais baixo pode resultar em um centro de gravidade mais baixo, proporcionando maior estabilidade, enquanto um movimento central mais alto pode elevar o centro de gravidade, afetando a agilidade e o controle da bicicleta.

4. Um tubo superior mais longo proporciona ao ciclista uma posição:
a) mais esticada.

Isso ocorre porque um tubo superior mais longo geralmente aumenta a distância entre o guidão e o selim, forçando o ciclista a esticar os braços para alcançar o guidão. Essa posição é comum em bicicletas de estrada, onde uma postura mais aerodinâmica é desejável.

5. Quanto maior o alcance da bicicleta maior será:
a) a estabilidade.

Um alcance maior geralmente implica um aumento na distância entre o tubo de direção e o selim, exigindo maior flexibilidade do ciclista. No entanto, essa configuração também proporciona maior estabilidade durante a pedalada.

6. Tubo onde se conecta o garfo da bicicleta:

c) tubo da caixa de direção

Este tubo é parte do quadro da bicicleta e permite a articulação do guidão e do garfo, facilitando a manobrabilidade e o controle da bicicleta.

7. Quanto maior a distância entre eixos, maior será a:

b) lentidão.

Quanto maior a distância entre eixos de uma bicicleta, maior será a lentidão e estabilidade, mas menor a agilidade. Uma maior distância entre eixos torna a bicicleta mais estável. No entanto, a manobrabilidade é reduzida, tornando a bicicleta menos ágil em curvas fechadas ou manobras rápidas.

8. Quanto menor a distância entre eixos, maior será a:

a) agilidade

Quanto menor a distância entre eixos de uma bicicleta, maior será a agilidade. Bicicletas com uma distância entre eixos reduzida são mais fáceis de manobrar, especialmente em curvas fechadas e em terrenos técnicos.

9. Tubo que conecta o eixo do pedal ao eixo da roda traseira:

b) tubo inferior traseiro

O tubo que conecta o eixo do pedal ao eixo da roda traseira é chamado de tubo inferior traseiro, também conhecido

como *chainstay*. Ele faz parte do triângulo traseiro da bicicleta e desempenha um papel fundamental na transferência de potência do pedal para a roda traseira, além de influenciar a rigidez e a estabilidade da bicicleta.

10. Qual tipo de bicicleta geralmente tem pneus largos e com cravos?

a) *mountain bike*

Esses pneus são projetados para proporcionar melhor tração em terrenos irregulares, como trilhas, lama, areia e cascalho. Os cravos aumentam a aderência, permitindo que a bicicleta se mova com mais segurança em superfícies soltas ou acidentadas, enquanto a largura maior oferece mais estabilidade e absorção de impactos.

11. A bicicleta desenvolvida para terrenos irregulares é:

b) *mountain bike*

A bicicleta desenvolvida para terrenos irregulares é a *mountain bike* (MTB). Ela é projetada especificamente para enfrentar trilhas, terrenos acidentados, lama, pedras e subidas íngremes.

12. A bicicleta indicada para uso nas cidades é:

b) urbana

A bicicleta indicada para uso nas cidades é a bicicleta urbana. Esses modelos são projetados para oferecer conforto e praticidade em deslocamentos diários, como ir ao trabalho, à escola ou realizar tarefas.

13. As bicicletas de *speed* são projetadas para:

c) estradas pavimentadas

As bicicletas de *speed* (também conhecidas como bicicletas de estrada) são projetadas para alta velocidade em estradas pavimentadas. Elas são leves, aerodinâmicas e possuem pneus finos, com pouca resistência ao rolamento, permitindo que os ciclistas atinjam velocidades elevadas com mais eficiência.

14. Qual tipo de bicicleta geralmente possuem pneus finos e lisos?

c) *speed*

As bicicletas que geralmente possuem pneus finos e lisos são as bicicletas de *speed* (ou bicicletas de estrada). Esses pneus são projetados para minimizar o atrito com o solo e aumentar a eficiência em estradas pavimentadas, permitindo que os ciclistas atinjam altas velocidades com menos esforço.

15. Qual é o principal objetivo das bicicletas de *speed*?

b) velocidade em estradas pavimentadas

O principal objetivo das bicicletas de *speed* (ou bicicletas de estrada) é atingir altas velocidades em superfícies pavimentadas. Elas são projetadas para maximizar a eficiência do ciclista, permitindo percorrer longas distâncias rapidamente, com o menor esforço possível.

4.2 *Bike Math*

1. Se o ângulo da caixa de direção mede 72° , qual o suplemento desse ângulo?

b) 108° .

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° . Portanto, se o ângulo da caixa de direção mede 72° , o suplemento é calculado assim:

$$180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

Logo, o suplemento do ângulo de 72° é 108° .

2. Se o ângulo do tubo do selim mede 74° , qual o complemento desse ângulo?

a) 16° .

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90° . Portanto, se o ângulo do tubo do selim mede 74° , o complemento é calculado assim:

$$90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$$

Logo, o complemento do ângulo de 74° é 16° .

3. Se o ângulo do tubo do selim mede 71° e os tubos do selim e da caixa de direção são paralelos, então:

c) o ângulo da caixa de direção mede 71° .

Se o ângulo do tubo do selim mede 71° e os tubos do selim e da caixa de direção são paralelos, então o ângulo da caixa de direção também mede 71° . Isso ocorre porque, em retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos correspondentes são congruentes.

4. Se o ângulo da caixa de direção mede 68° e os tubos do selim e da caixa de direção são paralelos, então:

b) ângulo do tubo do selim mede 68° .

Se o ângulo da caixa de direção mede 68° e os tubos do selim e da caixa de direção são paralelos, então o ângulo do tubo do selim também mede 68° . Isso ocorre porque, em retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos correspondentes são congruentes.

5. No geral, os ângulos do tubo do selim e da caixa de direção de uma bicicleta são:

a) agudos.

Normalmente, o ângulo do tubo do selim varia entre 70° e 75° , enquanto o ângulo da caixa de direção geralmente fica entre 68° e 73° . Como ambos os ângulos são maiores que 0° e menores que 90° , eles são classificados como ângulos agudos.

6. Se o ângulo do tubo do selim fosse obtuso, o ciclista ficaria:
b) mais próximo do guidão.

Um ângulo obtuso no tubo do selim resulta em uma posição de assento mais avançada, diminuindo a distância entre o ciclista e o guidão.

7. Se o ângulo do tubo do selim fosse reto, o ciclista ficaria:
c) alinhado verticalmente com o pedal.

Se o ângulo do tubo do selim fosse reto (90°), o ciclista ficaria alinhado verticalmente com o pedal. Nesse caso, o selim estaria diretamente acima do movimento central (onde os pedais estão conectados), colocando o ciclista em uma posição mais ereta e diretamente sobre os pedais. Essa posição não é comum em bicicletas tradicionais, pois não favorece a eficiência da pedalada e o conforto em longas distâncias.

8. Se o ângulo da caixa de direção fosse obtuso, o ciclista ficaria:

a) projetado para frente.

Um ângulo obtuso na caixa de direção geralmente resulta em uma postura mais inclinada para a frente.

9. Qual é a soma dos ângulos externos de um triângulo formado pelas partes do quadro da bicicleta?

b) 360°.

A soma dos ângulos externos de um triângulo é sempre 360°. Isso se aplica ao triângulo formado pelas partes do quadro da bicicleta, assim como a qualquer outro triângulo.

10. Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo formado pelas partes do quadro da bicicleta?

a) 180°.

A soma dos ângulos internos de um triângulo, incluindo um triângulo formado pelas partes do quadro da bicicleta, é sempre 180°. Isso é uma propriedade fundamental dos triângulos em geometria plana.

11. Se a roda dianteira de uma bicicleta tem um diâmetro de 74 cm, qual é o raio da roda?

c) 37 cm.

O raio de uma circunferência é a metade do diâmetro. Portanto, se a roda dianteira de uma bicicleta tem um diâmetro de 74 cm, o raio pode ser calculado assim:

$$\text{raio} = \frac{\text{diâmetro}}{2} = \frac{74 \text{ cm}}{2} = 37 \text{ cm}$$

Logo, o raio da roda dianteira é 37 cm.

12. Qual é o comprimento da circunferência de uma roda de bicicleta com um diâmetro de 74 cm?

a) 232,36 cm.

O comprimento da circunferência (C) de uma roda pode ser calculado usando a fórmula:

$$C = \pi \cdot d$$

onde d é o diâmetro da roda e π é uma constante que equivale a aproximadamente 3,14. Se o diâmetro da roda é 74 cm, o comprimento da circunferência é:

$$C = \pi \cdot d \approx 3,14 \cdot 74 \text{ cm} = 232,36 \text{ cm}$$

Portanto, o comprimento da circunferência da roda é aproximadamente 232,36 cm.

13. Qual o diâmetro da roda de uma bicicleta cuja circunferência mede 175,84 cm?
c) **56 cm.**

Para encontrar o diâmetro da roda a partir do comprimento da circunferência, você pode usar a fórmula:

$$C = \pi \cdot d$$

onde C é o comprimento da circunferência, d é o diâmetro e π é uma constante que equivale a aproximadamente 3,14. Portanto, se a circunferência mede 175,84 cm, o diâmetro é:

$$C = \pi \cdot d \implies d = \frac{C}{\pi} \approx \frac{175,84 \text{ cm}}{3,14} = 56 \text{ cm}$$

Portanto, o diâmetro da roda da bicicleta é aproximadamente 56 cm.

14. Qual é a área de uma roda de bicicleta com raio de 37 cm?
a) **4.298,66 cm².**

A área A de um círculo pode ser calculada usando a fórmula:

$$A = \pi \cdot r^2$$

onde r é o raio da roda e π é uma constante que equivale a aproximadamente 3,14. Se o raio da roda é 37 cm, a área é:

$$A = \pi \cdot r^2 \approx 3,14 \cdot (37 \text{ cm})^2 = 4.298,66 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área da roda de bicicleta é aproximadamente 4.298,66 cm².

15. Qual a medida do raio da roda de bicicleta cuja área mede 2.461,76 cm²?

a) 28 cm.

Para encontrar o raio r da roda de bicicleta a partir da área A , você pode usar a fórmula da área do círculo:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Se a área A é 2.461,76 cm², então:

$$A = \pi \cdot r^2 \implies r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{2.461,76 \text{ cm}^2}{3,14}} = 28 \text{ cm}$$

Portanto, a medida do raio da roda de bicicleta é aproximadamente 28 cm.

16. Quantas voltas completas uma roda de bicicleta com circunferência de 200 cm dá ao percorrer 10 m?

a) 5 voltas

Para calcular quantas voltas completas uma roda de bicicleta dá ao percorrer uma certa distância, utilizamos a

expressão:

$$\text{número de voltas} = \frac{\text{distância total percorrida}}{\text{circunferência da roda}}$$

Neste caso, a distância total percorrida é 10 m (ou 1.000 cm) e a circunferência da roda é 200 cm. Portanto, temos:

$$\text{número de voltas} = \frac{1.000 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} = 5$$

Assim, a roda dá 5 voltas completas ao percorrer 10 metros.

17. Se uma roda de bicicleta gira 100 vezes e tem uma circunferência de 230 cm, qual é a distância total percorrida?
c) **0,23 km.**

Para calcular a distância total percorrida, utilizamos a expressão:

$$\text{distância total} = \text{número de voltas} \cdot \text{circunferência da roda}$$

Neste caso, a roda gira 100 vezes e a circunferência é de 230 cm. Portanto:

$$\text{distância total} = 100 \cdot 230 \text{ cm} = 23.000 \text{ cm}$$

Convertendo para quilômetros, temos:

$$\text{distância total} = \frac{23.000 \text{ cm}}{100.000} = 0,23 \text{ km}$$

Assim, a distância total percorrida é 0,23 km.

18. Se uma roda de bicicleta dá 200 voltas e tem um diâmetro de 70 cm, qual é a distância percorrida?

b) 439,6 m.

Para calcular a distância percorrida, primeiro encontramos a circunferência da roda:

$$C = \pi \cdot d$$

onde d é o diâmetro e π é uma constante que equivale a aproximadamente 3,14. Se o diâmetro da roda é 70 cm:

$$C = \pi \cdot 70 \text{ cm} \approx 3,14 \cdot 70 \text{ cm} = 219,8 \text{ cm}$$

Agora, multiplicamos o comprimento da circunferência pelo número de voltas:

$$\text{distância total} = 200 \cdot 219,8 \text{ cm} = 43.960 \text{ cm}$$

Convertendo para metros:

$$\text{distância total} = \frac{43.960 \text{ cm}}{100} = 439,6 \text{ m}$$

Assim, a distância percorrida é 439,6 m.

19. Se o raio de uma roda de bicicleta é duplicado, o que acontece com a circunferência?

a) É duplicada.

Se o raio r de uma roda de bicicleta é duplicado, a nova circunferência C' pode ser comparada à circunferência original C usando a fórmula da circunferência:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Se o raio é duplicado, temos:

$$r' = 2 \cdot r$$

Substituindo na fórmula da circunferência:

$$C' = 2 \cdot \pi \cdot r' = 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot r) = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 2 \cdot C$$

Assim, a nova circunferência C' é o dobro da circunferência original C . Portanto, quando o raio da roda é duplicado, a circunferência da roda se torna duas vezes maior.

20. Se o raio de uma roda de bicicleta é duplicado, o que acontece com a área?

b) É quadruplicada.

Se o raio r de uma roda de bicicleta é duplicado, a nova área A' pode ser comparada à área original A usando a fórmula da área de um círculo:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Se o raio é duplicado, temos:

$$r' = 2 \cdot r$$

Substituindo na fórmula da área:

$$A' = \pi \cdot (r')^2 = \pi \cdot (2r)^2 = \pi \cdot 4 \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot A$$

Assim, quando o raio da roda é duplicado, a área da roda se torna quatro vezes maior.

21. Se uma bicicleta percorrer 5 km em 10 min, qual será a distância percorrida em 30 min à mesma velocidade?

b) 15 km.

Podemos resolver o problema usando regra de três. As grandezas distância percorrida e tempo são diretamente

proporcionais. Portanto, se x é a distância percorrida em 30 minutos, temos:

$$\frac{5 \text{ km}}{10 \text{ min}} = \frac{x}{30 \text{ min}}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$5 \text{ km} \cdot 30 \text{ min} = 10 \text{ min} \cdot x \implies x = 15 \text{ km}$$

Logo, em 30 minutos a bicicleta percorrerá 15 km.

22. Se uma bicicleta percorrer 8 km em 16 min, quanto tempo levará para percorrer 24 km à mesma velocidade?

b) 48 min.

Podemos resolver o problema usando regra de três. As grandezas distância percorrida e tempo são diretamente proporcionais. Portanto, se x é o tempo para percorrer 24 km, temos:

$$\frac{8 \text{ km}}{16 \text{ min}} = \frac{24 \text{ km}}{x}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$8 \text{ km} \cdot x = 16 \text{ min} \cdot 24 \text{ km} \implies x = 48 \text{ min}$$

Logo, a bicicleta gastará 48 minutos para percorrer 24 km.

23. Se pedalando a velocidade constante leva-se 20 min para percorrer 10 km, quanto tempo levará para percorrer 25 km?

c) 50 min.

Podemos resolver esse problema usando a regra de três, considerando que a distância percorrida e o tempo são

diretamente proporcionais. Portanto, se t é o tempo gasto para percorrer 25 km, temos:

$$\frac{10 \text{ km}}{20 \text{ min}} = \frac{25 \text{ km}}{t}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$10 \text{ km} \cdot t = 20 \text{ min} \cdot 25 \text{ km} \implies t = 50 \text{ min}$$

Logo, a bicicleta gastará 50 minutos para percorrer 25 km.

24. Se um ciclista a 12 km/h leva 30 min para completar um percurso, quanto tempo ele levaria a 24 km/h?
c) 15 min.

Vamos resolver o problema usando a regra de três. Sabemos que a relação entre a velocidade e o tempo é inversamente proporcional. Logo, se t é o tempo gasto para realizar o percurso à 24 km/h, temos:

$$12 \text{ km/h} \cdot 30 \text{ min} = 24 \text{ km/h} \cdot t \implies t = 15 \text{ min}$$

Logo, o ciclista levaria 15 minutos para completar o percurso à 24 km/h.

25. Se pedalar por 1 h queima 550 calorias, no mesmo ritmo em 45 min são queimadas:
a) 412,5 calorias

Para resolver essa questão, vamos usar a regra de três simples para determinar quantas calorias são queimadas em 45 minutos, dado que 550 calorias são queimadas em 1 hora (60 minutos). As grandezas quantidade de calorias e tempo são diretamente proporcionais, então se y é a quantidade de calorias queimadas em 60 minutos, temos:

$$\frac{45 \text{ min}}{550 \text{ cal}} = \frac{60 \text{ min}}{y}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$45 \text{ min} \cdot y = 60 \text{ min} \cdot 550 \text{ cal} \implies y = 412,5 \text{ cal}$$

Portanto, se pedalar por 45 minutos, serão queimadas 412,5 calorias.

26. Se um ciclista pode percorrer 40 km em 2 h, quantos km ele percorrerá em 5 h à mesma velocidade?

b) 100 km.

Resolveremos o problema usando regra de três. As grandezas distância percorrida e tempo são diretamente proporcionais. Portanto, se d é a distância percorrida em 5 horas, temos:

$$\frac{40 \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{d}{5 \text{ h}}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$40 \text{ km} \cdot 5 \text{ h} = 2 \text{ h} \cdot d \implies d = 100 \text{ km}$$

Logo, o ciclista percorrerá 100 km em 5 horas.

27. Se um ciclista a 15 km/h leva 1h para completar um percurso, quanto tempo ele levaria a 12 km/h?

c) 1h15 min.

Vamos resolver o problema usando a regra de três. Sabemos que a relação entre a velocidade e o tempo é inversamente proporcional. Logo, se t é o tempo gasto para realizar o percurso à 12 km/h, temos:

$$\frac{15 \text{ km/h}}{12 \text{ km/h}} = \frac{t}{1 \text{ h}} \implies 15 \cdot 1 \text{ h} = 12 \cdot t \implies t = 1,25 \text{ h}$$

Convertendo 0,25 hora para minutos:

$$0,25 \text{ h} = 0,25 \cdot 60 \text{ min} = 15 \text{ min}$$

Logo, o ciclista levaria 1h15min para completar o percurso à 12 km/h.

28. Se um ciclista percorre 60 km em 2 h, quanto tempo levará para percorrer 90 km à mesma velocidade?
c) 3 h.

Resolveremos o problema usando regra de três. As grandezas distância percorrida e tempo são diretamente proporcionais. Portanto, se t é a tempo gasto para percorrer 90 km, temos:

$$\frac{60 \text{ km}}{2 \text{ h}} = \frac{90 \text{ km}}{t}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$60 \text{ km} \cdot t = 2 \text{ h} \cdot 90 \text{ km} \implies t = 3 \text{ h}$$

Logo, o ciclista levará 3 horas para percorrer 90 km.

29. Se um ciclista queima 400 calorias por km, quantos km ele deve pedalar para queimar 1.400 calorias?
b) 3,5 km.

Para resolver essa questão, usaremos uma regra de três simples, já que as grandezas quilômetros percorridos e calorias são diretamente proporcionais. Portanto, se x é a distância necessária para queimar 1.400 calorias, temos:

$$\frac{1 \text{ km}}{400 \text{ cal}} = \frac{x}{1.400 \text{ cal}}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$1 \text{ km} \cdot 1.400 \text{ cal} = 400 \text{ cal} \cdot x \implies x = 3,5 \text{ km}$$

Logo, para queimar 1.400 calorias, esse ciclista deve pedalar por 3,5 km.

30. Se um ciclista percorre 45 km em 90 min, quanto tempo levará para percorrer 90 km à mesma velocidade?
c) **3h.**

Resolveremos o problema usando regra de três. As grandezas distância percorrida e tempo são diretamente proporcionais. Portanto, se t é o tempo gasto para percorrer 90 km, temos:

$$\frac{45 \text{ km}}{90 \text{ min}} = \frac{90 \text{ km}}{t}$$

Pela Propriedade Fundamental das Proporções, obtemos:

$$45 \text{ km} \cdot t = 90 \text{ min} \cdot 90 \text{ km} \implies t = 180 \text{ min}$$

Como 180 minutos corresponde a 3 horas, concluímos que o ciclista levará 3 h para percorrer 90 km.

31. Uma rampa de bicicleta forma um triângulo retângulo com catetos de 100 m e 30 m. Calcule o comprimento da rampa.
a) **104,4 m.**

Para calcular o comprimento da rampa, que forma a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de 100 m e 30 m, podemos usar o teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

onde c é a hipotenusa (comprimento da rampa) e a e b são os catetos.

Substituindo os valores:

$$c^2 = 30^2 + 100^2 \implies c = \sqrt{10.900} \approx 104,4 \text{ m}$$

Portanto, o comprimento da rampa é, aproximadamente, 104,4 m.

32. Uma rampa de bicicleta forma um triângulo retângulo com base de 50 m e altura de 12 m. Calcule o comprimento da rampa.

c) 51,4 m.

Para calcular o comprimento da rampa, que é a hipotenusa de um triângulo retângulo com base de 50 m e altura de 12 m, usamos o teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

onde c é a hipotenusa (comprimento da rampa) e a é a base e b a altura.

Substituindo os valores:

$$c^2 = 50^2 + 12^2 \implies c = \sqrt{2.644} \approx 51,4 \text{ m}$$

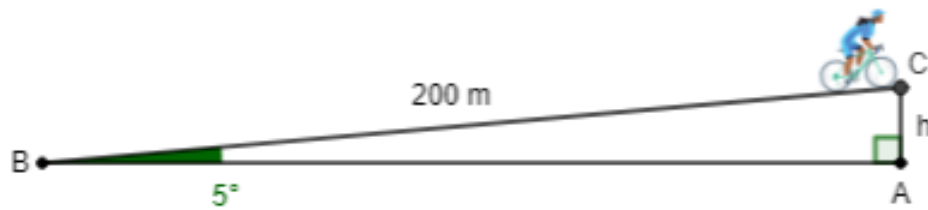
Portanto, o comprimento da rampa é, aproximadamente, 51,4 m.

33. Um ciclista sobe uma ladeira com um ângulo de 5° e percorre 200 m, qual é a altura aproximada que ele sobe?
b) 17,44 m.

Para calcular a altura (h) que o ciclista sobe ao percorrer uma ladeira com um ângulo de 5° e uma distância de 200 m, podemos usar a função seno.

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\text{sen}(5^\circ) = \frac{h}{200} \implies h = 200 \cdot \text{sen}(5^\circ)$$

Como $\text{sen}(5^\circ) \approx 0,0872$, obtemos:

$$h \approx 200 \cdot 0,0872 = 17,44 \text{ m}$$

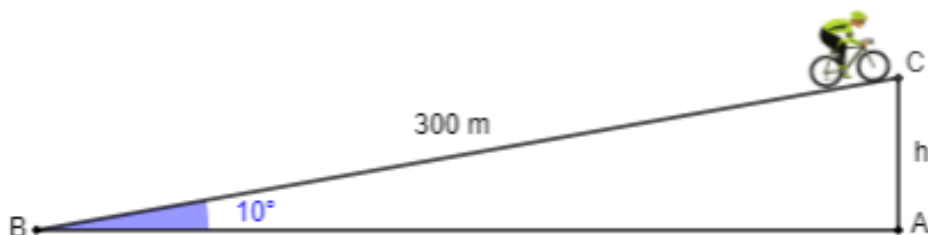
Portanto, a altura que o ciclista sobe é de, aproximadamente, 17,44 m.

34. Um ciclista sobe uma rampa com 10° de inclinação e percorre 300 m, qual é a altura aproximada que ele sobe?
b) 17,44 m.

Para calcular a altura (h) que o ciclista sobe ao percorrer uma ladeira com 10° de inclinação e uma distância de 300 m, podemos usar a função seno.

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\text{sen}(10^\circ) = \frac{h}{300} \implies h = 300 \cdot \text{sen}(10^\circ)$$

Como $\text{sen}(10^\circ) \approx 0,1736$, obtemos:

$$h \approx 300 \cdot 0,1736 = 52,08 \text{ m}$$

Portanto, a altura que o ciclista sobe é de, aproximadamente, 52,08 m.

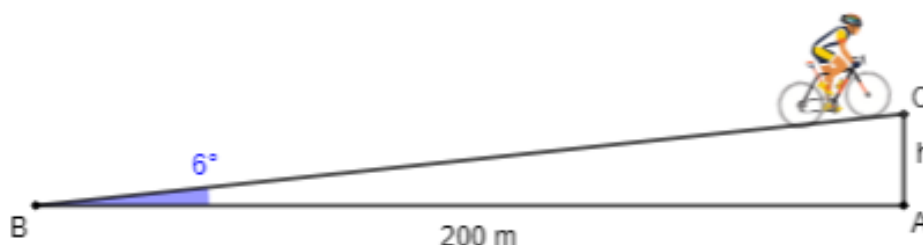
35. Se a distância horizontal percorrida por uma bicicleta é de 200 m e a inclinação da ladeira é de 6° , qual é a altura da ladeira?

a) 21,02 m.

Para calcular a altura da ladeira quando a distância horizontal percorrida é de 200 m e a inclinação da ladeira é de 6° , utilizamos a função tangente, pois a tangente de um ângulo em um triângulo retângulo é dada pela razão entre os catetos:

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\text{tg}(6^\circ) = \frac{h}{200} \implies h = 200 \cdot \text{tg}(6^\circ)$$

Como $tg(6^\circ) \approx 0,1051$, obtemos:

$$h \approx 200 \cdot 0,1051 = 21,02 \text{ m}$$

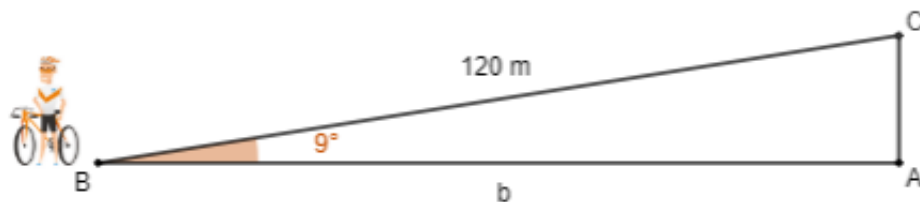
Portanto, a altura que o ciclista sobe é de, aproximadamente, 21,02 m.

36. Qual é a medida da base de uma rampa de ciclismo se seu comprimento é de 120 m e o ângulo de inclinação é de 9° ?
b) 118,52 m.

Para calcular a medida da base de uma rampa de ciclismo, dado o comprimento da rampa (hipotenusa) de 120 m e o ângulo de inclinação de 9° , utilizamos a função cosseno.

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\cos(9^\circ) = \frac{b}{120} \implies b = 120 \cdot \cos(9^\circ)$$

Como $\cos(9^\circ) \approx 0,9877$, obtemos:

$$b \approx 120 \cdot 0,9877 \approx 118,52 \text{ m}$$

Portanto, a base da rampa de ciclismo mede, aproximadamente, 118,52 m.

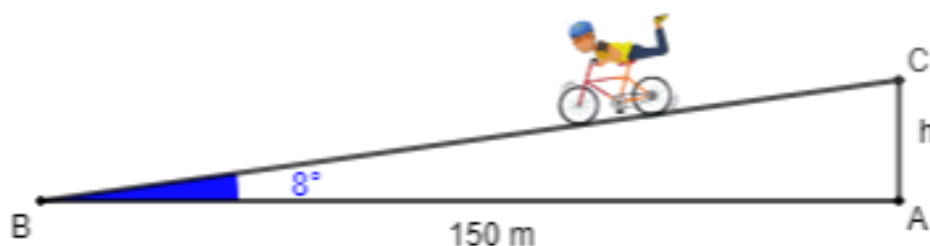
37. A base de uma rampa de ciclismo mede 150 m e sua inclinação é de 8° . Qual é a altura dessa rampa?

c) 21,08 m.

Para calcular a altura de uma rampa de ciclismo com uma base de 150 m e uma inclinação de 8° , utilizamos a função tangente:

$$tg\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$tg(8^\circ) = \frac{h}{150} \implies h = 150 \cdot tg(8^\circ)$$

Como $tg(8^\circ) \approx 0,1405$, obtemos:

$$h \approx 150 \cdot 0,1405 \approx 21,08 \text{ m}$$

Portanto, a altura da rampa de ciclismo mede, aproximadamente, 21,08 m.

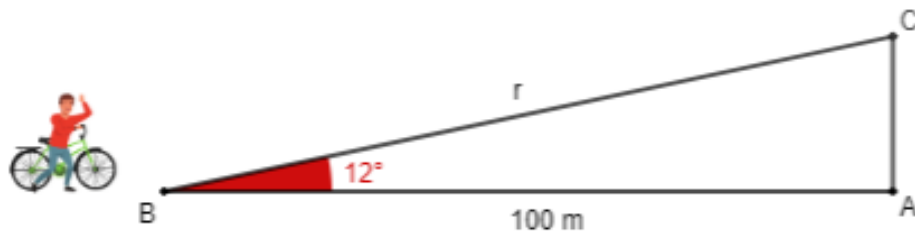
38. Um ciclista subiu uma rampa cuja base mede 100 m e sua inclinação é de 12° . Qual é o comprimento total da rampa?
a) 102,24 m.

Para calcular o comprimento total da rampa, que é a hipotenusa de um triângulo retângulo, utilizamos a função

cosseno:

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\cos(12^\circ) = \frac{100}{r} \implies r = \frac{100}{\cos(12^\circ)}$$

Como $\cos(12^\circ) \approx 0,9781$, obtemos:

$$r \approx \frac{100}{0,9781} \approx 102,24 \text{ m}$$

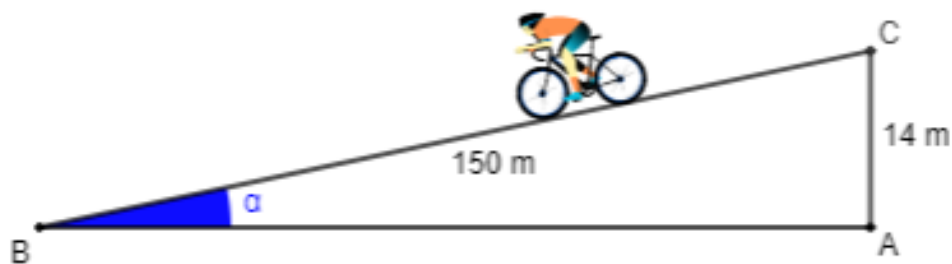
Portanto, a rampa de ciclismo mede, aproximadamente, 102,24 m.

39. Uma rampa de ciclismo tem 125 m de comprimento e 14 m de altura. Qual o seno do ângulo da rampa com o solo?
c) **0,112**.

Para calcular o seno do ângulo α da rampa com o solo, utilizamos a relação:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\text{sen}\alpha = \frac{14}{125} = 0,112$$

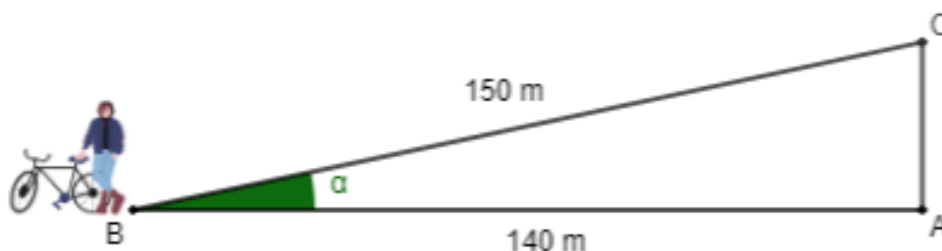
Portanto, o seno do ângulo da rampa com o solo é 0.112.

40. Uma rampa de ciclismo tem 150 m de comprimento e 140 m de base. Qual o cosseno do ângulo da rampa com o solo?
a) 0,933.

Para calcular o cosseno do ângulo α da rampa com o solo, utilizamos a relação:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Considerando que o triângulo retângulo ABC representa a rampa, temos:



$$\cos\alpha = \frac{140}{150} \approx 0,933$$

Portanto, o cosseno do ângulo da rampa com o solo é 0.933.

41. As coordenadas dos centros das rodas de uma bicicleta, que está numa rampa, são $(1;2)$ e $(1,9;2,2)$. A distância entre eixos é:

a) 0,922 unidade.

Para calcular a distância entre os eixos da bicicleta, precisamos encontrar a distância entre os dois pontos que representam os centros das rodas. A fórmula para calcular a distância (d) entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Substituindo as coordenadas dos centros das rodas, temos:

$$d = \sqrt{(1,9 - 1)^2 + (2,2 - 2)^2} = \sqrt{0,85} \approx 0,922$$

Portanto, a distância entre os eixos da bicicleta é ,aproximadamente, 0,922 unidade de comprimento.

42. O eixo da roda traseira de uma bicicleta está no ponto $(1;1)$ e o eixo do pedal em $(1,5;1,16)$. O comprimento do tubo inferior traseiro é:

c) 0,525 unidade.

Para calcular o comprimento do tubo inferior traseiro, que é a distância entre o eixo da roda traseira e o eixo do pedal, utilizamos a fórmula da distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Substituindo as coordenadas do eixo da roda traseira $(1,1)$ e do eixo do pedal $(1,5;1,16)$:

$$d = \sqrt{(1,5 - 1)^2 + (1,16 - 1)^2}$$

Calculando os valores, temos:

$$d = \sqrt{0,5^2 + 0,16^2} = \sqrt{0,2756} = 0,525$$

Portanto, o comprimento do tubo inferior traseiro é, aproximadamente, 0,525 unidade.

43. Se o centro da roda de uma bicicleta está no ponto $(0,0)$ e o raio é 37 cm. A equação da circunferência da roda é:

b) $x^2 + y^2 = 1.369$

A equação da circunferência é dada pela expressão:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e r é o raio.

Portanto, a equação da circunferência da roda de centro $(0,0)$ e raio 37 cm é dada por:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 37^2 \implies x^2 + y^2 = 1.369$$

44. Se o centro da roda de uma bicicleta está no ponto $(-8,3)$ e o raio é 28 cm. A equação da circunferência da roda é:

c) $(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 784$

A equação da circunferência é dada pela expressão:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e r é o raio.

Portanto, a equação da circunferência da roda de centro $(-8,3)$ e raio 28 cm é dada por:

$$[x - (-8)]^2 + (y - 3)^2 = 28^2 \implies (x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 784$$

45. Qual a equação da reta que passa no centro da roda traseira em (2,3) e tem coeficiente angular 0,15?

a) $y = 0,15x + 2,7$

A equação de uma reta na forma reduzida é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

onde (x_1, y_1) é um ponto pela qual a reta passa e m é o coeficiente angular da reta.

Substituindo os valores e simplificando, temos:

$$y - 3 = 0,15 \cdot (x - 2) \implies y = 0,15x + 2,7$$

Portanto, a equação da reta que passa pelo centro da roda traseira em (2,3) e tem coeficiente angular 0,15 é

$$y = 0,15x + 2,7$$

46. Se o quadro de uma bicicleta forma um triângulo com vértices nos pontos (4; 1,5), (1; 2) e (3; 4), qual é a área do triângulo?

a) **3,5 u. a.**

Para calcular a área de um triângulo cujos vértices são dados pelas coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , podemos usar a fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

Substituindo as coordenadas dos vértices e realizando os cálculos, obtemos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |4 \cdot (2 - 4) + 1 \cdot (4 - 1,5) + 3 \cdot (1,5 - 2)| = 3,5$$

Portanto, a área do triângulo é 3,5 u.a.

47. Qual é a equação da reta que passa pelas rodas da bicicleta posicionadas nos pontos $(1, 2)$ e $(5, 6)$?

b) $y = x + 1$

Para encontrar a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(5, 6)$, utilizamos a fórmula para a equação da reta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

onde m é o coeficiente angular e (x_1, y_1) é um dos pontos dados. Primeiro, calculamos o coeficiente angular:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Substituindo os pontos $(x_1, y_1) = (1, 2)$ e $(x_2, y_2) = (5, 6)$:

$$m = \frac{6 - 2}{5 - 1} = \frac{4}{4} = 1$$

Agora que temos o coeficiente angular $m = 1$, usamos um dos pontos para determinar a equação completa da reta. Utilizando o ponto $(1, 2)$ e simplificando, obtemos:

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \implies y = x + 1$$

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(5, 6)$ é: $y = x + 1$.

48. A trajetória de um ciclista é descrita pela parábola

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Em quais pontos a trajetória cruza o eixo x ?

- a) $(1, 0)$ e $(3, 0)$

Para determinar os pontos em que a trajetória cruza o eixo x , devemos encontrar os valores de x para os quais $y = 0$:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Agora, aplicamos a fórmula de Bhaskara para resolver a equação quadrática. Para uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

temos: $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$. Substituindo esses valores na fórmula:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{4 \pm 2}{2}\end{aligned}$$

As soluções são:

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

Assim, a trajetória cruza o eixo x nos pontos: $(1, 0)$ e $(3, 0)$.

49. Qual é o ponto médio entre as rodas de uma bicicleta posicionadas nos pontos $(2, 3)$ e $(6, 7)$?
c) (4, 5)

O ponto médio M entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado pela fórmula:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

No nosso caso, as rodas da bicicleta estão posicionadas nos pontos $(2, 3)$ e $(6, 7)$. Aplicando a fórmula:

$$M = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+7}{2} \right) = (4, 5)$$

Portanto, o ponto médio entre as rodas da bicicleta é:

$$M = (4, 5)$$

50. Qual é a inclinação da reta que passa pelas rodas de uma bicicleta posicionadas em $(2, -1)$ e $(8, 5)$?

b) 1

A inclinação m de uma reta que passa por dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada pela fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para as rodas da bicicleta posicionadas nos pontos $(2, -1)$ e $(8, 5)$, obtemos:

$$m = \frac{5 - (-1)}{8 - 2} = 1$$

Portanto, a inclinação da reta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(8, 5)$ é 1.

4.3 Fato ou *Fake*

1. A bicicleta foi criada em 1490 pelo gênio renascentista Leonardo da Vinci.

Fake

A afirmação de que a bicicleta foi criada por Leonardo da Vinci em 1490 é considerada um mito. Embora ele tenha

esboçado um desenho que pode ser interpretado como um precursor da bicicleta, o conceito de bicicleta como conhecemos hoje só começou a tomar forma no final do século XVIII, com a invenção da “draisine” de Karl von Drais em 1817.

2. O alemão Karl von Drais, em 12 de junho de 1817, criou a precursora da bicicleta moderna, conhecida como Draisine.

Fato

Karl von Drais inventou a Draisine, também conhecida como “máquina de correr” ou “cavalo de pau”, em 12 de junho de 1817. Essa invenção é considerada a precursora da bicicleta moderna. A Draisine não tinha pedais, e o ciclista se impulsionava com os pés no chão. Essa invenção foi um passo importante no desenvolvimento da bicicleta que conhecemos hoje!

3. A bicicleta criada por Karl von Drais era de madeira e não tinha pedais, sendo impulsionada pelo próprio corpo do ciclista.

Fato

A Draisine, criada por Karl von Drais, era feita de madeira e não possuía pedais. O ciclista se impulsionava empurrando os pés no chão, semelhante ao movimento de correr.

4. Em 1866, surgiram as bicicletas com pedais conectadas à roda dianteira.

Fato

Em 1866, surgiram as bicicletas chamadas de “velocípede”, que tinham pedais conectados à roda dianteira. Esses modelos eram uma evolução significativa em relação à

Draisine, pois permitiam que o ciclista impulsionasse a bicicleta mais eficientemente.

5. O mecânico Eugène Meyer fabricava bicicletas de rodas altas, conhecidas por alcançarem altas velocidades.

Fato

Eugène Meyer foi um dos fabricantes de bicicletas de rodas altas, no final do século XIX. Essas bicicletas apresentavam uma roda dianteira muito maior que a traseira, o que permitia que alcançassem altas velocidades. No entanto, esse design também tornava a condução mais perigosa e instável, especialmente em terrenos irregulares.

6. Uma característica marcante na evolução das bicicletas é que os raios sempre foram de metal.

Fake

Nos primeiros modelos de bicicletas, como a Draisine, não havia raios, pois as rodas eram sólidas. Com a evolução do design das bicicletas e a introdução de rodas de aro, os raios de metal começaram a se tornar a norma devido à sua resistência e leveza.

7. Em 2010, o suíço Hans Renold recebeu a patente da corrente de rolo que era usada para transmitir força motriz às rodas dianteiras.

Fake

Hans Renold é conhecido por ter patenteado a corrente de rolo em 1880, que revolucionou a transmissão de potência em bicicletas e outras máquinas.

8. No ano de 1885, John Kemp Starley criou a primeira bicicleta com tração traseira que alcançou o sucesso, a Starley Rover.

Fato

Em 1885, John Kemp Starley criou a Starley Rover, que é considerada a primeira bicicleta com tração traseira a ter sucesso comercial. Essa bicicleta apresentava um design mais equilibrado e estável, utilizando um quadro que permitia que a roda traseira fosse acionada pelos pedais, ao contrário das bicicletas de rodas altas que eram populares na época.

9. Um veterinário escocês John Boyd Dunlop foi o primeiro inventor do pneu pneumático.

Fake

Embora ele tenha popularizado o pneu pneumático no final do século XIX, a invenção do pneu inflável foi feita anteriormente por Robert William Thomson, um engenheiro escocês, em 1845. Thomson registrou uma patente para um pneu pneumático bem antes de Dunlop, mas sua invenção não teve sucesso comercial na época.

10. Em 1884, Thomas Humber apresentou um modelo do que seria uma bicicleta com estrutura em forma de “diamante”, a Humber Satefy.

Fato

Em 1884, Thomas Humber realmente apresentou um modelo inicial de bicicleta que influenciou a estrutura em forma de “diamante”, conhecido como Humber Safety Bicycle.

11. As primeiras bicicletas chegaram ao Brasil no final do século XXI.

Fake

Na verdade, as primeiras bicicletas chegaram ao Brasil no final do século XIX e não no final do século XXI. Esse meio de transporte começou a aparecer no país por volta da década de 1885, trazido por imigrantes europeus. Inicialmente, as bicicletas eram utilizadas principalmente pela elite urbana como um símbolo de status e modernidade.

12. Em 1885, no Rio de Janeiro, o Sport Club Villa Izabel realizava corridas de bicicletas.

Fato

Em 1885, no Rio de Janeiro, o Sport Club Villa Izabel foi uma das primeiras organizações a promover corridas de bicicletas no Brasil. O clube reunia entusiastas desse novo meio de transporte e ajudou a introduzir o ciclismo como esporte no país.

13. Em 1866, surgiram as bicicletas com pedais conectadas à roda dianteira.

Fato

Em 1866, surgiram as primeiras bicicletas com pedais conectados diretamente à roda dianteira. No entanto, não há consenso sobre quem teve a ideia.

14. No ano 1896, começa a circular em São Paulo, a revista “A Bicicleta”, que se dedicava à divulgação de notícias sobre o ciclismo.

Fato

A revista “A Bicicleta” começou a circular em São Paulo em 1896, sendo uma das primeiras publicações no Brasil

dedicadas exclusivamente ao ciclismo. A revista cobria diversos aspectos do mundo das bicicletas, incluindo notícias sobre corridas, novidades tecnológicas, eventos sociais e dicas para ciclistas.

15. Em 1885, foi inaugurado o Club Athletico Fluminense que passou a realizar corridas de bicicletas com muitos inscritos.

Fake

O Club Athletico Fluminense foi fundado em 1885, no Rio de Janeiro, e se dedicava a promover atividades esportivas. Contudo, as corridas de bicicleta não eram tão populares.

4.4 Desafio implacável

1. Se os rastros das rodas de uma bicicleta são coincidentes, então a curva descrita por elas é uma
b) reta.

Se os rastros das rodas de uma bicicleta são coincidentes, a curva descrita por elas é uma reta. Isso ocorre porque, ao se mover em linha reta, as rodas deixam rastros que coincidem exatamente em suas trajetórias.

2. O rastro da roda traseira de uma bicicleta é dado pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 1$. O ponto de mínimo dessa trajetória é
a) (2, -3).

Para encontrarmos o ponto de mínimo da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 1$, podemos utilizar a fórmula para determinar as coordenadas do vértice de uma parábola, que, no caso de uma função quadrática na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

é dada por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Neste caso, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 1$ e substituindo os valores, temos:

$$x_v = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -\frac{12}{4} = -3$$

Portanto, o ponto de mínimo da trajetória é (2, -3).

3. Qual é a coordenada da roda dianteira quando a traseira atinge o vértice da parábola $f(x) = -x^2 + 5$ e a distância entre eixos é 3?

c) (3, 5).

Para encontrarmos a coordenada da roda dianteira quando a roda traseira atinge o vértice da parábola $f(x) = -x^2 + 5$, devemos determinar as coordenadas do vértice, que, no caso de uma função quadrática na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

é dada por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Neste caso, $a = -1$, $b = 0$ e $c = 5$ e substituindo os valores, temos:

$$x_v = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$y_v = -\frac{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}{4 \cdot (-1)} = \frac{-20}{-4} = 5$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(0, 5)$.

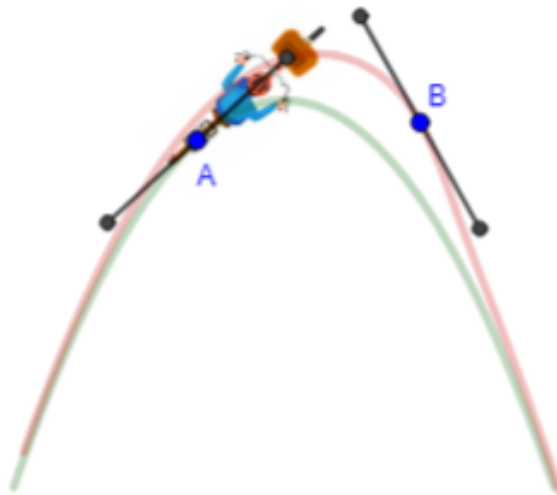
Quando a roda traseira atinge o vértice, o quadro da bicicleta é paralelo ao eixo x . Como a distância entre eixos é 3, a coordenada da roda dianteira será $(0+3, 5) = (3, 5)$.

4. Quando a roda traseira descreve o gráfico da função $f(x) = 2x - 6$, qual é a inclinação do quadro da bicicleta?
c) **2.**

A inclinação do quadro da bicicleta é igual a inclinação da reta tangente a curva da roda traseira. Logo, coincide com a inclinação da reta $f(x) = 2x - 6$, que tem coeficiente angular 2. Portanto, a inclinação do quadro da bicicleta é 2.

5. Qual a cor curva que corresponde ao rastro da roda dianteira?
b) **Vermelha.**

Como é possível ver na figura abaixo, o quadro da bicicleta é sempre tangente a curva da roda traseira.



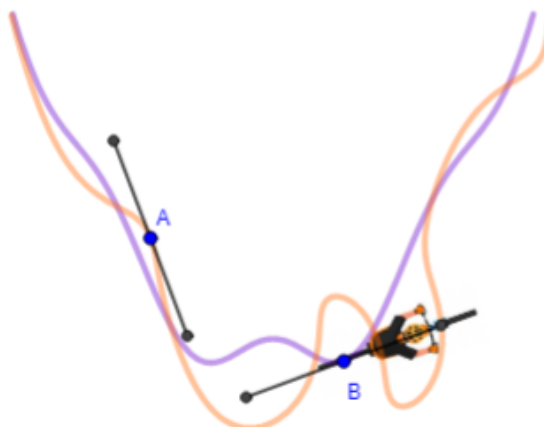
Ao mover o ponto A, nota-se que uma das extremidades do segmento que o contém permanece sempre sobre a curva

vermelha (o que não ocorre ao mover o ponto B). Portanto, o ponto A indica a posição da roda traseira e o extremo que permanece sobre a curva vermelha representa a roda dianteira. Além disso, é possível concluir que a bicicleta estava se deslocando da esquerda para direita.

6. Qual a cor da curva que corresponde ao rastro da roda traseira?

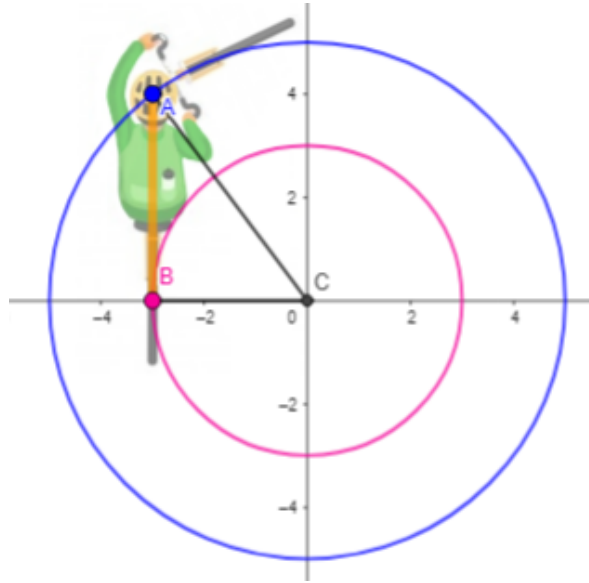
a) **Lilás.**

O quadro da bicicleta é sempre tangente a curva da roda traseira. Ao mover o ponto B, nota-se que uma das extremidades do segmento que o contém permanece sempre sobre a curva laranja (o que não ocorre ao mover o ponto A). Portanto, o ponto B indica a posição da roda traseira e o extremo que permanece sobre a curva laranja representa a roda dianteira. Além disso, é possível concluir que a bicicleta estava se deslocando da esquerda para direita.



7. Os rastros das rodas de uma bicicleta formam círculos concêntricos de raios 3 e 5. Então, a distância entre eixos é
- b) **4.**

Considere o triângulo retângulo ABC formado pelos pontos de contato das rodas e o centro dos círculos.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Logo,

$$5^2 = AB^2 + 3^2 \implies AB = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Portanto, a distância entre eixos AB é igual a 4.

8. O rastro da roda traseira de uma *bike* é dado por

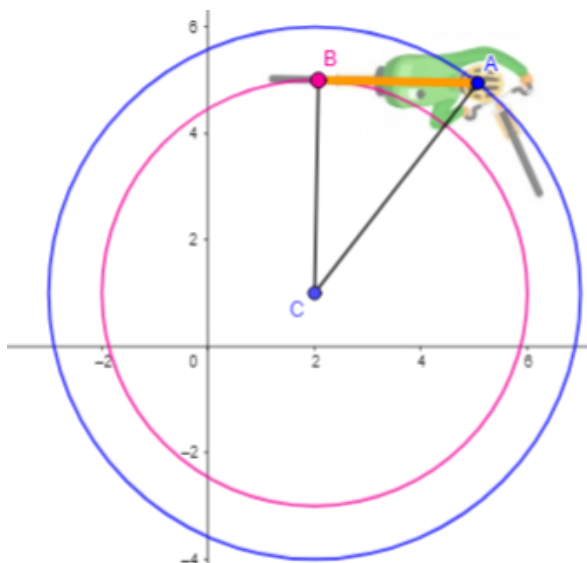
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16.$$

A distância entre eixos é 3, o rastro da roda dianteira é

c) $\boxed{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25}$

O rastro da roda traseira representa um círculo de centro $(2, 1)$ e raio igual a $\sqrt{16} = 4$. Portanto, o rastro da roda dianteira também representará um círculo de centro $(2, 1)$. Basta determinar o raio deste círculo.

O triângulo formado pelos pontos de contato das rodas e centro do círculo é retângulo e tem catetos medindo 4 (o raio da curva gerada pela roda traseira) e 3 (a distância entre eixos).



Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Logo,

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 \implies AC = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Portanto, o círculo gerado pela roda dianteira tem raio 5 e sua equação é

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2 \implies (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

9. O rastro da roda traseira de uma *bike* é dado pelo gráfico da função $f(x) = 0.1x^2 - 5$. A inclinação do quadro quando $x = 10$ é

a) 2.

Para determinar a inclinação do quadro da bicicleta, precisamos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto em que $x = 10$. A inclinação da reta tangente a uma curva é dada pela derivada da função naquele ponto.

Derivando a função $f(x) = 0.1x^2 - 5$ em relação a x , obtemos $f'(x) = 0.2x$.

Substituindo $x = 10$ na derivada $f'(x)$, temos

$$f'(10) = 0.2 \cdot 10 = 2.$$

Assim, a inclinação do quadro da bicicleta quando $x = 10$ é 2.

10. Quando a roda traseira descreve o gráfico da função

$$f(x) = 0.1x^3 + 2,$$

a inclinação do quadro da bicicleta no ponto $(-1, 1)$ é

b) 0,3.

Para determinar a inclinação do quadro da bicicleta no ponto dado, precisamos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = 0.1x^3 + 2$$

no ponto $(-1, 1)$.

Isso pode ser feito encontrando a derivada da função e avaliando-a em $x = -1$.

A derivada da função $f(x)$ em relação a x é $f'(x) = 0.3x^2$.

Substituindo $x = -1$ na derivada $f'(x)$, obtemos:

$$f'(-1) = 0.3 \cdot (-1)^2 = 0.3$$

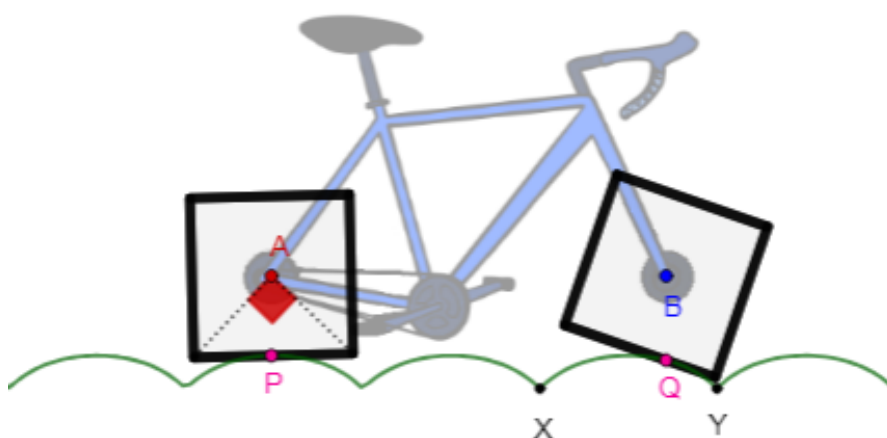
Portanto, a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(-1, 1)$ é 0.3, o que significa que a inclinação do quadro da bicicleta nesse ponto também é 0.3.

11. Qual a medida do ângulo que uma roda quadrada deve girar para percorrer um arco de catenária?

b) 90°.

Uma roda quadrada se desloca suavemente quando sua estrada é composta por arcos de catenária invertidos. Cada arco é projetado para acomodar um lado da roda. Ao completar um giro de 360° , cada lado toca a estrada uma vez. Assim, cada lado corresponde a um ângulo de

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$



12. As rodas de uma *bike* têm formato de pentágono regular com lados de 43 cm. A distância percorrida pela roda ao girar 360° é
c) **215 cm.**

Uma roda com formato de pentágono regular se desloca suavemente quando sua estrada é composta por arcos de catenária invertidos e ao completar um giro de 360° , cada lado toca a estrada uma vez. Portanto, a distância percorrida corresponde ao perímetro do pentágono, isto é, $5 \cdot 43 \text{ cm} = 215 \text{ cm}$.

13. A medida do ângulo formado entre dois arcos de catenária de uma pista para bicicletas com rodas hexagonais é
b) **120° .**

Para determinar a medida do ângulo formado entre dois arcos de catenária em uma pista para bicicletas com rodas hexagonais, precisamos levar em consideração a geometria do polígono e como ele interage com a pista.

Um hexágono regular possui 6 lados de igual comprimento e 6 ângulos internos congruentes. A soma dos ângulos internos S_i de um polígono com n lados é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Para um hexágono $n = 6$:

$$S_i = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ.$$

Como todos os ângulos são iguais, cada ângulo interno mede $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.

Quando uma roda hexagonal percorre uma estrada construída por arcos de catenária, cada lado do hexágono se ajusta a um arco de catenária. O ponto de transição entre dois arcos ocorre nos vértices do hexágono, e o ângulo entre dois arcos de catenária consecutivos é igual ao ângulo interno do hexágono, que mede 120° .

14. Ao aumentar o número de lados de um polígono regular que representa a roda de uma *bike*, a pista aproxima-se de uma
b) reta.

Se o número de lados de um polígono regular que representa a roda de uma bicicleta aumenta indefinidamente, a pista ideal para essa roda se aproxima de uma reta.

15. Use o GeoGebra para visualizar os pontos na pista e responda: partindo de X , quanto a roda octogonal deve girar até tocar o ponto Y ?
c) 270° .

A estrada projetada para rodas octogonais é composta por uma sequência de arcos de catenária invertidos, de forma que cada lado da roda se encaixa perfeitamente em um desses arcos. Como o octógono possui 8 lados iguais, cada lado corresponde a um ângulo de $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

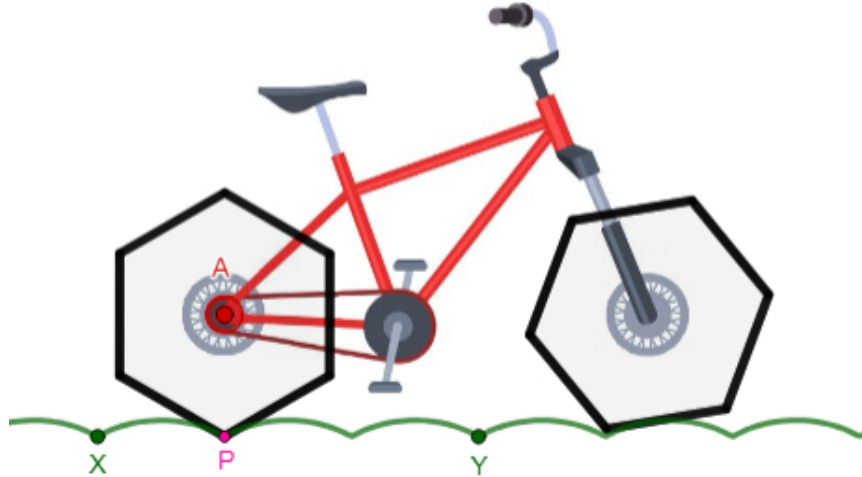


Assim, ao se deslocar do ponto X ao Y , a roda octogonal percorre 6 arcos de catenária consecutivos. Nesse percurso, a roda gira um ângulo total de $6 \cdot 45^\circ = 270^\circ$.

16. Use o GeoGebra para ver os pontos na pista e responda: qual a distância percorrida por uma roda hexagonal de 40 cm de X até Y ?
a) **120 cm.**

Ao se deslocar do ponto X ao Y , a roda hexagonal passará por 3 arcos de catenária. Como cada lado do polígono

se encaixa perfeitamente em cada arco, a distância total percorrida corresponde a $3 \cdot 40 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$.



17. Em uma *bike* de rodas poligonais o segmento que une o ponto de contato mais alto da pista ao centro da roda corresponde ao
b) apótema.

O apótema de um polígono regular é o segmento de reta que conecta o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados, formando um ângulo reto com esse lado. Ele representa a distância mínima entre o centro do polígono e um dos lados.

18. Qual a medida do ângulo que uma roda com formato de decágono regular deve girar para percorrer quatro arcos de catenária da pista?
c) 144° .

Para calcular a medida do ângulo que uma roda com formato de decágono regular deve girar para percorrer quatro arcos de catenária, precisamos entender como a geometria da roda interage com a pista e calcular o ângulo de rotação associado.

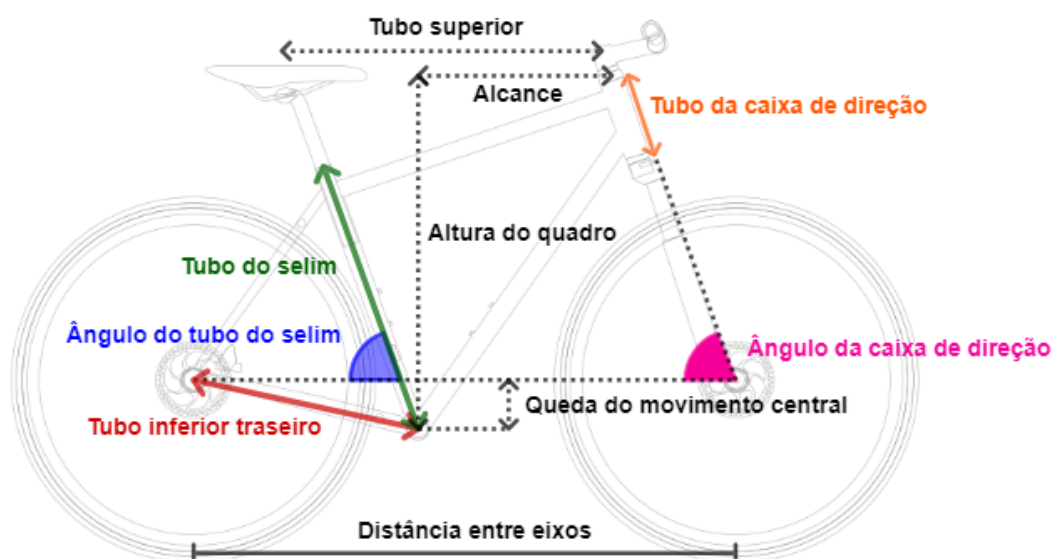
Um decágono regular possui 10 lados iguais. Isso significa que a medida de ângulo central da roda correspondente a um lado mede $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Cada arco de catenária da pista corresponde a um lado do decágono, então, ao percorrer quatro arcos, a roda gira por quatro lados. Assim, o ângulo total de rotação será $4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$.



5. Glossário

5.1 Termos associados às bicicletas



- **Alcance (*reach*)**: é a distância horizontal medida entre o

eixo central do movimento central e o topo da caixa de direção.

- **Altura do quadro:** é a distância vertical do centro do movimento central à linha do centro da caixa de direção.
- **Ângulo da caixa de direção:** é o ângulo formado entre o tubo da caixa de direção e uma linha horizontal paralela ao solo.
- **Ângulo do tubo do selim:** é o ângulo formado entre o tubo do selim e uma linha horizontal paralela ao solo.
- **Caixa de direção:** é o conjunto de componentes responsável pela rotação suave do guidão e do garfo, permitindo que o ciclista controle a direção da bicicleta.
- **Canote do selim:** é a peça tubular que conecta o selim ao quadro da bicicleta, inserida no tubo do selim.
- **Distância entre eixos:** é a distância medida entre os centros das rodas dianteira e traseira.
- **Garfo:** é o componente que conecta a roda dianteira ao quadro e permite o controle da direção da bicicleta. O garfo é composto por duas hastes que prendem o eixo da roda dianteira e um tubo central que se encaixa na caixa de direção.
- **Guidão:** é a peça que permite ao ciclista controlar a direção da roda dianteira e, conseqüentemente, da bicicleta.

- **Movimento central:** é o componente da bicicleta que conecta o quadro ao pedivela, permitindo que os pedais girem ao serem acionados pelo ciclista.
- **Pedivela:** é a peça da bicicleta que conecta os pedais ao movimento central.
- **Queda do movimento central:** é a distância vertical entre o eixo das rodas e o eixo do movimento central.
- **Quadro:** estrutura principal da bicicleta, formada por tubos conectados, que suporta o peso do ciclista e conecta os componentes, como rodas, garfo, e pedais.
- **Selim:** Assento da bicicleta.
- **Tubo da caixa de direção:** é o tubo frontal da caixa de direção, onde se conecta o garfo da bicicleta.
- **Tubo do selim:** é o tubo que conecta o canote do selim ao eixo do movimento central.
- **Tubo inferior traseiro:** é o tubo que conecta o eixo do movimento central à roda traseira.
- **Tubo superior:** é a medida de comprimento efetivo do tubo superior do quadro e corresponde a distância horizontal do canote do selim ao centro da caixa de direção.

5.2 Termos matemáticos

- **Ângulo agudo:** é um ângulo que tem medida de abertura entre 0° e 90° .

- **Ângulo externo de um polígono:** é o ângulo formado entre um lado de um polígono e o prolongamento do lado adjacente.
- **Ângulo interno de um polígono:** é o ângulo formado entre dois lados adjacentes de um polígono.
- **Ângulo obtuso:** é um ângulo que tem medida de abertura entre 90° e 180° .
- **Ângulo reto:** é um ângulo que mede exatamente 90° .
- **Ângulos complementares:** são dois ângulos que, quando somados, resultam em 90° .
- **Ângulos suplementares:** são dois ângulos que, quando somados, resultam em 180° .
- **Apótema de um polígono regular:** é o segmento com extremidades no centro do polígono e no ponto médio de um dos seus lados.
- **Área:** refere-se à medida da superfície de uma figura e é expressa em unidades quadradas.
- **Catenária:** é o nome da curva que se forma quando um fio ou corrente flexível é suspenso unicamente por seus dois extremos, sendo submetido à força da gravidade.
- **Círculos concêntricos:** são dois ou mais círculos que compartilham o mesmo centro.
- **Coefficiente angular:** é um número que representa a incli-

nação de uma reta em relação ao eixo horizontal em um sistema de coordenadas. Em uma função linear da forma $y = mx + b$, m é o coeficiente angular.

- **Curvas coincidentes:** são duas ou mais curvas que ocupam exatamente o mesmo espaço em um gráfico, de modo que todos os pontos de uma curva também são pontos da outra.
- **Diâmetro:** é o comprimento do segmento de reta une dois pontos da circunferência passando pelo seu centro.
- **Grandezas diretamente proporcionais:** duas grandezas são diretamente proporcionais quando a variação de uma delas provoca a variação da outra na mesma proporção. Matematicamente, essa relação pode ser expressa como $y = kx$, onde k é a constante de proporcionalidade.
- **Grandezas inversamente proporcionais:** duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma grandeza é diretamente proporcional ao inverso da outra. Essa relação pode ser expressa como $y = \frac{k}{x}$, onde k é uma constante.
- **Propriedade fundamental das proporções:** é uma propriedade que estabelece que, em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Em termos algébricos, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a \cdot d = b \cdot c$.
- **Regra de três:** é um método utilizado para resolver problemas de proporcionalidade. A regra de três pode ser direta (quando as grandezas são diretamente proporcionais) ou inversa (quando são inversamente proporcionais).

- **Raio:** é o comprimento do segmento de reta que une um ponto qualquer da circunferência ao seu centro.
- **Reta tangente:** É uma linha reta que toca uma curva em um único ponto, sem cruzá-la nesse ponto. A tangente é utilizada em cálculo para descrever a inclinação da curva naquele ponto específico, representando a derivada da função no ponto de tangência.